

TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE	i
ABSTRACT	ii
REMERCIEMENTS.....	iii
TABLE DES MATIÈRES.....	iv
LISTE DES TABLEAUX.....	vii
LISTE DES FIGURES.....	viii
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES.....	xii
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 PRÉSENTATION GÉNÉRALE	5
1.1 Présentation générale de l'avion F/A – 18.....	5
1.2 La modélisation structurelle et aérodynamique de l'avion F/A-18 en STARS.....	6
1.3 L'équation de mouvement de l'avion.....	8
1.4 Les séries de données fournies par les chercheurs de la NASA DFRC.....	9
1.4.1 La première série de données fournis par la NASA DFRC.....	10
1.4.2 La deuxième série de données fournies par la NASA DFRC.....	11
1.5 Premier schéma de simulation avec des coefficients de stabilité et de commande fournis dans le système lié au vent.....	13
CHAPITRE 2 DESCRIPTION DES BLOCS DU PREMIER SCHÉMA DE SIMULATION.....	18
2.1 Description du Bloc 1.....	18
2.2 Description du Bloc 2.....	21
2.3 Description du Bloc 3.....	22
2.4 Description du Bloc 4.....	27
2.4.1 Calcul des forces et des moments (Blocs 4.1 et 4.2).....	29
2.4.1.1 Le calcul des forces dans le système d'axes lié à l'avion a (Bloc 4.1).....	30
2.4.1.2 Le calcul des moments dans le système d'axes lié à l'avion a (Bloc 4.2)	32
2.4.2 Calcul de la matrice des cosinus directeurs DCM (Bloc 4.3).....	36
2.4.3 Calcul des vitesses et des positions dans le système des axes de coordonnées inertiel (Bloc 4.4)).....	37
2.4.4 Calcul des dérivées des angles d'Euler (Bloc 4.5).....	39

2.5	Description du Bloc 5.....	39
2.5.1	Calculs de la variation de vitesse vraie à l'équilibre ΔV	40
2.5.2	Calculs de la variation de l'angle d'attaque $\Delta\alpha$ à partir de l'équilibre.....	41
2.5.3	Calculs de la variation de l'angle de dérapage $\Delta\beta$ à partir de l'équilibre.....	43
2.5.4	L'obtention du système matriciel d'équations.....	44
2.6	Description du Bloc 6.....	46
2.7	Description du Bloc 7.....	46
2.8	Description du Bloc 8.....	47
2.9	Description du Bloc 9.....	48
CHAPITRE 3	INTRODUCTION DES VARIABLES D'ÉTATS DANS LA BOUCLE DE RETOUR	50
3.1	Calcul des matrices C et D qui caractérisent le système linéaire au point de fonctionnement.....	50
3.1.1	Réarrangement de l'ordre des coefficients des dérivées de stabilité et de commande dans les données initiales.....	50
3.1.2	Calcul de la matrice C qui caractérise le système linéaire au point de fonctionnement.....	56
3.1.3	Calcul de la matrice D qui caractérise le système linéaire au point de fonctionnement.....	62
3.2	Introduction des matrices C et D dans le système d'équation matricielle des forces et moments dans le but d'obtenir dans la boucle de retour les vecteurs η et $\dot{\eta}$ nécessaires aux calculs des forces aérodynamiques Q	65
3.2.1	Linéarisation par la théorie des petites perturbations des vitesses linéaires et du système de coordonnées lié à la terre i pour l'obtention des vitesses angulaires dans le système des coordonnées lié à l'avion.....	67
3.2.2	Linéarisation par la théorie des petites perturbations des vitesses angulaires et de leurs dérivées du système de coordonnées lié à la terre i pour l'obtention des vitesses angulaires dans le système des coordonnées lié à l'avion.....	71
3.3	Calcul des forces et des moments dans le système de coordonnées lié à l'avion.....	73
CHAPITRE 4	CALCUL DES FORCES AÉRODYNAMIQUES Q	77
4.1	Linéarisation de la conversion des forces et moments du système de coordonnées lié à l'avion a au système lié à la terre i en utilisant la théorie des petites perturbations.....	77
4.2	Calcul des forces aérodynamiques.....	84

CHAPITRE 5	LA LINÉARISATION NUMÉRIQUE ET L'INTERPOLATION ENTRE LES CONDITIONS DE VOL.....	108
5.1	La linéarisation numérique.....	108
5.2	Interpolation entre les conditions de vol.....	116
CHAPITRE 6	RÉSULTATS.....	119
6.1	Introduction.....	119
6.2	Simulation pour un nombre de Mach $M = 0.2$, altitude H égale à 10.000π et l'angle d'attaque de l'avion α égal à 10°	121
6.2.1	Le mouvement longitudinal.....	121
6.2.2	Le mouvement latéral.....	124
6.3	Simulation pour un nombre de Mach $M = 0.38$, altitude H égale à 17.000π et l'angle d'attaque de l'avion α égal à 19°	126
6.3.1	Le mouvement longitudinal.....	126
6.3.2	Le mouvement latéral.....	128
6.4	Simulation pour un nombre de Mach $M = 1.1$, altitude H égale à 25.000π et l'angle d'attaque de l'avion α égal à 2.3563°	130
6.4.1	Le mouvement longitudinal.....	130
6.4.2	Le mouvement latéral.....	133
6.5	Discussion et interprétation des résultats.....	135
CONCLUSION.....		136
RECOMMANDATIONS.....		138
ANNEXE 1	Dynamique aéroélastique.....	139
BIBLIOGRAPHIE.....		145

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I	La forme générale de la matrice de forces aérodynamiques Q 10
Tableau II	Les forces aérodynamiques réelles Q^R 100
Tableau III	Les forces aérodynamiques imaginaires Q^I 101
Tableau IV	Comparaison des forces aérodynamiques obtenues à celles fournies par la NASA 104
Tableau V	La partie réelle de la matrice Q_{rr} obtenue en utilisant la linéarisation analytique..... 114
Tableau VI	La partie réelle de la matrice Q_{rr} obtenue en utilisant la linéarisation numérique 114
Tableau VII	La partie imaginaire de la matrice Q_{rr} obtenue en utilisant la linéarisation analytique 115
Tableau VIII	La partie imaginaire de la matrice Q_{rr} obtenue en utilisant la linéarisation numérique 115
Tableau IX	Liste des conditions de vol initiales données en fonction du nombre de Mach M , Altitude H et l'angle d'attaque α 120

LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 1	Triangle d'interaction des disciplines.....	1
Figure 2	Le modèle de l'avion F/A - 18.....	5
Figure 3	Le modèle de simulation de l'avion F/A - 18 et de sa trajectoire.....	6
Figure 4	Essais au sol de l'avion F/A – 18 chez NASA DFRC	7
Figure 5	Premier schéma de simulation avec des coefficients de stabilité et de commande fournis dans le système lié au vent.....	14
Figure 6	Simplification du schéma de simulation présenté dans la Figure 5.....	15
Figure 7	Simplification du schéma de simulation présenté dans la Figure 6.....	15
Figure 8	L'avion dans les systèmes de coordonnées liés au vent v et à l'avion a ...	23
Figure 9	Détails du bloc '6DoF'	28
Figure 10	Le système inertiel i et le système d'axes lié à l'avion a	29
Figure 11	Le bloc 4.1 pour l'expression des équations (2.32).....	32
Figure 12	Le bloc 4.2 pour l'expression des équations (2.46)	36
Figure 13	Présentation du bloc 4.3 pour le calcul de la matrice DCM	37
Figure 14	Présentation du Bloc 4.4 pour les calculs des vitesses et des positions dans le système d'axes inertiel.....	38
Figure 15	Présentation du bloc 4.5 pour les calculs des dérivées des angles d'Euler	39
Figure 16	Type d'entrée sur les surfaces de commande utilisée (doublet) lors de la simulation de l'avion F/A - 18	49
Figure 17	Schéma de simulation avec les 12 états du système sur la boucle de retour.....	56
Figure 18	Schéma bloc de la linéarisation des vitesses linéaires et des angles d'Euler du système inertiel au système lié à l'avion.....	67
Figure 19	Schéma bloc de la linéarisation des vitesses angulaires du système inertiel i au système lié à l'avion a	71
Figure 20	Schéma de la Figure 17 avec les variations des vecteurs d'état $\Delta\eta$ et $\Delta\dot{\eta}$ dans la boucle de retour.....	75

Figure 21	Schéma bloc de la linéarisation des forces et des angles d'Euler du système lié à l'avion au système inertiel.....	77
Figure 22	Modification du schéma de simulation de la Figure 20 : Calculs des forces et des moments dans le système lié à l'avion à partir du système inertiel.....	83
Figure 23	Schéma de simulation final en Matlab/Simulink qui prend en considération le modèle aéroservoélastique de l'avion	102
Figure 24	Schéma de simulation qui prend en considération le modèle aéroservoélastique de l'avion	103
Figure 25	Schéma de simulation de l'avion avec des dérivées de stabilité et contrôle dans le système de coordonnées liées au vent.....	109
Figure 26	Schéma de simulation équivalent au schéma de la Figure 25.....	110
Figure 27	Schéma équivalent au schéma de la Figure 26.....	110
Figure 28	Schéma de simulation avec les forces et les moments calculés dans le système de coordonnées inertiel.....	111
Figure 29	Variation de la force aérodynamique X pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^{\circ}$	121
Figure 30	Variation de la force aérodynamique Z pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^{\circ}$	122
Figure 31	Variation du moment M pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^{\circ}$	122
Figure 32	Variation de l'angle α pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^{\circ}$	123
Figure 33	Variation de la vitesse vraie V pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^{\circ}$	123
Figure 34	Variation de la force aérodynamique Y pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^{\circ}$	124
Figure 35	Variation du moment L pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^{\circ}$	124
Figure 36	Variation du moment N pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^{\circ}$	125
Figure 37	Variation de l'angle β pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^{\circ}$	125

Figure 38	Variation de la force aérodynamique X pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^\circ$126
Figure 39	Variation de la force aérodynamique Z pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^\circ$127
Figure 40	Variation du moment M pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^\circ$127
Figure 41	Variation de l'angle α pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^\circ$ 128
Figure 42	Variation de la force aérodynamique Y pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^\circ$ 128
Figure 43	Variation du moment L pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^\circ$129
Figure 44	Variation du moment N pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^\circ$129
Figure 45	Variation de l'angle β pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^\circ$130
Figure 46	Variation de la force aérodynamique X pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^\circ$130
Figure 47	Variation de la force aérodynamique Z pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^\circ$131
Figure 48	Variation du moment M pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^\circ$ 131
Figure 49	Variation de l'angle α pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^\circ$ 132
Figure 50	Variation de l'altitude H pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^\circ$ 132
Figure 51	Variation de la force aérodynamique Y pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^\circ$133
Figure 52	Variation du moment L pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^\circ$ 133
Figure 53	Variation du moment N pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^\circ$ 134

Figure 54	Variation de l'angle β pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^\circ$	134
-----------	---	-----

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES

<i>ail</i>	aileron
C_D	coefficient de traînée
C_L	coefficient de moment de roulis (autour de l'axe des x)
C_{Lift}	coefficient de portance
C_M	coefficient de moment de tangage (autour de l'axe des y)
C_N	coefficient de moment de lacet (autour de l'axe des z)
C_x	coefficient de la force aérodynamique sur l'axe des x dans le système de coordonnées lié à l'avion
C_y	coefficient de la force aérodynamique sur l'axe des y dans le système de coordonnées lié à l'avion
C_{Y_v}	coefficient de la force aérodynamique sur l'axe des y dans le système de coordonnées lié au vent
C_z	coefficient de la force aérodynamique sur l'axe des z dans le système de coordonnées lié à l'avion
\bar{c}	corde moyenne aérodynamique
g_0	constante gravitationnelle au niveau de la mer (32.17 ft/s ²)
H	altitude
HT	empennage horizontal
L	moment de roulis
LEF	volets de bord d'attaque

M	moment de tangage
m	masse de l'avion
N	moment de lacet
p	vitesse angulaire sur l'axe des x
q	vitesse angulaire sur l'axe des y
RUD	gouverne de direction
r	vitesse angulaire sur l'axe des z
S	surface de référence de l'avion
TEF	volets de bord de fuite
V	vitesse vraie de l'avion
α	angle d'attaque
β	angle de dérapage
δ	déflexion de l'angle d'une surface de commande
ϕ	angle de rotation autour de l'axe des x
ψ	angle de rotation autour de l'axe des z
ρ	densité de l'air
θ	angle de rotation autour de l'axe des y
M	matrice de masse
D	matrice d'amortissement

K	matrice de rigidité
Q	matrice des forces aérodynamiques
k	fréquence réduite
η	vecteur de coordonnées généralisées
Q_R	partie réelle des forces aérodynamiques
Q_I	partie imaginaire des forces aérodynamiques
q_{dyn}	pression dynamique
ω	fréquence
b	envergure de l'aile
S	surface de l'aile de l'avion
p_s	pression statique
R	constante de gaz

INTRODUCTION

L'aéroservoélasticité (ASE) ou la commande active de stabilité aéroélastique a été un des domaines de la recherche aéronautique les plus actifs pendant les vingt dernières années. L'aéroservoélasticité est une technologie multidisciplinaire issue de l'interaction entre la structure flexible de l'avion, les forces aérodynamiques non-stationnaires qui résultent de mouvement de l'avion dans l'air et les systèmes de commande de vol.

Nous pouvons illustrer l'interaction de ces disciplines par la Figure 1. Le battement classique, celui qui n'inclut pas l'interaction avec la dynamique du système de commande, est représenté par le côté gauche de triangle d'interaction (*Aéroélasticité*).

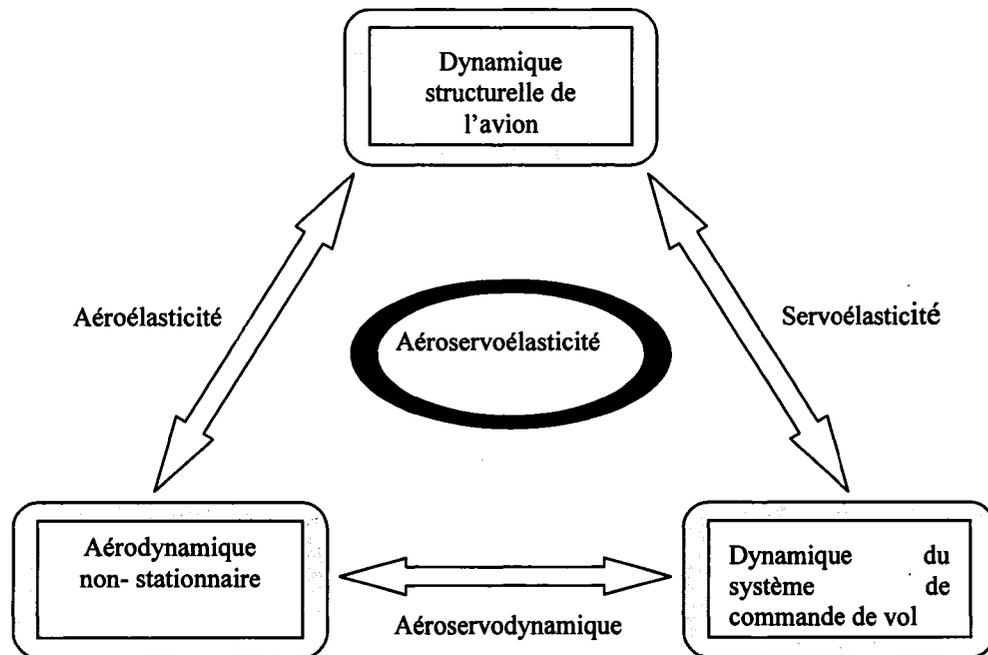


Figure 1 Triangle d'interaction des disciplines

Le côté horizontal (*Aéroservodynamique*) représente la synthèse du système de commande de vol pour un avion rigide, soit la dynamique du vol. Le côté droit de triangle d'interaction représente les influences de système de commande sur un avion

flexible modélisé par des éléments finis au sol donc dans l'absence des forces aérodynamiques (*Servoélasticité*).

Historiquement, la conception des avions a subi d'importantes modifications suite à des progrès significatifs dans l'efficacité structurale des avions, notamment dans le rapport de la résistance des nouveaux matériaux (composites) à leur poids, et dans l'utilisation des systèmes de commande de vol avec une réponse rapide. Les concepteurs d'avion, en essayant de réduire le poids structurel de chaque nouvel avion, ont augmenté la flexibilité de la structure.

D'un autre côté, les ingénieurs de la commande de vol ont développé des nouvelles fonctionnalités pour le système de commande automatique de vol qui ont amélioré la performance de l'avion, la stabilité, et les qualités du vol. Cependant, ces efforts ont été généralement indépendants les uns des autres – jusqu'à ce que les premières analyses aéro-servoélastiques aient été effectuées.

Les techniques classiques d'analyse du battement sont basées sur des modèles mathématiques détaillés de la répartition de la masse de l'avion, de la rigidité, et de la géométrie. Les caractéristiques structurelles dynamiques d'un avion sont représentées par les matrices de masse généralisées et les matrices de rigidité associées aux coordonnées généralisées (modes de vibration), déduites des analyses de vibrations libres.

Dans l'hypothèse de mouvements harmoniques simples, les forces aérodynamiques non-stationnaires dépendent de la fréquence des oscillations, soit des modes de vibration. Elles sont calculées pour une gamme de fréquences couvrant tous les modes de vibration et assemblées dans les matrices des forces aérodynamiques généralisées. Les forces aérodynamiques non-stationnaires, dépendantes de la vitesse et de l'altitude, ont les effets d'altérer les modes de vibration avec les changements de vitesses et d'altitudes. Les effets des forces aérodynamiques non-stationnaires sur la structure de l'avion varient

avec les vitesses et les altitudes – et peuvent rendre un des modes de vibration instable et entraîner la déstabilisation de l'avion. Il faut alors investiguer toute l'enveloppe de vol d'un avion, où l'enveloppe est paramétrée par la vitesse et l'altitude, pour s'assurer de la stabilité de l'avion en tout temps.

De plus, les phénomènes de battements peuvent être déclenchés lors du couplage du système de commande de vol avec les forces aérodynamiques et la flexibilité de l'avion. On s'aperçoit très vite que les analyses aéroservoélastiques peuvent s'avérer être des problèmes très complexes où la détermination de la stabilité de l'avion n'est pas toujours aisée.

Plusieurs logiciels de calcul par les éléments finis ont été développés dans le but d'analyser les interactions aéroservoélastiques entre la structure flexible de l'avion et les systèmes de commande de l'avion. Ces logiciels sont ISAC [1], ADAM [2], FAMUSS [3], ASTROS [4] à [6], ZAERO [7] et STARS [8]. Dans ces logiciels de calculs aéroservoélastiques, des méthodes d'approximation des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace ont été implémentées qui ne se trouvent pas dans le logiciel de calcul aéroélastique appelé MSC/NASTRAN [9].

La théorie des forces aérodynamiques pour les modes rigides et de commande est implantée dans des logiciels de commande tels que Matrix_x ou Matlab. La théorie des forces aérodynamiques est implantée dans des logiciels d'éléments finis tels que Nastran ou les logiciels de calculs aéroservoélastiques ci haut mentionnés. Dans ce mémoire, nous allons montrer la formulation pour le calcul des forces aérodynamiques communes pour l'avion rigide et l'avion flexible.

L'aéroservoélasticité est étudiée pour les avions à commande électrique. Le logiciel de modélisation par des éléments finis d'un avion flexible utilisé dans ce mémoire est STARS pendant que le logiciel de modélisation des forces aérodynamiques d'un avion

rigide et de ses commandes est Matlab. L'avion utilisé est le F/A-18 dont nous utilisons les données fournies par les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research Center.

L'algorithme présenté dans les chapitres suivants peut être synthétisé comme suit :

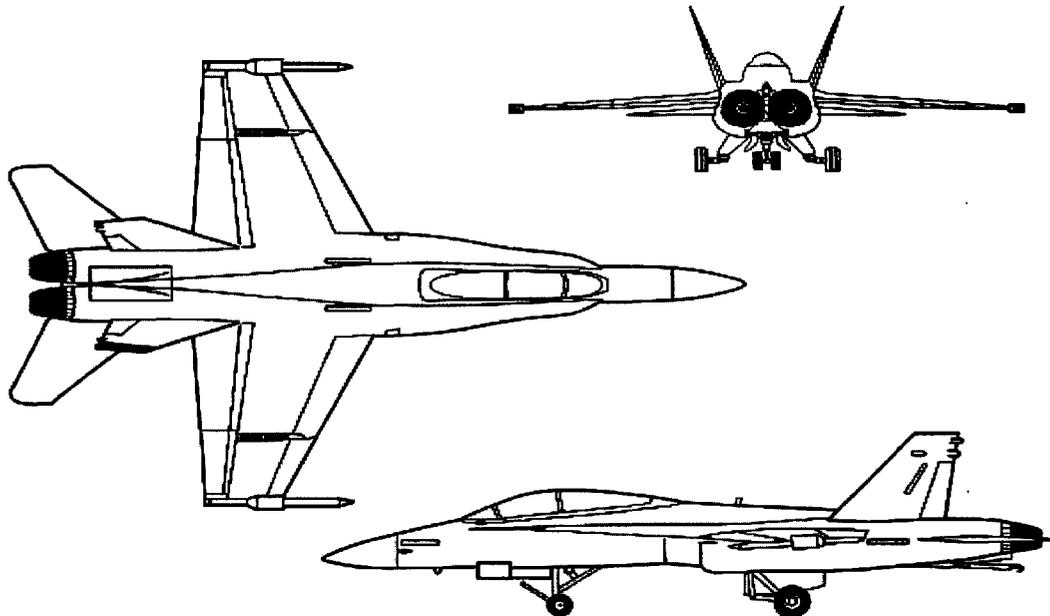
1. Nous créons dans un premier temps un programme de simulation à l'aide du logiciel Matlab/Simulink dans lequel nous utilisons les dérivées de stabilité et de commande de l'avion dans le système de coordonnées lié au vent afin de vérifier la stabilité de l'avion. Ce schéma de simulation est présenté dans le chapitre 1.
2. Nous allons développer une deuxième formulation dans le chapitre 3 à partir du premier schéma simulation qui exige d'obtenir dans la boucle de retour les vecteurs des coordonnées généralisées et leurs dérivées dans le temps nécessaires pour calculer les forces aérodynamiques Q .
3. Nous allons calculer dans le chapitre 4 les matrices des forces aérodynamiques des modes rigides avec les modes rigides Q_{tr} et des modes rigides avec les modes de commande Q_{rc} .
4. Nous présentons dans le chapitre 5 les détails de la linéarisation du schéma de simulation de l'avion avec des dérivées de stabilité et contrôle dans le système de coordonnées liées au vent présenté dans le chapitre 1 en utilisant la commande « dlinmod » de Matlab. Nous allons aussi présenter la théorie de l'interpolation entre les conditions de vol.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

1.1 Présentation générale de l'avion F/A - 18

Le modèle de l'avion F/A-18 est présenté dans la Figure 2 trouvée sur les pages Internet des laboratoires de la NASA DFRC (Dryden Flight Research Center). Dans la Figure 3 nous présentons le modèle de l'avion, que nous avons conçu, pour visualiser son comportement à l'aide des simulations en Matlab. Dans cette figure la trajectoire de l'avion et est mise en évidence par la ligne pointillée.



Dryden Flight Research Center February 1998
F-18 SRA (Systems Research Aircraft) 3-view



Figure 2 Le modèle de l'avion F/A - 18



Figure 3 Le modèle de simulation de l'avion F/A - 18 et de sa trajectoire

Des détails sur les modélisations structurelles et aérodynamiques de l'avion F/A-18 en utilisant le logiciel STARS chez NASA DFRC seront présentés dans la Section suivante.

1.2 La modélisation structurelle et aérodynamique de l'avion F/A-18 en STARS

La structure de l'avion F/A - 18 a été modélisée par les théories des éléments finis à l'aide du logiciel STARS chez NASA DFRC, et suite à cette modélisation, les caractéristiques modales exprimées sous forme des fréquences et des modes de vibrations de cet avion ont été calculées.

Dans l'absence des forces aérodynamiques, donc au sol, nous avons pour l'avion F/A-18 un total de 44 modes de vibration avec les fréquences leur correspondantes, se divisent selon les trois catégories suivantes:

- 6 modes rigides (3 symétriques et 3 anti-symétriques),
- 28 modes élastiques (14 symétriques et 14 anti-symétriques) et
- 10 modes de commande (5 symétriques et 5 anti-symétriques)

Les positions des accéléromètres et des autres capteurs pendant les essais au sol de l'avion F/A-18 chez NASA DFRC sont montrées dans la Figure 4.

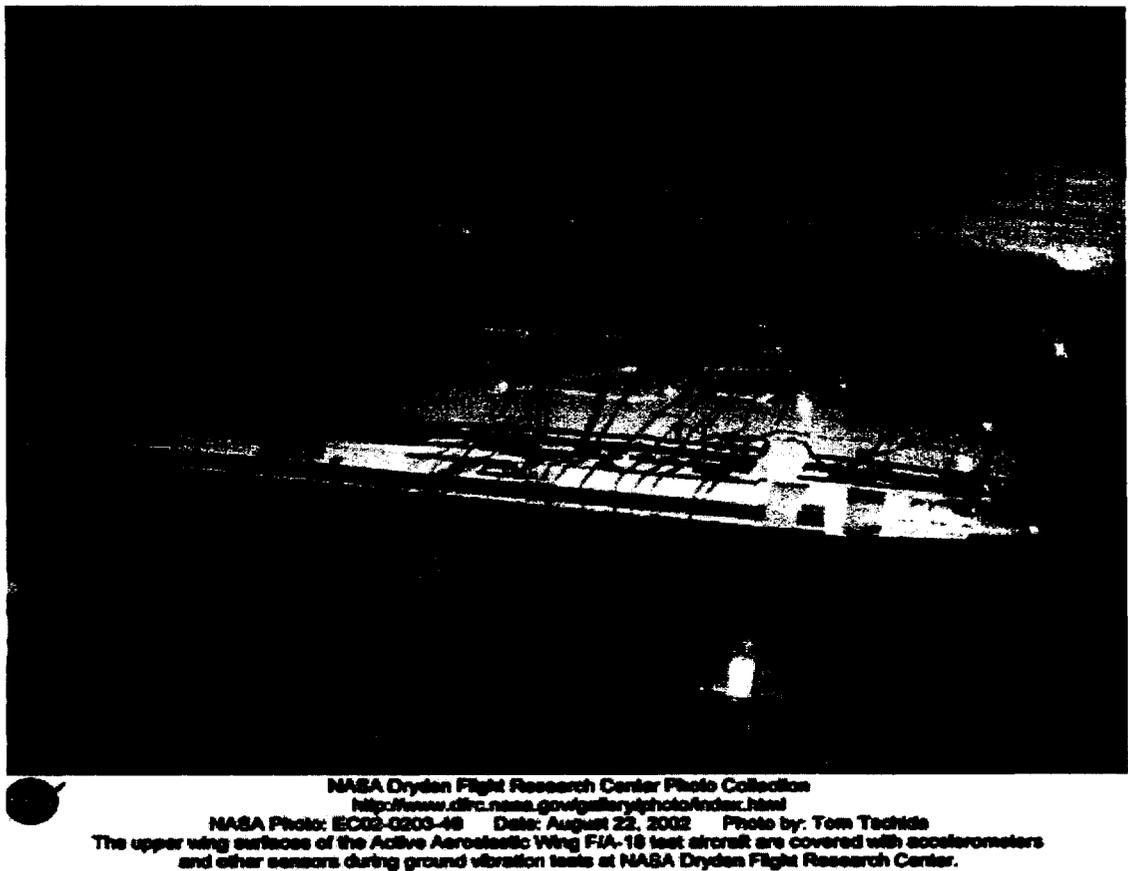


Figure 4 Essais au sol de l'avion F/A – 18 chez NASA DFRC

La méthode des doublets (en anglais : Doublet Lattice Method - DLM) et la méthode des pressions constantes (en anglais : Constant Pressure Method - CPM) sont utilisées en STARS (Structural Analysis Routines) pour calculer les forces aérodynamiques non-stationnaires pour plusieurs nombres de *Mach* et fréquences réduites *k* pour un avion en vol. Plus précisément, la méthode DLM est utilisée pour les calculs des forces aérodynamiques en régime subsonique et la méthode CPM est utilisée pour ces types de calculs en régime supersonique.

Les laboratoires de la NASA DFRC nous a fourni pour nos études les matrices structurelles M, C, K et la matrice des forces aérodynamiques en fonction des plages des fréquences réduites et du nombre de Mach dénotée par $Q(k, Mach)$.

1.3 L'équation de mouvement de l'avion

Nous considérons l'équation de mouvement de la structure flexible de l'avion sous l'influence des forces aérodynamiques (voir Annexe 1):

$$M \ddot{\eta} + D \dot{\eta} + K \eta + q_{dyn} Q(k, Mach) \eta = 0 \quad (1.1)$$

où M est la matrice de masse, D est la matrice d'amortissement, K est la matrice de rigidité et $Q(k, Mach)$ est la matrice des forces aérodynamiques en fonction d'un ensemble de 20 fréquences réduites *k* et de 6 nombres de *Mach*.

Cette équation est d'ordre 2 en fonction du vecteur des coordonnées généralisées η qui est décomposé en trois parties correspondantes respectivement aux modes élastiques η_e , modes rigides η_r et aux modes de rotation des surfaces de commande η_c . Le dernier terme de l'équation (1.1) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$q_{dyn} Q(k, Mach) \eta = q_{dyn} (Q_R + \bar{j} Q_I) \eta = q_{dyn} \left[Q_R \eta + \frac{\bar{j} \omega \eta}{\omega} Q_I \right] \quad (1.2)$$

où Q_R sont les parties réelles et Q_I sont les parties imaginaires des forces aérodynamiques $Q(k, Mach)$. La fréquence réduite est définie comme suit :

$$k = \frac{\omega b}{V} = \frac{\omega \bar{c}}{2V} \quad (1.3)$$

où ω est la fréquence, b est l'envergure de l'aile, \bar{c} est la corde moyenne et V est la vitesse vraie de l'avion.

Nous remplaçons ω donnée par l'équation (1.3) dans l'équation (1.2) et nous obtenons, en tenant compte que les coordonnées généralisées η sont des fonctions oscillatoires dépendantes de ω :

$$q_{dyn} Q(k, Mach) \eta = q_{dyn} \left[Q_R \eta + \frac{\bar{c}}{2Vk} Q_I \dot{\eta} \right] \quad (1.4)$$

d'où, en remplaçant l'équation (1.4) dans le dernier terme de l'équation (1.1), nous obtenons :

$$M\ddot{\eta} + D\dot{\eta} + K\eta + q_{dyn} \left(Q_R \eta + \frac{\bar{c}}{2Vk} Q_I \dot{\eta} \right) = 0 \quad (1.5)$$

1.4 Les séries de données fournies par les chercheurs de la NASA DFRC

Les données fournies par les chercheurs de la NASA DFRC sont partagées en deux séries. La première série de données concerne les matrices structurelles de masse M , amortissement C et rigidité K ainsi que les matrices des forces aérodynamiques $Q(k, Mach)$ en fonction des fréquences réduites et du nombre de Mach. La deuxième série de données concerne les coefficients de dérivées de stabilité et de commande de l'avion F/A-18 obtenus par des essais en vol ou en soufflerie.

1.4.1 La première série de données fournies par la NASA DFRC

La première série de données fournies par les chercheurs de la NASA DFRC sont : les matrices structurales de masse M , d'amortissement C et de rigidité K et les matrices des forces aérodynamiques $Q(k, Mach)$ pour des fréquences réduites k et des nombres de Mach. Toutes ces matrices M , C , K , Q_R et Q_I ont les dimensions (44×44) et se trouvent dans l'équation (1.5).

Les matrices des forces aérodynamiques Q_R et Q_I en fonction de k et de nombre de Mach M et de dimensions (44×44) s'écrivent sous la forme présentée dans le tableau suivant en tenant compte de leur division selon les 3 catégories données à la Section 1.3 .

Tableau I

La forme générale de la matrice de forces aérodynamiques Q

Q_{rr} (6 x 6)	Q_{re} (6 x 28)	Q_{rc} (6 x 10)
Q_{er} (28 x 6)	Q_{ee} (28 x 28)	Q_{ec} (28 x 10)
Q_{cr} (10 x 6)	Q_{ce} (10 x 28)	Q_{cc} (10 x 10)

Dans le Tableau I, r représente les 6 modes *rigides* (trois modes en translation et trois modes en rotation), c représente les 10 modes de *commande* (5 modes en mouvement longitudinal et 5 modes en mouvement latéral) et e représente les 28 modes *élastiques* (14 modes en mouvement longitudinal et 14 modes en mouvement latéral).

Dans le but d'étudier la dynamique des modes rigides et de contrôle, nous prenons en considération les interactions des forces aérodynamiques des modes rigides avec les modes rigides (rr) et des modes rigides avec les modes de commande (rc) et nous obtenons les 2 matrices Q_{rr} de dimension (6×6) et Q_{rc} de dimensions (6×16) qui apparaissent dans le Tableau I.

1.4.2 La deuxième série de données fournies par la NASA DFRC

Les chercheurs de la NASA Dryden Flight Research Center nous ont fourni deux séries des dérivées de stabilité et de commande de l'avion F/A-18 exprimées dans le système de coordonnées lié au vent pour plusieurs conditions de vol : altitudes H , nombres de $Mach$ et angles d'attaque α . Nous exprimons ces deux séries de données sous la forme des matrices A_{nasa} , B_{long_nasa} , B_{lat_nasa} .

La matrice A_{nasa} des coefficients de dérivées de stabilité de dimensions (6 x 9) est :

$$A_{nasa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_L}{\partial q} & \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_L}{\partial V} & \frac{\partial C_L}{\partial \theta} & \frac{\partial C_L}{\partial H} & \frac{\partial C_L}{\partial p} & \frac{\partial C_L}{\partial r} & \frac{\partial C_L}{\partial \beta} & \frac{\partial C_L}{\partial \phi} \\ \frac{\partial C_M}{\partial q} & \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_M}{\partial V} & \frac{\partial C_M}{\partial \theta} & \frac{\partial C_M}{\partial H} & \frac{\partial C_M}{\partial p} & \frac{\partial C_M}{\partial r} & \frac{\partial C_M}{\partial \beta} & \frac{\partial C_M}{\partial \phi} \\ \frac{\partial C_N}{\partial q} & \frac{\partial C_N}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_N}{\partial V} & \frac{\partial C_N}{\partial \theta} & \frac{\partial C_N}{\partial H} & \frac{\partial C_N}{\partial p} & \frac{\partial C_N}{\partial r} & \frac{\partial C_N}{\partial \beta} & \frac{\partial C_N}{\partial \phi} \\ \frac{\partial C_D}{\partial q} & \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_D}{\partial V} & \frac{\partial C_D}{\partial \theta} & \frac{\partial C_D}{\partial H} & \frac{\partial C_D}{\partial p} & \frac{\partial C_D}{\partial r} & \frac{\partial C_D}{\partial \beta} & \frac{\partial C_D}{\partial \phi} \\ \frac{\partial C_{Lift}}{\partial q} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial V} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \theta} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial H} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial p} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial r} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \beta} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial C_Y}{\partial q} & \frac{\partial C_Y}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_Y}{\partial V} & \frac{\partial C_Y}{\partial \theta} & \frac{\partial C_Y}{\partial H} & \frac{\partial C_Y}{\partial p} & \frac{\partial C_Y}{\partial r} & \frac{\partial C_Y}{\partial \beta} & \frac{\partial C_Y}{\partial \phi} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

La matrice B des coefficients de dérivées de commande de dimensions (6 x 10) peut se diviser en deux parties, pour le mouvement longitudinal et pour le mouvement latéral, dénotées par B_{long_nasa} et B_{lat_nasa} , respectivement.

La matrice B_{long_nasa} des coefficients de dérivées du mouvement longitudinal de l'avion de dimensions (6 x 5) a la forme suivante :

$$\mathbf{B}_{long_nasa} = \begin{bmatrix}
 \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_AIL}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_HT}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_RUD}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_LEF}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_TEF}} \\
 \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{long_AIL}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{long_HT}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{long_RUD}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{long_LEF}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{long_TEF}} \\
 \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{long_AIL}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{long_HT}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{long_RUD}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{long_LEF}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{long_TEF}} \\
 \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{long_AIL}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{long_HT}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{long_RUD}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{long_LEF}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{long_TEF}} \\
 \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{long_AIL}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{long_HT}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{long_RUD}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{long_LEF}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{long_TEF}} \\
 \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{long_AIL}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{long_HT}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{long_RUD}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{long_LEF}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{long_TEF}}
 \end{bmatrix} \quad (1.7.1)$$

La matrice \mathbf{B}_{lat_nasa} des coefficients de dérivées du mouvement latéral de l'avion de dimensions (6 x 5) peut s'exprimer comme suit :

$$\mathbf{B}_{lat_nasa} = \begin{bmatrix}
 \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_AIL}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_HT}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_RUD}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_LEF}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_TEF}} \\
 \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{lat_AIL}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{lat_HT}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{lat_RUD}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{lat_LEF}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{lat_TEF}} \\
 \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{lat_AIL}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{lat_HT}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{lat_RUD}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{lat_LEF}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{lat_TEF}} \\
 \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{lat_AIL}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{lat_HT}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{lat_RUD}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{lat_LEF}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{lat_TEF}} \\
 \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{lat_AIL}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{lat_HT}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{lat_RUD}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{lat_LEF}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{lat_TEF}} \\
 \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{lat_AIL}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{lat_HT}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{lat_RUD}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{lat_LEF}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{lat_TEF}}
 \end{bmatrix} \quad (1.7.2)$$

Nous exprimons le comportement de l'avion à l'aide d'une première équation d'un système matriciel sous forme:

$$y = A_{nasa} x + B_{nasa} u = [A_t] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

où :

$$A_t = [A_{nasa} \quad B_{nasa}] \quad (1.9)$$

et où la matrice totale de contrôle B_{nasa} est écrite pour le mouvement longitudinal et latéral de l'avion, comme suit:

$$B_{nasa} = [B_{long_nasa} \quad B_{lat_nasa}] \quad (1.10)$$

La matrice A_{nasa} est donnée par l'équation (1.6) et les matrices B_{long_nasa} et B_{lat_nasa} sont données par les équations (1.7.1) et (1.7.2).

