

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Remerciements	iv
Table des matières	vi
Liste des tableaux	x
Table des figures	xiv
Nomenclature	xv
1 Introduction	1
1.1 Géométrie combinatoire	2
1.2 Polyominos	5
1.2.1 Définitions	6
1.2.2 Un peu d'histoire	9
1.2.3 Le problème et ses difficultés	10
1.3 Structure du mémoire	12
2 Séries génératrices ordinaires	14
2.1 Introduction	15
2.2 Opérations sur les séries génératrices	19
2.3 Comment les construire ?	23
2.3.1 Avec une formule exacte	23
2.3.2 Avec une récurrence	24

2.3.3	Avec une équation fonctionnelle	29
2.3.4	Avec la méthode de la matrice de transfert	34
3	Polyominos particuliers	38
3.1	Produit diagonal	39
3.2	Minimaux	40
3.2.1	Escaliers	41
3.2.2	Équerres	42
3.2.3	Coins minimaux	43
3.2.4	Minimaux généraux	47
3.3	Minimaux plus un	51
3.3.1	Bancs non dégénérés	53
3.3.2	Bancs 2×2	55
3.3.3	Coins minimaux plus un	56
3.3.4	Bancs-coins	59
3.3.5	Minimaux plus un généraux	63
4	Polyominos d'aire minimale plus deux	65
4.1	Caractérisation des polyominos d'index r	66
4.2	Classification des polyominos d'index 2	71
4.2.1	Banc $\times$ Banc	72
4.2.2	Premiers inscrits dans un $t \times 2$ ou $2 \times t$	72
4.2.3	Grands rectangles	73
4.2.4	Premiers à quatre feuilles	73
4.2.5	Bols	74
4.2.6	Minimaux plus deux généraux	75
4.3	Séries génératrices des polyominos d'index 2	77
4.3.1	Banc $\times$ Banc	77
4.3.2	Premiers inscrits dans un $t \times 2$ ou $2 \times t$	78
4.3.3	