Les vecteurs de commande u_{long} et u_{lat} correspondants aux matrices B_{long_nasa} et B_{lat_nasa} sont:

$$\begin{aligned} u_{long} &= [\Delta\delta_{long_AIL} \quad \Delta\delta_{long_HT} \quad \Delta\delta_{long_RUD} \quad \Delta\delta_{long_LEF} \quad \Delta\delta_{long_TEF}]^T \\ u_{lat} &= [\Delta\delta_{lat_AIL} \quad \Delta\delta_{lat_HT} \quad \Delta\delta_{lat_RUD} \quad \Delta\delta_{lat_LEF} \quad \Delta\delta_{lat_TEF}]^T \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.5 Premier schéma de simulation avec des coefficients de stabilité et de commande fournis dans le système lié au vent

Nous créons dans un premier temps un programme de simulation à l'aide du logiciel Matlab/Simulink afin de vérifier la stabilité de l'avion en utilisant l'équation (1.8). Dans la Figure 5, nous montrons le schéma Matlab/Simulink complet de cette simulation dans laquelle nous utilisons les dérivées de stabilité et de commande de l'avion dans le système de coordonnées lié au vent.

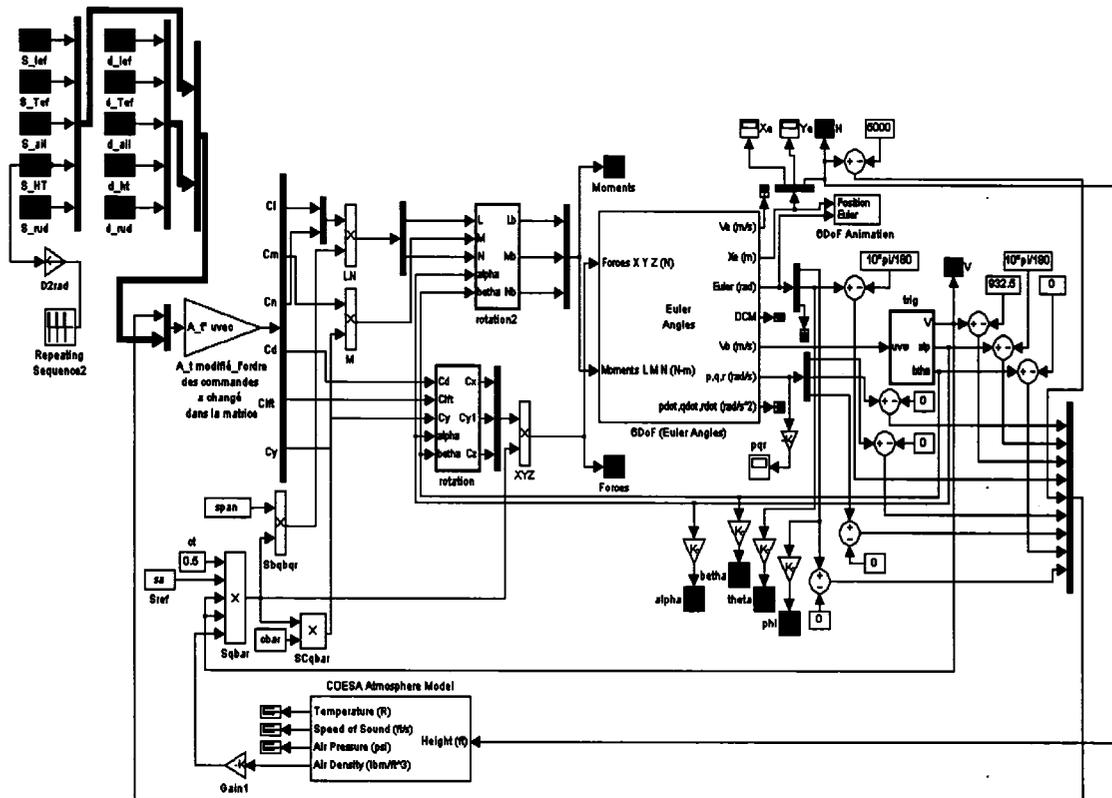


Figure 5 Premier schéma de simulation avec des coefficients de stabilité et de commande fournis dans le système lié au vent

Le schéma présenté dans la Figure 5 peut être simplifié et présenté sous la forme suivante :

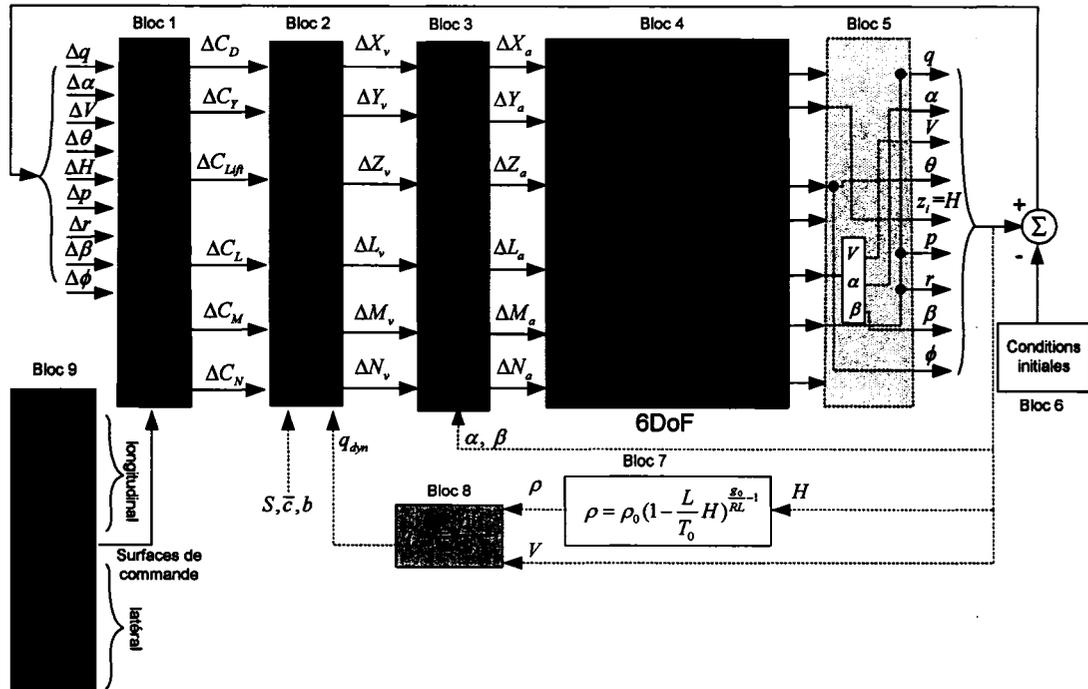


Figure 6 Simplification du schéma de simulation présenté dans la Figure 5

Le schéma présenté dans la Figure 6 peut être encore une fois simplifié et présenté sous la forme suivante :

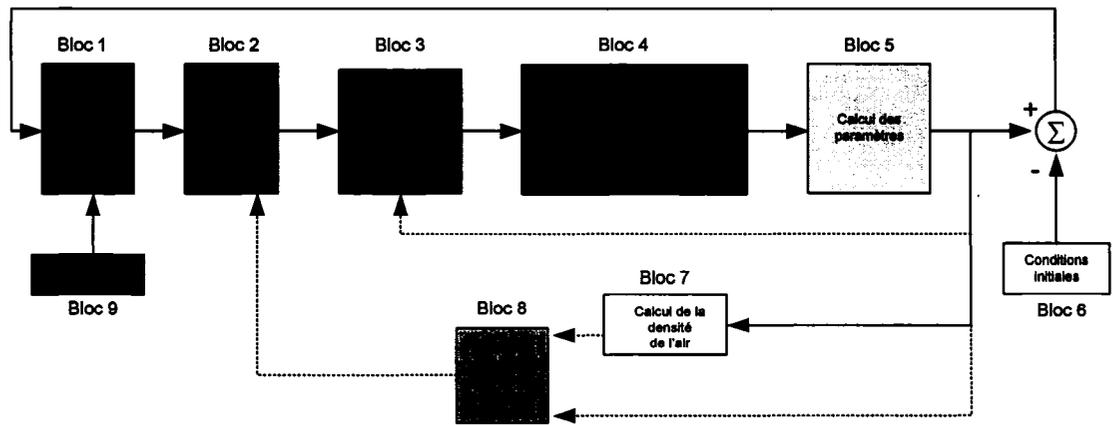


Figure 7 Simplification du schéma de simulation présenté dans la Figure 6

Nous utilisons la théorie des petites perturbations pour la linéarisation du système de l'avion autour de sa position de l'équilibre (*trim*). La linéarisation numérique en Matlab/Simulink nous retourne les matrices A, B, C, D.

Les équations du système sous forme d'espace d'état sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.12)$$

où x est le vecteur d'état de dimensions (12 x 1), u est le vecteur des entrées de dimensions (10 x 1) et y est le vecteur des sorties de dimensions (6 x 1). La matrice A a les dimensions (12 x 12), B a les dimensions (12 x 10), C a les dimensions (6 x 12) et D a les dimensions (6 x 10).

Les vecteurs d'état x , des entrées u et des sorties y sont :

$$\begin{aligned} x &= (\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i, \Delta p, \Delta q, \Delta r, \Delta \phi, \Delta \theta, \Delta \psi)^T \\ u &= (\Delta \delta_{long_LEF}, \Delta \delta_{long_TEF}, \Delta \delta_{long_AIL}, \Delta \delta_{long_HT}, \Delta \delta_{long_RUD}, \dots \\ &\quad \dots, \Delta \delta_{lat_LEF}, \Delta \delta_{lat_TEF}, \Delta \delta_{lat_AIL}, \Delta \delta_{lat_HT}, \Delta \delta_{lat_RUD})^T \\ y &= (X_a, Y_a, Z_a, L_a, M_a, N_a)^T; \end{aligned} \quad (1.13)$$

L'intégration des états peut se faire avec la première équation (1.12) ou avec le bloc '6DoF' (en anglais : six degrees of freedom). En fait, la première équation (1.12) est la forme linéaire du bloc '6doF'. Le block sert à calculer les paramètres du mouvement d'un corps rigide avec six degrés de liberté quand on connaît les forces et les moments extérieurs qui lui sont appliquées. Pour des raisons de généralité nous allons faire l'intégration des états en utilisant le bloc '6DoF'.

La deuxième équation du système (1.12) s'écrit sous la forme suivante:

$$y = \begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \\ \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \\ \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \\ \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Notre but est de calculer les forces aérodynamiques Q de l'avion pour les interactions entre les modes rigides et les modes de commande de l'avion F/A-18. Pour vérifier si les forces aérodynamiques obtenues sont correctes, nous comparons les forces X , Y et Z et les moments L , M et N aérodynamiques dans le repère lié à l'avion obtenus par le schéma de la Figure 6 avec celles obtenues avec le deuxième schéma de simulation présenté dans la Figure 24 du chapitre 4. Les détails du schéma de simulation présenté dans la Figure 6 seront expliqués dans le chapitre 2.

CHAPITRE 2

DESCRIPTION DES BLOCS DU PREMIER SCHÉMA DE SIMULATION

Dans le chapitre 2, nous allons expliquer en détails les entrées, les sorties et le mode de fonctionnement de chaque bloc du schéma présenté dans la Figure 6 dans le but de nous faire une image d'ensemble du fonctionnement de ce schéma de simulation.

2.1 Description du Bloc 1

Les chercheurs de la NASA DFRC (Dryden Flight Research Center) nous ont fourni les coefficients des dérivées de stabilité et commande dans le système lié au vent (wind system) pour plusieurs conditions de vol (le nombre de Mach, l'altitude et l'angle d'attaque α). Les coefficients de ces dérivées sont inclus dans la formulation de la matrice A_t . Dans le bloc 1 dans la Figure 6, nous calculons $\Delta C_L, \Delta C_M, \Delta C_N$ qui sont les variations des coefficients des moments de roulis L , tangage M et lacet N ainsi que $\Delta C_D, \Delta C_{Lift}, \Delta C_Y$ qui sont les variations des coefficients de traînée, de portance et latérales. Ces variations des coefficients des forces et moments dans le système lié au vent $\Delta C_L, \Delta C_M, \Delta C_N, \Delta C_D, \Delta C_{Lift}, \Delta C_Y$ sont calculées par la théorie des petites perturbations. La matrice A_t de dimensions (6x19) présente dans les équations (1.8) et (1.9) a la forme analytique suivante :

$$A_t = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,19} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,19} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,19} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & \dots & a_{4,19} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & \dots & a_{5,19} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & \dots & a_{6,19} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

où les termes a_{ij} sont les coefficients de stabilité et de commande exprimés dans le système lié au vent pour plusieurs nombres de Mach M , angles d'attaque α et altitudes H .

Pour le mouvement en plan longitudinal ainsi que latéral, nous considérons les entrées de commande données par les volets au bord d'attaque, les volets au bord de fuite, les ailerons, l'empennage horizontal et la gouverne de direction notés en anglais dans la documentation fournie par les laboratoires de la NASA DFRC comme suit: LEF, TEF, AIL, HT, RUD (Leading Edge Flaps, Trailing Edge Flaps, Ailerons, Horizontal Tail, Rudder).

Les paramètres qui varient sont les suivants: la vitesse angulaire de tangage q , l'angle d'attaque α , la vitesse vraie V , l'angle de tangage θ , l'altitude H , la vitesse angulaire de roulis p , la vitesse angulaire de lacet r , l'angle de dérapage β et l'angle de roulis ϕ .

Nous utilisons les approximations par des séries de Taylor, et nous obtenons les valeurs des coefficients de stabilité autour de la position d'équilibre (trim) $\Delta C_L, \Delta C_M, \Delta C_N, \Delta C_D, \Delta C_{Lift}, \Delta C_Y$ de l'avion F/A-18. La variation du coefficient de portance C_L (lift coefficient) est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta C_L = & \frac{\partial C_L}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial C_L}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial C_L}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial C_L}{\partial H} \Delta H \\
& + \frac{\partial C_L}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial C_L}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial C_L}{\partial \phi} \Delta \phi + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{Pi_AIL}} \Delta \delta_{Pi_AIL} \\
& + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_HT}} \Delta \delta_{long_HT} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_RUD}} \Delta \delta_{long_RUD} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_LEF}} \Delta \delta_{long_LEF} \quad (2.2) \\
& + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_TEF}} \Delta \delta_{long_TEF} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_AIL}} \Delta \delta_{lat_AIL} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_HT}} \Delta \delta_{lat_HT} \\
& + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_RUD}} \Delta \delta_{lat_RUD} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_LEF}} \Delta \delta_{lat_LEF} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_TEF}} \Delta \delta_{lat_TEF}
\end{aligned}$$

Les autres cinq variations des coefficients de forces et moments $\Delta C_M, \Delta C_N, \Delta C_D, \Delta C_{Lift}, \Delta C_Y$ se calculent à l'aide du même type d'équation (2.2) dans laquelle uniquement l'indice change (il devient $M, N, D, Lift, Y$ au lieu de L). L'ensemble des équations de type (2.2) pour tous les coefficients des forces et moments devient:

$$\begin{pmatrix} \Delta C_L \\ \Delta C_M \\ \Delta C_N \\ \Delta C_D \\ \Delta C_{Lift} \\ \Delta C_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,19} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,19} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,19} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & \dots & a_{4,19} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & \dots & a_{5,19} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & \dots & a_{6,19} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta q \\ \Delta \alpha \\ \Delta V \\ \Delta \theta \\ \Delta H \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \beta \\ \Delta \phi \\ \Delta com_{(10,1)} \end{pmatrix} = A_t \cdot \begin{pmatrix} \Delta q \\ \Delta \alpha \\ \Delta V \\ \Delta \theta \\ \Delta H \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \beta \\ \Delta \phi \\ \Delta com_{(10,1)} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

où la matrice $[A_t]$ est donnée par l'ensemble d'équations (1.6), (1.7) et (1.9).

Les entrées de commandes Δcom de dimensions (10x1) pour le mouvement longitudinal et latéral de l'avion F/A-18 sont définies comme suit :

$$\Delta com = \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

2.2 Description du Bloc 2

Ce bloc est utilisé pour calculer les variations des forces et les moments dans le système lié au vent dénoté par l'indice v (les sorties du bloc 2) à partir des variations des coefficients correspondants aux forces et moments de l'avion (les sorties du bloc 1 et les entrées du bloc 2).

La notation suivante est introduite:

$$\bar{S} = \frac{\rho V^2}{2} S = q_{dyn} S \quad (2.5)$$

où q_{dyn} est la pression dynamique, S est la surface de l'aile, ρ est la densité de l'air et V est la vitesse vraie de l'avion.

Les variations des forces et des moments s'écrivent en fonction des variations de leurs coefficients de stabilité correspondants, en utilisant la notation (2.5):

$$\begin{pmatrix} \Delta X_v \\ \Delta Y_v \\ \Delta Z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{S} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta C_D \\ \Delta C_Y \\ \Delta C_{Lift} \end{pmatrix} \quad (2.6.1)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta L_v \\ \Delta M_v \\ \Delta N_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S} \cdot b & 0 & 0 \\ 0 & \bar{S} \cdot \bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{S} \cdot b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta C_L \\ \Delta C_M \\ \Delta C_N \end{pmatrix} \quad (2.6.2)$$

où b est l'envergure et \bar{c} est la corde moyenne.

Nous réarrangerons les deux équations (2.6.1) et (2.6.2) sous la forme du système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_v \\ \Delta Y_v \\ \Delta Z_v \\ \Delta L_v \\ \Delta M_v \\ \Delta N_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{S} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{S} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S} \cdot b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{S} \cdot \bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{S} \cdot b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta C_D \\ \Delta C_Y \\ \Delta C_{Lift} \\ \Delta C_L \\ \Delta C_M \\ \Delta C_N \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

2.3 Description du Bloc 3

Nous effectuons la transformation des variations des forces et des moments calculés dans un système de coordonnées lié au vent v aux variations des forces et moments dans un système lié aux axes d'un avion a . Dans la Figure 5, nous observons que la transformation de coordonnées pour les variations des forces X, Y, Z est intégrée dans le bloc Simulink intitulé '*rotation*' et pour les variations des moments L, M, N est intégrée dans le bloc intitulé '*rotation2*'. Les détails de ces deux blocs sont donnés dans cette section.

Dans la Figure 8, le système de coordonnées lié au vent est représenté par les axes x_v, y_v et z_v et le système de coordonnées lié aux axes d'avion est représenté par les axes x_a, y_a et z_a . Nous effectuons deux rotations successives du système de coordonnées x_v, y_v et z_v :

- La première rotation avec l'angle β autour de l'axe z_v pour l'obtention du système de coordonnées x', y', z' et
- La deuxième rotation avec l'angle α autour de l'axe y' pour obtenir le système de coordonnées x_a, y_a, z_a .

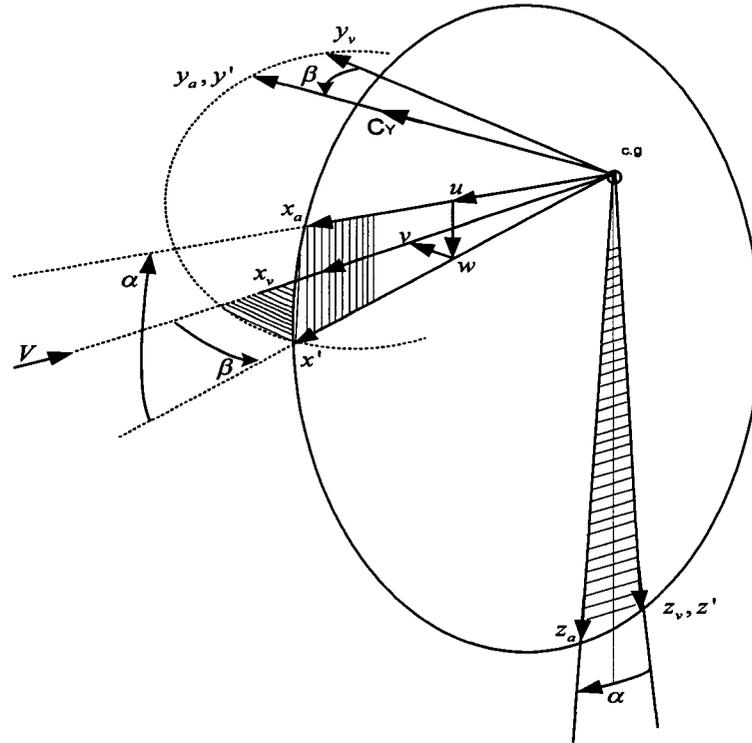


Figure 8 L'avion dans les systèmes de coordonnées liés au vent v et à l'avion a

Suite à la première rotation avec l'angle β autour de l'axe z_v du système de coordonnées lié au vent $x_v y_v z_v$, le système de coordonnées $x' y' z'$ s'obtient :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

La deuxième rotation de l'angle α autour de l'axe y' dans le système de coordonnées $x' y' z'$ a lieu et le système de coordonnées lié à l'avion $x_a y_a z_a$ s'obtient :

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Nous remplaçons le vecteur $x' y' z'$ donné par l'équation (2.8) dans l'équation (2.9) et nous obtenons le système de coordonnées lié à l'avion a en fonction du système de coordonnées lié au vent v :

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Les forces sur les axes x et z dans le système de coordonnées lié à l'avion a en fonction du système de coordonnées lié au vent v ont des signes opposés à cause de leurs orientations données par les laboratoires de la NASA DFRC, voir l'équation (2.11.1) par rapport à l'équation (2.10). Cependant les moments ont les mêmes orientations, voir l'équation (2.11.2) par rapport à l'équation (2.10).

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ -\sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{bmatrix} \quad (2.11.1)$$

$$\begin{bmatrix} L_a \\ M_a \\ N_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_v \\ M_v \\ N_v \end{bmatrix} \quad (2.11.2)$$

Les équations (2.11.1) et (2.11.2) sont linéarisées autour de la position à l'équilibre (trim) de l'avion F/A-18 par la théorie des petites perturbations, dans laquelle nous notons par zéro (0) l'indice de l'angle à l'équilibre et par Δ la variation de l'angle autour de sa position à l'équilibre. L'angle peut être l'angle d'attaque α ou l'angle de dérapage β et nous pouvons l'écrire par cette théorie comme suit:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \\ \beta = \beta_0 + \Delta\beta \end{cases} \quad (2.12)$$

L'angle de dérapage à l'équilibre β_0 fourni par les laboratoires de la NASA DFRC pour l'avion F/A-18 est égal à 0, alors nous obtenons l'angle de dérapage β en fonction uniquement de sa variation $\Delta\beta$ qui est très petite, alors nous écrivons:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \cos(\beta_0 + \Delta\beta) \approx \cos \Delta\beta \approx 1 \\ \sin \beta &= \sin(\beta_0 + \Delta\beta) \approx \sin \Delta\beta \approx \Delta\beta\end{aligned}\quad (2.13)$$

Les forces et les moments de l'avion dans le système lié à l'avion a et dans le système lié au vent v sont écrits par la théorie des petites perturbations:

$$X_a = X_{a0} + \Delta X_a, \quad Y_a = Y_{a0} + \Delta Y_a, \quad Z_a = Z_{a0} + \Delta Z_a \quad (2.14.1)$$

$$X_v = X_{v0} + \Delta X_v, \quad Y_v = Y_{v0} + \Delta Y_v, \quad Z_v = Z_{v0} + \Delta Z_v \quad (2.14.2)$$

$$L_a = L_{a0} + \Delta L_a, \quad M_a = M_{a0} + \Delta M_a, \quad N_a = N_{a0} + \Delta N_a \quad (2.14.3)$$

$$L_v = L_{v0} + \Delta L_v, \quad M_v = M_{v0} + \Delta M_v, \quad N_v = N_{v0} + \Delta N_v \quad (2.14.4)$$

Les forces et les moments à l'équilibre sont nuls dans le système lié à l'avion a et dans le système lié au vent v :

$$X_{a0} = Y_{a0} = Z_{a0} = L_{a0} = M_{a0} = N_{a0} = 0 \quad (2.15.1)$$

$$X_{v0} = Y_{v0} = Z_{v0} = L_{v0} = M_{v0} = N_{v0} = 0 \quad (2.15.2)$$

Nous remplaçons l'ensemble d'équations (2.15.1) et (2.15.2) dans l'ensemble d'équations (2.14.1)-(2.14.4), donc les forces et les moments sont égaux à leurs variations Δ à partir de leurs positions à l'équilibre. Nous introduisons aussi les expressions de l'angle d'attaque α et de l'angle de dérapage β données par les équations (2.12) et (2.13) dans les équations (2.11.1) et (2.11.2) et nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) & \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha)\Delta\beta & \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) \\ \Delta\beta & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) & \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha)\Delta\beta & -\cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_v \\ \Delta Y_v \\ \Delta Z_v \end{pmatrix} \quad (2.16.1)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) & -\cos(\alpha_0 + \Delta\alpha)\Delta\beta & -\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) \\ \Delta\beta & 1 & 0 \\ \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) & -\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha)\Delta\beta & \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta L_v \\ \Delta M_v \\ \Delta N_v \end{pmatrix} \quad (2.16.2)$$

Les variations de l'angle d'attaque $\Delta\alpha$ et de l'angle de dérapage $\Delta\beta$ à partir de leurs positions à l'équilibre sont nulles $\Delta\alpha = \Delta\beta = 0$ et nous remplaçons ces variations dans les équations (2.16.1) et (2.16.2) et nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha_0 & 0 & \sin\alpha_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_0 & 0 & -\cos\alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_v \\ \Delta Y_v \\ \Delta Z_v \end{pmatrix} \quad (2.17.1)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 & 0 & -\sin\alpha_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_0 & 0 & \cos\alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta L_v \\ \Delta M_v \\ \Delta N_v \end{pmatrix} \quad (2.17.2)$$

Nous arrangeons les équations (2.17.1) et (2.17.2) dans l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \\ \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} = C_{m1} \begin{pmatrix} \Delta X_v \\ \Delta Y_v \\ \Delta Z_v \\ \Delta L_v \\ \Delta M_v \\ \Delta N_v \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

où C_{m1} a la forme suivante :

$$C_{m1} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha_0 & 0 & \sin\alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_0 & 0 & -\cos\alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_0 & 0 & -\sin\alpha_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_0 & 0 & \cos\alpha_0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Nous utilisons la notation (2.7) pour obtenir les variations des forces et les moments dans le système lié à l'avion a en fonction des variations des coefficients de stabilité dans le même système de coordonnées:

$$\begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \\ \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} = C_m \begin{pmatrix} \Delta C_D \\ \Delta C_Y \\ \Delta C_{Lift} \\ \Delta C_L \\ \Delta C_M \\ \Delta C_N \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

où la matrice C_m a la forme suivante :

$$C_m = \begin{pmatrix} -\bar{S} \cdot \cos \alpha_0 & 0 & \bar{S} \cdot \sin \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{S} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{S} \cdot \sin \alpha_0 & 0 & -\bar{S} \cdot \cos \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S} \cdot b \cdot \cos \alpha_0 & 0 & -\bar{S} \cdot b \cdot \sin \alpha_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{S} \cdot \bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S} \cdot b \cdot \sin \alpha_0 & 0 & \bar{S} \cdot b \cdot \cos \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Les variations des forces X et Z ont été multipliées par l'envergure b pour obtenir les variations des moments de roulis L et lacet N et les forces Y ont été multipliées par la corde c pour obtenir la variation du moment de tangage M .

2.4 Description du Bloc 4

Nous avons déjà mentionné qu'on n'utilise pas l'équation $\dot{x} = Ax + Bu$ et qu'on calcule les états en utilisant le bloc en Simulink appelé '6DoF' 'six degrees of freedom'. Le schéma du bloc '6DoF' est le suivant :

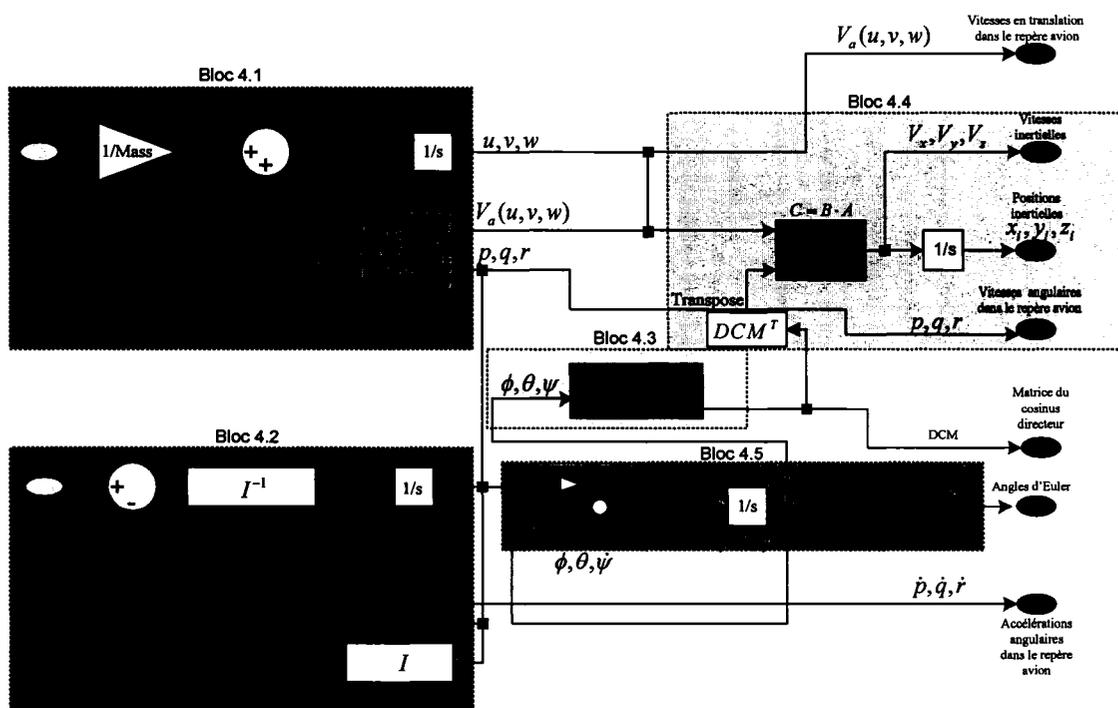


Figure 9 Détails du bloc '6 DoF'

Le bloc '6DoF' traite les équations de mouvement d'un corps rigide en six degrés de liberté. L'origine du système des axes de coordonnées lié à l'avion a est le centre de gravité de l'avion considéré rigide. Le système des axes de coordonnées inertiel est lié à la Terre i .

Les équations de mouvement de l'avion sont obtenues par la deuxième loi de Newton :

1. La somme des toutes les forces externes agissant sur l'avion est égale au taux de variation dans le temps de la quantité de mouvement de l'avion, et
2. La somme des moments externes agissant sur l'avion est égale au taux de variation dans le temps de la quantité de mouvement angulaire.

Pour mieux comprendre le bloc '6DoF' qui est montré à la Figure 9 nous détaillons le mode de fonctionnement de ses sous-blocs (4.1, 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5) séparément.

2.4.1 Calcul des forces et des moments (Blocs 4.1 et 4.2)

Le système de référence inertiel est le système d'axes de coordonnées dans lequel l'origine est fixée au centre de la Terre. Le premier système d'axes de référence lié à la Terre $x_i y_i z_i$ est choisi tel que x_i est orienté vers le nord, y_i vers l'est, et z_i vers le bas. Le deuxième système d'axes est celui qui a comme origine le centre de gravité de l'avion, ainsi, ce système est fixé à l'avion. Pour un tel système, l'axe x_a est dirigé vers le nez de l'avion, l'axe y_a vers l'aile droite, et l'axe z_a vers le bas, voir la Figure 10.



Figure 10 Le système inertiel i et le système d'axes lié à l'avion a

Nous supposons que l'avion est rigide, c'est-à-dire qu'une distance prise entre n'importe quels points de l'avion ne change pas pendant le vol. Le mouvement de l'avion dans l'espace est considéré avoir six degrés de liberté. Les forces et les moments peuvent être calculées par la loi de Newton appliqué à l'avion rigide en fonction des accélérations et des vitesses.

2.4.1.1 Le calcul des forces dans le système d'axes lié à l'avion a (Bloc 4.1)

Nous considérons un point sur l'avion de masse δm et ses coordonnées sont x_a , y_a , z_a , d'où la position de ce point matériel \vec{r} est décrite par l'équation suivante :

$$\vec{r} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \quad (2.22)$$

où \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} sont les vecteurs unitaires sur les axes de l'avion x_a, y_a, z_a . Les projections des vecteurs \vec{v}_a et $\vec{\omega}_a$ sur les mêmes axes x_a, y_a, z_a sont les vitesses linéaires et les vitesses angulaires dans le même système de coordonnées lié à l'avion a . Nous écrivons :

$$\begin{cases} \vec{v}_a = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \\ \vec{\omega}_a = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \end{cases} \quad (2.23)$$

Nous calculons la force élémentaire agissant sur le point matériel de masse δm comme suit:

$$\delta \vec{F}_a = \frac{d}{dt}(\delta m \vec{v}) \quad (2.24)$$

où la vitesse \vec{v} a deux composantes : la vitesse dans le système d'axes lié à l'avion a par rapport au système inertiel \vec{v}_a et la vitesse par rapport au système de coordonnées lié à l'avion $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Nous allons écrire :

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.25)$$

Nous obtenons, en remplaçant l'équation (2.25) dans l'équation (2.24) :

$$\delta \vec{F}_a = \delta m \vec{v}_a + \frac{d^2}{dt^2} (\delta m \vec{r}) \quad (2.26)$$

La force totale est la somme des forces élémentaires qui agissent sur la totalité des points matériels :

$$\vec{F}_a = \sum (\delta \vec{F}) = \left(\sum \delta m \right) \frac{d\vec{v}_a}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum \delta m \vec{r} \right). \quad (2.27)$$

Le terme $\Sigma(\delta m \vec{r})$ est égal à zéro, car le système de coordonnées lié à l'avion a a son centre dans le centre de masse de l'avion, ainsi l'équation (2.27) devient :

$$\vec{F}_a = m \frac{d\vec{v}_a}{dt} \quad (2.28)$$

Nous voulons exprimer la force totale en fonction de composantes vectorielles exprimées par les équations (2.23) qui se trouvent dans le système d'axes lié à l'avion a . Nous exprimons la dérivée du vecteur \vec{v}_a du système d'axes inertiel i au système d'axes lié à l'avion a et nous obtenons:

$$\left(\frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_e = \left(\frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_a + (\vec{\omega}_a \times \vec{v}_a)_a \quad (2.29)$$

Nous remplaçons $\vec{\omega}_a$ et \vec{v}_a données par les équations (2.23) dans l'équation (2.29), et ensuite dans l'équation (2.28), alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{F}_a &= m \left(\dot{u}\vec{i} + \dot{v}\vec{j} + \dot{w}\vec{k} + \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} \right) = \\ &= m(\dot{u} + qw - rv)\vec{i} + m(\dot{v} + ru - pw)\vec{j} + m(\dot{w} + pv - qu)\vec{k} \end{aligned} \quad (2.30)$$

d'où les composantes de cette force totale sont :

$$\begin{cases} X_a = m(\dot{u} + qw - rv) \\ Y_a = m(\dot{v} + ru - pw) \\ Z_a = m(\dot{w} + pv - qu) \end{cases} \quad (2.31)$$

Les accélérations selon les trois axes sont :

$$\begin{cases} a_x = X_a / m = \dot{u} + qw - rv \\ a_y = Y_a / m = \dot{v} + ru - pw \\ a_z = Z_a / m = \dot{w} + pv - qu \end{cases} \quad (2.32)$$

Nous observons les équations (2.32) dans la première partie en haut du Bloc 4, intitulé Bloc 4.1, où m est la masse de l'avion et où le 'Produit vectoriel' $\mathbf{1} = \mathbf{V}_a \times \boldsymbol{\omega}$ dénote les produits des vitesses linéaires avec les vitesses angulaires ($qw - rv, ru - pw, pv - qu$).

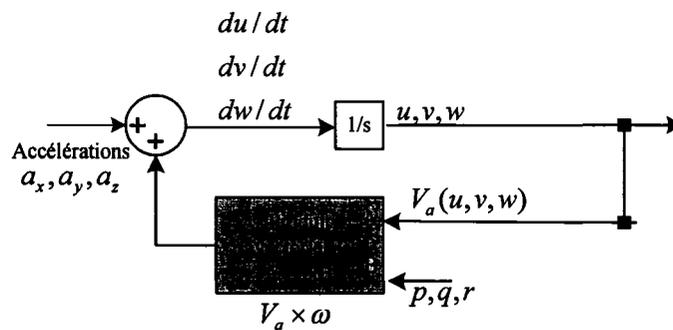


Figure 11 Le bloc 4.1 pour l'expression des équations (2.32)

2.4.1.2 Le calcul des moments dans le système d'axes lié à l'avion a (Bloc 4.2)

Le moment angulaire élémentaire appliqué sur un point matériel est :

$$\delta \vec{H} = (\vec{r} \times \vec{v}) \delta m = (\vec{r} \times \vec{v}_a) \delta m + [\vec{r} \times (\vec{\omega}_a \times \vec{r})] \delta m \quad (2.33)$$

Le moment angulaire équivalent total est exprimé comme suit:

$$\vec{H} = \sum(\delta\vec{H}) = \left(\sum \delta m \vec{r}\right) \times \vec{v}_a + \sum \left[\vec{r} \times (\vec{\omega}_a \times \vec{r}) \delta m \right] \quad (2.34)$$

Le premier terme de l'équation (2.34) est nul pour la même raison invoquée pour l'équation (2.27). Le deuxième terme de l'équation (2.34) peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante en tenant compte des équations (2.22) et (2.23) et des propriétés des produits vectoriels:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\omega}_a \times \vec{r}) &= \vec{r} \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \vec{r} \times \left[(qz_a - ry_a) \vec{i} + (rx_a - pz_a) \vec{j} + (py_a - qx_a) \vec{k} \right] = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ qz_a - ry_a & rx_a - pz_a & py_a - qx_a \end{vmatrix} \quad (2.35) \\ &= \left[p(y_a^2 + z_a^2) - qx_a y_a - rx_a z_a \right] \vec{i} + \left[q(x_a^2 + z_a^2) - px_a y_a - ry_a z_a \right] \vec{j} \\ &\quad + \left[r(x_a^2 + y_a^2) - px_a z_a - qy_a z_a \right] \vec{k}. \end{aligned}$$

Nous remplaçons l'équation (2.35) dans l'éq. (2.34) et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{H}_a &= p \sum \left[(y_a^2 + z_a^2) \delta m \right] \vec{i} - q \sum (x_a y_a \delta m) \vec{i} - r \sum (x_a z_a \delta m) \vec{i} \\ &\quad + q \sum \left[(x_a^2 + z_a^2) \delta m \right] \vec{j} - p \sum (x_a y_a \delta m) \vec{j} - r \sum (y_a z_a \delta m) \vec{j} \\ &\quad + r \sum \left[(x_a^2 + y_a^2) \delta m \right] \vec{k} - p \sum (x_a z_a \delta m) \vec{k} - q \sum (y_a z_a \delta m) \vec{k} \quad (2.36) \end{aligned}$$

Les définitions des moments d'inertie de l'avion sont :

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \sum [(y_a^2 + z_a^2) \delta m]; & I_{xy} &= \sum (x_a y_a \delta m); & I_{xz} &= \sum (x_a z_a \delta m); \\
I_{yy} &= \sum [(x_a^2 + z_a^2) \delta m]; & I_{yz} &= \sum (y_a z_a \delta m); & I_{zz} &= \sum [(x_a^2 + y_a^2) \delta m]
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Nous introduisons les définitions des moments d'inertie données par les équations (2.37) dans la définition du moment angulaire donné par l'équation (2.36) qui devient :

$$\vec{H}_a = (pI_{xx} - qI_{xy} - rI_{xz}) \vec{i} + (-pI_{xy} + qI_{yy} - rI_{yz}) \vec{j} + (-pI_{xz} - qI_{yz} + rI_{zz}) \vec{k} \tag{2.38}$$

Ainsi les composantes de \vec{H}_a sont les suivantes :

$$\begin{cases} H_{x_a} = pI_{xx} - qI_{xy} - rI_{xz} \\ H_{y_a} = -pI_{xy} + qI_{yy} - rI_{yz} \\ H_{z_a} = -pI_{xz} - qI_{yz} + rI_{zz} \end{cases} \tag{2.39}$$

et les équations (2.39) peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{H}_a = \begin{pmatrix} H_{x_a} \\ H_{y_a} \\ H_{z_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

Le plan $x_a O z_a$ est le plan de symétrie de l'avion, c'est-à-dire que $I_{xy} = I_{yz} = 0$ et alors le système d'équations (2.40) devient :

$$\mathbf{H}_a = \begin{pmatrix} H_{x_a} \\ H_{y_a} \\ H_{z_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}p - I_{xz}r \\ I_{yy}q \\ I_{zz}r - I_{xz}p \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

Le moment, dans le système inertiel, est la dérivée du moment angulaire, alors pour le calcul des moments \vec{M}_a , nous utilisons la 2^{ème} Loi de Newton et nous obtenons :

$$\vec{M}_a = \left(\frac{d\vec{H}_a}{dt} \right)_i = \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_a + (\vec{\omega}_a \times \vec{H})_a \quad (2.42)$$

Le premier terme de la partie droite de l'équation (2.42) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_a = \dot{H}_{x_a} \vec{i} + \dot{H}_{y_a} \vec{j} + \dot{H}_{z_a} \vec{k} \quad (2.43)$$

où les expressions des H_{x_a} , H_{y_a} et H_{z_a} sont données par les équations (2.39).

Le deuxième terme de la partie droite de l'équation (2.42) s'écrit sous la forme d'un produit vectoriel comme suit :

$$(\vec{\omega}_a \times \vec{H})_a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = (qH_{z_a} - rH_{y_a}) \vec{i} + (rH_{x_a} - pH_{z_a}) \vec{j} + (pH_{y_a} - qH_{x_a}) \vec{k} \quad (2.44)$$

Le moment \vec{M}_a devient, en remplaçant les deux dernières équations (2.43) et (2.44) dans l'équation (2.42) :

$$\vec{M}_a = (\dot{H}_{x_a} + qH_{z_a} - rH_{y_a}) \vec{i} + (\dot{H}_{y_a} + rH_{x_a} - pH_{z_a}) \vec{j} + (\dot{H}_{z_a} + pH_{y_a} - qH_{x_a}) \vec{k} \quad (2.45)$$

avec les composantes L, M et N :

$$\begin{cases} L = \dot{H}_{x_a} + qH_{z_a} - rH_{y_a} \\ M = \dot{H}_{y_a} + rH_{x_a} - pH_{z_a} \\ N = \dot{H}_{z_a} + pH_{y_a} - qH_{x_a} \end{cases} \quad (2.46)$$

Nous observons dans la première partie en bas du Bloc 4 dénoté par le Bloc 4.2 les équations (2.46). Dans le bloc 4.2, le 'Produit vectoriel 2' $= \omega \times (I\omega)$ dénote les produits

des vitesses angulaires avec les composantes du moment angulaire ($qH_{za} - rH_{ya}$, $rH_{xa} - pH_{za}$, $pH_{ya} - qH_{xa}$).

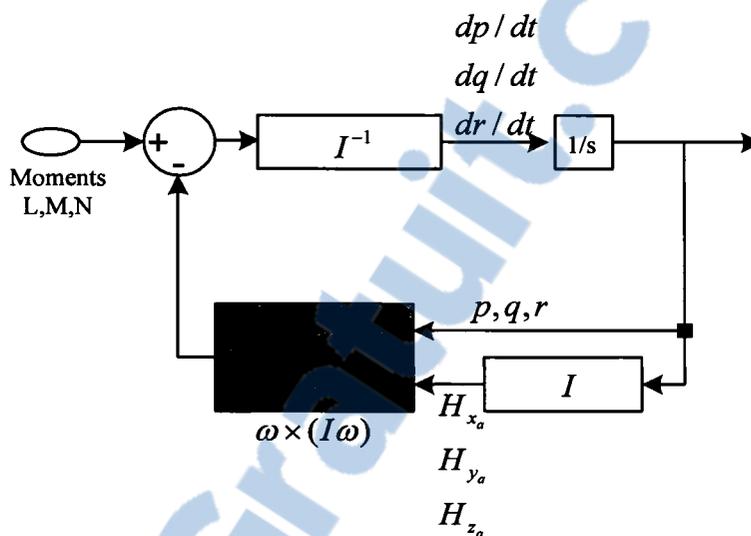


Figure 12 Le bloc 4.2 pour l'expression des équations (2.46)

Les composantes des vitesses linéaires u , v et w sont calculées dans le Bloc 4.1 de la Figure 11 à partir de \dot{u} , \dot{v} , \dot{w} et les composantes des vitesses angulaires p , q et r sont calculées dans la Figure 12 à partir de \dot{p} , \dot{q} , \dot{r} .

2.4.2 Calcul de la matrice des cosinus directeurs DCM (Bloc 4.3)

Le diagramme à l'intérieur du Bloc 4 nous permet de calculer la Matrice des Cosinus Directeurs DCM à partir des angles d'Euler ϕ , θ et ψ . Cette matrice DCM est la suivante :

$$\text{DCM} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \dots & \dots \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \dots & \dots \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \dots & \dots \\ \dots & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \dots & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \dots & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}^T \quad (2.47)$$

Le bloc à l'intérieur du Bloc 4 s'intitule le Bloc 4.3 et la Figure 13 nous montre ses détails.

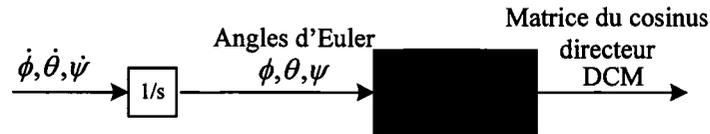


Figure 13 Présentation du Bloc 4.3 pour le calcul de la matrice *DCM*

2.4.3 Calcul des vitesses et des positions dans le système des axes de coordonnées inertiel (Bloc 4.4)

Le vecteur des vitesses dans le système d'axes du système lié à la Terre i (V_x , V_y et V_z) est calculé en fonction du vecteur des vitesses u, v, w dans le système d'axes liés à l'avion a par trois rotations successives.

Ces rotations successives sont les suivantes : une première rotation d'angle ψ autour de l'axe des z , une deuxième rotation d'angle θ autour de l'axe des y et une troisième rotation d'angle ϕ autour de l'axe des x .

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

ce qui peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \dots \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \psi \cos \phi & \dots \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \dots \\ \dots & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ \dots & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \\ \dots & \cos \theta \cos \phi & \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

L'équation (2.49) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = DCM^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

où la matrice DCM a été décrite dans l'équation (2.47). Les positions inertielles sont calculées par l'intégration des vitesses inertielles. L'équation (2.50) est représentée dans le Bloc 4.4 et les détails du bloc sont donnés dans la Figure 14 suivante :

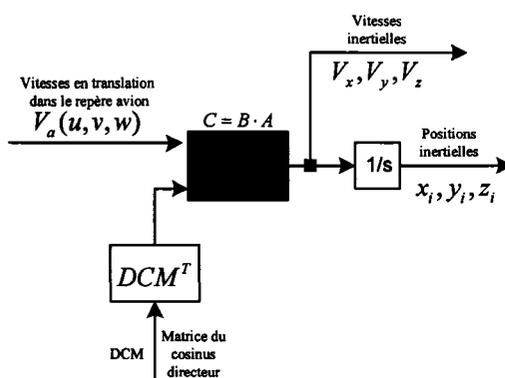


Figure 14 Présentation du Bloc 4.4 pour les calculs des vitesses et des positions dans le système d'axes inertiel

2.4.4 Calcul des dérivées des angles d'Euler (Bloc 4.5)

Un autre regroupement des blocs à l'intérieur du bloc 4 est le bloc 4.5 qui lie les angles d'Euler ϕ , θ et ψ et les vitesses angulaires p , q et r avec les dérivées des angles d'Euler $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ par l'équation suivante (2.51) :

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

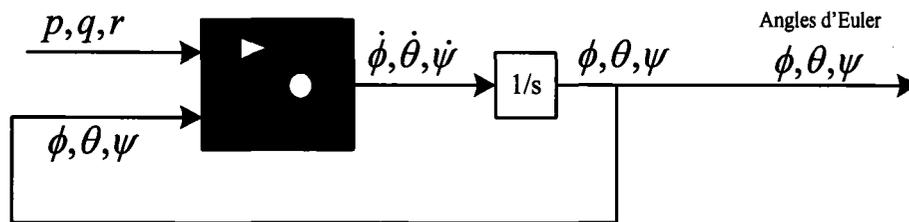


Figure 15 Présentation du bloc 4.5 pour les calculs des dérivées des angles d'Euler

2.5 Description du Bloc 5

Dans le bloc 4, nous avons calculé les variations des paramètres suivants: la vitesse angulaire de tangage q , l'angle de tangage θ , l'altitude H , la vitesse angulaire de roulis, la vitesse angulaire de lacet r et l'angle de roulis ϕ . Les variations de la plupart de ces paramètres ont été calculées dans le bloc 4.

Les variations des paramètres qui n'ont pas été calculés dans le bloc 4 et qui seront calculés dans le bloc 5 restent les variations de la vitesse vraie de l'avion V , de l'angle d'attaque α et de l'angle de dérapage β . Les paramètres V , α et β sont calculés en

fonction des vitesses linéaires en translation u , v et w dans le système d'axes lié à l'avion a à l'aide des équations suivantes [10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ \alpha = \arctan \frac{w}{u} \\ \beta = \arctan \frac{v}{\sqrt{u^2 + w^2}} \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Nous appliquons la théorie des petites perturbations aux termes présents dans le système d'équations (2.52) dans lequel l'indice de référence (0) désigne le terme à l'équilibre et Δ désigne la variation d'un terme autour de la position à l'équilibre. Cette théorie est appliquée aux termes V , α , β , u , v et w et nous obtenons:

$$V = V_0 + \Delta V, \alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha, \beta = \beta_0 + \Delta \beta \quad (2.53.1)$$

$$u = u_0 + \Delta u, v = v_0 + \Delta v, w = w_0 + \Delta w \quad (2.53.2)$$

2.5.1 Calculs de la variation de vitesse vraie à l'équilibre ΔV

La première équation du système d'équations (2.52) est élevée au carré :

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad (2.54)$$

Nous remplaçons les équations (2.53.1) et (2.53.2) dans l'équation (2.54) :

$$(V_0 + \Delta V)^2 = (u_0 + \Delta u)^2 + (v_0 + \Delta v)^2 + (w_0 + \Delta w)^2 \quad (2.55)$$

et nous obtenons :

$$V_0^2 + 2V_0\Delta V + \Delta V^2 = u_0^2 + 2u_0\Delta u + \Delta u^2 + v_0^2 + 2v_0\Delta v + \Delta v^2 + w_0^2 + 2w_0\Delta w + \Delta w^2 \quad (2.56)$$

Nous obtenons à l'équilibre :

$$V_0^2 = u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 \quad (2.57)$$

Les produits carrés des variations Δu^2 , Δv^2 , Δw^2 et ΔV^2 sont négligés dans l'équation (2.59) car sont très petits. Nous divisons par 2 et par V_0 l'équation (2.56) qui devient :

$$\Delta V = \frac{u_0}{V_0} \Delta u + \frac{v_0}{V_0} \Delta v + \frac{w_0}{V_0} \Delta w \quad (2.58)$$

Les composantes de la vitesse vraie V_0 à l'équilibre sur les axes des x et z sont u_0 et w_0 qui s'écrivent en fonction de l'angle d'attaque à l'équilibre α_0 , comme suit :

$$\begin{aligned} u_0 &= V_0 \cos \alpha_0 \\ w_0 &= V_0 \sin \alpha_0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Les chercheurs de la NASA DFRC ont considéré dans leurs calculs $\beta_0 = 0$, alors la composante v_0 de la vitesse vraie V_0 sur l'axe des y devient égale à zéro :

$$v_0 = V_0 \sin \beta_0 = 0 \quad (2.60)$$

Nous remplaçons les équations (2.59) et (2.60) dans l'équation (2.58) et nous obtenons :

$$\Delta V = \Delta u \cos \alpha_0 + \Delta w \sin \alpha_0 \quad (2.61)$$

2.5.2 Calculs de la variation de l'angle d'attaque $\Delta \alpha$ à partir de l'équilibre

Nous pouvons écrire la deuxième équation du système (2.52) sous la forme suivante :

$$u \sin \alpha = w \cos \alpha \quad (2.62)$$

Nous remplaçons les équations (2.53.1) et (2.53.2) dans l'équation (2.62) et nous obtenons:

$$(u_0 + \Delta u) \sin(\alpha_0 + \Delta \alpha) = (w_0 + \Delta w) \cos(\alpha_0 + \Delta \alpha) \quad (2.63)$$

Nous remplaçons les expansions des fonctions trigonométriques $\sin(\alpha_0 + \Delta \alpha)$ et $\cos(\alpha_0 + \Delta \alpha)$ dans l'équation (2.63) :

$$(u_0 + \Delta u)(\sin \alpha_0 \cos \Delta \alpha + \cos \alpha_0 \sin \Delta \alpha) = (w_0 + \Delta w)(\cos \alpha_0 \cos \Delta \alpha - \sin \alpha_0 \sin \Delta \alpha) \quad (2.64)$$

Pour des petites variations de l'angle d'attaque $\Delta \alpha$, nous obtenons :

$$\cos \Delta \alpha = 1 \text{ et } \sin \Delta \alpha = \Delta \alpha \quad (2.65)$$

Nous remplaçons les équations (2.65) dans l'équation (2.64) et nous obtenons :

$$(u_0 + \Delta u)(\sin \alpha_0 + \Delta \alpha \cos \alpha_0) = (w_0 + \Delta w)(\cos \alpha_0 - \Delta \alpha \sin \alpha_0) \quad (2.66)$$

Nous négligeons les produits des petites variations des paramètres, par exemple $\Delta \alpha \Delta u$ et $\Delta \alpha \Delta w$:

$$\Delta \alpha \Delta u = \Delta \alpha \Delta w = 0 \quad (2.67)$$

Nous remplaçons les équations (2.67) dans l'équation (2.66) qui devient :

$$u_0 \sin \alpha_0 + u_0 \Delta \alpha \cos \alpha_0 + \Delta u \cdot \sin \alpha_0 = w_0 \cos \alpha_0 - w_0 \Delta \alpha \sin \alpha_0 + \Delta w \cdot \cos \alpha_0 \quad (2.68)$$

L'équation (2.62) à l'équilibre s'écrit sous la forme suivante :

$$u_0 \sin \alpha_0 = w_0 \cos \alpha_0 \quad (2.69)$$

Nous introduisons l'équation (2.69) dans l'équation (2.68) et nous obtenons :

$$(u_0 \cos \alpha_0 + w_0 \sin \alpha_0) \Delta \alpha = -\Delta u \cdot \sin \alpha_0 + \Delta w \cdot \cos \alpha_0 \quad (2.70)$$

Nous remplaçons les équations (2.59) dans l'équation (2.70) et nous obtenons :

$$(V_0 \cos^2 \alpha_0 + V_0 \sin^2 \alpha_0) \Delta \alpha = -\Delta u \cdot \sin \alpha_0 + \Delta w \cdot \cos \alpha_0 \quad (2.71)$$

Nous utilisons l'égalité trigonométrique $\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 = 1$ dans l'équation (2.71), alors la variation de l'angle d'attaque $\Delta \alpha$ s'écrit avec l'équation suivante:

$$\Delta \alpha = \frac{-\sin \alpha_0}{V_0} \Delta u + \frac{\cos \alpha_0}{V_0} \Delta w \quad (2.72)$$

2.5.3 Calculs de la variation de l'angle de dérapage $\Delta \beta$ à partir de l'équilibre

La troisième équation du système d'équations (2.52) peut s'écrire, pour des petites variations de l'angle de dérapage $\Delta \beta$ et en tenant compte que $\beta_0 = 0$:

$$\tan(\beta_0 + \Delta \beta) \approx \tan \Delta \beta \approx \Delta \beta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + w^2}} \quad (2.73)$$

Nous exprimons $\Delta \beta$ sous forme des sommes des produits entre les dérivées de β par rapport aux u , v et w à l'équilibre et les petites perturbations en u , v et w :

$$\Delta \beta = \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right)_0 \Delta u + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v} \right)_0 \Delta v + \left(\frac{\partial \beta}{\partial w} \right)_0 \Delta w \quad (2.74)$$

Les expressions des dérivées de l'angle de dérapage β à partir de l'équilibre sont calculées par la dérivation de β donnée par l'équation (2.73) :

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)_0 &= \frac{1}{1 + \frac{v_0^2}{u_0^2 + w_0^2}} \cdot v_0 \cdot \left[-\frac{1}{2}\right] \frac{1}{(\sqrt{u_0^2 + w_0^2})^3} \cdot 2u_0 = 0 \\
 \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)_0 &= \frac{1}{1 + \frac{v_0^2}{u_0^2 + w_0^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{u_0^2 + w_0^2}} = \frac{\sqrt{u_0^2 + w_0^2}}{u_0^2 + w_0^2 + v_0^2} = \frac{\sqrt{u_0^2 + w_0^2}}{u_0^2 + w_0^2} = \frac{1}{V_0} \\
 \left(\frac{\partial \beta}{\partial w}\right)_0 &= \frac{1}{1 + \frac{v_0^2}{u_0^2 + w_0^2}} \cdot v_0 \cdot \left[-\frac{1}{2}\right] \frac{1}{(\sqrt{u_0^2 + w_0^2})^3} \cdot 2w_0 = 0
 \end{aligned} \right\} (2.75)$$

car $v_0 = 0$ et $V_0^2 = u_0^2 + w_0^2$ (voir l'équation (2.57)).

Nous remplaçons les équations du système (2.75) dans l'équation (2.74) et nous obtenons :

$$\Delta \beta = \frac{1}{V_0} \Delta v \quad (2.76)$$

2.5.4 L'obtention du système matriciel d'équations

Les équations (2.61), (2.72) et (2.76) démontrées à la fin des sections 2.5.1, 2.5.2 et 2.5.3 sont réarrangées sous la forme d'un système matriciel d'équations :

$$\begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta \alpha \\ \Delta \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 & 0 & \sin \alpha_0 \\ -\frac{\sin \alpha_0}{V_0} & 0 & \frac{\cos \alpha_0}{V_0} \\ 0 & \frac{1}{V_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Nous ajoutons le système d'équations (2.77) aux équations initiales des sorties du Bloc 4 qui deviennent des entrées du Bloc 5 et nous obtenons un plus grand système matriciel d'équations :

$$\begin{pmatrix} \Delta q \\ \Delta \alpha \\ \Delta V \\ \Delta \theta \\ \Delta H \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \beta \\ \Delta \phi \end{pmatrix} = B_m \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \\ \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \\ \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

où

$$B_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sin \alpha_0}{V_0} & 0 & \frac{\cos \alpha_0}{V_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_0 & 0 & \sin \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{V_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

2.6 Description du Bloc 6

Les paramètres initiaux du système matriciel (2.78) sont les suivants :

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ \alpha_0 \\ V_0 \\ \theta_0 \\ H_0 \\ p_0 \\ r_0 \\ \beta_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{0_NASA} \\ V_{0_NASA} \\ \theta_{0_NASA} \\ H_{0_NASA} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

et sont fournis par les chercheurs des laboratoires de la NASA DFRC dans les fichiers des coefficients de stabilité et commande pour chaque condition de vol caractérisée par le nombre de Mach, l'altitude, l'angle d'attaque.

2.7 Description du Bloc 7

Nous calculons la densité de l'air ρ en fonction de l'altitude H . Nous utilisons la loi de gaz pour exprimer la pression statique p_s en fonction de T :

$$p_s = \rho RT \quad (2.81)$$

La pression statique au niveau de la mer p_{s0} est exprimée comme suit :

$$p_{s0} = \rho_0 RT_0 \quad (2.82)$$

Nous divisons l'équation (2.81) par l'équation (2.82) et nous obtenons :

$$\frac{p_s}{p_{s0}} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0} \quad (2.83)$$

Dans la région de la troposphère, nous utilisons l'équation suivante :

$$T = T_0 - LH \quad (2.84)$$

où L est le taux de variation de la température T avec l'altitude H . Nous introduisons la température T exprimée par l'équation (2.84) dans l'équation (2.83) nous obtenons :

$$\frac{p_s}{p_{s0}} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T_0 - LH}{T_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{LH}{T_0}\right) \quad (2.85)$$

Nous connaissons la relation entre la pression statique au niveau de la mer et la pression statique à l'altitude H [11]:

$$p_s = p_{s0} \left(1 - \frac{LH}{T_0}\right)^{\frac{g_0}{LR}} \quad (2.86)$$

Nous remplaçons le rapport p_s / p_{s0} donné par l'équation (2.86) dans l'équation (2.85) et nous obtenons :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{LH}{T_0}\right)^{\frac{g_0}{LR} - 1} \quad (2.87)$$

où ρ_0 est la densité de l'air au sol, T_0 est la température de l'air au sol, H est l'altitude, R est la constante de gaz et g_0 est la constante gravitationnelle au niveau de la mer.

2.8 Description du Bloc 8

La pression dynamique q_{dyn} est calculée en fonction de la vitesse vraie de l'avion V et de la densité de l'air ρ comme suite :

$$q_{dyn} = \frac{\rho V^2}{2} \quad (2.88)$$

où ρ est la densité dépendante de l'altitude H et V la vitesse vraie de l'avion.

2.9 Description du Bloc 9

Les entrées de commande sont excitées à l'aide des différents signaux. Ces entrées sont les suivantes : les entrées données par les volets au bord d'attaque $\Delta l_{ef} = \Delta \delta_{LEF}$ (Leading Edge LE flaps), les volets au bord de fuite $\Delta t_{ef} = \Delta \delta_{TEF}$ (Trailing Edge TE flaps), les ailerons $\Delta a_{il} = \Delta \delta_{AIL}$, l'empennage horizontal $\Delta h_t = \Delta \delta_{HT}$ (Horizontal Tail HT) et la gouverne de direction $\Delta r_{ud} = \Delta \delta_{RUD}$ (rudder). Les entrées sont valables pour le mouvement longitudinal et latéral de l'avion.

Nous avons utilisé un signal à la fois, sur les entrées de commande de l'avion, qui nous donne une déviation de $\pm 5^\circ$ autour de la position de l'équilibre de l'avion (*trim*) pour le mouvement longitudinal ainsi que pour le mouvement latéral de l'avion afin d'observer la variation des forces et des moments dans le temps. Avec ce type de signal nous pouvons observer clairement le comportement de l'avion autour de sa position de l'équilibre (*trim*). Des simulations ont été effectuées pour d'autres variations tel que $\pm 10^\circ$ et $\pm 15^\circ$. Suite à ces variations, la stabilité de l'avion et les résultats ont été validés mais les résultats présentés dans ce mémoire sont ceux pour une déviation de $\pm 5^\circ$.

Nous avons donné un signal sur l'empennage horizontal pour le mouvement longitudinal et pour le mouvement latéral nous avons donné un signal sur les ailerons. Le signal utilisé dans les simulations avait la forme montrée dans la Figure 16 suivante :

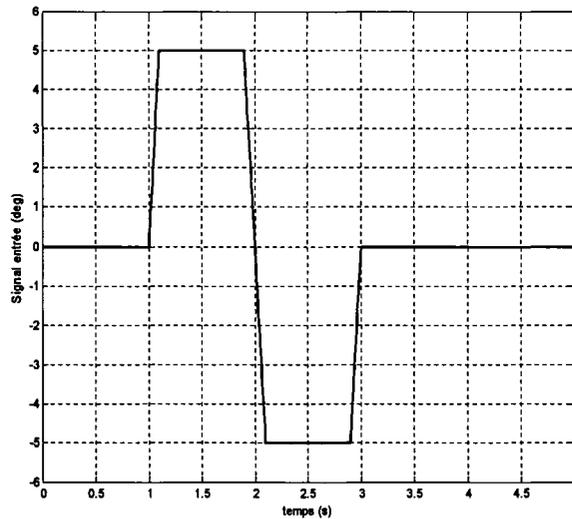


Figure 16 Type d'entrée sur les surfaces de commande utilisée (doublet) lors de la simulation de l'avion F/A-18

Nous avons donc vu dans ce chapitre les détails des neuf blocs qui constituent le système à analyser. Maintenant que nous avons pu acquérir une vue d'ensemble du système, nous allons passer au pas suivant dans lequel nous allons développer la deuxième formulation à partir de la première formulation pour l'analyse de l'avion F/A-18.

CHAPITRE 3

INTRODUCTION DES VARIABLES D'ÉTATS DANS LA BOUCLE DE RETOUR

Nous avons présenté dans le chapitre 1 une première formulation de la problématique considérée et nous avons présenté les détails de cette formulation dans le chapitre 2. Dans le chapitre 3, nous allons développer une deuxième formulation à partir de la première formulation qui exige d'obtenir dans la boucle de retour les vecteurs des coordonnées généralisées et leurs dérivées dans le temps:

$$\begin{aligned}\eta &= (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i, \Delta \phi, \Delta \theta, \Delta \psi)^T \\ \dot{\eta} &= (\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z, \Delta \dot{\phi}, \Delta \dot{\theta}, \Delta \dot{\psi})^T\end{aligned}\tag{3.1}$$

3.1 Calcul des matrices C et D qui caractérisent le système linéaire au point de fonctionnement

Pour calculer les matrices C et D qui caractérise le système linéaire au point de fonctionnement, nous allons arranger les coefficients de stabilité sur les lignes 1 à 6 des matrices utilisées dans la première formulation. L'ordre d'arrangement de ces matrices qu'on peut voir dans l'équation (2.3) est le suivant : $C_L, C_M, C_N, C_D, C_{Lift}, C_Y$. Dans le but de réaliser la deuxième formulation, il est nécessaire de réarranger l'ordre des coefficients des dérivées de stabilité et de commande sur les lignes 1 à 6 comme suit: $C_D, C_Y, C_{Lift}, C_L, C_M, C_N$.

3.1.1 Réarrangement de l'ordre des coefficients des dérivées de stabilité et de commande dans les données initiales

Nous introduisons les notations A_{int} , B_{long_int} et B_{lat_int} pour les matrices A , B_{long} et B_{lat} intermédiaires, utilisées dans la deuxième formulation et exprimées par les équations (3.2), (3.3.1) et (3.3.2) dans lesquelles l'ordre des coefficients est réarrangé.

$$A_{int} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_D}{\partial q} & \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_D}{\partial V} & \frac{\partial C_D}{\partial \theta} & \frac{\partial C_D}{\partial H} & \frac{\partial C_D}{\partial p} & \frac{\partial C_D}{\partial r} & \frac{\partial C_D}{\partial \beta} & \frac{\partial C_D}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial C_Y}{\partial q} & \frac{\partial C_Y}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_Y}{\partial V} & \frac{\partial C_Y}{\partial \theta} & \frac{\partial C_Y}{\partial H} & \frac{\partial C_Y}{\partial p} & \frac{\partial C_Y}{\partial r} & \frac{\partial C_Y}{\partial \beta} & \frac{\partial C_Y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial C_{Lift}}{\partial q} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial V} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \theta} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial H} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial p} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial r} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \beta} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial C_L}{\partial q} & \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_L}{\partial V} & \frac{\partial C_L}{\partial \theta} & \frac{\partial C_L}{\partial H} & \frac{\partial C_L}{\partial p} & \frac{\partial C_L}{\partial r} & \frac{\partial C_L}{\partial \beta} & \frac{\partial C_L}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial C_M}{\partial q} & \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_M}{\partial V} & \frac{\partial C_M}{\partial \theta} & \frac{\partial C_M}{\partial H} & \frac{\partial C_M}{\partial p} & \frac{\partial C_M}{\partial r} & \frac{\partial C_M}{\partial \beta} & \frac{\partial C_M}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial C_N}{\partial q} & \frac{\partial C_N}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_N}{\partial V} & \frac{\partial C_N}{\partial \theta} & \frac{\partial C_N}{\partial H} & \frac{\partial C_N}{\partial p} & \frac{\partial C_N}{\partial r} & \frac{\partial C_N}{\partial \beta} & \frac{\partial C_N}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$B_{long_int} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{long_AIL}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{long_HT}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{long_RUD}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{long_LEF}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{long_TEF}} \\ \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{long_AIL}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{long_HT}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{long_RUD}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{long_LEF}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{long_TEF}} \\ \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{long_AIL}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{long_HT}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{long_RUD}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{long_LEF}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{long_TEF}} \\ \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_AIL}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_HT}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_RUD}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_LEF}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{long_TEF}} \\ \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{long_AIL}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{long_HT}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{long_RUD}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{long_LEF}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{long_TEF}} \\ \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{long_AIL}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{long_HT}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{long_RUD}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{long_LEF}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{long_TEF}} \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

$$B_{lat_int} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{lat_AIL}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{lat_HT}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{lat_RUD}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{lat_LEF}} & \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{lat_TEF}} \\ \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{lat_AIL}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{lat_HT}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{lat_RUD}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{lat_LEF}} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_{lat_TEF}} \\ \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{lat_AIL}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{lat_HT}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{lat_RUD}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{lat_LEF}} & \frac{\partial C_{Lift}}{\partial \delta_{lat_TEF}} \\ \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_AIL}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_HT}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_RUD}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_LEF}} & \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{lat_TEF}} \\ \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{lat_AIL}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{lat_HT}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{lat_RUD}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{lat_LEF}} & \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{lat_TEF}} \\ \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{lat_AIL}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{lat_HT}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{lat_RUD}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{lat_LEF}} & \frac{\partial C_N}{\partial \delta_{lat_TEF}} \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

D'où la nouvelle matrice A_{m_int} aura la forme suivante :

$$A_{m_int} = \begin{bmatrix} A_{int} & B_{long_int} & B_{lat_int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{4,1} & a_{4,2} & \dots & a_{4,19} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & \dots & a_{6,19} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & \dots & a_{5,19} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,19} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,19} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{m1_int} & A_{m2_int} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

où A_{m1_int} est la matrice des coefficients de stabilité et sa forme analytique est donnée dans l'équation (3.5). La matrice A_{m2_int} est la matrice des coefficients de commande $[B_{long_int} \ B_{lat_int}]$ et sa forme analytique est exprimée par l'équation (3.6).

$$A_{m1_int} = \begin{bmatrix} a_{4,1} & a_{4,2} & \dots & a_{4,9} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & \dots & a_{6,9} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & \dots & a_{5,9} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,9} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,9} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,9} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$A_{m2_int} = \begin{bmatrix} B_{long_int} & B_{lat_int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{4,10} & a_{4,11} & \dots & a_{4,19} \\ a_{6,10} & a_{6,11} & \dots & a_{6,19} \\ a_{5,10} & a_{5,11} & \dots & a_{5,19} \\ a_{1,10} & a_{1,11} & \dots & a_{1,19} \\ a_{2,10} & a_{2,11} & \dots & a_{2,19} \\ a_{3,10} & a_{3,11} & \dots & a_{3,19} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Les équations (3.5) et (3.6) servent à écrire la deuxième équation (3.7) d'un système écrit sous la forme:

$$\begin{pmatrix} \Delta C_D \\ \Delta C_Y \\ \Delta C_{Lift} \\ \Delta C_L \\ \Delta C_M \\ \Delta C_N \end{pmatrix} = A_{m1_int} \begin{pmatrix} \Delta q \\ \Delta \alpha \\ \Delta V \\ \Delta \theta \\ \Delta H \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \beta \\ \Delta \phi \end{pmatrix} + A_{m2_int} \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Nous remplaçons l'équation (2.78) dans le premier terme à la droite de l'équation (3.7) et nous obtenons:

$$\begin{pmatrix} \Delta C_D \\ \Delta C_Y \\ \Delta C_{Lift} \\ \Delta C_L \\ \Delta C_M \\ \Delta C_N \end{pmatrix} = A_{m1_int} B_m \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \\ \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \\ \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + A_{m2_int} \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Nous remplaçons le vecteur donné par l'équation (3.8) dans l'équation (2.20) pour calculer les forces et les moments dans le système de coordonnées lié à l'avion :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \\ \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} = C_m A_{m1_int} B_m \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \\ \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \\ \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + C_m A_{m2_int} \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{cases} C = C_m A_{m1_int} B_m \\ D = C_m A_{m2_int} \end{cases} \quad (3.10)$$

Nous remplaçons les équations (3.10) dans l'équation (3.9) :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \\ \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \\ \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \\ \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Nous avons obtenu les matrices C et D qui caractérisent le système linéaire au point de fonctionnement et la prochaine étape sera le calcul de ces matrices. Le schéma montré dans la Figure 17 représente la 'conversion' du schéma montrée dans la Figure 6 ayant sur la boucle de retour les 12 états x du système qui se trouvent dans l'équation (3.11). Le nouveau système linéaire converti a la forme suivante :

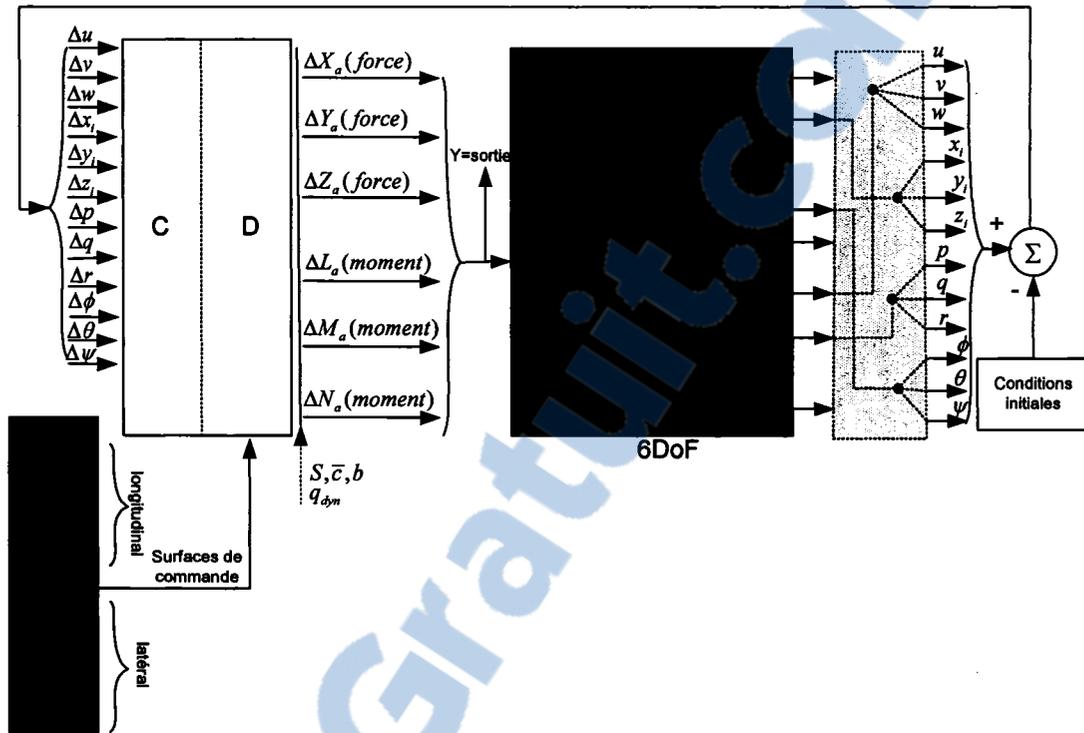


Figure 17 Schéma de simulation avec les 12 états du système sur la boucle de retour

3.1.2 Calcul de la matrice C qui caractérise le système linéaire au point de fonctionnement

Nous représentons analytiquement les éléments des matrices C . La matrice C a la forme analytique suivante:

$$C = C_m A_{m1} B_m = \begin{pmatrix} C11 & C12 & C13 & C14 \\ C21 & C22 & C23 & C24 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

où les matrices $C11$, $C12$, $C13$, $C14$, $C21$, $C22$, $C23$ et $C24$ sont considérées sous les formes analytiques suivantes :

$$C11 = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix} \quad (3.13.1)$$

$$C12 = \begin{pmatrix} c_{1,4} & c_{1,5} & c_{1,6} \\ c_{2,4} & c_{2,5} & c_{2,6} \\ c_{3,4} & c_{3,5} & c_{3,6} \end{pmatrix} \quad (3.13.2)$$

$$C13 = \begin{pmatrix} c_{1,7} & c_{1,8} & c_{1,9} \\ c_{2,7} & c_{2,8} & c_{2,9} \\ c_{3,7} & c_{3,8} & c_{3,9} \end{pmatrix} \quad (3.13.3)$$

$$C14 = \begin{pmatrix} c_{1,10} & c_{1,11} & c_{1,12} \\ c_{2,10} & c_{2,11} & c_{2,12} \\ c_{3,10} & c_{3,11} & c_{3,12} \end{pmatrix} \quad (3.13.4)$$

$$C21 = \begin{pmatrix} c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} \\ c_{5,1} & c_{5,2} & c_{5,3} \\ c_{6,1} & c_{6,2} & c_{6,3} \end{pmatrix} \quad (3.13.5)$$

$$C22 = \begin{pmatrix} c_{4,4} & c_{4,5} & c_{4,6} \\ c_{5,4} & c_{5,5} & c_{5,6} \\ c_{6,4} & c_{6,5} & c_{6,6} \end{pmatrix} \quad (3.13.6)$$

$$C23 = \begin{pmatrix} c_{4,7} & c_{4,8} & c_{4,9} \\ c_{5,7} & c_{5,8} & c_{5,9} \\ c_{6,7} & c_{6,8} & c_{6,9} \end{pmatrix} \quad (3.13.7)$$

$$C24 = \begin{pmatrix} c_{4,10} & c_{4,11} & c_{4,12} \\ c_{5,10} & c_{5,11} & c_{5,12} \\ c_{6,10} & c_{6,11} & c_{6,12} \end{pmatrix} \quad (3.13.8)$$

La matrice B_m est exprimée par l'équation (2.79) et la matrice A_{m1_int} est donnée par l'équation (3.5). Leur produit est le suivant :

$$A_{m1}B_m = \begin{pmatrix}
 -a_{4,2} \frac{\sin \alpha_0}{V_0} + a_{4,3} \cos \alpha_0 & \frac{a_{4,8}}{V_0} & a_{4,2} \frac{\cos \alpha_0}{V_0} + a_{4,3} \sin \alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\
 -a_{6,2} \frac{\sin \alpha_0}{V_0} + a_{6,3} \cos \alpha_0 & \frac{a_{6,8}}{V_0} & a_{6,2} \frac{\cos \alpha_0}{V_0} + a_{6,3} \sin \alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\
 -a_{5,2} \frac{\sin \alpha_0}{V_0} + a_{5,3} \cos \alpha_0 & \frac{a_{5,8}}{V_0} & a_{5,2} \frac{\cos \alpha_0}{V_0} + a_{5,3} \sin \alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\
 -a_{1,2} \frac{\sin \alpha_0}{V_0} + a_{1,3} \cos \alpha_0 & \frac{a_{1,8}}{V_0} & a_{1,2} \frac{\cos \alpha_0}{V_0} + a_{1,3} \sin \alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\
 -a_{2,2} \frac{\sin \alpha_0}{V_0} + a_{2,3} \cos \alpha_0 & \frac{a_{2,8}}{V_0} & a_{2,2} \frac{\cos \alpha_0}{V_0} + a_{2,3} \sin \alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\
 -a_{3,2} \frac{\sin \alpha_0}{V_0} + a_{3,3} \cos \alpha_0 & \frac{a_{3,8}}{V_0} & a_{3,2} \frac{\cos \alpha_0}{V_0} + a_{3,3} \sin \alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & a_{4,5} & a_{4,6} & a_{4,1} & a_{4,7} & a_{4,9} & a_{4,4} & 0 \\
 \dots & a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,1} & a_{6,7} & a_{6,9} & a_{6,4} & 0 \\
 \dots & a_{5,5} & a_{5,6} & a_{5,1} & a_{5,7} & a_{5,9} & a_{5,4} & 0 \\
 \dots & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,1} & a_{1,7} & a_{1,9} & a_{1,4} & 0 \\
 \dots & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,1} & a_{2,7} & a_{2,9} & a_{2,4} & 0 \\
 \dots & a_{3,5} & a_{3,6} & a_{3,1} & a_{3,7} & a_{3,9} & a_{3,4} & 0
 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

La matrice C donné par l'équation (3.12) est le produit entre la matrice C_m exprimée par l'équation (2.21) et le produit des matrices $A_{m1}B_m$ donné par l'équation (3.14), alors les éléments de la matrice C sont trouvés par indentation :

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= \bar{S} \cdot \left(\frac{a_{4,2} \cdot \sin 2\alpha_0}{2V_0} - a_{4,3} \cdot \cos^2 \alpha_0 - \frac{a_{5,2} \cdot \sin^2 \alpha_0}{V_0} + \frac{a_{5,3} \cdot \sin 2\alpha_0}{2} \right) \\
c_{1,2} &= \bar{S} \cdot \left(-\frac{a_{4,8} \cdot \cos \alpha_0}{V_0} + \frac{a_{5,8} \cdot \sin \alpha_0}{V_0} \right) \\
c_{1,3} &= \bar{S} \cdot \left(\frac{-a_{4,2} \cdot \cos^2 \alpha_0}{V_0} - \frac{a_{4,3} \cdot \sin 2\alpha_0}{2} + \frac{a_{5,2} \cdot \sin 2\alpha_0}{2V_0} + a_{5,3} \cdot \sin^2 \alpha_0 \right) \\
c_{1,4} &= 0 \\
c_{1,5} &= 0 \\
c_{1,6} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,5} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,5} \cdot \sin \alpha_0) \\
c_{1,7} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,6} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,6} \cdot \sin \alpha_0) \\
c_{1,8} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,1} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,1} \cdot \sin \alpha_0) \\
c_{1,9} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,7} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,7} \cdot \sin \alpha_0) \\
c_{1,10} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,9} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,9} \cdot \sin \alpha_0) \\
c_{1,11} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,4} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,4} \cdot \sin \alpha_0) \\
c_{1,12} &= 0
\end{aligned} \tag{3.15.1}$$

$$\begin{aligned}
c_{2,1} &= \bar{S} \cdot \left(-\frac{a_{6,2} \cdot \sin \alpha_0}{V_0} + a_{6,3} \cdot \cos \alpha_0 \right) & c_{2,2} &= \bar{S} \cdot \frac{a_{6,8}}{V_0} \\
c_{2,3} &= \bar{S} \cdot \left(\frac{a_{6,2} \cdot \cos \alpha_0}{V_0} + a_{6,3} \cdot \sin \alpha_0 \right) & c_{2,4} &= 0 \\
c_{2,5} &= 0 & c_{2,6} &= \bar{S} \cdot a_{6,5} \\
c_{2,7} &= \bar{S} \cdot a_{6,6} & c_{2,8} &= \bar{S} \cdot a_{6,1} \\
c_{2,9} &= \bar{S} \cdot a_{6,7} & c_{2,10} &= \bar{S} \cdot a_{6,9} \\
c_{2,11} &= \bar{S} \cdot a_{6,4} & c_{2,12} &= 0
\end{aligned} \tag{3.15.2}$$

$$\begin{aligned}
c_{3,1} &= \bar{S} \cdot \left(\frac{a_{4,2} \cdot \sin^2 \alpha_0}{V_0} - \frac{a_{4,3} \cdot \sin 2\alpha_0}{2} + \frac{a_{5,2} \cdot \sin 2\alpha_0}{2V_0} - a_{5,3} \cdot \cos^2 \alpha_0 \right) \\
c_{3,2} &= \bar{S} \cdot \left(-\frac{a_{4,8} \cdot \sin \alpha_0}{V_0} - \frac{a_{5,8} \cdot \cos \alpha_0}{V_0} \right) \\
c_{3,3} &= \bar{S} \cdot \left(-\frac{a_{4,2} \cdot \sin 2\alpha_0}{2V_0} - a_{4,3} \cdot \sin^2 \alpha_0 - \frac{a_{5,2} \cdot \cos^2 \alpha_0}{V_0} - \frac{a_{5,3} \cdot \sin 2\alpha_0}{2} \right) \\
c_{3,4} &= 0 \\
c_{3,5} &= 0 \\
c_{3,6} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,5} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,5} \cdot \cos \alpha_0) \\
c_{3,7} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,6} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,6} \cdot \cos \alpha_0) \\
c_{3,8} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,1} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,1} \cdot \cos \alpha_0) \\
c_{3,9} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,7} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,7} \cdot \cos \alpha_0) \\
c_{3,10} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,9} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,9} \cdot \cos \alpha_0) \\
c_{3,11} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,4} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,4} \cdot \cos \alpha_0) \\
c_{3,6} &= 0 \\
c_{4,1} &= \bar{S} \cdot b \cdot \left(-\frac{a_{1,2} \cdot \sin 2\alpha_0}{2V_0} + a_{1,3} \cdot \cos^2 \alpha_0 + \frac{a_{3,2} \cdot \sin^2 \alpha_0}{V_0} - \frac{a_{3,3} \cdot \sin 2\alpha_0}{2} \right) \\
c_{4,2} &= \bar{S} \cdot b \cdot \left(\frac{a_{1,8} \cdot \cos \alpha_0}{V_0} - \frac{a_{3,8} \cdot \sin \alpha_0}{V_0} \right) \\
c_{4,3} &= \bar{S} \cdot b \cdot \left(\frac{a_{1,2} \cdot \cos^2 \alpha_0}{V_0} + \frac{a_{1,3} \cdot \sin 2\alpha_0}{2} - \frac{a_{3,2} \cdot \sin 2\alpha_0}{2V_0} - a_{3,3} \cdot \sin^2 \alpha_0 \right) \\
c_{4,4} &= 0 \\
c_{4,5} &= 0 \\
c_{4,6} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,5} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,5} \cdot \sin \alpha_0) \\
c_{4,7} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,6} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,6} \cdot \sin \alpha_0)
\end{aligned} \tag{3.15.3}$$

$$\begin{aligned}
c_{4,8} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,1} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,1} \cdot \sin \alpha_0) \\
c_{4,9} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,7} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,7} \cdot \sin \alpha_0) \\
c_{4,10} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,9} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,9} \cdot \sin \alpha_0) \\
c_{4,11} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,4} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,4} \cdot \sin \alpha_0) \\
c_{4,12} &= 0
\end{aligned} \tag{3.15.4}$$

$$\begin{aligned}
c_{5,1} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot \left(-\frac{a_{2,2} \cdot \sin \alpha_0}{V_0} + a_{2,3} \cdot \cos \alpha_0 \right) \\
c_{5,2} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot \frac{a_{2,8}}{V_0} \\
c_{5,3} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot \left(\frac{a_{2,2} \cdot \cos \alpha_0}{V_0} + a_{2,3} \cdot \sin \alpha_0 \right) \\
c_{5,4} &= 0 \\
c_{5,5} &= 0 \\
c_{5,6} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,5} \\
c_{5,7} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,6} \\
c_{5,8} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,1} \\
c_{5,9} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,7} \\
c_{5,10} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,9} \\
c_{5,11} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,4} \\
c_{5,12} &= 0
\end{aligned} \tag{3.15.5}$$

$$\begin{aligned}
c_{6,1} &= \bar{S} \cdot b \cdot \left(-\frac{a_{1,2} \cdot \sin^2 \alpha_0}{V_0} + \frac{a_{1,3} \cdot \sin 2\alpha_0}{2} - \frac{a_{3,2} \cdot \sin 2\alpha_0}{2V_0} + a_{3,3} \cdot \cos^2 \alpha_0 \right) \\
c_{6,2} &= \bar{S} \cdot b \cdot \left(\frac{a_{1,8} \cdot \sin \alpha_0}{V_0} + \frac{a_{3,8} \cdot \cos \alpha_0}{V_0} \right) \\
c_{6,3} &= \bar{S} \cdot b \cdot \left(\frac{a_{1,2} \cdot \sin 2\alpha_0}{2V_0} + a_{1,3} \cdot \sin^2 \alpha_0 + \frac{a_{3,2} \cdot \cos^2 \alpha_0}{V_0} + \frac{a_{3,3} \cdot \sin 2\alpha_0}{2} \right) \\
c_{6,4} &= 0 \\
c_{6,5} &= 0 \\
c_{6,6} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,5} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,5} \cdot \cos \alpha_0) \\
c_{6,7} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,6} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,6} \cdot \cos \alpha_0) \\
c_{6,8} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,1} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,1} \cdot \cos \alpha_0) \\
c_{6,9} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,7} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,7} \cdot \cos \alpha_0) \\
c_{6,10} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,9} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,9} \cdot \cos \alpha_0) \\
c_{6,11} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,4} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,4} \cdot \cos \alpha_0) \\
c_{6,12} &= 0
\end{aligned} \tag{3.15.6}$$

3.1.3 Calcul de la matrice D qui caractérise le système linéaire au point de fonctionnement

Les éléments de la matrice D peuvent s'écrire sous la forme analytique suivante :

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,10} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{6,1} & d_{6,2} & \cdots & d_{6,10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D1 \\ D2 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

où les matrices $D1$ et $D2$ ont les formes analytiques suivantes :

$$D1 = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & d_{1,5} & d_{1,6} & d_{1,7} & d_{1,8} & d_{1,9} & d_{1,10} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & d_{2,5} & d_{2,6} & d_{2,7} & d_{2,8} & d_{2,9} & d_{2,10} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{3,4} & d_{3,5} & d_{3,6} & d_{3,7} & d_{3,8} & d_{3,9} & d_{3,10} \end{pmatrix} \tag{3.17.1}$$

$$D2 = \begin{pmatrix} d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & d_{4,5} & d_{4,6} & d_{4,7} & d_{4,8} & d_{4,9} & d_{4,10} \\ d_{5,1} & d_{5,2} & d_{5,3} & d_{5,4} & d_{5,5} & d_{5,6} & d_{5,7} & d_{5,8} & d_{5,9} & d_{5,10} \\ d_{6,1} & d_{6,2} & d_{6,3} & d_{6,4} & d_{6,5} & d_{6,6} & d_{6,7} & d_{6,8} & d_{6,9} & d_{6,10} \end{pmatrix} \quad (3.17.2)$$

La matrice $D = \begin{pmatrix} D1 \\ D2 \end{pmatrix} = C_m A_{m2_int}$ est le produit entre les matrices C_m donnée par l'équation (2.21) et A_{m2_int} donnée par l'équation (3.6). Nous calculons par identification les éléments de la matrice D donc des matrices $D1$ et $D2$:

$$\begin{aligned} d_{1,1} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,10} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,10} \cdot \sin \alpha_0) & d_{2,1} &= \bar{S} \cdot a_{6,10} \\ d_{1,2} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,11} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,11} \cdot \sin \alpha_0) & d_{2,2} &= \bar{S} \cdot a_{6,11} \\ d_{1,3} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,12} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,12} \cdot \sin \alpha_0) & d_{2,3} &= \bar{S} \cdot a_{6,12} \\ d_{1,4} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,13} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,13} \cdot \sin \alpha_0) & d_{2,4} &= \bar{S} \cdot a_{6,13} \\ d_{1,5} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,14} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,14} \cdot \sin \alpha_0) & d_{2,5} &= \bar{S} \cdot a_{6,14} \\ d_{1,6} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,15} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,15} \cdot \sin \alpha_0) & d_{2,6} &= \bar{S} \cdot a_{6,15} \\ d_{1,7} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,16} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,16} \cdot \sin \alpha_0) & d_{2,7} &= \bar{S} \cdot a_{6,16} \\ d_{1,8} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,17} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,17} \cdot \sin \alpha_0) & d_{2,8} &= \bar{S} \cdot a_{6,17} \\ d_{1,9} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,18} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,18} \cdot \sin \alpha_0) & d_{2,9} &= \bar{S} \cdot a_{6,18} \\ d_{1,10} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,19} \cdot \cos \alpha_0 + a_{5,19} \cdot \sin \alpha_0) & d_{2,10} &= \bar{S} \cdot a_{6,19} \end{aligned} \quad (3.18.1)$$

$$\begin{aligned} d_{3,1} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,10} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,10} \cdot \cos \alpha_0) & d_{3,2} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,11} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,11} \cdot \cos \alpha_0) \\ d_{3,3} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,12} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,12} \cdot \cos \alpha_0) & d_{3,4} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,13} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,13} \cdot \cos \alpha_0) \\ d_{3,5} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,14} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,14} \cdot \cos \alpha_0) & d_{3,6} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,15} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,15} \cdot \cos \alpha_0) \\ d_{3,7} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,16} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,16} \cdot \cos \alpha_0) & d_{3,8} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,17} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,17} \cdot \cos \alpha_0) \\ d_{3,9} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,18} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,18} \cdot \cos \alpha_0) & d_{3,10} &= \bar{S} \cdot (-a_{4,19} \cdot \sin \alpha_0 - a_{5,19} \cdot \cos \alpha_0) \end{aligned} \quad (3.18.2)$$

$$\begin{aligned}
d_{4,1} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,10} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,10} \cdot \sin \alpha_0) \\
d_{4,2} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,11} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,11} \cdot \sin \alpha_0) \\
d_{4,3} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,12} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,12} \cdot \sin \alpha_0) \\
d_{4,4} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,13} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,13} \cdot \sin \alpha_0) \\
d_{4,5} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,14} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,14} \cdot \sin \alpha_0) \\
d_{4,6} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,15} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,15} \cdot \sin \alpha_0) \\
d_{4,7} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,16} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,16} \cdot \sin \alpha_0) \\
d_{4,8} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,17} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,17} \cdot \sin \alpha_0) \\
d_{4,9} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,18} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,18} \cdot \sin \alpha_0) \\
d_{4,10} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,19} \cdot \cos \alpha_0 - a_{3,19} \cdot \sin \alpha_0)
\end{aligned} \tag{3.18.3}$$

$$\begin{aligned}
d_{5,1} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,10} & d_{6,1} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,10} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,10} \cdot \cos \alpha_0) \\
d_{5,2} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,11} & d_{6,2} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,11} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,11} \cdot \cos \alpha_0) \\
d_{5,3} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,12} & d_{6,3} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,12} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,12} \cdot \cos \alpha_0) \\
d_{5,4} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,13} & d_{6,4} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,13} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,13} \cdot \cos \alpha_0) \\
d_{5,5} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,14} & d_{6,5} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,14} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,14} \cdot \cos \alpha_0) \\
d_{5,6} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,15} & d_{6,6} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,15} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,15} \cdot \cos \alpha_0) \\
d_{5,7} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,16} & d_{6,7} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,16} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,16} \cdot \cos \alpha_0) \\
d_{5,8} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,17} & d_{6,8} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,17} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,17} \cdot \cos \alpha_0) \\
d_{5,9} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,18} & d_{6,9} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,18} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,18} \cdot \cos \alpha_0) \\
d_{5,10} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,19} & d_{6,10} &= \bar{S} \cdot b \cdot (a_{1,19} \cdot \sin \alpha_0 + a_{3,19} \cdot \cos \alpha_0)
\end{aligned} \tag{3.18.4}$$

3.2 Introduction des matrices C et D dans le système d'équation matricielle des forces et moments dans le but d'obtenir dans la boucle de retour les vecteurs η et $\dot{\eta}$ nécessaires aux calculs de forces aérodynamiques Q

Nous introduisons les matrices C et D données par les équations (3.15.1)-(3.15.6) et (3.18.1)-(3.18.4) dans l'équation (3.11) et nous obtenons l'équation matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \\ \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C11 & C12 & C13 & C14 \\ C21 & C22 & C23 & C24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \\ \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \\ \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D1 \\ D2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Nous séparons le système d'équations (3.19) dans deux différents systèmes d'équations (3.20.1) et (3.20.2) pour les variations des forces ΔX_a , ΔY_a et ΔZ_a et des moments ΔL_a , ΔM_a et ΔN_a et nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \end{pmatrix} = C11 \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} + C12 \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} + C13 \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{pmatrix} + C14 \begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + D1 \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \quad (3.20.1)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} = C21 \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} + C22 \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} + C23 \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{pmatrix} + C24 \begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + D2 \cdot \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \quad (3.20.2)$$

Dans l'équation (3.19), il existe des termes dans le système lié à l'avion (u , v , w , p , q et r) et des termes x_i , y_i , z_i , ϕ , θ et ψ dans le système lié à la terre (ou inertiel). Il faudra obtenir ces termes dans le même système de coordonnées, et nous avons choisi le système inertiel.

Deux types de linéarisations pour les vitesses linéaires u , v et w et des vitesses angulaires p , q et r sont réalisés. Le premier type de linéarisation concerne le calcul des vitesses linéaires u , v et w dans le système lié à l'avion à partir des vitesses linéaires et des angles d'Euler dans le système inertiel.

Avec les équations obtenues suite à cette linéarisation, nous remplaçons les valeurs pour les vitesses linéaires u , v et w dans les équations (3.20.1) et (3.20.2), nous obtenons ces vitesses dans le système inertiel. Ces calculs seront effectués à l'aide du bloc **I2B** présenté dans la Figure 18 (conversion du système inertiel i dans le système lié à l'avion a – en anglais : *body*).

3.2.1 Linéarisation par la théorie des petites perturbations des vitesses linéaires du système de coordonnées lié à la terre i pour l'obtention des vitesses linéaires dans le système des coordonnées lié à l'avion

Nous pouvons schématiser cette première linéarisation de façon suivante :

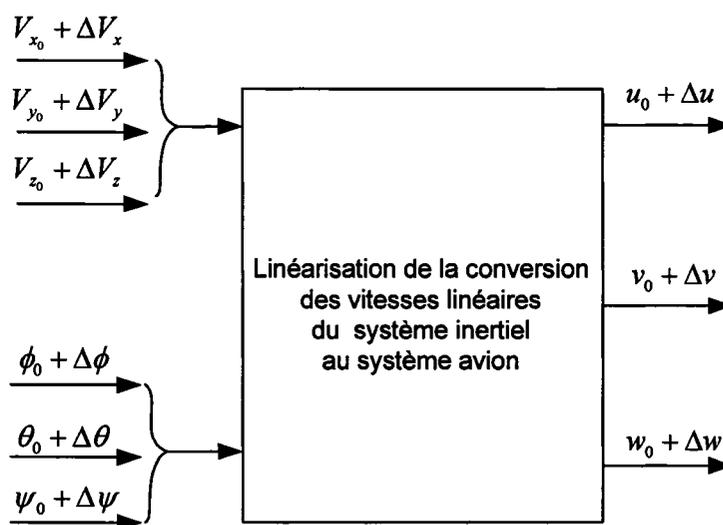


Figure 18 Schéma bloc de la linéarisation des vitesses linéaires et des angles d'Euler du système inertiel au système lié à l'avion

L'équation (2.49) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}_i \quad (3.21)$$

Par la théorie des petites perturbations, voir les équations (2.53), nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} u = u_0 + \Delta u \\ v = v_0 + \Delta v \\ w = w_0 + \Delta w \end{cases} \quad (3.22.1)$$

$$\begin{cases} V_x = V_{x_0} + \Delta V_x \\ V_y = V_{y_0} + \Delta V_y \\ V_z = V_{z_0} + \Delta V_z \end{cases} \quad (3.22.2)$$

$$\begin{cases} \phi = \phi_0 + \Delta \phi \\ \theta = \theta_0 + \Delta \theta \\ \psi = \psi_0 + \Delta \psi \end{cases} \quad (3.22.3)$$

Les valeurs des angles initiaux de roulis ϕ_0 , de tangage θ_0 et de lacet ψ_0 sont donnés par les laboratoires de la NASA DFRC (Dryden Flight Research Center) et ont les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} \phi_0 = 0 \\ \theta_0 = \alpha_0 \\ \psi_0 = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Nous remplaçons les équations (3.23) dans les équations (3.22.3) et nous obtenons :

$$\begin{cases} \phi = \Delta \phi \\ \theta = \theta_0 + \Delta \theta \\ \psi = \Delta \psi \end{cases} \quad (3.24)$$

d'où, pour les petites angles ϕ , ψ et $\Delta \theta$ nous obtenons les équations suivantes:

$$\sin \phi = \sin \Delta \phi = \Delta \phi \quad \sin \psi = \sin \Delta \psi = \Delta \psi \quad (3.25.1)$$

$$\cos \phi = \cos \Delta \phi = 1 \quad \cos \psi = \cos \Delta \psi = 1 \quad (3.25.2)$$

$$\sin \Delta\theta = \Delta\theta \quad \cos\Delta\theta = 1 \quad (3.25.3)$$

Nous remplaçons les équations (3.23), (3.24) et (3.25) dans l'équation (3.21) et nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \Delta u + u_0 \\ \Delta v + v_0 \\ \Delta w + w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + \Delta\theta) & \Delta\psi \cos(\theta_0 + \Delta\theta) & -\sin(\theta_0 + \Delta\theta) \\ \Delta\phi \sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \Delta\psi & 1 & \Delta\phi \cos(\theta_0 + \Delta\theta) \\ \sin(\theta_0 + \Delta\theta) & \Delta\psi \sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \Delta\phi & \cos(\theta_0 + \Delta\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{x_0} + \Delta V_x \\ V_{y_0} + \Delta V_y \\ V_{z_0} + \Delta V_z \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Nous développons les fonctions trigonométriques **cos** et **sin** des sommes des angles θ et θ_0 comme suit :

$$\begin{aligned} \cos(\theta_0 + \Delta\theta) &= \cos \theta_0 \cos \Delta\theta - \sin \theta_0 \sin \Delta\theta = \cos \theta_0 - \Delta\theta \sin \theta_0 \\ \sin(\theta_0 + \Delta\theta) &= \sin \theta_0 \cos \Delta\theta + \cos \theta_0 \sin \Delta\theta = \sin \theta_0 + \Delta\theta \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nous remplaçons l'équation (3.27) dans l'équation (3.26) et nous négligeons les produits des petits termes tels que $\Delta\phi\Delta\psi$, $\Delta\theta\Delta V_x$, $\Delta\theta\Delta V_z$, $\Delta\phi\Delta V_x$ et $\Delta\phi\Delta V_y$, alors nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta u + u_0 &= V_{x_0} \cos \theta_0 + \Delta V_x \cos \theta_0 - V_{x_0} \Delta\theta \sin \theta_0 \\ &\quad + \Delta\psi V_{y_0} \cos \theta_0 - V_{z_0} \sin \theta_0 - \Delta V_z \sin \theta_0 - V_{z_0} \Delta\theta \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (3.28.1)$$

$$\Delta v + v_0 = V_{x_0} \Delta\phi \sin \theta_0 - V_{x_0} \Delta\psi + V_{y_0} + \Delta V_y + V_{z_0} \Delta\phi \cos \theta_0 \quad (3.28.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta w + w_0 &= V_{x_0} \sin \theta_0 + \Delta V_x \sin \theta_0 + V_{x_0} \Delta\theta \cos \theta_0 + V_{y_0} \Delta\psi \sin \theta_0 \\ &\quad - V_{y_0} \Delta\phi + V_{z_0} \cos \theta_0 + \Delta V_z \cos \theta_0 - V_{z_0} \Delta\theta \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (3.28.3)$$

Les vitesses à l'équilibre V_{y_0} et V_{z_0} sont égales à 0, et nous remplaçons ces valeurs dans le set des équations (3.28.1 à 3.28.3) et nous obtenons le système d'équations :

$$\begin{cases} \Delta u + u_0 = V_{x_0} \cos \theta_0 + \Delta V_x \cos \theta_0 - V_{x_0} \Delta \theta \sin \theta_0 - \Delta V_z \sin \theta_0 \\ \Delta v + v_0 = V_{x_0} \Delta \phi \sin \theta_0 - V_{x_0} \Delta \psi + V_{y_0} + \Delta V_y \\ \Delta w + w_0 = V_{x_0} \sin \theta_0 + \Delta V_x \sin \theta_0 + V_{x_0} \Delta \theta \cos \theta_0 + \Delta V_z \cos \theta_0 \end{cases} \quad (3.29)$$

Nous pouvons identifier dans les équations (3.29) les équations des vitesses à l'équilibre de type (2.59) et (2.60). Les variations des vitesses Δu , Δv et Δw dans le système lié à l'avion (3.29) vont s'écrire en fonction des variations des vitesses ΔV_x , ΔV_y et ΔV_z et des variations des angles de roulis, tangage et lacet $\Delta \phi$, $\Delta \theta$ et $\Delta \psi$ dans le système inertiel, alors le système d'équations (3.29) se réécrit comme suit:

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -V_{x_0} \sin \theta_0 & 0 \\ V_{x_0} \sin \theta_0 & 0 & -V_{x_0} \\ 0 & V_{x_0} \cos \theta_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Le système d'équations (3.30) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} + P1 \begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

où:

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P1 = \begin{pmatrix} 0 & -V_{x_0} \sin \theta_0 & 0 \\ V_{x_0} \sin \theta_0 & 0 & -V_{x_0} \\ 0 & V_{x_0} \cos \theta_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Le deuxième type de linéarisation concerne le calcul des vitesses angulaires p , q et r dans le système lié à l'avion à partir des angles d'Euler et de leurs dérivées dans le système inertiel.

Avec les équations obtenues suite à cette linéarisation, nous remplaçons les valeurs pour les vitesses angulaires p , q et r dans les équations (3.20.1) et (3.20.2) nous nous obtenons ces vitesses angulaires dans le système inertiel. Ces calculs seront effectués à l'aide du bloc **I2B** (conversion du système inertiel i dans le système lié à l'avion a – en anglais : *body*).

3.2.2 Linéarisation par la théorie des petites perturbations des vitesses angulaires et de leurs dérivées du système de coordonnées lié à la terre i pour l'obtention des vitesses angulaires dans le système des coordonnées lié à l'avion

Nous pouvons représenter cette linéarisation de la manière suivante :

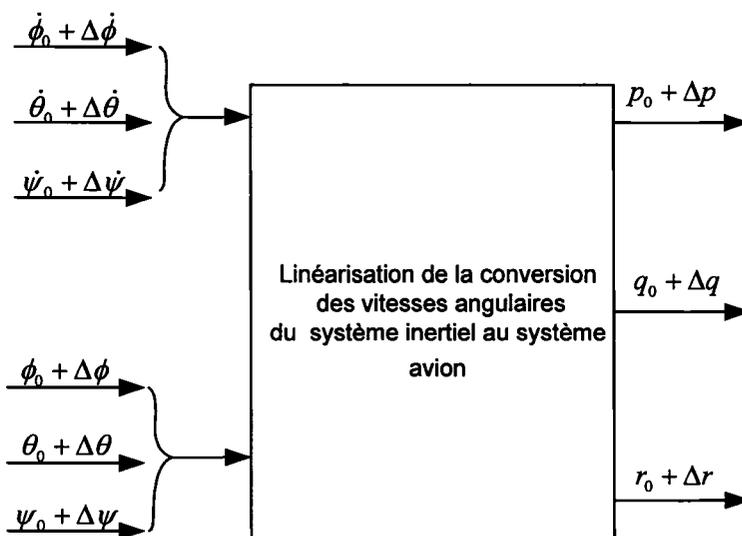


Figure 19 Schéma bloc de la linéarisation des vitesses angulaires du système inertiel i au système lié à l'avion a

Les vitesses angulaires p , q et r sont exprimées en fonction des angles d'Euler ϕ , θ et ψ et de leurs dérivées $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

La théorie des petites perturbations est appliquée pour les angles d'Euler ϕ , θ et ψ et leurs dérivées $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ ainsi que pour les vitesses angulaires p , q et r :

$$\begin{cases} \phi = \phi_0 + \Delta\phi \\ \theta = \theta_0 + \Delta\theta \\ \psi = \psi_0 + \Delta\psi \end{cases} \quad (3.34.1)$$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \dot{\phi}_0 + \Delta\dot{\phi} \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 + \Delta\dot{\theta} \\ \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \Delta\dot{\psi} \end{cases} \quad (3.34.2)$$

$$\begin{cases} p = p_0 + \Delta p \\ q = q_0 + \Delta q \\ r = r_0 + \Delta r \end{cases} \quad (3.34.3)$$

Les données initiales sont fournies par les laboratoires de la NASA DFRC. Ces données sont les vitesses angulaires initiales $p_0 = q_0 = r_0 = 0$, les angles d'Euler ainsi que leurs dérivées $\phi_0 = \psi_0 = 0$, $\theta_0 = \alpha_0$, $\dot{\phi}_0 = \dot{\theta}_0 = \dot{\psi}_0 = 0$.

Nous introduisons l'ensemble des équations des données initiales (3.34.1)-(3.34.3) et les valeurs des données initiales mentionnées dans le paragraphe précédent dans le jeu d'équations (3.33) et nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta_0 + \Delta\theta) \\ 0 & \cos \Delta\phi & \sin \Delta\phi \cos(\theta_0 + \Delta\theta) \\ 0 & -\sin \Delta\phi & \cos \Delta\phi \cos(\theta_0 + \Delta\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Le système d'équations (3.35) devient, pour des petites variations des angles $\Delta\phi$, $\Delta\theta$ et $\Delta\psi$ ($\sin \Delta\phi = \Delta\phi$ et $\cos \Delta\phi = \Delta\phi$, et nous avons les mêmes relations pour les autres variations des petits angles $\Delta\theta$ et $\Delta\psi$):

$$\begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta_0 - \Delta\theta \cos \theta_0 \\ 0 & 1 & \Delta\phi(\cos \theta_0 - \Delta\theta \sin \theta_0) \\ 0 & -\Delta\phi & \cos \theta_0 - \Delta\theta \sin \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Nous négligeons le produit des variations de l'angle de roulis $\Delta\phi$ et de l'angle de tangage $\Delta\theta$ appelé $\Delta\phi \Delta\theta$, alors l'équation (3.36) devient:

$$\begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta_0 - \Delta\theta \cos \theta_0 \\ 0 & 1 & \Delta\phi \cos \theta_0 \\ 0 & -\Delta\phi & \cos \theta_0 - \Delta\theta \sin \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\dot{\phi} - \Delta\dot{\psi} \sin \theta_0 - \Delta\theta \Delta\dot{\psi} \cos \theta_0 \\ \Delta\dot{\theta} + \Delta\phi \Delta\dot{\theta} \cos \theta_0 \\ \Delta\dot{\psi} \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Nous négligeons le produit des variations des petits angles et l'équation (3.37) devient :

$$\begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\dot{\phi} - \Delta\dot{\psi} \sin \theta_0 \\ \Delta\dot{\theta} \\ \cos \theta_0 \Delta\dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{\psi} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

où R est la matrice suivante :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

3.3 Calcul des forces et moments dans le système de coordonnées lié à l'avion

Nous remplaçons les équations (3.31) et (3.38) pour les vecteurs $(\Delta u \ \Delta v \ \Delta w)^T$ et $(\Delta p \ \Delta q \ \Delta r)^T$ dans les équations (3.20.1) et (3.20.2) et nous obtenons les deux jeux d'équations suivantes pour les forces X_a, Y_a, Z_a et pour les moments L_a, M_a, N_a :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \end{pmatrix} = C11 \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} + C12 \cdot \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix} + C13 \cdot R \cdot \begin{pmatrix} \Delta \dot{\phi} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\psi} \end{pmatrix} + \dots$$

$$+ (C14 + C11 \cdot P1) \cdot \begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + D1 \cdot \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \quad (3.40.1)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} = C21 \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} + C22 \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} + C23 \cdot R \cdot \begin{pmatrix} \Delta \dot{\phi} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$+ (C24 + C21 \cdot P1) \cdot \begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + D2 \cdot \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \quad (3.40.2)$$

Dans ce contexte, en tenant compte de l'ensemble d'équations (3.40.1) et (3.40.2) et de la Figure 17, nous obtenons le schéma suivant :

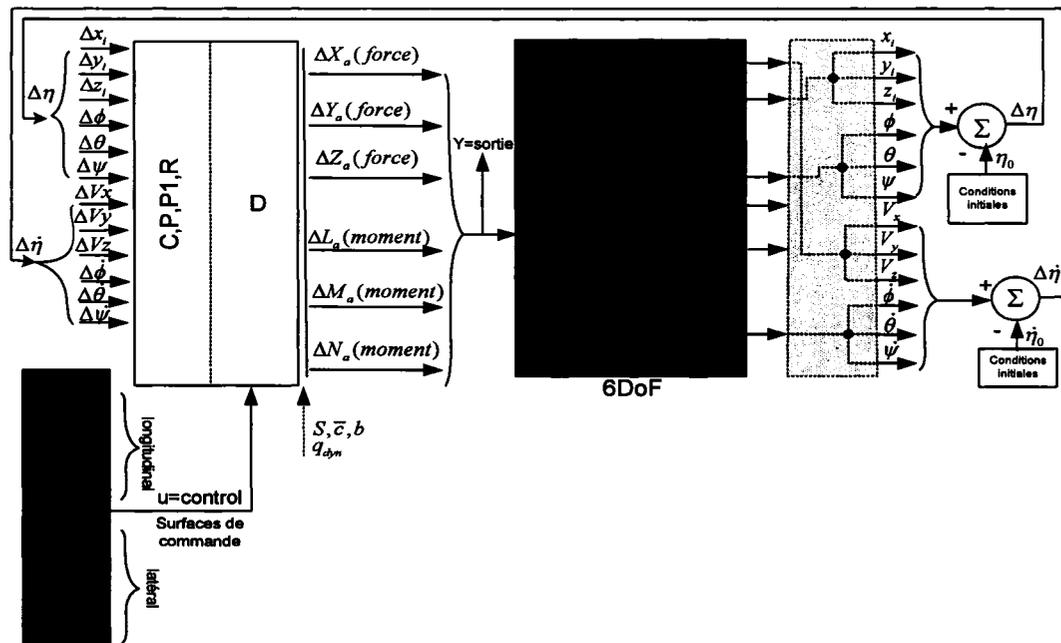


Figure 20 Schéma de la Figure 17 avec les variations des vecteurs d'état $\Delta\eta$ et $\Delta\dot{\eta}$ dans la boucle de retour

Dans la Figure 20, nous introduisons les notations suivantes des variations des vecteurs d'état $\Delta\eta$ et $\Delta\dot{\eta}$:

$$\Delta\eta = \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \\ \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta\dot{\eta} = \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \\ \Delta \dot{\phi} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Nous avons donc vu dans ce chapitre les étapes qui nous ont conduit à obtenir dans la boucle de retour les vecteurs η et $\dot{\eta}$ nécessaires aux calculs de forces aérodynamiques Q . L'objectif du mémoire est d'établir un modèle final des forces aérodynamiques pour les interactions des modes rigides avec les modes rigides Q_r et pour les interactions des modes rigides avec les modes de commande Q_{rc} (afin de

valider la formulation de la dynamique de vol de l'avion rigide F/A-18), et ce modèle sera détaillé dans le chapitre suivant.

Rapport-Gratuit.com

CHAPITRE 4

CALCUL DES FORCES AÉRODYNAMIQUES Q

Nous allons présenter et détailler dans ce chapitre le calcul des matrices des forces aérodynamiques des modes rigides avec les modes rigides Q_{tr} et des modes rigides avec les modes de commande Q_{rc} . À cause du fait que nous avons besoin des forces X, Y, Z et des moments L, M, N dans le système lié inertiel (lié à la terre), nous allons linéariser ces paramètres, donc nous allons les convertir du système lié à l'avion a au système inertiel i .

4.1 Linéarisation de la conversion des forces et moments du système de coordonnées lié à l'avion a au système lié à la terre i en utilisant la théorie des petites perturbations

Nous pouvons schématiser cette linéarisation de la manière suivante :

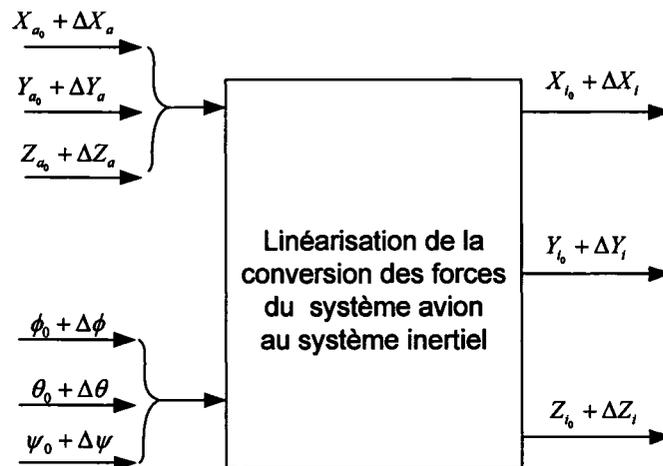


Figure 21 Schéma bloc de la linéarisation des forces et des angles d'Euler du système lié à l'avion au système inertiel

Les variations des forces inertielles X_i , Y_i et Z_i sont écrits en fonction des forces sur l'avion X_a , Y_a et Z_a en utilisant DCM donnée par l'équation (2.47) :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \dots \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \psi \cos \phi & \dots \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Suite à l'application de la théorie des petites perturbations sur les angles d'Euler, l'équation (4.1) devient :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + \Delta\theta) & \Delta\phi \sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \Delta\phi \Delta\psi & \sin(\theta_0 + \Delta\theta) + \Delta\phi \Delta\psi \\ \Delta\psi \cos(\theta_0 + \Delta\theta) & \Delta\phi \Delta\psi \sin(\theta_0 + \Delta\theta) + 1 & \Delta\psi \sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \Delta\phi \\ -\sin(\theta_0 + \Delta\theta) & \Delta\phi \cos(\theta_0 + \Delta\theta) & \cos(\theta_0 + \Delta\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

L'équation (4.2) peut s'écrire sous la forme suivante pour les *forces* :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \end{pmatrix} + F1 \begin{pmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\theta \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \end{pmatrix} + 0 = F \begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

et pour les *moments* :

$$\begin{pmatrix} \Delta L_i \\ \Delta M_i \\ \Delta N_i \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} + F1 \begin{pmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\theta \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} + 0 = F \begin{pmatrix} \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

où

$$F = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Les forces et les moments dans le système lié à l'avion donnés par les équations (3.40.1) et (3.40.2) sont remplacés dans les équations (4.3.1) et (4.3.2) pour obtenir les forces et les moments dans le système inertiel lié à la terre i :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \Delta X_a \\ \Delta Y_a \\ \Delta Z_a \end{pmatrix} = F \cdot C11 \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} + F \cdot C12 \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} + F \cdot C13 \cdot R \cdot \begin{pmatrix} \Delta \dot{\phi} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\psi} \end{pmatrix} \\ + F \cdot (C14 + C11 \cdot P1) \cdot \begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + F \cdot D1 \cdot \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \quad (4.5.1)$$

et

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Delta L_i \\ \Delta M_i \\ \Delta N_i \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} \Delta L_a \\ \Delta M_a \\ \Delta N_a \end{pmatrix} = F \cdot C21 \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} + F \cdot C22 \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} + F \cdot C23 \cdot R \cdot \begin{pmatrix} \Delta \dot{\phi} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\psi} \end{pmatrix} \\
&+ F \cdot (C24 + C21 \cdot P1) \cdot \begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + F \cdot D2 \cdot \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Nous ajoutons un vecteur de zéros de dimensions (3x10) dans les équations (4.5.1) et (4.5.2) et nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix} &= F \cdot C12 \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} + F(C14 + C11 \cdot P1) \cdot \begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + F \cdot D1 \cdot \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \\
&+ F \cdot C11 \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} + F \cdot C13 \cdot R \cdot \begin{pmatrix} \Delta \dot{\phi} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\psi} \end{pmatrix} + \text{Zeros}_{(3 \times 10)} \cdot (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T
\end{aligned} \tag{4.6.1}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Delta L_i \\ \Delta M_i \\ \Delta N_i \end{pmatrix} &= F \cdot C22 \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} + F(C24 + C21 \cdot P1) \begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + F \cdot D2 \begin{pmatrix} \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_ALL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_ALL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \\
&+ F \cdot C21 \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} + F \cdot C23 \cdot R \cdot \begin{pmatrix} \Delta \dot{\phi} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\psi} \end{pmatrix} \\
&+ Zeros_{(3 \times 10)} \cdot (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T
\end{aligned} \tag{4.6.2}$$

Nous arrangeons les équations (4.6.1) et (4.6.2) dans le but d'obtenir les vecteurs de coordonnées généralisées $\Delta \eta$ et $\Delta \dot{\eta}$ (donnés par les équations 3.41) et les vecteurs de commande u et \dot{u} . Nous obtenons alors le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \\ \Delta L_i \\ \Delta M_i \\ \Delta N_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F \cdot C12 & F \cdot (C14 + C11 \cdot P1) & F \cdot D1 \\ F \cdot C22 & F \cdot (C24 + C21 \cdot P1) & F \cdot D2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \\ \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \\ \Delta \delta_{long_LEF} \\ \Delta \delta_{long_TEF} \\ \Delta \delta_{long_AIL} \\ \Delta \delta_{long_HT} \\ \Delta \delta_{long_RUD} \\ \Delta \delta_{lat_LEF} \\ \Delta \delta_{lat_TEF} \\ \Delta \delta_{lat_AIL} \\ \Delta \delta_{lat_HT} \\ \Delta \delta_{lat_RUD} \end{pmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} F \cdot C11 \cdot P & F \cdot C13 \cdot R & 0 \\ F \cdot C21 \cdot P & F \cdot C23 \cdot R & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \\ \Delta \dot{\phi} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4.7)

Le système d'équations présenté par l'équation (4.7) est simulé en utilisant le schéma montré dans la Figure 22 suivante :

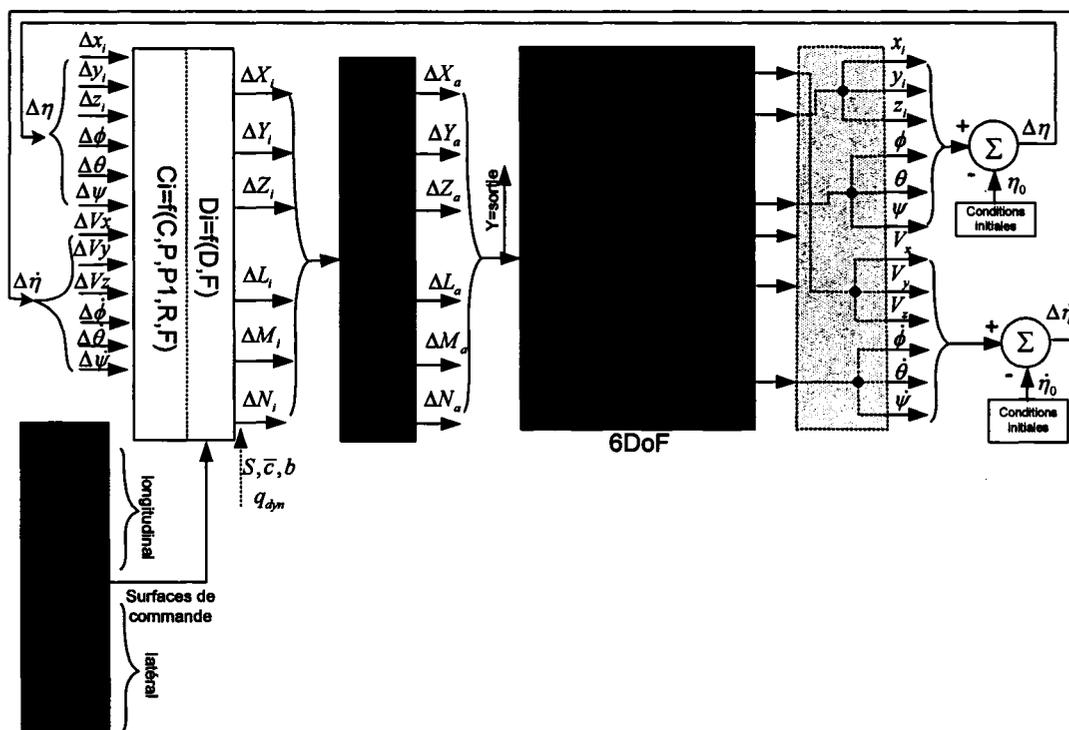


Figure 22 Modification du schéma de simulation de la Figure 20 : Calculs des forces et des moments dans le système lié à l'avion à partir du système inertiel

Nous notons les modes rigides par r , les modes élastiques par e et les modes de commande par c . Nous obtenons un nombre total de 6 modes rigides, 28 modes élastiques et 10 modes de commande. Parmi les 10 modes de commande, nous obtenons 5 modes symétriques et 5 modes anti-symétriques.

Dépendamment de l'ordre des modes dans l'avion, nous allons écrire les matrices des forces aérodynamiques Q en fonction des différents types de modes : 6 modes rigides (r), 28 modes élastiques (e) et 10 modes de commande (c) – voir le Tableau I (en page 10).

4.2 Calcul des forces aérodynamiques

Pour calculer les forces aérodynamiques Q , nous avons besoin de l'équation de mouvement (1.1) de la structure flexible de l'avion sous l'influence des forces aérodynamiques. Cette équation est réécrite sous la forme suivante :

$$M\ddot{\eta} + D\dot{\eta} + K\eta + q_{dyn}Q\eta = 0 \quad (4.8)$$

ou sous une forme plus simplifiée :

$$M\ddot{\eta} + D\dot{\eta} + K\eta + y_1 = 0 \quad (4.9)$$

où :

$$y_1 = F_{aero} = q_{dyn}Q\eta = \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \\ \Delta L_i \\ \Delta M_i \\ \Delta N_i \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

L'équation (1.2) nous donne:

$$y_1 = q_{dyn}(Q_R + \bar{j}Q_I)\eta = q_{dyn}Q_R\eta + q_{dyn}\frac{\bar{j}\omega\eta}{\omega}Q_I \quad (4.11)$$

À partir de $\eta = Ae^{j\omega t}$ nous pouvons écrire que $\dot{\eta} = \bar{j}\omega Ae^{j\omega t} = \bar{j}\omega\eta$. La définition de la fréquence réduite est :

$$k = \frac{\omega b}{V} = \frac{\omega \bar{c}}{2V} \quad (4.12)$$

Nous remplaçons ω donnée par l'équation (4.12) dans l'équation (4.11) et nous obtenons :

$$y_1 = q_{dyn} Q_R \eta + q_{dyn} \frac{\dot{\eta}}{\omega} Q_I = q_{dyn} Q_R \eta + q_{dyn} \frac{\bar{c}}{2kV} Q_I \dot{\eta} \quad (4.13)$$

Nous séparons les parties réelles et les parties imaginaires des forces aérodynamiques Q^R et Q^I pour les parties correspondants aux vecteurs d'état x et aux vecteurs de commande u , qui sont les forces aérodynamiques correspondantes aux interactions entre les modes rigides - rigides Q_{rr} et entre les modes rigides - commande Q_{rc} :

$$y_1 = q_{dyn} Q_{rr}^R \eta + q_{dyn} Q_{rc}^R u + q_{dyn} \frac{\bar{c}}{2Vk} Q_{rr}^I \dot{\eta} + q_{dyn} \frac{\bar{c}}{2Vk} Q_{rc}^I \dot{u} \quad (4.14)$$

L'équation (4.14) peut s'écrire sous la forme d'une deuxième équation d'un système sous forme d'espace d'état :

$$y_1 = q_{dyn} \left(Q_{rr}^R \quad \frac{\bar{c}}{2Vk} Q_{rr}^I \right) \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} + q_{dyn} \left(Q_{rc}^R \quad \frac{\bar{c}}{2Vk} Q_{rc}^I \right) \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

L'équation (4.7) peut s'écrire en utilisant les vecteurs d'état η , $\dot{\eta}$ et les vecteurs de commande u et \dot{u} :

$$y_1 = \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \\ \Delta L_i \\ \Delta M_i \\ \Delta N_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F \cdot C12 & F \cdot (C14 + C11 \cdot P1) & F \cdot D1 \\ F \cdot C22 & F \cdot (C24 + C21 \cdot P1) & F \cdot D2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \cdot C11 \cdot P & F \cdot C13 \cdot R & 0 \\ F \cdot C21 \cdot P & F \cdot C23 \cdot R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{u} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

L'équation (4.15) peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$y_1 = \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \\ \Delta L_i \\ \Delta M_i \\ \Delta N_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{dyn} Q_{rr}^R & q_{dyn} Q_{rc}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{dyn} \frac{\bar{c}}{2V\kappa} Q_{rr}^I & q_{dyn} \frac{\bar{c}}{2V\kappa} Q_{rc}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{u} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

En effet, l'équation (4.17) a été obtenue à partir des dérivées de stabilité à l'aide de schémas de simulation par modifications successives et l'équation (4.16) à été obtenue à partir de la forme générale des forces aérodynamiques (voir l'équation 4.10).

Nous supposons que les matrices Q_{rr} et Q_{rc} peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$Q_{rr} = \begin{pmatrix} qr_{1,1} & qr_{1,2} & \cdots & qr_{1,16} \\ qr_{2,1} & qr_{2,2} & \cdots & qr_{2,16} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ qr_{6,1} & qr_{6,2} & \cdots & qr_{6,16} \end{pmatrix}, \quad Q_{rc} = \begin{pmatrix} qi_{1,1} & qi_{1,2} & \cdots & qi_{1,6} \\ qi_{2,1} & qi_{2,2} & \cdots & qi_{2,16} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ qi_{6,1} & qi_{6,2} & \cdots & qi_{6,16} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Par identification des matrices des forces aérodynamiques se trouvant dans les équations (4.16), (4.17) et (4.18), nous calculons les termes de la matrice correspondants à la partie réelle de la matrice Q_{rr}^R pour les interactions des modes rigides - rigides, et les termes de la matrice correspondants à la partie réelle de la matrice Q_{rc}^R pour les interactions des modes rigides et de commande. Nous obtenons :

$$Q_{rr}^R = \begin{bmatrix} F \cdot C12 & F \cdot (C14 + C11 \cdot P1) \\ F \cdot C22 & F \cdot (C24 + C21 \cdot P1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{rr_11}^R & Q_{rr_12}^R \\ Q_{rr_21}^R & Q_{rr_22}^R \end{pmatrix} \quad (4.19.1)$$

$$Q_{rc}^R = \begin{pmatrix} F \cdot D1 \\ F \cdot D2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{rc_11}^R \\ Q_{rc_21}^R \end{pmatrix} \quad (4.19.2)$$

Les éléments $Q_{rr_11}^R, Q_{rr_12}^R, Q_{rr_21}^R, Q_{rr_22}^R, Q_{rc_11}^R, Q_{rc_21}^R$ des forces aérodynamiques réelles ont les formes analytiques suivantes :

$$Q_{rr_11}^R = \begin{pmatrix} qr_{1,1} & qr_{1,2} & qr_{1,3} \\ qr_{2,1} & qr_{2,2} & qr_{2,3} \\ qr_{3,1} & qr_{3,2} & qr_{3,3} \end{pmatrix} \quad (4.20.1)$$

$$Q_{rr_12}^R = \begin{pmatrix} qr_{1,4} & qr_{1,5} & qr_{1,6} \\ qr_{2,4} & qr_{2,5} & qr_{2,6} \\ qr_{3,4} & qr_{3,5} & qr_{3,6} \end{pmatrix} \quad (4.20.2)$$

$$Q_{rr_21}^R = \begin{pmatrix} qr_{4,1} & qr_{4,2} & qr_{4,3} \\ qr_{5,1} & qr_{5,2} & qr_{5,3} \\ qr_{6,1} & qr_{6,2} & qr_{6,3} \end{pmatrix} \quad (4.20.3)$$

$$Q_{rr_22}^R = \begin{pmatrix} qr_{4,4} & qr_{4,5} & qr_{4,6} \\ qr_{5,4} & qr_{5,5} & qr_{5,6} \\ qr_{6,4} & qr_{6,5} & qr_{6,6} \end{pmatrix} \quad (4.20.4)$$

$$Q_{rc_11}^R = \begin{pmatrix} qr_{1,7} & qr_{1,8} & qr_{1,9} & qr_{1,10} & qr_{1,11} & qr_{1,12} & qr_{1,13} & qr_{1,14} & qr_{1,15} & qr_{1,16} \\ qr_{2,7} & qr_{2,8} & qr_{2,9} & qr_{2,10} & qr_{2,11} & qr_{2,12} & qr_{2,13} & qr_{2,14} & qr_{2,15} & qr_{2,16} \\ qr_{3,7} & qr_{3,8} & qr_{3,9} & qr_{3,10} & qr_{3,11} & qr_{3,12} & qr_{3,13} & qr_{3,14} & qr_{3,15} & qr_{3,16} \end{pmatrix} \quad (4.20.5)$$

$$Q_{rc_21}^R = \begin{pmatrix} qr_{4,7} & qr_{4,8} & qr_{4,9} & qr_{4,10} & qr_{4,11} & qr_{4,12} & qr_{4,13} & qr_{4,14} & qr_{4,15} & qr_{4,16} \\ qr_{5,7} & qr_{5,8} & qr_{5,9} & qr_{5,10} & qr_{5,11} & qr_{5,12} & qr_{5,13} & qr_{5,14} & qr_{5,15} & qr_{5,16} \\ qr_{6,7} & qr_{6,8} & qr_{6,9} & qr_{6,10} & qr_{6,11} & qr_{6,12} & qr_{6,13} & qr_{6,14} & qr_{6,15} & qr_{6,16} \end{pmatrix} \quad (4.20.6)$$

Par identification des parties imaginaires des forces aérodynamiques Q_{rr}^I et Q_{rc}^I dans les équations (4.16), (4.17) et (4.18), nous pouvons écrire que :

$$Q_{rr}^I = \begin{pmatrix} F \cdot C11 \cdot P & F \cdot C13 \cdot R \\ F \cdot C21 \cdot P & F \cdot C23 \cdot R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{rr_11}^I & Q_{rr_12}^I \\ Q_{rr_21}^I & Q_{rr_22}^I \end{pmatrix} \quad (4.21.1)$$

$$Q_{rc}^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.21.2)$$

Les éléments $Q_{rr_11}^I, Q_{rr_12}^I, Q_{rr_21}^I, Q_{rr_22}^I, Q_{rc_11}^I, Q_{rc_21}^I$ et des forces aérodynamiques imaginaires ont les formes analytiques données dans les équations suivantes :

$$Q_{rr_11}^I = \begin{pmatrix} qi_{1,1} & qi_{1,2} & qi_{1,3} \\ qi_{2,1} & qi_{2,2} & qi_{2,3} \\ qi_{3,1} & qi_{3,2} & qi_{3,3} \end{pmatrix} \quad (4.22.1)$$

$$Q_{rr_12}^I = \begin{pmatrix} qi_{1,4} & qi_{1,5} & qi_{1,6} \\ qi_{2,4} & qi_{2,5} & qi_{2,6} \\ qi_{3,4} & qi_{3,5} & qi_{3,6} \end{pmatrix} \quad (4.22.2)$$

$$Q_{rr_21}^I = \begin{pmatrix} qi_{4,1} & qi_{4,2} & qi_{4,3} \\ qi_{5,1} & qi_{5,2} & qi_{5,3} \\ qi_{6,1} & qi_{6,2} & qi_{6,3} \end{pmatrix} \quad (4.22.3)$$

$$Q_{rr_22}^I = \begin{pmatrix} qi_{4,4} & qi_{4,5} & qi_{4,6} \\ qi_{5,4} & qi_{5,5} & qi_{5,6} \\ qi_{6,4} & qi_{6,5} & qi_{6,6} \end{pmatrix} \quad (4.22.4)$$

Nous calculons les termes des matrices des parties réelles des forces aérodynamiques, où la matrice F est donnée par l'équation (4.4) et la matrice $C12$ est donnée par l'équation (3.13.2) :

$$\begin{aligned}
Q_{rr_11}^R &= F \cdot C12 = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,4} & c_{1,5} & c_{1,6} \\ c_{2,4} & c_{2,5} & c_{2,6} \\ c_{3,4} & c_{3,5} & c_{3,6} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{1,6} \cdot \cos \theta_0 + c_{3,6} \cdot \sin \theta_0 \\ 0 & 0 & c_{2,6} \\ 0 & 0 & -c_{1,6} \cdot \sin \theta_0 + c_{3,6} \cdot \cos \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qr_{1,1} & qr_{1,2} & qr_{1,3} \\ qr_{2,1} & qr_{2,2} & qr_{2,3} \\ qr_{3,1} & qr_{3,2} & qr_{3,3} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Les coefficients égaux à zéro sont $c_{1,4}$, $c_{1,5}$, $c_{2,4}$, $c_{2,5}$, $c_{3,4}$, $c_{3,5}$ pendant que ceux non - égaux à zéro sont $c_{1,6}$, $c_{2,6}$ et $c_{3,6}$. Par l'identification des éléments de la matrice $Q_{rr_11}^R$ exprimée dans l'équation (4.23), et des valeurs des coefficients de la matrice C données par le set des équations (3.15.1)-(3.15.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
qr_{1,1} &= 0 \\
qr_{1,2} &= 0 \\
qr_{1,3} &= c_{1,6} \cdot \cos \theta_0 + c_{3,6} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \left[-a_{4,5} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0) - a_{5,5} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0) \right] \\
qr_{2,1} &= 0 \\
qr_{2,2} &= 0 \\
qr_{2,3} &= c_{2,6} = \bar{S} \cdot a_{6,5} \\
qr_{3,1} &= 0 \\
qr_{3,2} &= 0 \\
qr_{3,3} &= -c_{1,6} \cdot \sin \theta_0 + c_{3,6} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \left[a_{4,5} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0) - a_{5,5} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0) \right]
\end{aligned} \tag{4.24.1}$$

De la même manière que celle présentée pour l'élément $Q_{rr_11}^R$, nous allons calculer les éléments des parties réelles et imaginaires des matrices aérodynamiques dans les pages suivantes.

$$\begin{aligned}
Q_{rr_21}^R &= F \cdot C22 = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{4,4} & c_{4,5} & c_{4,6} \\ c_{5,4} & c_{5,5} & c_{5,6} \\ c_{6,4} & c_{6,5} & c_{6,6} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{4,6} \cdot \cos \theta_0 + c_{6,6} \cdot \sin \theta_0 \\ 0 & 0 & c_{5,6} \\ 0 & 0 & -c_{4,6} \cdot \sin \theta_0 + c_{6,6} \cdot \cos \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qr_{4,1} & qr_{4,2} & qr_{4,3} \\ qr_{5,1} & qr_{5,2} & qr_{5,3} \\ qr_{6,1} & qr_{6,2} & qr_{6,3} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.24.2}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
qr_{4,1} &= 0 \\
qr_{4,2} &= 0 \\
qr_{4,3} &= c_{4,6} \cdot \cos \theta_0 + c_{6,6} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S}b [a_{1,5} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0) + a_{3,5} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0)] \\
qr_{5,1} &= 0 \\
qr_{5,2} &= 0 \\
qr_{5,3} &= c_{5,6} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,5} \\
qr_{6,1} &= 0 \\
qr_{6,2} &= 0 \\
qr_{6,3} &= -c_{4,6} \cdot \sin \theta_0 + c_{6,6} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S}b [-a_{1,5} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0) + a_{3,5} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0)]
\end{aligned} \tag{4.24.3}$$

La matrice $Q_{rr_12}^R$ est donnée par l'équation suivante dans laquelle les matrices F , $P1$, $C14$ et $C11$ sont fournies par les équations (4.4), (3.32), (3.13.4) et (3.13.1) :

$$\begin{aligned}
Q_{rr_12}^R &= F(C14 + C11 \cdot P1) = \begin{pmatrix} qr_{1,4} & qr_{1,5} & qr_{1,6} \\ qr_{2,4} & qr_{2,5} & qr_{2,6} \\ qr_{3,4} & qr_{3,5} & qr_{3,6} \end{pmatrix} = \\
&= F \begin{pmatrix} c_{1,10} & c_{1,11} & c_{1,12} \\ c_{2,10} & c_{2,11} & c_{2,12} \\ c_{3,10} & c_{3,11} & c_{3,12} \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -V_{x0} \sin \theta_0 & 0 \\ V_{x0} \sin \theta_0 & 0 & -V_{x0} \\ 0 & V_{x0} \cos \theta_0 & 0 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F \begin{pmatrix} c_{1,10} & c_{1,11} & c_{1,12} \\ c_{2,10} & c_{2,11} & c_{2,12} \\ c_{3,10} & c_{3,11} & c_{3,12} \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} c_{1,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 & -c_{1,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{1,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0 & -c_{1,2} \cdot V_{x0} \\ c_{2,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 & -c_{2,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{2,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0 & -c_{2,2} \cdot V_{x0} \\ c_{3,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 & -c_{3,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{3,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0 & -c_{3,2} \cdot V_{x0} \end{pmatrix} = \\
&= F \begin{pmatrix} c_{1,10} + c_{1,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 & c_{1,11} - c_{1,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{1,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0 & c_{1,12} - c_{1,2} \cdot V_{x0} \\ c_{2,10} + c_{2,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 & c_{2,11} - c_{2,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{2,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0 & c_{2,12} - c_{2,2} \cdot V_{x0} \\ c_{3,10} + c_{3,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 & c_{3,11} - c_{3,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{3,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0 & c_{3,12} - c_{3,2} \cdot V_{x0} \end{pmatrix} \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Par l'identification des éléments de la matrice $Q_{r,12}^R$ donnés par l'équation (4.25) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
qr_{1,4} &= \cos \theta_0 (c_{1,10} + c_{1,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0) + \sin \theta_0 (c_{3,10} + c_{3,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0) \\
qr_{1,5} &= \cos \theta_0 (c_{1,11} - c_{1,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{1,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0) \\
&\quad + \sin \theta_0 (c_{3,11} - c_{3,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{3,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0) \\
qr_{1,6} &= \cos \theta_0 (c_{1,12} - c_{1,2} \cdot V_{x0}) + \sin \theta_0 (c_{3,12} - c_{3,2} \cdot V_{x0}) \\
qr_{2,4} &= c_{2,10} + c_{2,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 \\
qr_{2,5} &= c_{2,11} - c_{2,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{2,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0 \\
qr_{2,6} &= c_{2,12} - c_{2,2} \cdot V_{x0} \\
qr_{3,4} &= -\sin \theta_0 (c_{1,10} + c_{1,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0) + \cos \theta_0 (c_{3,10} + c_{3,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0) \\
qr_{3,5} &= -\sin \theta_0 (c_{1,11} - c_{1,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{1,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0) \\
&\quad + \cos \theta_0 (c_{3,11} - c_{3,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{3,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0) \\
qr_{3,6} &= -\sin \theta_0 (c_{1,12} - c_{1,2} \cdot V_{x0}) + \cos \theta_0 (c_{3,12} - c_{3,2} \cdot V_{x0})
\end{aligned} \quad (4.26)$$

Nous remplaçons l'ensemble des équations (3.15.1)-(3.15.6) pour les éléments de la matrice C dans les éléments des matrices donnés par les équations (4.26) et nous obtenons les nouvelles expressions de ces éléments :

$$\begin{aligned}
qr_{1,4} &= \bar{S} \{-a_{4,9} \cos(\theta_0 - \alpha_0) - a_{5,9} \sin(\theta_0 - \alpha_0) \\
&\quad + \sin \theta_0 [-a_{4,8} \cos(\theta_0 - \alpha_0) - a_{5,8} \sin(\theta_0 - \alpha_0)]\} \\
qr_{1,5} &= -\bar{S} \cdot a_{4,2} \\
qr_{1,6} &= \bar{S} [a_{4,8} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0) + a_{5,8} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0)] \\
qr_{2,4} &= \bar{S} \cdot a_{6,8} \cdot \sin \theta_0 \\
qr_{2,5} &= 0 \\
qr_{2,6} &= -\bar{S} \cdot a_{6,8} \\
qr_{3,4} &= 0 \\
qr_{3,5} &= -\bar{S} (-a_{5,4} - a_{5,2}) \\
qr_{3,6} &= 0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

La matrice $Q_{rr_22}^R$ s'écrit en fonction des matrices F , $P1$, $C24$ et $C21$ données par les équations (4.4), (3.32), (3.13.8) et (3.13.5):

$$\begin{aligned}
Q_{rr_22}^R &= F(C24 + C21 \cdot P1) = \\
&= F \begin{pmatrix} c_{4,10} & c_{4,11} & c_{4,12} \\ c_{5,10} & c_{5,11} & c_{5,12} \\ c_{6,10} & c_{6,11} & c_{6,12} \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} \\ c_{5,1} & c_{5,2} & c_{5,3} \\ c_{6,1} & c_{6,2} & c_{6,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -V_{x0} \sin \theta_0 & 0 \\ V_{x0} \sin \theta_0 & 0 & -V_{x0} \\ 0 & V_{x0} \cos \theta_0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= F \begin{pmatrix} c_{4,10} + c_{4,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 & c_{4,11} - c_{4,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{4,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0 & c_{4,12} - c_{4,2} \cdot V_{x0} \\ c_{5,10} + c_{5,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 & c_{5,11} - c_{5,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{5,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0 & c_{5,12} - c_{5,2} \cdot V_{x0} \\ c_{6,10} + c_{6,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 & c_{6,11} - c_{6,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{6,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0 & c_{6,12} - c_{6,2} \cdot V_{x0} \end{pmatrix} \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Finalement, $Q_{rr_22}^R$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$Q_{rr_22}^R = \begin{pmatrix} qr_{4,4} & qr_{4,5} & qr_{4,6} \\ qr_{5,4} & qr_{5,5} & qr_{5,6} \\ qr_{6,4} & qr_{6,5} & qr_{6,6} \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

Par l'identification des éléments des matrices, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
qr_{4,4} &= \cos \theta_0 (c_{4,10} + c_{4,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0) + \sin \theta_0 (c_{6,10} + c_{6,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0) \\
qr_{4,5} &= \cos \theta_0 (c_{4,11} - c_{4,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{4,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0) \\
&\quad + \sin \theta_0 (c_{6,11} - c_{6,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{6,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0) \\
qr_{4,6} &= \cos \theta_0 (c_{4,12} - c_{4,2} \cdot V_{x0}) + \sin \theta_0 (c_{6,12} - c_{6,2} \cdot V_{x0}) \\
qr_{5,4} &= c_{5,10} + c_{5,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 \\
qr_{5,5} &= c_{5,11} - c_{5,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{5,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0 \\
qr_{5,6} &= c_{5,12} - c_{5,2} \cdot V_{x0} \\
qr_{6,4} &= -\sin \theta_0 (c_{4,10} + c_{4,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0) + \cos \theta_0 (c_{6,10} + c_{6,2} \cdot V_{x0} \sin \theta_0) \\
qr_{6,5} &= -\sin \theta_0 (c_{4,11} - c_{4,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{4,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0) \\
&\quad + \cos \theta_0 (c_{6,11} - c_{6,1} \cdot V_{x0} \sin \theta_0 + c_{6,3} \cdot V_{x0} \cos \theta_0) \\
qr_{6,6} &= -\sin \theta_0 (c_{4,12} - c_{4,2} \cdot V_{x0}) + \cos \theta_0 (c_{6,12} - c_{6,2} \cdot V_{x0})
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Suite aux calculs, les équations (4.30) peuvent s'écrire comme suite :

$$\begin{aligned}
qr_{4,4} &= \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,8} \cdot \sin \theta_0 \\
qr_{4,5} &= 0 \\
qr_{4,6} &= -\bar{S} \cdot b \cdot a_{1,8} \\
qr_{5,4} &= 0 \\
qr_{5,5} &= \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot (a_{2,4} + a_{2,2}) \\
qr_{5,6} &= 0 \\
qr_{6,4} &= \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,8} \cdot \sin \theta_0 \\
qr_{6,5} &= 0 \\
qr_{6,6} &= -\bar{S} \cdot b \cdot a_{3,8}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Nous calculons ensuite les matrices aérodynamiques pour les interactions entre les modes rigides et de commande :

$$Q_{rc_{-11}}^R = F \cdot D1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1,1} & \cdots & d_{1,10} \\ d_{2,1} & \cdots & d_{2,10} \\ d_{3,1} & \cdots & d_{3,10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qr_{1,7} & \cdots & qr_{1,16} \\ qr_{2,7} & \cdots & qr_{2,16} \\ qr_{3,7} & \cdots & qr_{3,16} \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

Par l'identification des éléments des matrices, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
qr_{1,7} &= d_{1,1} \cdot \cos \theta_0 + d_{3,1} \cdot \sin \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{4,10} \\
qr_{1,8} &= d_{1,2} \cdot \cos \theta_0 + d_{3,2} \cdot \sin \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{4,11} \\
qr_{1,9} &= d_{1,3} \cdot \cos \theta_0 + d_{3,3} \cdot \sin \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{4,12} \\
qr_{1,10} &= d_{1,4} \cdot \cos \theta_0 + d_{3,4} \cdot \sin \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{4,13} \\
qr_{1,11} &= d_{1,5} \cdot \cos \theta_0 + d_{3,5} \cdot \sin \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{4,14} \\
qr_{1,12} &= d_{1,6} \cdot \cos \theta_0 + d_{3,6} \cdot \sin \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{4,15} \\
qr_{1,13} &= d_{1,7} \cdot \cos \theta_0 + d_{3,7} \cdot \sin \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{4,16} \\
qr_{1,14} &= d_{1,8} \cdot \cos \theta_0 + d_{3,8} \cdot \sin \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{4,17} \\
qr_{1,15} &= d_{1,9} \cdot \cos \theta_0 + d_{3,9} \cdot \sin \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{4,18} \\
qr_{1,16} &= d_{1,10} \cdot \cos \theta_0 + d_{3,10} \cdot \sin \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{4,19}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
qr_{2,7} &= d_{2,1} = \bar{S} \cdot a_{6,10} \\
qr_{2,8} &= d_{2,2} = \bar{S} \cdot a_{6,11} \\
qr_{2,9} &= d_{2,3} = \bar{S} \cdot a_{6,12} \\
qr_{2,10} &= d_{2,4} = \bar{S} \cdot a_{6,13} \\
qr_{2,11} &= d_{2,5} = \bar{S} \cdot a_{6,14} \\
qr_{2,12} &= d_{2,6} = \bar{S} \cdot a_{6,15} \\
qr_{2,13} &= d_{2,7} = \bar{S} \cdot a_{6,16} \\
qr_{2,14} &= d_{2,8} = \bar{S} \cdot a_{6,17} \\
qr_{2,15} &= d_{2,9} = \bar{S} \cdot a_{6,18} \\
qr_{2,16} &= d_{2,10} = \bar{S} \cdot a_{6,19}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
qr_{3,7} &= -d_{1,1} \cdot \sin \theta_0 + d_{3,1} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{5,10} \\
qr_{3,8} &= -d_{1,2} \cdot \sin \theta_0 + d_{3,2} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{5,11} \\
qr_{3,9} &= -d_{1,3} \cdot \sin \theta_0 + d_{3,3} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{5,12} \\
qr_{3,10} &= -d_{1,4} \cdot \sin \theta_0 + d_{3,4} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{5,13} \\
qr_{3,11} &= -d_{1,5} \cdot \sin \theta_0 + d_{3,5} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{5,14} \\
qr_{3,12} &= -d_{1,6} \cdot \sin \theta_0 + d_{3,6} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{5,15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
qr_{3,13} &= -d_{1,7} \cdot \sin \theta_0 + d_{3,7} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{5,16} \\
qr_{3,14} &= -d_{1,8} \cdot \sin \theta_0 + d_{3,8} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{5,17} \\
qr_{3,15} &= -d_{1,9} \cdot \sin \theta_0 + d_{3,9} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{5,18} \\
qr_{3,16} &= -d_{1,10} \cdot \sin \theta_0 + d_{3,10} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{5,19}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$Q_{rc_{-21}}^R = F \cdot D2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{4,1} & \cdots & d_{4,10} \\ d_{5,1} & \cdots & d_{5,10} \\ d_{6,1} & \cdots & d_{6,10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qr_{4,7} & \cdots & qr_{4,16} \\ qr_{5,7} & \cdots & qr_{5,16} \\ qr_{6,7} & \cdots & qr_{6,16} \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

Nous obtenons par l'identification des éléments des matrices présents dans l'équation (4.36) :

$$\begin{aligned}
qr_{4,7} &= d_{4,1} \cdot \cos \theta_0 + d_{6,1} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,10} & qr_{5,7} &= d_{5,1} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,10} \\
qr_{4,8} &= d_{4,2} \cdot \cos \theta_0 + d_{6,2} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,11} & qr_{5,8} &= d_{5,2} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,11} \\
qr_{4,9} &= d_{4,3} \cdot \cos \theta_0 + d_{6,3} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,12} & qr_{5,9} &= d_{5,3} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,12} \\
qr_{4,10} &= d_{4,4} \cdot \cos \theta_0 + d_{6,4} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,13} & qr_{5,10} &= d_{5,4} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,13} \\
qr_{4,11} &= d_{4,5} \cdot \cos \theta_0 + d_{6,5} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,14} & qr_{5,11} &= d_{5,5} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,14} \\
qr_{4,12} &= d_{4,6} \cdot \cos \theta_0 + d_{6,6} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,15} & qr_{5,12} &= d_{5,6} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,15} \\
qr_{4,13} &= d_{4,7} \cdot \cos \theta_0 + d_{6,7} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,16} & qr_{5,13} &= d_{5,7} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,16} \\
qr_{4,14} &= d_{4,8} \cdot \cos \theta_0 + d_{6,8} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,17} & qr_{5,14} &= d_{5,8} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,17} \\
qr_{4,15} &= d_{4,9} \cdot \cos \theta_0 + d_{6,9} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,18} & qr_{5,15} &= d_{5,9} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,18} \\
qr_{4,16} &= d_{4,10} \cdot \cos \theta_0 + d_{6,10} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,19} & qr_{5,16} &= d_{5,10} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,19}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
qr_{6,7} &= -d_{4,1} \cdot \sin \theta_0 + d_{6,1} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,10} \\
qr_{6,8} &= -d_{4,2} \cdot \sin \theta_0 + d_{6,2} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,11} \\
qr_{6,9} &= -d_{4,3} \cdot \sin \theta_0 + d_{6,3} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,12} \\
qr_{6,10} &= -d_{4,4} \cdot \sin \theta_0 + d_{6,4} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,13} \\
qr_{6,11} &= -d_{4,5} \cdot \sin \theta_0 + d_{6,5} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
qr_{6,12} &= -d_{4,6} \cdot \sin \theta_0 + d_{6,6} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,15} \\
qr_{6,13} &= -d_{4,7} \cdot \sin \theta_0 + d_{6,7} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,16} \\
qr_{6,14} &= -d_{4,8} \cdot \sin \theta_0 + d_{6,8} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,17} \\
qr_{6,15} &= -d_{4,9} \cdot \sin \theta_0 + d_{6,9} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,18} \\
qr_{6,16} &= -d_{4,10} \cdot \sin \theta_0 + d_{6,10} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,19}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

La deuxième partie des calculs concerne les forces imaginaires Q^i , comme suit :

$$\begin{aligned}
Q_{rr_11}^i &= F \cdot C11 \cdot P = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{1,3} \cdot \sin \theta_0 & c_{1,2} & -c_{1,1} \cdot \sin \theta_0 + c_{1,3} \cdot \cos \theta_0 \\ c_{2,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{2,3} \cdot \sin \theta_0 & c_{2,2} & -c_{2,1} \cdot \sin \theta_0 + c_{2,3} \cdot \cos \theta_0 \\ c_{3,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{3,3} \cdot \sin \theta_0 & c_{3,2} & -c_{3,1} \cdot \sin \theta_0 + c_{3,3} \cdot \cos \theta_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} qi_{1,1} & qi_{1,2} & qi_{1,3} \\ qi_{2,1} & qi_{2,2} & qi_{2,3} \\ qi_{3,1} & qi_{3,2} & qi_{3,3} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Par l'identification, nous obtenons les éléments de la matrice $Q_{rr_11}^i$:

$$\begin{aligned}
qi_{1,1} &= (c_{1,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{1,3} \cdot \sin \theta_0) \cos \theta_0 + (c_{3,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{3,3} \cdot \sin \theta_0) \sin \theta_0 \\
qi_{1,2} &= c_{1,2} \cdot \cos \theta_0 + c_{3,2} \cdot \sin \theta_0 \\
qi_{1,3} &= (-c_{1,1} \cdot \sin \theta_0 + c_{1,3} \cdot \cos \theta_0) \cos \theta_0 + (-c_{3,1} \cdot \sin \theta_0 + c_{3,3} \cdot \cos \theta_0) \sin \theta_0 \\
qi_{2,1} &= c_{2,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{2,3} \cdot \sin \theta_0 \\
qi_{2,2} &= c_{2,2} = \bar{S} \cdot \frac{a_{6,8}}{V_{x0}} \\
qi_{2,3} &= -c_{2,1} \cdot \sin \theta_0 + c_{2,3} \cdot \cos \theta_0 \\
qi_{3,1} &= -\sin \theta_0 \cdot (c_{1,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{1,3} \cdot \sin \theta_0) + \cos \theta_0 \cdot (c_{3,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{3,3} \cdot \sin \theta_0) \\
qi_{3,2} &= -\sin \theta_0 \cdot c_{1,2} + \cos \theta_0 \cdot c_{3,2} \\
qi_{3,3} &= -\sin \theta_0 \cdot (-c_{1,1} \cdot \sin \theta_0 + c_{1,3} \cdot \cos \theta_0) + \cos \theta_0 \cdot (-c_{3,1} \cdot \sin \theta_0 + c_{3,3} \cdot \cos \theta_0)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Suite aux calculs, l'équation (4.40) aura la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 qi_{1,1} &= -\bar{S} \cdot a_{4,3} \\
 qi_{1,2} &= c_{1,2} \cdot \cos \theta_0 + c_{3,2} \cdot \sin \theta_0 \\
 qi_{1,3} &= -\bar{S} \cdot \frac{a_{4,2}}{V_{x0}} \\
 qi_{2,1} &= c_{2,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{2,3} \cdot \sin \theta_0 \\
 qi_{2,2} &= c_{2,2} = \bar{S} \cdot \frac{a_{6,8}}{V_{x0}} \\
 qi_{2,3} &= -c_{2,1} \cdot \sin \theta_0 + c_{2,3} \cdot \cos \theta_0 \\
 qi_{3,1} &= -\bar{S} \cdot a_{5,3} \\
 qi_{3,2} &= -\sin \theta_0 \cdot c_{1,2} + \cos \theta_0 \cdot c_{3,2} \\
 qi_{3,3} &= -\bar{S} \cdot \frac{a_{5,2}}{V_{x0}}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
 Q'_{r_{-21}} &= F \cdot C21 \cdot P = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} \\ c_{5,1} & c_{5,2} & c_{5,3} \\ c_{6,1} & c_{6,2} & c_{6,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{4,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{4,3} \cdot \sin \theta_0 & c_{4,2} & -c_{4,1} \cdot \sin \theta_0 + c_{4,3} \cdot \cos \theta_0 \\ c_{5,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{5,3} \cdot \sin \theta_0 & c_{5,2} & -c_{5,1} \cdot \sin \theta_0 + c_{5,3} \cdot \cos \theta_0 \\ c_{6,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{6,3} \cdot \sin \theta_0 & c_{6,2} & -c_{6,1} \cdot \sin \theta_0 + c_{6,3} \cdot \cos \theta_0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} qi_{4,1} & qi_{4,2} & qi_{4,3} \\ qi_{5,1} & qi_{5,2} & qi_{5,3} \\ qi_{6,1} & qi_{6,2} & qi_{6,3} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Nous effectuons à nouveau une autre identification et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
qi_{4,1} &= (c_{4,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{4,3} \cdot \sin \theta_0) \cos \theta_0 + (c_{6,1} \cdot \cos \theta_0 + c_{6,3} \cdot \sin \theta_0) \sin \theta_0 \\
qi_{4,2} &= c_{4,2} \cos \theta_0 + c_{6,2} \sin \theta_0 = \frac{\bar{S} \cdot b \cdot a_{1,8}}{V_0} \\
qi_{4,3} &= (-c_{4,1} \sin \theta_0 + c_{4,3} \cos \theta_0) \cos \theta_0 + (-c_{6,1} \sin \theta_0 + c_{6,3} \cos \theta_0) \sin \theta_0 \\
qi_{5,1} &= c_{5,1} \cos \theta_0 + c_{5,3} \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,3} \\
qi_{5,2} &= c_{5,2} \\
qi_{5,3} &= -c_{5,1} \sin \theta_0 + c_{5,3} \cos \theta_0 = \frac{\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,2}}{V_0} \\
qi_{6,1} &= -\sin \theta_0 (c_{4,1} \cos \theta_0 + c_{4,3} \sin \theta_0) + \cos \theta_0 (c_{6,1} \cos \theta_0 + c_{6,3} \sin \theta_0) \\
qi_{6,2} &= -c_{4,2} \sin \theta_0 + c_{6,2} \cos \theta_0 = \frac{\bar{S} \cdot b \cdot a_{3,8}}{V_0} \\
qi_{6,3} &= -\sin \theta_0 (-c_{4,1} \sin \theta_0 + c_{4,3} \cos \theta_0) + \cos \theta_0 (-c_{6,1} \sin \theta_0 + c_{6,3} \cos \theta_0)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
Q'_{rr_{12}} &= F \cdot C13 \cdot R = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,7} & c_{1,8} & c_{1,9} \\ c_{2,7} & c_{2,8} & c_{2,9} \\ c_{3,7} & c_{3,8} & c_{3,9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,7} & c_{1,8} & -c_{1,7} \sin \theta_0 + c_{1,9} \cos \theta_0 \\ c_{2,7} & c_{2,8} & -c_{2,7} \sin \theta_0 + c_{2,9} \cos \theta_0 \\ c_{3,7} & c_{3,8} & -c_{3,7} \sin \theta_0 + c_{3,9} \cos \theta_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} qi_{1,4} & qi_{1,5} & qi_{1,6} \\ qi_{2,4} & qi_{2,5} & qi_{2,6} \\ qi_{3,4} & qi_{3,5} & qi_{3,6} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

D'où, par identification des éléments des matrices, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
qi_{1,4} &= c_{1,7} \cdot \cos \theta_0 + c_{3,7} \cdot \sin \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{4,6} \\
qi_{1,5} &= c_{1,8} \cdot \cos \theta_0 + c_{3,8} \cdot \sin \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{4,1} \\
qi_{1,6} &= (-c_{1,7} \cdot \sin \theta_0 + c_{1,9} \cdot \cos \theta_0) \cdot \cos \theta_0 + (-c_{3,7} \cdot \sin \theta_0 + c_{3,9} \cdot \cos \theta_0) \cdot \sin \theta_0 \\
&= \bar{S} \cdot \sin \theta_0 \cdot a_{4,6} \\
qi_{2,4} &= c_{2,7} = \bar{S} \cdot a_{6,6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
qi_{2,5} &= c_{2,8} = \bar{S} \cdot a_{6,1} \\
qi_{2,6} &= -c_{2,7} \cdot \sin \theta_0 + c_{2,9} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot (-a_{6,6} \cdot \sin \theta_0 + a_{6,7} \cdot \cos \theta_0) \\
qi_{3,4} &= -c_{1,7} \cdot \sin \theta_0 + c_{3,7} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{5,6} \\
qi_{3,5} &= -c_{1,8} \cdot \sin \theta_0 + c_{3,8} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot a_{5,1} \\
qi_{3,6} &= -(-c_{1,7} \cdot \sin \theta_0 + c_{1,9} \cdot \cos \theta_0) \cdot \sin \theta_0 + (-c_{3,7} \cdot \sin \theta_0 + c_{3,9} \cdot \cos \theta_0) \cdot \cos \theta_0 \\
&= \bar{S} \cdot \sin \theta_0 \cdot a_{5,6}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
Q'_{rr_22} &= F \cdot C23 \cdot R = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{4,7} & c_{4,8} & c_{4,9} \\ c_{5,7} & c_{5,8} & c_{5,9} \\ c_{6,7} & c_{6,8} & c_{6,9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{4,7} & c_{4,8} & -c_{4,7} \sin \theta_0 + c_{4,9} \cos \theta_0 \\ c_{5,7} & c_{5,8} & -c_{5,7} \sin \theta_0 + c_{5,9} \cos \theta_0 \\ c_{6,7} & c_{6,8} & -c_{6,7} \sin \theta_0 + c_{6,9} \cos \theta_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} qi_{4,4} & qi_{4,5} & qi_{4,6} \\ qi_{5,4} & qi_{5,5} & qi_{5,6} \\ qi_{6,4} & qi_{6,5} & qi_{6,6} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

D'où, par identification des éléments des matrices, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
qi_{4,4} &= c_{4,7} \cdot \cos \theta_0 + c_{6,7} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,6} \\
qi_{4,5} &= c_{4,8} \cdot \cos \theta_0 + c_{6,8} \cdot \sin \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{1,1} \\
qi_{4,6} &= (-c_{4,7} \cdot \sin \theta_0 + c_{4,9} \cdot \cos \theta_0) \cdot \cos \theta_0 + (-c_{6,7} \cdot \sin \theta_0 + c_{6,9} \cdot \cos \theta_0) \cdot \sin \theta_0 \\
&= \bar{S} \cdot b \cdot (-a_{1,6} \cdot \sin \theta_0 + a_{1,7} \cdot \cos \theta_0) \\
qi_{5,4} &= c_{5,7} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,6} \\
qi_{5,5} &= c_{5,8} = sa \cdot a_{6,1} = \bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,1} \\
qi_{5,6} &= -c_{5,7} \cdot \sin \theta_0 + c_{5,9} \cdot \cos \theta_0 = -\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot a_{2,6} \cdot \sin \theta_0 \\
qi_{6,4} &= -c_{4,7} \cdot \sin \theta_0 + c_{6,7} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,6} \\
qi_{6,5} &= -c_{4,8} \cdot \sin \theta_0 + c_{6,8} \cdot \cos \theta_0 = \bar{S} \cdot b \cdot a_{3,1} \\
qi_{6,6} &= -(-c_{4,7} \cdot \sin \theta_0 + c_{4,9} \cdot \cos \theta_0) \cdot \sin \theta_0 + (-c_{6,7} \cdot \sin \theta_0 + c_{6,9} \cdot \cos \theta_0) \cdot \cos \theta_0 \\
&= \bar{S} \cdot b \cdot (-a_{3,6} \cdot \sin \theta_0 + a_{3,7} \cdot \cos \theta_0)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Si on résume les résultats obtenus, nous pouvons les présenter dans les tableaux suivants :

Tableau II

Les forces aérodynamiques réelles Q^R

	x_i	y_i	z_i
X	0	0	$\bar{S} \cdot (-C_{d_h} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0) - C_{y_{f_h}} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0))$
Y	0	0	$\bar{S} \cdot C_{y_h}$
Z	0	0	$\bar{S} \cdot (C_{d_h} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0) - C_{y_{f_h}} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0))$
L	0	0	$\bar{S} \cdot b \cdot (C_{l_h} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0) + C_{n_h} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0))$
M	0	0	$\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{m_h}$
N	0	0	$\bar{S} \cdot b \cdot (-C_{l_h} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0) + C_{n_h} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0))$

	ϕ	θ	ψ	δ
X	0	$-\bar{S} \cdot C_{d_\alpha}$	0	$-\bar{S} \cdot C_{d_\delta}$
Y	$\bar{S} \cdot C_{y_\beta} \cdot \sin \theta_0$	0	$-\bar{S} \cdot C_{y_\beta}$	$\bar{S} \cdot C_{y_\delta}$
Z	0	$-\bar{S} \cdot (-C_{y_{f_\theta}} - C_{y_{f_\alpha}})$	0	$-\bar{S} \cdot C_{y_{f_\delta}}$
L	$\bar{S} \cdot b \cdot C_{l_\beta} \cdot \sin \theta_0$	0	$-\bar{S} \cdot b \cdot C_{l_\beta}$	$\bar{S} \cdot b \cdot C_{l_\delta}$
M	0	$\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot (C_{m_\theta} + C_{m_\alpha})$	0	$\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{m_\delta}$
N	$\bar{S} \cdot b \cdot C_{n_\beta} \cdot \sin \theta_0$	0	$-\bar{S} \cdot b \cdot C_{n_\beta}$	$\bar{S} \cdot b \cdot C_{n_\delta}$

Tableau III

Les forces aérodynamiques imaginaires Q'

	\dot{x}_i	\dot{y}_i	\dot{z}_i
X	$-\bar{S} \cdot C_{d_v}$	0	$-\bar{S} \cdot \frac{C_{d_a}}{V_{x0}}$
Y	0	$\bar{S} \cdot \frac{C_{y_p}}{V_{x0}}$	0
Z	$-\bar{S} \cdot C_{l_{f_v}}$	0	$-\bar{S} \cdot \frac{C_{l_{f_a}}}{V_{x0}}$
L	0	$\frac{\bar{S} \cdot b \cdot C_{l_p}}{V_{x0}}$	0
M	$\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{m_v}$	0	$\frac{\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{m_a}}{V_{x0}}$
N	0	$\frac{\bar{S} \cdot b \cdot C_{n_p}}{V_{x0}}$	0

	$\dot{\phi}$	$\dot{\theta}$	$\dot{\psi}$	δ
X	$-\bar{S} \cdot C_{d_p}$	$-\bar{S} \cdot C_{d_q}$	$\bar{S} \cdot \sin \theta_0 \cdot C_{d_r}$	0
Y	$\bar{S} \cdot C_{y_p}$	0	$\bar{S} \cdot (-C_{y_p} \cdot \sin \theta_0 + C_{y_r} \cdot \cos \theta_0)$	0
Z	$-\bar{S} \cdot C_{l_{f_p}}$	$-\bar{S} \cdot C_{l_{f_q}}$	$\bar{S} \cdot \sin \theta_0 \cdot C_{l_{f_r}}$	0
L	$\bar{S} \cdot b \cdot C_{l_p}$	0	$\bar{S} \cdot b \cdot (-C_{l_p} \cdot \sin \theta_0 + C_{l_r} \cdot \cos \theta_0)$	0
M	$\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{m_p}$	$\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{m_q}$	$-\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{m_r} \cdot \sin \theta_0$	0
N	$\bar{S} \cdot b \cdot C_{n_p}$	0	$\bar{S} \cdot b \cdot (-C_{n_p} \cdot \sin \theta_0 + C_{n_r} \cdot \cos \theta_0)$	0

En utilisant les données obtenues pour les forces aérodynamiques nous avons développé une nouvelle schéma de simulation qui est la suivante :

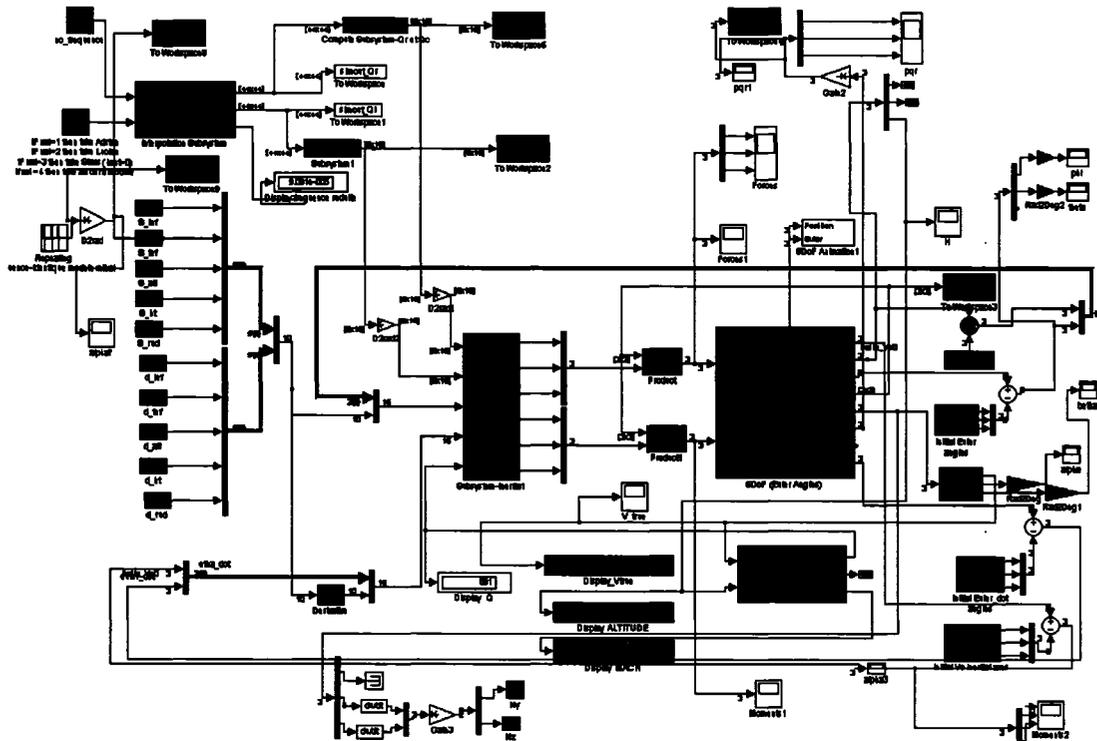


Figure 23 Schéma de simulation final en Matlab/Simulink qui prend en considération le modèle aéroservoélastique de l'avion

Plus simplifié, le schéma de la Figure 23 est équivalent au schéma suivant :

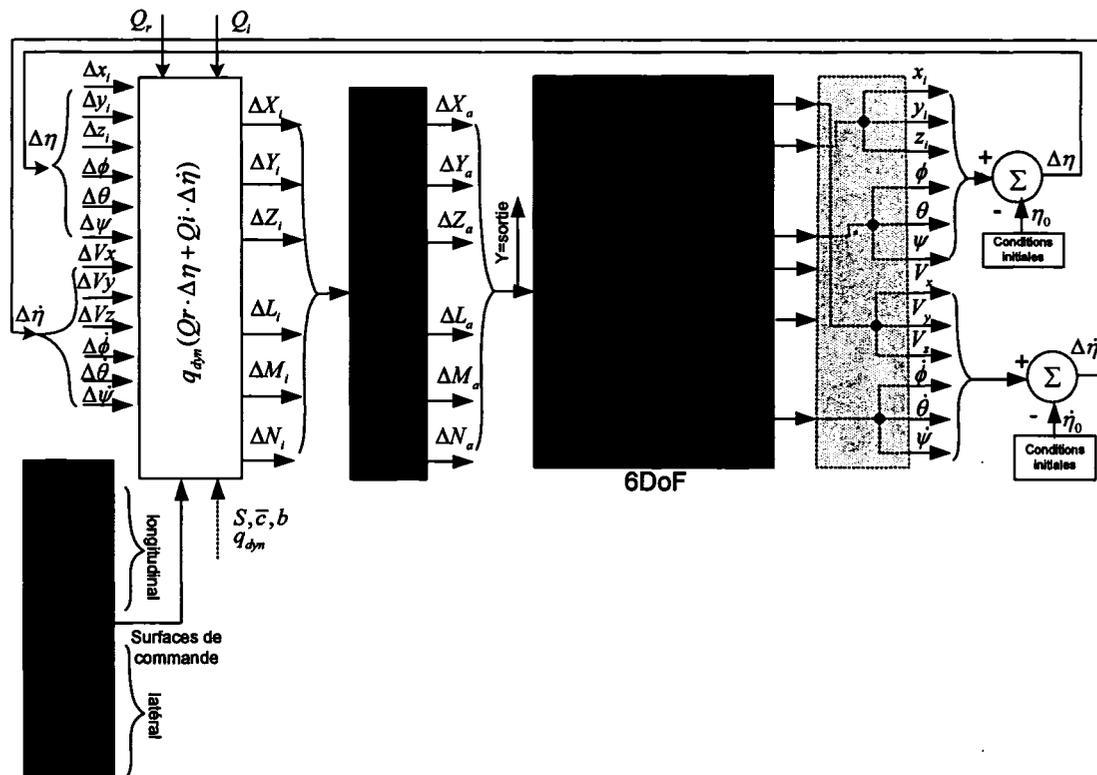


Figure 24 Schéma de simulation qui prend en considération le modèle aéroélastique de l'avion

Le premier schéma de simulation représente une simulation dans laquelle nous utilisons directement les dérivées de stabilité et contrôle dans un système de coordonnées liées au vent et nous obtenons les forces et les moments dans le système de coordonnées lié à l'avion nécessaires pour les comparaisons. Le deuxième schéma de simulation présenté dans la Figure 24 représente un schéma équivalent au premier schéma de simulation présenté dans la Figure 6, sauf que le principe de fonctionnement est différent car nous utilisons des états qui sont dans le système inertiel ainsi nous utilisons l'équation dynamique de l'avion. Étant donné que la NASA avait obtenu d'autres valeurs pour les forces aérodynamiques Q qui sont différentes des nôtres, nous allons présenter les deux types des résultats obtenus – les résultats de NASA (à droite) et les résultats obtenus par nous (à gauche):

Tableau IV

Comparaison des forces aérodynamiques
obtenues à celles fournies par la NASA

Valeurs obtenus avec nos calculs	Valeurs obtenus par R. Lind & M. Brenner de Nasa [12]	Forces
$-\bar{S} \cdot C_{D_h} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0) - \dots$ $-\bar{S} \cdot C_{L_{ifh}} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0)$	0	$\frac{\partial X}{\partial z}$
$\bar{S} \cdot C_{Y_h}$	0	$\frac{\partial Y}{\partial z}$
$\bar{S} \cdot C_{D_h} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0)$ $-\bar{S} C_{L_{ifh}} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0)$	0	$\frac{\partial Z}{\partial z}$
$\bar{S} \cdot b \cdot C_{L_h} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0)$ $+\bar{S} \cdot b \cdot C_{N_h} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0)$	0	$\frac{\partial L}{\partial z}$
$\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{M_h}$	0	$\frac{\partial M}{\partial z}$
$\bar{S} \cdot b \cdot (-C_{L_h} \cdot \sin(\theta_0 - \alpha_0)) + \dots$ $+\bar{S} \cdot b \cdot C_{N_h} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha_0)$	0	$\frac{\partial N}{\partial z}$
$-\bar{S} \cdot C_{D_\alpha}$	$(C_{D_\alpha} - \alpha C_{L_\alpha}) \bar{S} + (-\alpha C_{D_v} + \alpha^2 C_{L_v}) \bar{S}$	$\frac{\partial X}{\partial \theta}$
$-\bar{S} \cdot C_{D_\delta}$	$(C_{D_\delta} - \alpha C_{L_\delta}) \bar{S}$	$\frac{\partial X}{\partial \delta}$
$-\bar{S} \cdot C_{D_v}$	$(C_{D_v} - \alpha C_{L_v}) \frac{\bar{S}}{V}$	$\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}$
$-\bar{S} \cdot \frac{C_{D_\alpha}}{V}$	$(C_{D_\alpha} - \alpha C_{L_\alpha} - C_L) \frac{\bar{S}}{V}$	$\frac{\partial X}{\partial \dot{z}}$
$-\bar{S} \cdot C_{D_p}$	0	$\frac{\partial X}{\partial \dot{\phi}}$
$-\bar{S} \cdot C_{D_q}$	$(C_{D_q} + C_{D_{\dot{\alpha}}} - \alpha C_{L_q} - \alpha C_{L_{\dot{\alpha}}}) \bar{S} \frac{\bar{c}}{2V}$	$\frac{\partial X}{\partial \dot{\theta}}$

Tableau IV (suite)

Valeurs obtenus avec nos calculs	Valeurs obtenus par R. Lind & M. Brenner de Nasa [12]	Forces
$-\bar{S} \cdot (-C_{Lift_\theta} - C_{Lift_\alpha})$	$(C_{L\alpha} + \alpha C_{D\alpha})\bar{S} - \alpha(C_{Lv} - \alpha C_{Dv})\bar{S}$	$\frac{\partial Z}{\partial \theta}$
$-\bar{S} \cdot C_{Lift_\delta}$	$(C_{L\delta} + \alpha C_{D\delta})\bar{S}$	$\frac{\partial Z}{\partial \delta}$
$\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot (C_{M_\theta} + C_{M_\alpha})$	$\bar{S}\bar{c}(-C_{m\alpha} + \alpha C_{mv})$	$\frac{\partial M}{\partial \theta}$
$\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{M_\delta}$	$-C_{m\delta}\bar{S}\bar{c}$	$\frac{\partial M}{\partial \delta}$
$-\bar{S} \cdot C_{Lift_v}$	$(C_{Lv} + \alpha C_{Dv})\frac{\bar{S}}{V}$	$\frac{\partial Z}{\partial \dot{x}}$
$-\bar{S} \cdot \frac{C_{Lift_\alpha}}{V}$	$(C_{L\alpha} + \alpha C_{D\alpha})\frac{\bar{S}}{V}$	$\frac{\partial Z}{\partial \dot{z}}$
$-\bar{S} \cdot C_{Lift_p}$	0	$\frac{\partial Z}{\partial \dot{\phi}}$
$-\bar{S} \cdot C_{Lift_q}$	$(C_{Lq} + C_{L\dot{\alpha}} + (C_{Dq} + C_{D\dot{\alpha}})\alpha)\frac{\bar{S}\bar{c}}{2V}$	$\frac{\partial Z}{\partial \dot{\theta}}$
$\bar{S} \cdot \sin \theta_0 \cdot C_{Lift_p}$	0	$\frac{\partial Z}{\partial \dot{\psi}}$
$\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{M_v}$	$-C_{M_v}\frac{\bar{S}\bar{c}}{V}$	$\frac{\partial M}{\partial \dot{x}}$
$\frac{\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{M_\alpha}}{V}$	$-C_{M_\alpha}\frac{\bar{S}\bar{c}}{V}$	$\frac{\partial M}{\partial \dot{z}}$
$\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{M_p}$	0	$\frac{\partial M}{\partial \dot{\phi}}$
$\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{M_q}$	$(-C_{M_q} - C_{M\dot{\alpha}})\frac{\bar{S}\bar{c}^2}{2V}$	$\frac{\partial M}{\partial \dot{\theta}}$
$-\bar{S} \cdot \bar{c} \cdot C_{M_p} \cdot \sin \theta_0$	0	$\frac{\partial M}{\partial \dot{\psi}}$
$\bar{S} \cdot C_{Y_p} \cdot \sin \theta_0$	$(-C_L - \alpha C_{Y_p})\alpha\bar{S}$	$\frac{\partial Y}{\partial \phi}$
$-\bar{S} \cdot C_{Y_\beta}$	$C_{Y_\beta}\bar{S}$	$\frac{\partial Y}{\partial \psi}$

Tableau IV (suite)

Valeurs obtenus avec nos calculs	Valeurs obtenus par R. Lind & M. Brenner de Nasa [12]	Forces
$-\bar{S} \cdot b \cdot C_{L\beta}$	$\bar{S}b(C_{L\beta} \cos \alpha - C_{N\beta} \sin \alpha)$	$\frac{\partial L}{\partial \psi}$
$\bar{S} \cdot b \cdot C_{L\delta}$	$(-C_{L\delta} \cos \alpha + C_{N\delta} \sin \alpha) \bar{S}b$	$\frac{\partial L}{\partial \delta}$
$\bar{S} \cdot b \cdot C_{N\beta} \cdot \sin \theta_0$	$(-C_{N\beta} \cos \alpha - C_{L\beta} \sin \alpha) \bar{S}b$	$\frac{\partial N}{\partial \phi}$
$-\bar{S} \cdot b \cdot C_{N\beta}$	$(C_{N\beta} \cos \alpha + C_{L\beta} \sin \alpha) \bar{S}b$	$\frac{\partial N}{\partial \psi}$
$\bar{S} \cdot b \cdot C_{N\delta}$	$(-C_{N\delta} \cos \alpha - C_{L\delta} \sin \alpha) \bar{S}b$	$\frac{\partial N}{\partial \delta}$
$\bar{S} \cdot \frac{C_{Y\beta}}{V}$	$-C_{Y\beta} \frac{\bar{S}}{V}$	$\frac{\partial Y}{\partial y}$
$\bar{S} \cdot C_{Y\beta}$	$\frac{\bar{S}b}{2V} (-C_{Y\beta} - \alpha C_{Y\beta})$	$\frac{\partial Y}{\partial \dot{\phi}}$
$\bar{S} \cdot C_{Y\beta} \cdot \cos \theta_0$ $-\bar{S} \cdot C_{Y\beta} \cdot \sin \theta_0$	$\frac{\bar{S}b}{2V} (-C_{Y\beta} + C_{Y\beta})$	$\frac{\partial Y}{\partial \psi}$
$\frac{\bar{S} \cdot b \cdot C_{L\beta}}{V}$	$(-C_{L\beta} \cos \alpha + C_{N\beta} \sin \alpha) \frac{\bar{S}b}{V}$	$\frac{\partial M}{\partial y}$
$\bar{S} \cdot b \cdot C_{L\beta}$	$(C_{L\beta} \cos \alpha + C_{N\beta} \sin \alpha) \frac{\bar{S}b}{2V} b + \dots$ $+ (-C_{L\beta} \alpha \cos \alpha + C_{N\beta} \alpha \sin \alpha) \frac{\bar{S}b}{2V} b$	$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$
$\bar{S} \cdot b \cdot C_{L\beta} \cdot \cos \theta_0$ $-\bar{S} \cdot b \cdot C_{L\beta} \cdot \sin \theta_0$	$(-C_{L\beta} \cos \alpha + C_{N\beta} \sin \alpha) \bar{S} \frac{b^2}{2V} + \dots$ $+ (C_{L\beta} \cos \alpha - C_{N\beta} \sin \alpha) \bar{S} \frac{b^2}{2V}$	$\frac{\partial L}{\partial \psi}$
$\frac{\bar{S} \cdot b \cdot C_{N\beta}}{V}$	$(-C_{N\beta} \cos \alpha - C_{L\beta} \sin \alpha) \frac{\bar{S}}{V} b$	$\frac{\partial N}{\partial y}$
$\bar{S} \cdot \sin \theta_0 \cdot C_{D\beta}$	0	$\frac{\partial X}{\partial \psi}$

Tableau IV (suite)

Valeurs obtenus avec nos calculs	Valeurs obtenus par R. Lind & M. Brenner de Nasa [12]	Forces
$\bar{S} \cdot b \cdot C_{N_r} \cdot \cos \theta_0 - \dots$ $-\bar{S} \cdot b \cdot C_{N_p} \cdot \sin \theta_0$	$(-C_{N_r} \cos \alpha - C_{L_r} \sin \alpha) \bar{S} b \frac{b}{2V} + \dots$ $+ (C_{N_\beta} \cos \alpha + C_{L_\beta} \sin \alpha) \bar{S} b \frac{b}{2V}$	$\frac{\partial N}{\partial \psi}$
$\bar{S} \cdot C_{Y_\delta}$	$-C_{Y_\delta} \bar{S}$	$\frac{\partial Y}{\partial \delta}$
$\bar{S} \cdot b \cdot C_{L_p} \cdot \sin \theta_0$	$(-C_{L_p} \cos \alpha + C_{N_p} \sin \alpha) \alpha \bar{S} b$	$\frac{\partial L}{\partial \phi}$
$\bar{S} \cdot b \cdot C_{N_p}$	$(-C_{N_p} \cos \alpha - C_{L_p} \sin \alpha) \bar{S} b \frac{b}{2V} + \dots$ $+ (-C_{N_\beta} \alpha \cos \alpha - C_{L_\beta} \alpha \sin \alpha) \bar{S} b \frac{b}{2V}$	$\frac{\partial N}{\partial \dot{\phi}}$

Dans ce chapitre, nous avons donc explicité les matrices Q_{rr} et Q_{rc} . Dans le chapitre 5 nous allons faire des comparaisons entre les résultats obtenus avec le schéma de simulation présenté au chapitre 1 dans la Figure 6 qui prend en considération les dérivées de stabilité et les résultats obtenus avec le schéma de simulation de la Figure 24 qui prend en considération le modèle aéroélastique de l'avion. Les résultats obtenus par les deux méthodes ont été identiques, ce qui a conduit à la validation du modèle de l'avion rigide F/A-18.

CHAPITRE 5

LA LINÉARISATION NUMÉRIQUE ET L'INTERPOLATION ENTRE LES CONDITIONS DE VOL

5.1 La linéarisation numérique

Dans le chapitre antérieur, nous avons vu le développement théorique des changements de coordonnées et des linéarisations nécessaires pour obtenir les forces et les moments dans le système inertiel de coordonnées. Nous avons obtenu des meilleurs résultats que ceux obtenus par les laboratoires de la NASA DFRC. Les formulations de la NASA DFRC sont expliquées par Karnib [13]. Dans le but de valider notre approche nous avons créé deux schémas de simulation et nous allons prouver dans le chapitre suivant l'équivalence de ces deux schémas.

Les formules obtenues dans le chapitre précédent seront validées et utilisées dans tous les cas où on a les mêmes types de dérivées de stabilité et commande. Le problème est que si on ajoute ou si on élimine une dérivée dans les formules de départ, toute la formulation va changer et on doit refaire tous les calculs et toute la validation. Nous avons développé un algorithme en Matlab pour éviter ce problème et dans lequel toutes les changements des coordonnées et les linéarisations sont réalisés automatiquement. Nous avons utilisé la fonction « dlinmod » de Matlab qui retourne, sous forme d'espace états, la forme linéaire de n'importe quel système construit en Simulink, autour d'un point de fonctionnement spécifié.

C'est en partant de schéma de simulation présenté dans la Figure 5 qui prend en considération les dérivées de stabilité qu'on va retrouver numériquement les matrices Q_{rr} et Q_{rc} . Le regroupement convenable des blocs nous donne le schéma présenté dans la Figure 25.

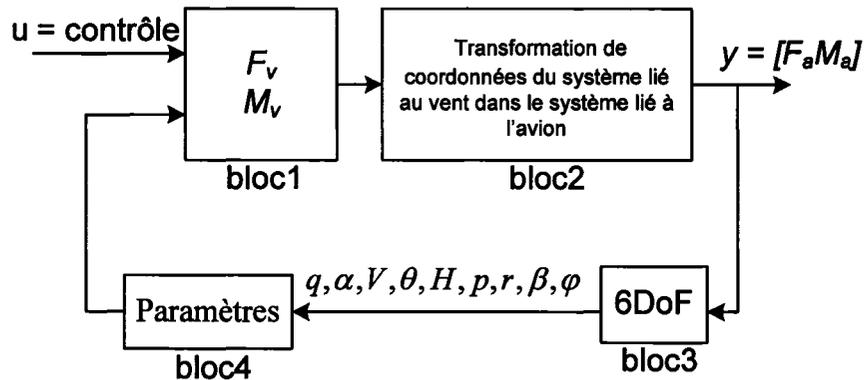


Figure 25 Schéma de simulation de l'avion avec des dérivées de stabilité et contrôle dans le système de coordonnées liées au vent

Dans le bloc 1 de la Figure 25 les forces et les moments sont calculés à partir des dérivées de stabilité et contrôle dans le système de coordonnées liées au vent. Pour la simulation de l'avion, il est nécessaire de convertir ces forces et moments dans le système de coordonnées liés à l'avion F_a et M_a , voir le bloc 2. Les vitesses linéaires et angulaires de l'avion sont calculées dans le bloc 3 à partir des forces et moments qui lui sont appliqués. Enfin, le bloc 4 nous permet de calculer des paramètres spécifiques à l'avion liés au vent (vitesse angulaire q , l'angle d'attaque α , vitesse vraie V , l'angle de rotation θ , l'altitude H , les vitesses angulaires p et r , l'angle de dérapage et l'angle de rotation ϕ) en fonction des paramètres calculés par le bloc 3.

La linéarisation du schéma présenté dans la Figure 25 autour d'un point de fonctionnement spécifié dans la simulation, en utilisant la commande « dlinmod » en Matlab, nous donne la relation linéaire entre les entrées u et les sorties y :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (5.1)$$

avec les vecteurs d'états $x = (u, v, w, p, q, r, \phi, \theta, \psi, x_i, y_i, z_i)$. Le schéma équivalent de simulation présenté dans la Figure 25 se retrouve dans la Figure 26.

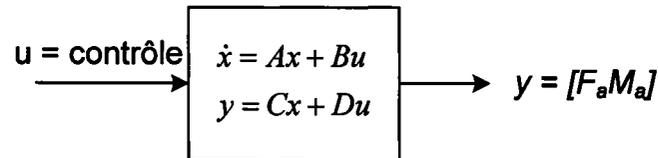


Figure 26 Schéma de simulation équivalent au schéma de la Figure 25

La première équation (5.1) calcule les états x qui sont ensuite utilisés par la deuxième équation (5.1) pour calculer les sorties y . Les états x sont tous disponibles à la sortie de bloc 3 dans la Figure 25. Nous pouvons voir que ces états x sont calculés à partir des sorties y du bloc 3. Dans ce cas, on peut garder le bloc 3 en lieu de la première équation d'état et le schéma équivalent est maintenant présenté dans la Figure 27.

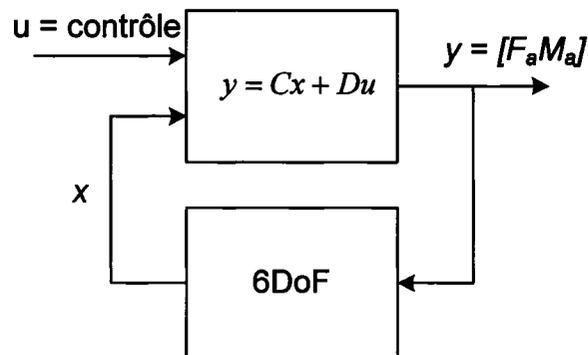


Figure 27 Schéma équivalent au schéma de la Figure 26

Suite à une comparaison des schémas montrés dans les Figures 25 et 27, il est évident que les blocs 1, 2 et 4 sont contenus dans les matrices C et D . Le modèle ainsi obtenu pour notre avion nous donne les forces et les moments calculés dans le système de coordonnées liées à l'avion en tenant compte des entrées u et des états x . De cette

manière, les matrices Q_{rr} et Q_{rc} sont obtenues, avec la différence que les états qui multiplient la matrice Q_{rr} et les forces et moments obtenus se trouvent dans le système inertiel de coordonnées. On peut redessiner le schéma de la Figure 27 en rajoutant un premier bloc qui va changer les états x dans les états x_i et un deuxième bloc qui va changer les sorties y_i dans y . Le nouveau schéma est présenté dans la Figure 28.

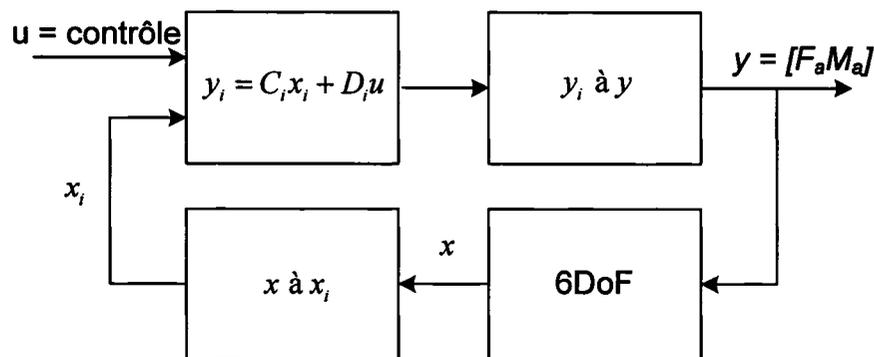


Figure 28 Schéma de simulation avec les forces et les moments calculés dans le système de coordonnées inertiel

Les changements des coordonnées implémentés dans les blocs ajoutés sont dépendants des fonctions trigonométriques des angles d'Euler, c'est-à-dire que les entrées sont liées aux sorties par des fonctions non linéaires. Il faut ensuite procéder à la linéarisation des deux blocs. Nous utilisons la commande « dlinmod » de Matlab appliquée aux deux blocs pour la réalisation de leurs linéarisations. Pour le bloc « x à x_i », nous obtenons la relation linéaire :

$$x_i = D_1 x \quad (5.2)$$

qui représente une forme simplifiée du système sous forme d'espace d'état, où les matrices A_1 , B_1 et D_1 sont nulles car le bloc ne possède pas des états. Similairement, la linéarisation du bloc « y_i à y » va donner :

$$y = D_2 y_i \quad (5.3)$$

Nous utilisons les données de la Figure 28, et les équations (5.2) et (5.3), alors nous pouvons écrire :

$$y = D_2 y_i = D_2 (C_i x_i + D_i u) = D_2 (C_i D_1 x + D_i u) = D_2 C_i D_1 x + D_2 D_i u \quad (5.4)$$

Nous effectuons l'identification des termes de cette équation avec ceux de l'équation obtenue suite à la linéarisation du schéma de la Figure 25 et nous obtenons :

$$\begin{aligned} C &= D_2 C_i D_1 \\ D &= D_2 D_i \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dans les dernières équations on connaît les matrices C et D obtenues par la linéarisation du schéma de la Figure 25 et les matrices D_1 et D_2 obtenues par la linéarisation des deux blocs de la Figure 28. Par la suite, nous pouvons calculer C_i et D_i à partir des équations (5.5) :

$$\begin{aligned} C_i &= D_2^{-1} C D_1^{-1} \\ D_i &= D_2^{-1} D \end{aligned} \quad (5.6)$$

Le vecteur d'états x_i est le suivant :

$$x_i = (x_i, y_i, z_i, \phi, \theta, \psi, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})^T = \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{\eta}_r \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Nous écrivons l'équation des forces aérodynamique pour les modes rigides (1.4) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
q_{dyn} \left[Q_{rr}^R \eta_r + \frac{\bar{c}}{2Vk} Q_{rr}^I \dot{\eta}_r \right] &= q_{dyn} \left(Q_{rr}^R \quad \frac{\bar{c}}{2Vk} Q_{rr}^I \right) \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{\eta}_r \end{pmatrix} \\
&= \left(q_{dyn} Q_{rr}^R \quad q_{dyn} \frac{\bar{c}}{2Vk} Q_{rr}^I \right) x_i = C_i x_i
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Les parties réelles et imaginaires des forces aérodynamiques correspondantes aux modes rigides s'obtiennent par identification à partir de l'équation (5.8):

$$\begin{aligned}
Q_{rr}^R &= \frac{1}{q_{dyn}} C_i (1:6, 1:6) \\
Q_{rr}^I &= \frac{2Vk}{\bar{c} q_{dyn}} C_i (1:6, 7:12)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Nous savons que le vecteur de commande u est :

$$u = \begin{pmatrix} \eta_c \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Les parties réelles et imaginaires correspondantes aux interactions des modes rigides avec les modes de commande sont déterminées par les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
Q_{rc}^R &= \frac{1}{q_{dyn}} D_i \\
Q_{rc}^I &= 0
\end{aligned} \tag{5.11}$$

L'algorithme présenté peut être synthétisé comme suit :

1. Nous appliquons trois fois la commande « dlinmod » de Matlab aux trois blocs afin d'obtenir, respectivement, les matrices C et D , puis D_1 et, à la fin, D_2 ;

2. Nous utilisons les équations (5.6), (5.9) et (5.11) pour calculer les matrices Q_{rr} et Q_{rc} ;
3. Nous remplaçons les matrices initiales calculées par les méthodes de doublets DLM (Doublet Lattice Method) ou par les méthodes des pressions constantes CPM (Constant Pressure Method) en utilisant le logiciel STARS avec les matrices obtenues avec notre algorithme.

L'algorithme présenté dans ce chapitre 5 est pratiquement l'implémentation numérique de l'algorithme présenté dans les chapitres antérieurs 3 et 4. Une comparaison entre les valeurs obtenues en utilisant les formules des chapitres antérieurs (appelé formulation analytique) et l'algorithme présenté ici (appelé formulation numérique) est donnée dans les tableaux suivants :

Tableau V

La partie réelle de la matrice Q_{rr} obtenue en utilisant la linéarisation analytique

0	0	0	0	61196	0
0	0	0	5138	0	15536
0	0	0	0	0	0
0	0	0	15536	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Tableau VI

La partie réelle de la matrice Q_{rr} obtenue en utilisant la linéarisation numérique

0	0	0	0	61196	0
0	0	0	5138	0	15536
0	0	0	0	0	0
0	0	0	15536	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Tableau VII

La partie imaginaire de la matrice Q_{rr} obtenue en utilisant la linéarisation analytique

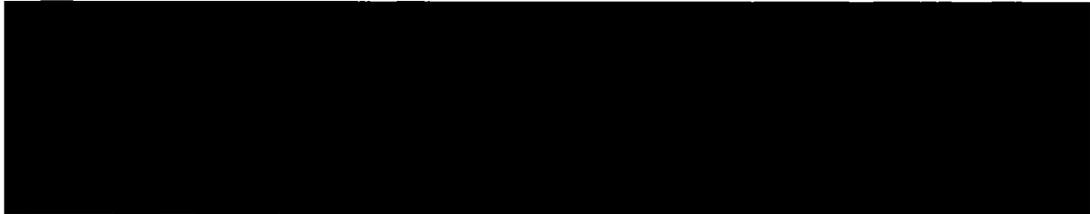
A large black rectangular box redacting the content of Tableau VII.

Tableau VIII

La partie imaginaire de la matrice Q_{rr} obtenue en utilisant la linéarisation numérique

A large black rectangular box redacting the content of Tableau VIII.

Nous pouvons voir que les résultats obtenus sont les mêmes. Le développement de l'algorithme numérique nous a permis de vérifier les résultats partiels et finaux du développement théorique des chapitres antérieurs.

En pratique, nous pouvons utiliser les deux approches. Dans le cas où nous avons un ensemble des dérivées de stabilité et commande différent de celui donné dans ce projet, nous pouvons utiliser l'approche numérique combinée avec l'approche théorique pour valider les nouvelles formules. L'approche numérique peut sembler plus rapide que le développement théorique. Mais les linéarisations successives prennent beaucoup de temps. Les formules trouvées par un approche théorique, plus long initialement, sont plus faciles à évaluer après.

Avec l'augmentation de la puissance de calcul dans l'avenir, l'utilisation de l'approche théorique peut s'avérer inutile.

5.2 Interpolation entre les conditions de vol

Les données fournies par la NASA ne peuvent pas couvrir tous les points dans l'enveloppe de vol. Par la suite, cette enveloppe est discrétisée et les données sont fournies pour des points choisis de l'enveloppe. Mais pour effectuer des simulations à l'intérieur de l'enveloppe, nous devons être capables de nous déplacer librement à l'intérieur de cette enveloppe. Nous pouvons réaliser cet exploit en utilisant des techniques d'interpolation.

L'interpolation est bien connue, surtout dans une dimension. Dans notre cas, nous avons plusieurs paramètres qui définissent les points de l'enveloppe de vol : le nombre de Mach, l'altitude, l'angle d'attaque. Pour naviguer à l'intérieur de l'enveloppe, il faut interpoler dans trois dimensions, la sortie étant bidimensionnelle elle aussi (les matrices des coefficients de portance et de traînée).

Nous pouvons envisager de différents types d'interpolation en fonction de nombre des points disponibles à l'intérieur de l'enveloppe. Le plus simple type d'interpolation est l'interpolation linéaire, pour laquelle nous devons disposer de seulement deux points. Les valeurs trouvées entre les deux points sont situées sur la droite qui lie les points. La raison pour laquelle on ne peut pas chercher une interpolation d'ordre supérieur est que pour la définition d'une droite, nous avons besoin de deux coefficients qui peuvent être trouvés à partir des deux équations écrites dans les points qu'on connaît. Dans le cas où nous envisageons l'utilisation d'une interpolation d'ordre supérieur, nous devons utiliser des polynômes d'ordre supérieur. Chaque augmentation de l'ordre nécessite un ajout d'un coefficient inconnu, c'est-à-dire d'une équation, qu'on ne peut pas l'avoir sans un nouveau point dans l'espace de définition de l'enveloppe.

Pour le cas où on connaît N points, on peut écrire N équations linéaire d'ordre $N - 1$:

$$\begin{aligned}
 a_{N-1}x_1^{N-1} + a_{N-2}x_1^{N-2} + \dots + a_0 &= y_1 \\
 a_{N-1}x_2^{N-1} + a_{N-2}x_2^{N-2} + \dots + a_0 &= y_2 \\
 \vdots & \\
 a_Nx_N^{N-1} + a_{N-1}x_N^{N-2} + \dots + a_0 &= y_N
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

où y_i sont les valeurs connues des matrices des coefficients pour N conditions de vol, x_i sont les coordonnées qui définissent chaque condition de vol et a_i sont les coefficients d'approximation que nous devons calculer. La même équation s'écrit sous forme matricielle :

$$AX = Y \tag{5.13}$$

avec

$$A = (a_{N-1} \quad a_{N-2} \quad \dots \quad a_0)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \\ x_1^{N-2} & x_2^{N-2} & \dots & x_N^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$Y = (y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_N)^T$$

La solution de l'équation (5.13) nous donne les coefficients a_i :

$$A = YX^{-1} \tag{5.14}$$

Maintenant, si nous connaissons les coefficients a_i , nous pouvons calculer n'importe quelle valeur y à partir de n'importe quelle valeur x . Les vecteurs d'état x sont les suivants : le nombre de Mach M , l'altitude H et l'angle d'attaque α et nous pouvons

écrire $x = (M, H, \alpha)$, les sorties y sont les forces aérodynamiques Q_{rr} et Q_{rc} , alors on peut écrire : $Q_{rr} = \text{fonction}(H, M, \alpha)$ et $Q_{rc} = \text{fonction}(H, M, \alpha)$.

Dans notre cas, nous avons étudié la possibilité d'interpoler avec des polynômes de premier ordre (interpolation linéaire) et de deuxième ordre (interpolation quadratique). Les résultats obtenus seront présentés dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 6

RÉSULTATS

6.1 Introduction

Ce chapitre fait l'objet d'une présentation des résultats obtenus au cours de ce projet. Les simulations ont été effectués pour les jeux de données suivantes : Mach = 0.2, altitude $H = 10000$ pi, angle $\alpha = 10^\circ$; Mach = 0.2, altitude $H = 30000$ pi, angle $\alpha = 40^\circ$; Mach = 0.38, altitude $H = 17000$ pi, angle $\alpha = 19^\circ$ (interpolé); Mach = 0.4, altitude $H = 20000$ pi, angle $\alpha = 40^\circ$; Mach = 0.85, altitude $H = 5000$ pi, angle $\alpha = 10^\circ$; Mach = 1.1, altitude $H = 25000$ pi, angle $\alpha = 2.35^\circ$; Mach = 1.3, altitude $H = 15000$ pi, angle $\alpha = 1.36^\circ$. Étant donné le nombre des graphiques à présenter, nous avons choisi seulement trois cas le plus représentatifs (une vitesse subsonique, supersonique et une interpolation).

Les données qui nous sont fournies par la NASA, en fonction de l'angle α d'incidence de l'avion, le nombre de mach M et de l'altitude H , sont présentées dans le tableau IX. Les données qui sont en degrés représentent l'angle α d'incidence de l'avion.

Tableau IX

Liste des conditions de vol initiales données en fonction du nombre de Mach M , altitude H et l'angle d'attaque α

20.44 ⁰		■ 40 ⁰ 70 ⁰		10 ⁰ 40 ⁰ 70 ⁰		10 ⁰ ■ 70 ⁰	10 ⁰ 40 ⁰ 70 ⁰
7,49 ⁰		10 ⁰ 40 ⁰ 70 ⁰	13.2 ⁰	10 ⁰ 20 ⁰ 40 ⁰ 70 ⁰		10 ⁰ 30 ⁰ 40 ⁰ 50 ⁰ 60 ⁰ 70 ⁰	10 ⁰ 40 ⁰ 70 ⁰
4.3 ⁰		10 ⁰ 40 ⁰ 70 ⁰		10 ⁰ ■ 70 ⁰		10 ⁰ 20 ⁰ 40 ⁰ 70 ⁰	10 ⁰ 40 ⁰ 70 ⁰
2.88 ⁰		10 ⁰	10 ⁰	5.45 ⁰			
2.1 ⁰		10 ⁰	10 ⁰	10 ⁰		10 ⁰ 40 ⁰ 70 ⁰	10 ⁰ 40 ⁰ 70 ⁰
1.63 ⁰		10 ⁰		10 ⁰		10 ⁰	
		10 ⁰				10 ⁰	10 ⁰
	■	10 ⁰	10 ⁰				
	1.36 ⁰	1.36 ⁰	1.72 ⁰	1.72 ⁰		2.35 ⁰	3.46 ⁰
	1.36 ⁰	1.36 ⁰	1.72 ⁰				
		1.36 ⁰	1.36 ⁰	2.35 ⁰	■		
		1.36 ⁰	1.36 ⁰	2.35 ⁰	2.35 ⁰	2.35 ⁰	3.46 ⁰
		1.36 ⁰	■ 72 ⁰	2.35 ⁰	2.35 ⁰		

Pour valider les deux schémas de simulation (ce qui est l'objectif de la thèse), nous allons comparer, pour les mêmes conditions de vol choisies arbitrairement, les résultats obtenus pour les forces et les moments dans le repère lié à l'avion ainsi que les paramètres suivants qui ont eu une variation pendant les tests: l'angle α d'attaque de l'avion, l'angle β de dérapage de l'avion, l'altitude H de l'avion, la vitesse $Mach$ et la vitesse vraie V de l'avion. Nous avons utilisé un signal sur les entrées de contrôle de

l'avion qui nous donne une déviation de $\pm 5^\circ$ autour de la position de l'équilibre de l'avion (*trim.*). Pour le mouvement longitudinal, nous avons appliqué un signal sur l'empennage horizontal (HT) et pour le mouvement latéral nous avons appliqué un signal sur les ailerons (AIL). Le signal utilisé lors de simulation a été présenté dans la Figure 16.

Dans les graphiques suivants, le signal rouge a été obtenu avec le schéma de simulation qui prend en considération les dérivées de stabilité (voir schéma de la Figure 6) et le signal bleu a été obtenu avec le schéma de simulation qui prend en considération le modèle aéroservoélastique (voir schéma de la Figure 24).

6.2 Simulation pour un nombre de Mach $M = 0.2$, altitude H égale à 30.000 pi et l'angle d'attaque de l'avion α égal à 40°

6.2.1 Le mouvement longitudinal

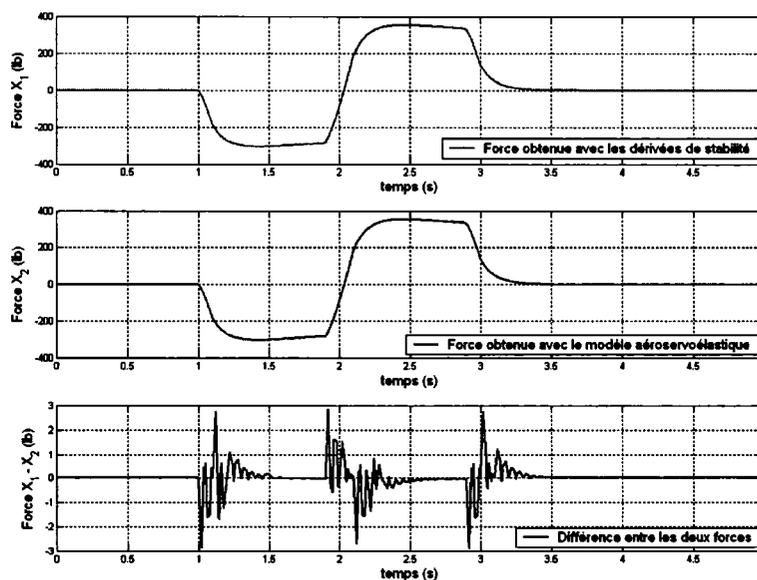


Figure 29 Variation de la force aérodynamique X pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^\circ$

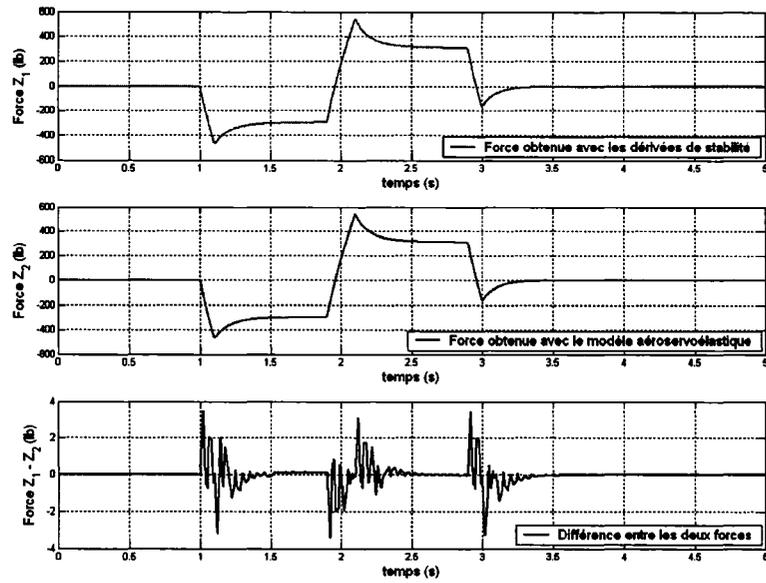


Figure 30 Variation de la force aérodynamique Z pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^\circ$

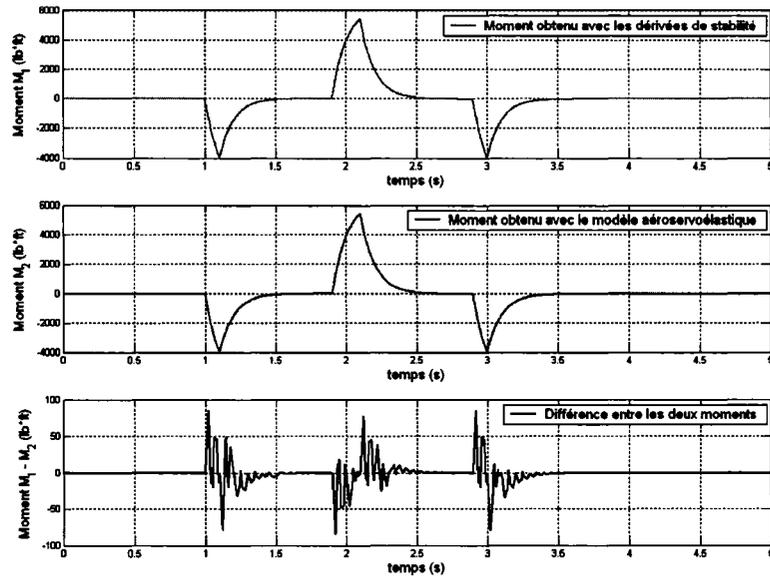


Figure 31 Variation du moment M pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^\circ$

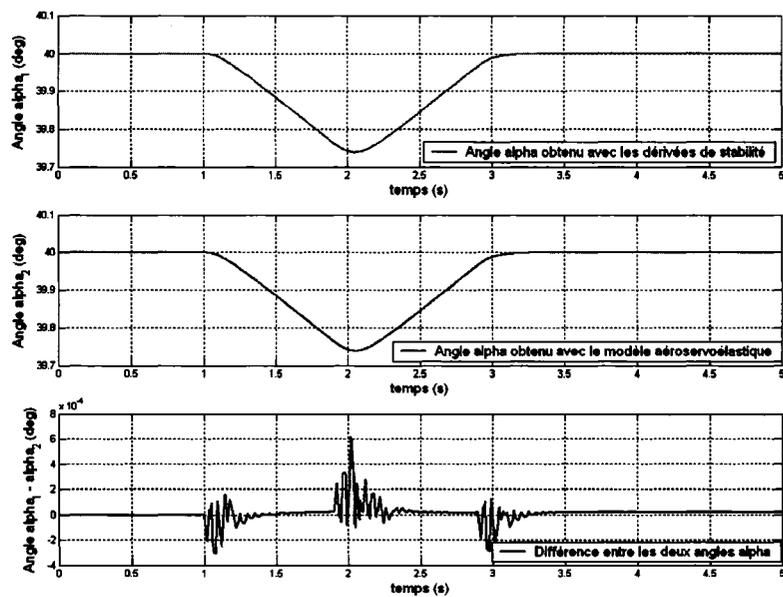


Figure 32 Variation de l'angle α pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^\circ$

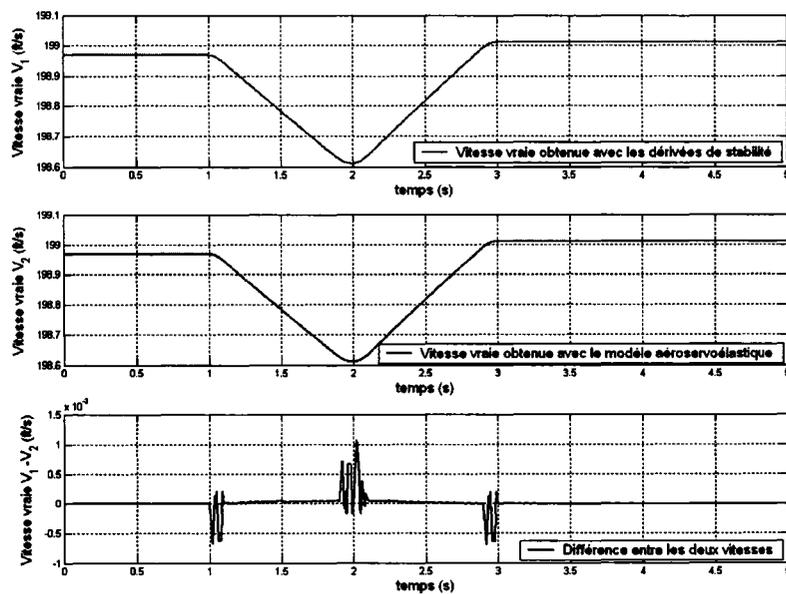


Figure 33 Variation de la vitesse vraie V pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^\circ$

6.2.2 Le mouvement latéral

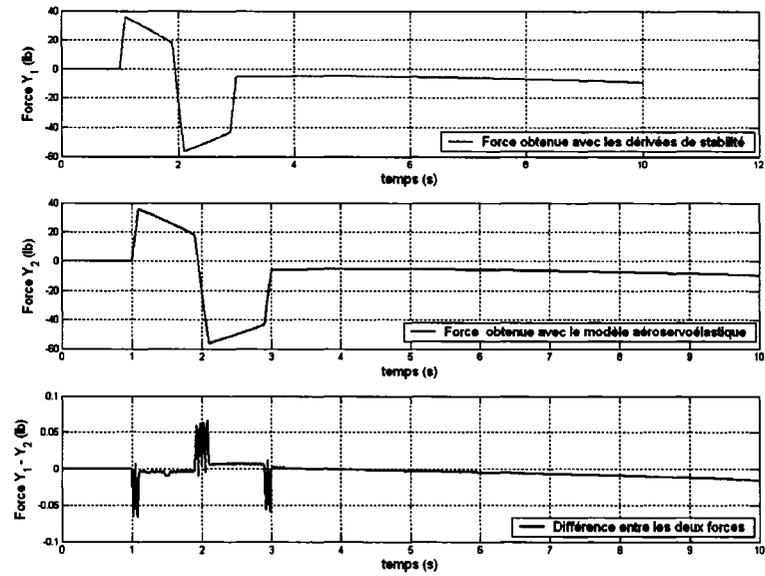


Figure 34 Variation de la force aérodynamique Y pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^\circ$

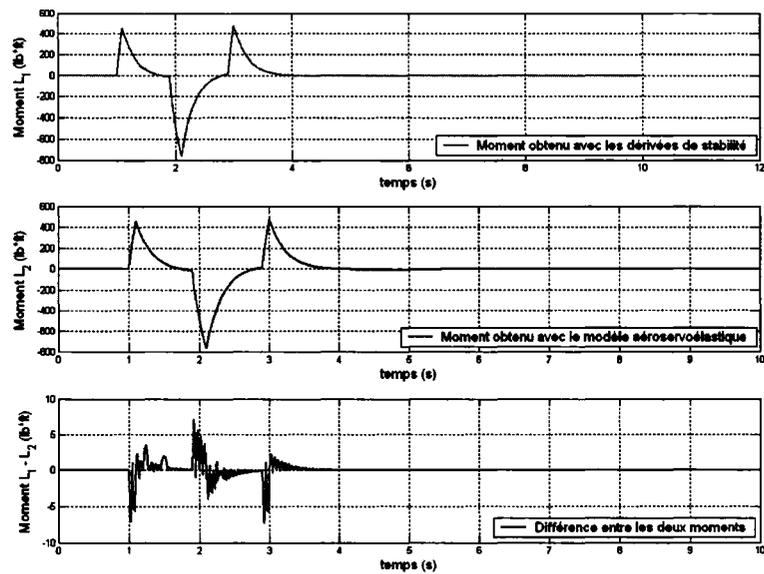


Figure 35 Variation du moment L pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^\circ$

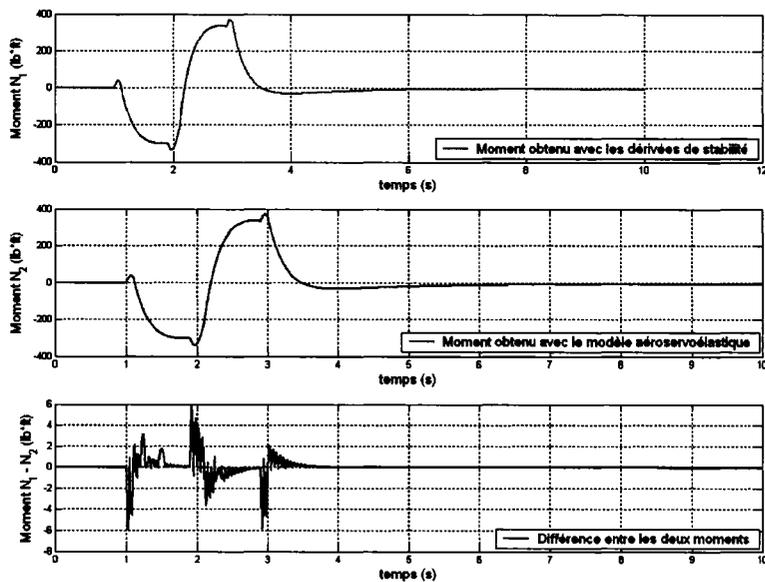


Figure 36 Variation du moment N pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^\circ$

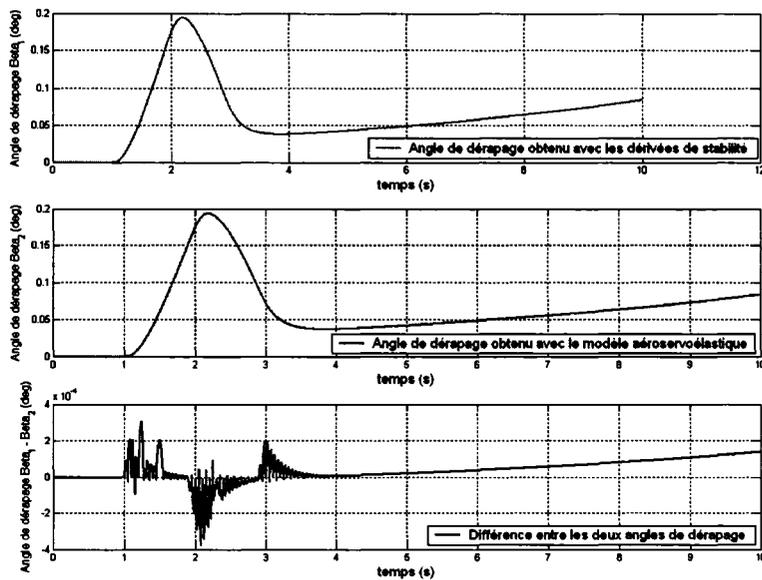


Figure 37 Variation de l'angle β pour Mach $M = 0.2$, altitude $H = 30.000$ pi et l'angle $\alpha = 40^\circ$

6.3 Simulation pour un nombre de Mach $M=0.38$, altitude H égale à 17.000 pi et l'angle d'attaque de l'avion α égal à 19°

Cette simulation a été possible par l'utilisation d'une interpolation d'ordre 2 entre les données de NASA Dryden.

6.3.1 Le mouvement longitudinal

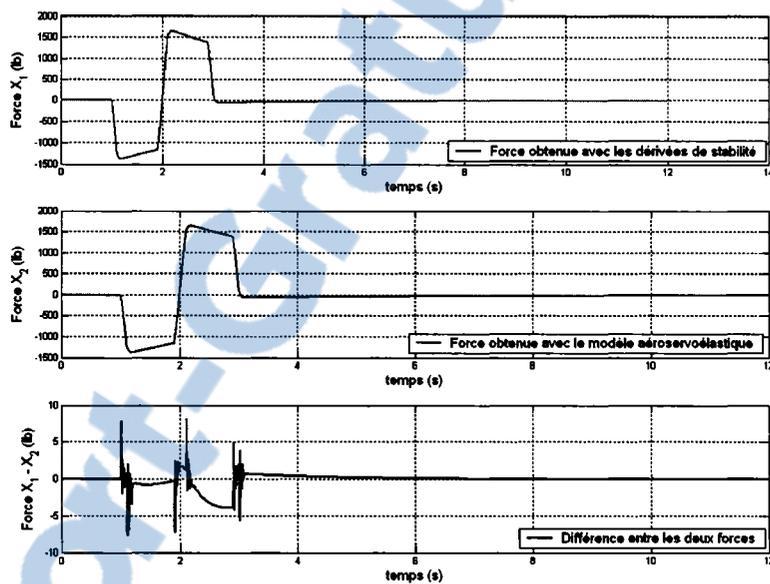


Figure 38 Variation de la force aérodynamique X pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^\circ$

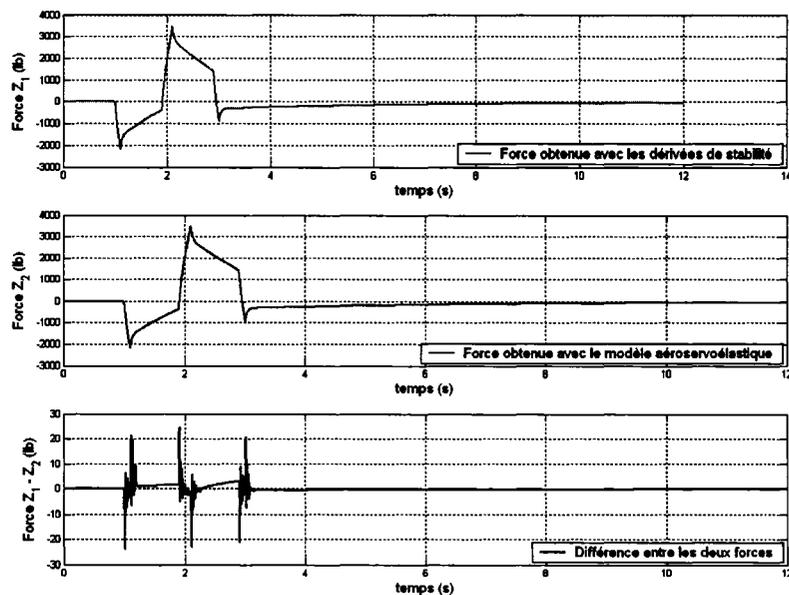


Figure 39 Variation de la force aérodynamique Z pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^\circ$

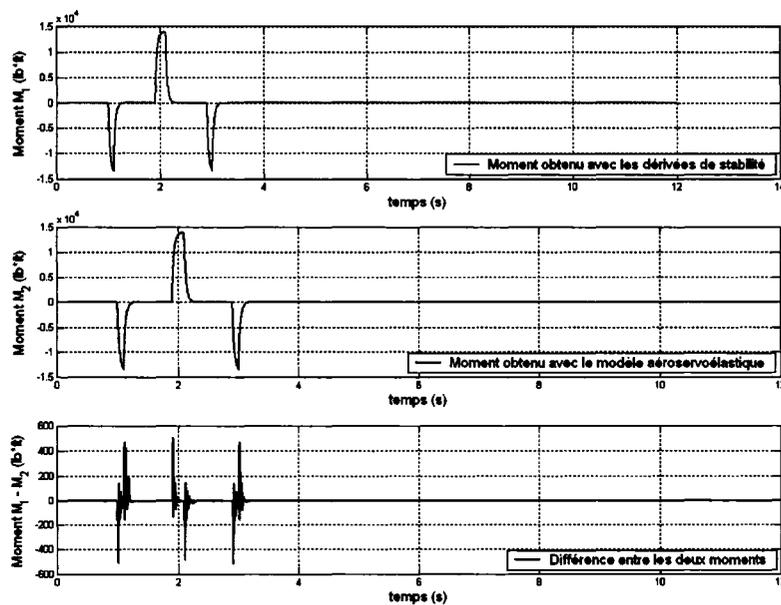


Figure 40 Variation du moment M pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^\circ$

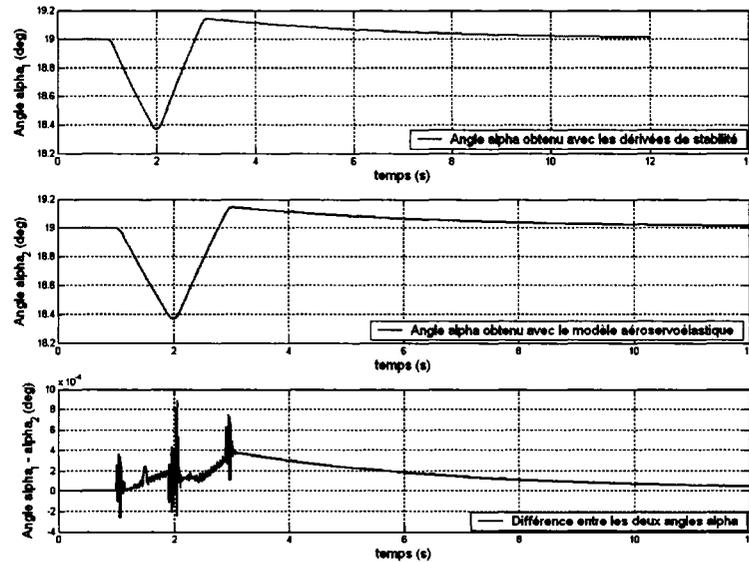


Figure 41 Variation de l'angle α pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^0$

6.3.2 Le mouvement latéral

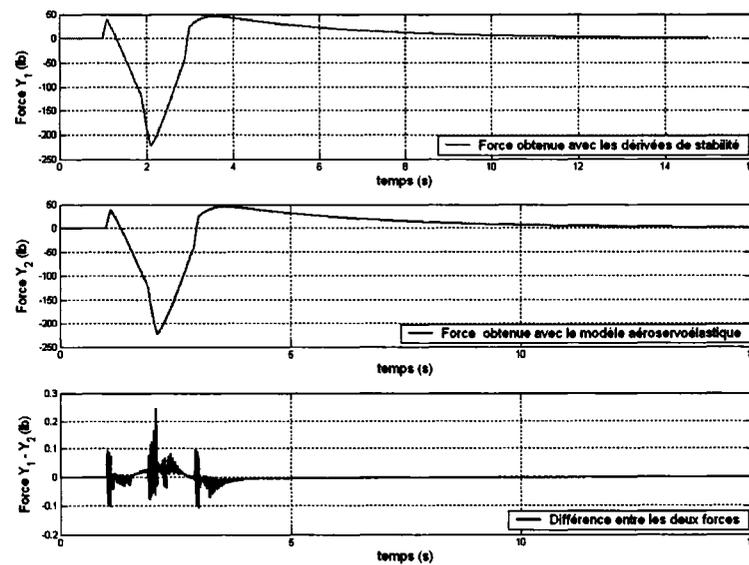


Figure 42 Variation de la force aérodynamique Y pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^0$

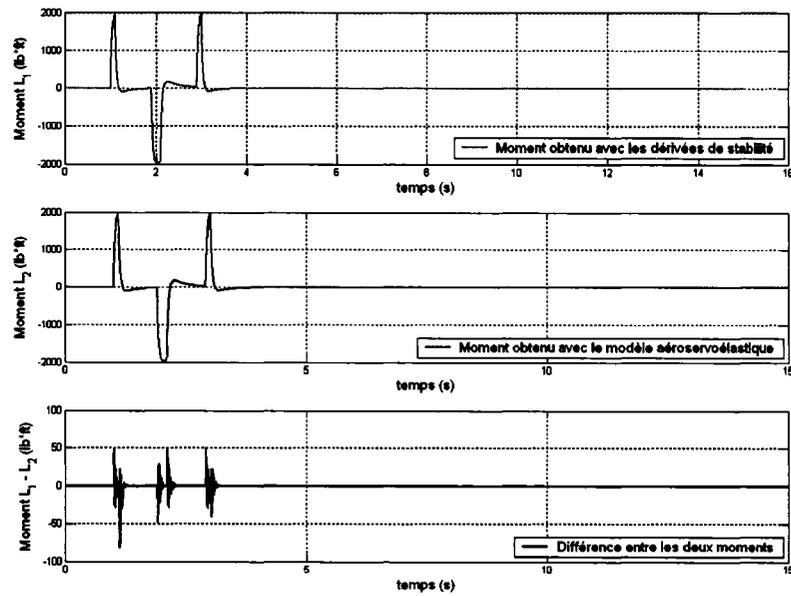


Figure 43 Variation du moment L pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^0$



Figure 44 Variation du moment N pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^0$

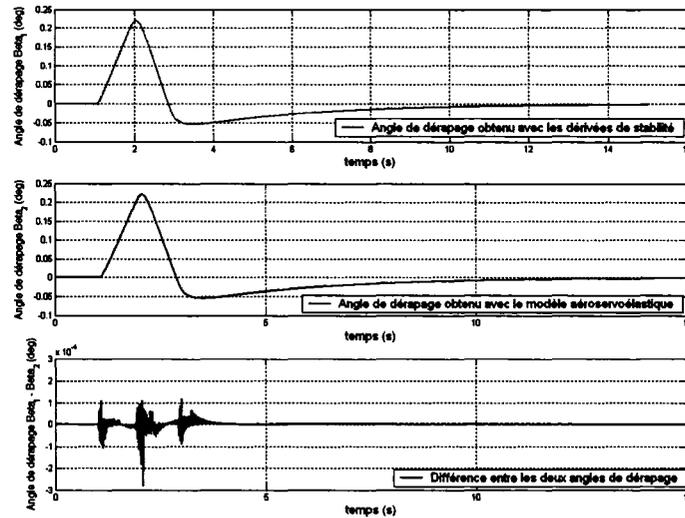


Figure 45 Variation de l'angle β pour Mach $M = 0.38$, altitude $H = 17.000$ pi et l'angle $\alpha = 19^\circ$

6.4 Simulation pour un nombre de Mach $M = 1.1$, altitude H égale à 25.000 pi et l'angle d'attaque de l'avion α égal à 2.3563°

6.4.1 Le mouvement longitudinal

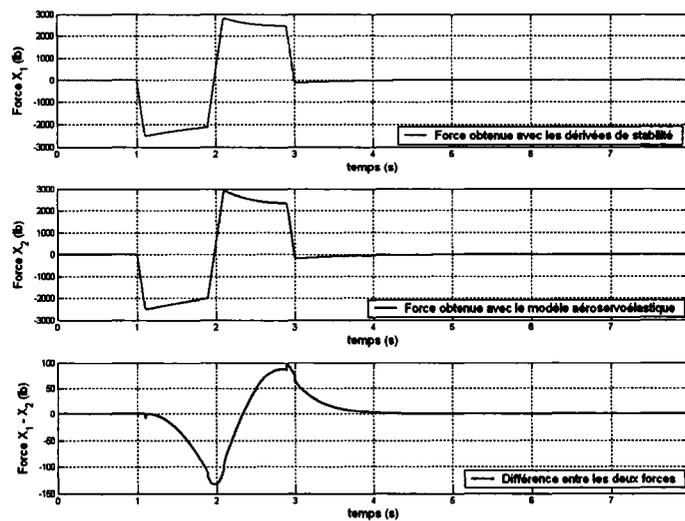


Figure 46 Variation de la force aérodynamique X pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^\circ$

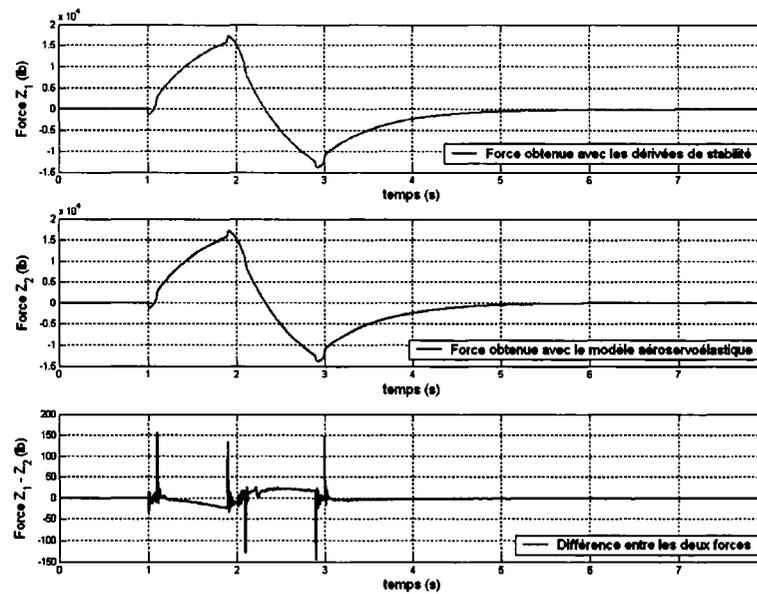


Figure 47 Variation de la force aérodynamique Z pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^0$

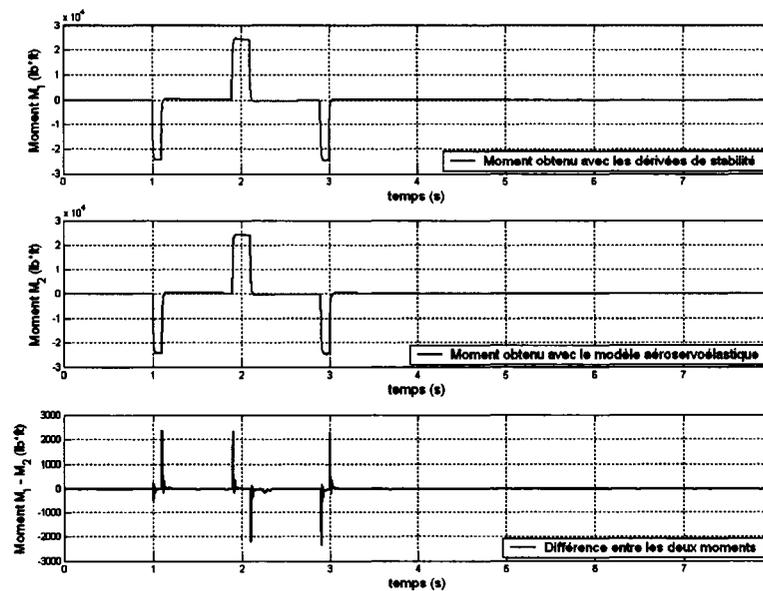


Figure 48 Variation du moment M pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^0$

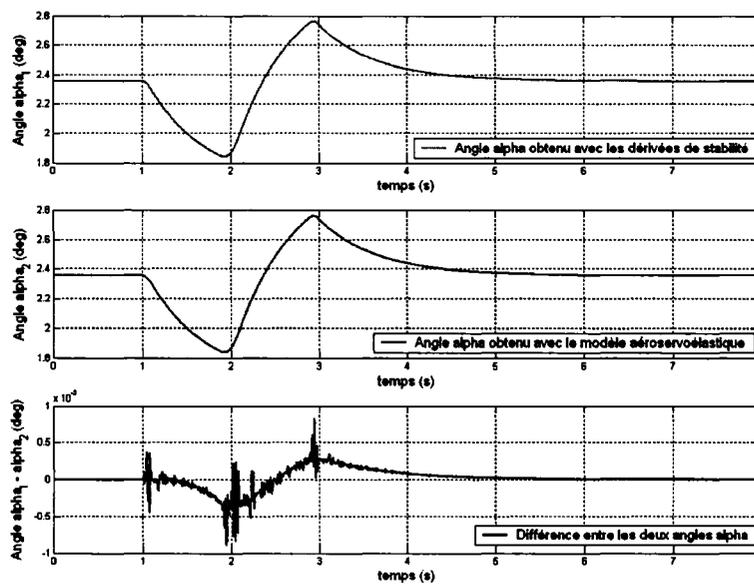


Figure 49 Variation de l'angle α pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000 \text{ pi}$ et l'angle $\alpha = 2.3563^0$

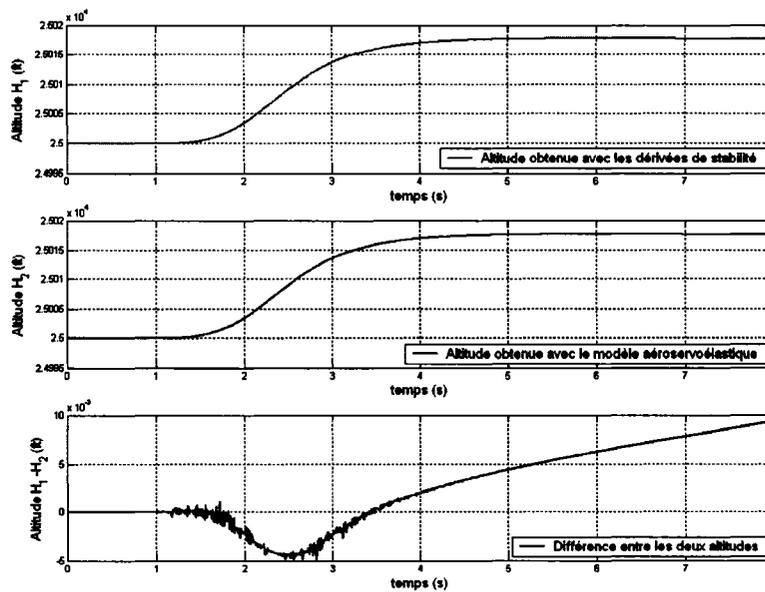


Figure 50 Variation de l'altitude H pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000 \text{ pi}$ et l'angle $\alpha = 2.3563^0$

6.4.2 Le mouvement latéral

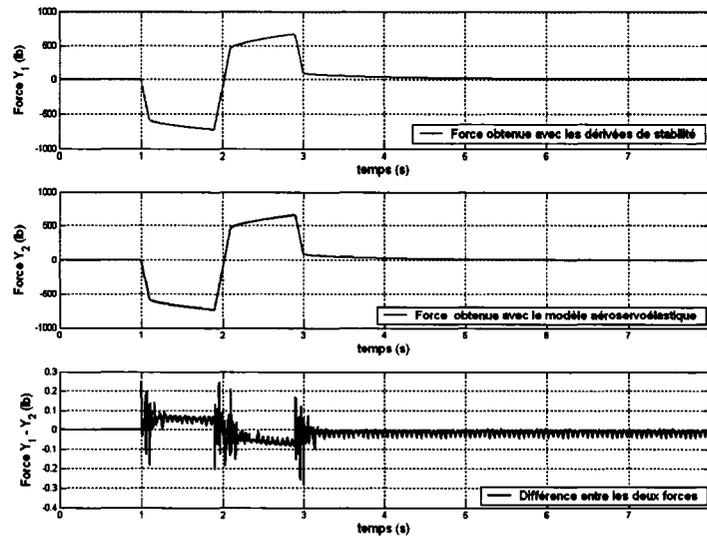


Figure 51 Variation de la force aérodynamique Y pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^\circ$

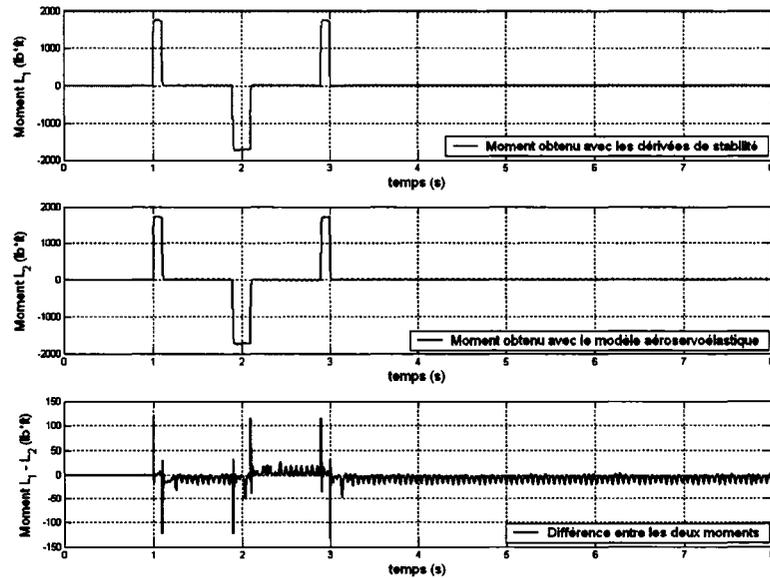


Figure 52 Variation du moment L pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^\circ$

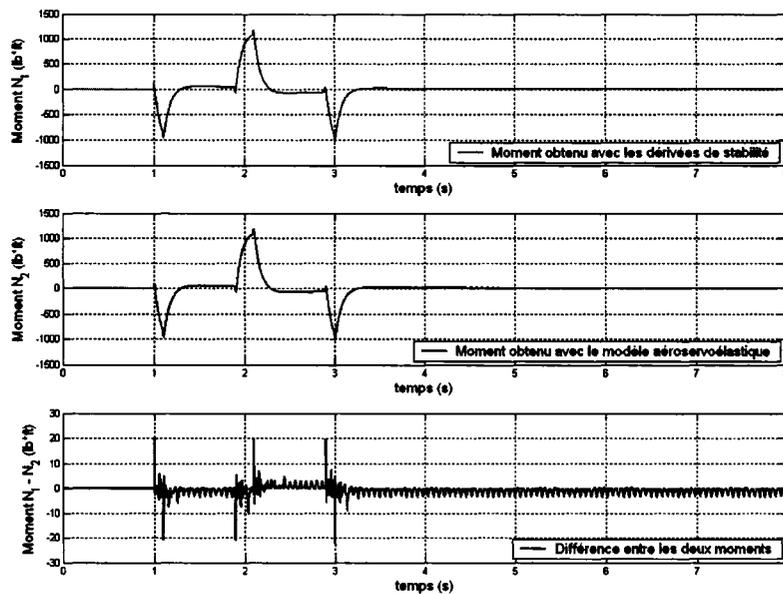


Figure 53 Variation du moment N pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^0$

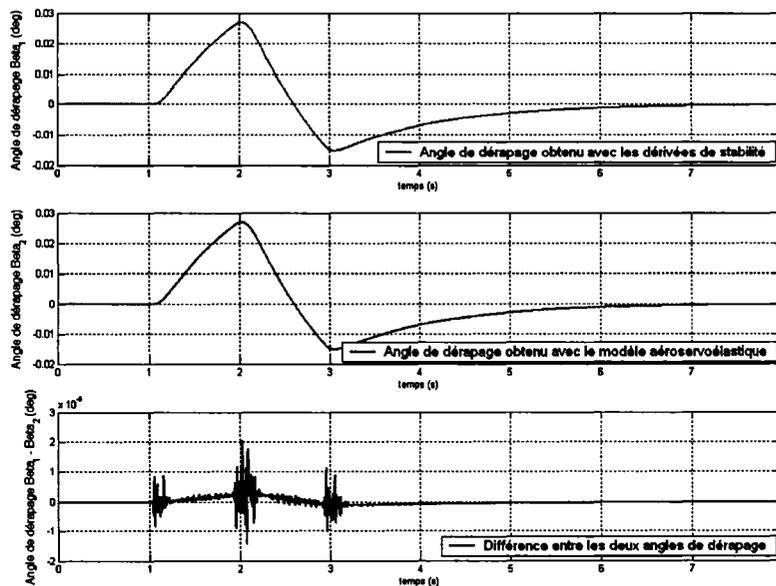


Figure 54 Variation de l'angle β pour Mach $M = 1.1$, altitude $H = 25.000$ pi et l'angle $\alpha = 2.3563^0$

Comme nous pouvons le voir sur les différents graphiques obtenus, les courbes sont identiques suivant les deux méthodes utilisées. Ces résultats permettent donc de valider le modèle de l'avion rigide F/A-18.

6.5 Discussion et interprétation des résultats

Suite aux comparaisons entre les valeurs des paramètres présentées dans les Figures précédentes, il devient évident que les deux schémas de simulations donnent les mêmes résultats. Nous avons présenté seulement les paramètres qui, pendant les simulations, ont donné une différence notable. En effet, nous observons que cette différence est d'au moins 1% dans le cas dynamique (pendant les variations des signaux) et beaucoup plus petite de 1% pendant le régime statique. Cela est dû au fait que les paramètres de retour en boucle fermée ne sont pas les mêmes dans les deux cas et il y a aussi les erreurs dûes aux calculs en Matlab. Les différences sont aussi causées à cause qu'un schéma est une approximation obtenue par des linéarisations avec des petites perturbations de l'autre schéma. De plus, l'effort de calcul demandé dans le cas du schéma de simulation qui prend en considération le modèle aéroélastique (l'implémentation de l'algorithme en Matlab, le temps de calcul, les ressources de mémoire dédiées par l'ordinateur pour les calculs) est beaucoup plus élevé que celui nécessaire dans le cas de l'utilisation du schéma de simulation qui prend en considération les dérivées de stabilité.

CONCLUSION

Un important aspect de l'aéroservoélasticité consiste en l'analyse des interactions entre les modes rigides, élastiques et de contrôle. Nous savons que la théorie des modes rigides n'est pas assez bien développée dans les logiciels d'éléments finis d'analyse aéroélastique tels que Nastran, STARS, etc. Pour cette raison, dans ce mémoire nous avons validé la formulation de la dynamique de vol de l'avion rigide F/A-18 par deux méthodes différentes. Les résultats obtenus par ces méthodes ont été identiques, ce qui a conduit à la validation du modèle de l'avion rigide F/A-18.

Ce travail nous a permis de mettre au point une méthode pour trouver les forces aérodynamiques non stationnaires à partir des données de vol livrées par NASA Dryden Flight. Ces données sont en fonction de nombre de Mach M , d'altitude H et d'angle d'attaque α . Elles comprennent, en effet, entre autres les dérivées de stabilité de l'avion ainsi que d'autres type de données (exemple : vitesse vraie, masse de l'avion, angle de dérapage, masse totale de l'avion, la corde moyenne aérodynamique, les vitesses angulaires sur les axes x, y, z , les angles de rotation autour des axes x, y, z , les positions des surfaces de commande.). Nous avons aussi réalisé une interpolation entre les dérivées de stabilité pour valider de plus le développement théorique.

Étant donné le nombre des graphiques à présenter, nous avons présenté dans le chapitre 6 seulement trois cas le plus représentatifs (une vitesse subsonique, supersonique et une interpolation), mais les autres simulations ont donné des résultats semblants.

Pour réaliser des simulations englobant les modes rigides, élastiques et de contrôle d'un avion, nous devons disposer des données STARS. L'ensemble de la simulation se fait dans un environnement Simulink. Le schéma de simulation est en boucle fermée. Pour estimer l'apparition de battement, nous utilisons surtout les modes élastiques qui sont les principales responsables des mouvements oscillatoires de la structure. Les résultats sont différents quand on prend en considération l'influence des modes rigides et de

contrôle. Le problème est que les valeurs des dérivées de stabilité et contrôle fournies par les logiciels de calcul tel NASTRAN ou STARS ne sont pas fiables et les simulations en boucle fermée utilisant ces valeurs peuvent être erronés.

Pour compenser le manque de fiabilité des données des modes rigides et élastique nous préférons, si disponible, l'utilisation pour les modes rigides et de contrôle des données provenant des tests de vol ou en soufflerie. Ce mémoire présente deux méthodes qui permettent le remplacement des modes rigides calculés en STARS avec des modes rigides de la dynamique de vol.

La première méthode, qui est présenté tout au long de ce mémoire, est une méthode analytique qui permet de trouver les formules analytiques pour toutes les dérivées de stabilité et contrôle dans le système de coordonnées inertiel à partir des dérivées exprimées dans le système de coordonnées lié au vent. Des linéarisations autour des points d'équilibre sont effectuées à chaque étape de calcul. À la fin des calculs, nous comparons dans le Tableau IV les formules obtenues par notre approche avec les formules obtenues par les laboratoires de la NASA. DFRC. Nous avons vu qu'il y a des différences entre les formules obtenues par nous par rapport aux formules obtenues par la NASA [12] mais les simulations qu'on a effectué démontrent que les réponses des schémas construits à partir des dérivées de stabilité et contrôle en système de coordonnées lié au vent et celles obtenues dans le schéma qui prend en considération les nouvelles dérivées calculées sont les mêmes. Cette comparaison nous permet la validation de nos résultats.

La deuxième méthode consiste en une linéarisation numérique du schéma de simulation dans le système de référence lié au vent. Les valeurs des dérivées de stabilité et contrôle obtenues par cette méthode et les valeurs calculés analytiquement avec la première méthode sont pareilles (voir les Tableaux V à VIII).

RECOMMANDATIONS

Finale­ment, la première méthode de calcul analytique pré­sen­té tout au long de ce mé­moire nous a permis de com­pa­rer nos ré­sul­tats avec les ré­sul­tats obte­nus par la NASA. Les for­mu­les trou­vées ont été vali­dées et elles peu­vent être uti­li­sées cha­que fois qu'on a le même set des dé­ri­vées de sta­bi­li­té et con­trôle. Le dé­vel­op­pe­ment de ces for­mu­les a pris plus de temps que la méthode numé­rique, mais l'ap­pli­ca­tion ul­té­rieure pour d'au­tres con­di­tions de vol est plus fa­cile. Avec la deuxième méthode pré­sen­tée dans le cha­pître 5, il est plus fa­cile à trou­ver les valeurs des dé­ri­vées de sta­bi­li­té et con­trôle, mais il faut ap­pli­quer cha­que fois l'al­go­rithme. En plus, la deuxième méthode est un ex­cel­lent moyen de vali­der les calculs analytiques de la première méthode.

Nous pen­sons que les deux méthodes peu­vent être uti­li­sées en­sem­bles en fon­ction de cas. Ainsi, si seule­ment quel­ques con­di­tions de vol sont dis­poni­bles, nous pou­vons uti­li­ser seule­ment la méthode numé­rique. S'il y a beau­coup de con­di­tions de vol où on a tou­jours les mêmes dé­ri­vées de sta­bi­li­té et con­trôle, nous pou­vons dans une première étape en­vi­sa­ger le dé­vel­op­pe­ment théo­rique par la vali­da­tion numé­rique. Par la suite, nous pou­vons uti­li­ser les for­mu­les trou­vées mathé­ma­ti­que­ment.

ANNEXE 1

Dynamique aéroélastique

Dynamique aéroélastique

I.1 Le modèle élastique de l'avion

L'aéroélasticité classique est issue de l'interaction entre la structure flexible de l'avion et les forces aérodynamiques agissants sur l'avion. La démarche classique pour obtenir le modèle aéroélastique débute par une analyse de vibration de la structure. Habituellement la structure de l'avion est modélisée par des éléments-finis, constitués de N nœuds.

Nous prenons en considération que chaque nœud i de la structure est défini par un vecteur position-orientation ξ_i , composé de trois positions et de trois orientations, par rapport à un repère lié aux axes de l'avion, et est muni d'une masse m_i et d'une inertie I_i . Le vecteur position-orientation ξ_i s'exprime sous la forme suivante:

$$\xi_i = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]_a^T, \quad 1 \leq i \leq N \quad (\text{I.1.1})$$

Lorsque la structure est au repos, c'est à dire quand les forces structurelles s'équilibrent, le nœud i est défini par un vecteur position-orientation nominal ξ_{i_0} . Nous allons nommer déplacement du nœud i , la quantité q_i qui a la forme suivante:

$$q_i = \xi_i - \xi_{i_0} \quad (\text{I.1.2})$$

Par la suite, nous regroupons les termes de masse et d'inertie du nœud i correspondant à ses six degrés de liberté dans une nouvelle matrice de dimension (6x6) :

$$M_i = \begin{bmatrix} \overline{m}_{i(3,3)} & \mathbf{0}_{(3,3)} \\ \mathbf{0}_{(3,3)} & I_{i(3,3)} \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.3})$$

$$\text{avec } \bar{m}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & m_i \end{bmatrix}$$

De ce fait la dérivée de la quantité de mouvement du nœud i est représenté par :

$$\frac{d(M_i \dot{q}_i)}{dt} = M_i \ddot{q}_i \quad (\text{I.1.4})$$

Soit q le vecteur déplacement de l'avion défini par les déplacements de ses N nœuds :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.5})$$

La dérivée de la quantité de mouvement de l'ensemble de l'avion est représentée par :

$$\frac{d(M_{N,N} \dot{q})}{dt} = M_{N,N} \ddot{q} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.6})$$

où $M_{N,N}$ est la matrice d'inertie totale de l'avion de dimension $(6N \times 6N)$.

Nous considérons que les seules forces appliquées à la structure, ou autrement dit les interactions entre les nœuds sont les forces dues à l'élasticité. Nous pouvons définir ainsi une matrice de rigidité $K_{N,N}$ et une matrice d'amortissement $D_{N,N}$ décrivant les forces appliquées sur l'avion :

$$F_{\text{élas}} = -D_{N,N} \dot{q} - K_{N,N} q \quad (\text{I.1.7})$$

où $K_{N,N}$ et $D_{N,N}$ sont également de dimension $(6N \times 6N)$ et les éléments $K_{N,N}(i,j)$ et $D_{N,N}(i,j)$ représentent les interactions du nœud j sur le nœud i .

En appliquant les lois de la dynamique de Newton à l'ensemble de l'avion, nous obtenons :

$$\frac{d(M_{N,N} \dot{q})}{dt} = M_{N,N} \ddot{q} = -D_{N,N} \dot{q} - K_{N,N} q$$

ou :

$$M_{N,N} \ddot{q} + D_{N,N} \dot{q} + K_{N,N} q = 0 \quad (\text{I.1.8})$$

I.2 Réduction du modèle

Une analyse de vibrations libres menée sur le modèle élastique décrit par l'équation I.1.8 permet de réduire le système contraint à $6N$ degrés de libertés à un système libre à n degrés de libertés où les n degrés de libertés sont indépendants et représentent la dynamique admissible de l'avion compte-tenu des contraintes d'élasticité. Ces n degrés de libertés sont appelés « modes » ou « coordonnées généralisées » de l'avion et sont représentés par le vecteur η .

Ils sont reliés au vecteur déplacement q à travers la matrice de forme Φ , matrice rectangulaire de dimension $(6N \times n)$, qui regroupe les vecteurs propres issus de l'analyse de vibrations libres :

$$q = \Phi \eta \quad (\text{I.1.9})$$

Le vecteur de coordonnées généralisées η contient bien évidemment les modes indépendants issus des déformations élastiques η_e mais aussi les modes rigides η_r décrivant les degrés de liberté en translation et en rotation de l'avion considéré comme un solide rigide (entre 1 et 6) et les modes des surfaces de commande η_c représentant le mouvement des surfaces de commandes en rotation.

Nous pouvons donc diviser le vecteur de coordonnées généralisées η comme suit :

$$\eta = [\eta_r \quad \eta_e \quad \eta_c]^T \quad (\text{I.1.10})$$

De même pour la matrice de forme Φ :

$$\Phi = [\Phi_r \quad \Phi_e \quad \Phi_c] \quad (\text{I.1.11})$$

Et finalement le vecteur déplacement q est égal à :

$$q = [\Phi_r \quad \Phi_e \quad \Phi_c] \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_e \\ \eta_c \end{bmatrix} = \Phi_r \eta_r + \Phi_e \eta_e + \Phi_c \eta_c \quad (\text{I.1.12})$$

En ce moment, tout le modèle dynamique de l'avion peut être décrit par les n modes indépendants. En reprenant l'équation de la dynamique I.1.8, nous pouvons construire une nouvelle équation ne dépendant que du vecteur de coordonnées généralisées η :

$$M \ddot{\eta} + D \dot{\eta} + K \eta = 0 \quad (\text{I.1.13})$$

Les matrices M , D et K sont les matrices modales d'inertie, d'amortissement et de rigidité élastiques, toutes de dimension $n \times n$ et définies comme suit :

$$M = \Phi^T M_{N,N} \Phi, \quad D = \Phi^T D_{N,N} \Phi, \quad K = \Phi^T K_{N,N} \Phi \quad (\text{I.1.14})$$

I.3 Introduction des forces aérodynamiques

Une fois le modèle structural élaboré, on s'intéresse à la génération des forces aérodynamiques sur l'avion. Ici nous considérons le cas général où les forces aérodynamiques générées sont non-stationnaires et donc dépendent de la fréquence des oscillations.

La forme générale des forces aérodynamiques est la suivante :

$$F_{aerodyn} = -q_{dyn} Q_{N,N}(k, Mach) q \quad (I.1.15)$$

où q_{dyn} est la pression dynamique et k la fréquence réduite. $Q_{N,N}$ est la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques définie pour un *Mach* donné et une fréquence réduite k donnée et chaque élément $Q_{N,N}(i,j)$ représente l'interaction de la force aérodynamique appliquée au nœud j sur le nœud i .

Les forces aérodynamiques sont également calculées dans l'espace des nœuds puis ramenées dans l'espace des modes à travers la matrice de forme Φ :

$$Q = \Phi' Q_{N,N} \Phi \quad (I.1.16)$$

où Q est la matrice modale des forces aérodynamiques généralisées.

Pour obtenir l'équation qui nous intéresse, nous pouvons intégrer les forces aérodynamiques dans l'équation de dynamique I.1.13 :

$$M \ddot{\eta} + D \dot{\eta} + K \eta + q_{dyn} Q(k, Mach) \eta = 0 \quad (I.1.17)$$

Finalement, l'équation I.1.17 représente l'équation de base de tout problème aéroélastique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Adams, W.M., Jr., Tiffany, S.H., 1993, *ISAC: A tool for aeroservoelastic modeling and analysis*, NASA TM 109031.
- [2] Noll, T., Blair, M., Cerra, J., 1986, ADAM, *An Aeroservoelastic Analysis Method For Analog or Digital Systems*, Journal of Aircraft, Vol. 23, No. 11, pp. 852-858.
- [3] Pitt, D.M., Goodman, C.E., 1992, *FAMUSS: A New Aeroservoelastic Modeling Tool*, AIAA-92-2395-CP.
- [4] Neill, D.J., Herendeen, D.L., Hoesly, R.L., 1995, *ASTROS Enhancements. Volume 2: ASTROS Programmer's Manual*, Universal Analytics INC Torrance CA.
- [5] Nam, C., Chen, P.C., Liu, D.D., Chattopadhyay, 2000, *ASTROS* with smart structures and ASE modules: application to flutter suppression and gust-load alleviation*, AIAA 2000-1365, pp. 257-266.
- [6] Luo, X., Grandhi, R.V., 1997, *ASTROS for reliability-based multidisciplinary structural analysis and optimization*, Computers & Structures, Vol. 62, No. 4, pp. 737-745.
- [7] P. C. Chen, Sulaeman, E., Liu, D.D., Denegri, C.M. Jr., 2002, *Influence of external store aerodynamics on flutter/LCO of a fighter aircraft*, 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Denver, CO, USA," AIAA, pp. 1-11, 22-25.
- [8] Gupta, K.K., 1997, *STARS – An Integrated, Multidisciplinary, Finite-Element, Structural, Fluids, Aeroelastic, and Aeroservoelastic Analysis Computer Program*, NASA TM-4795, pp.1-285.
- [9] Rodden, W.P., Harder, R.L., Bellinger, E.D., 1979, *Aeroelastic Addition to NASTRAN*, NASA CR-3094.
- [10] Nelson, R. C., *Flight Stability and Automatic Control*, McGraw-Hill Inc., USA, 1989.
- [11] Botez, R. M., *Notes de cours Systèmes informatiques embarqués GPA 740*, 2005.
- [12] Lind, R., Brenner, M., *Robust Aeroservoelastic Stability Analysis*, Springer-Verlag London Ltd., 1999.

- [13] Karnib, M. Y., *Calcul des dérivées de stabilité pour les interactions aéroserveoélastiques*, Montréal, École de technologie supérieure, 2004.

Rapport-Gratuit.com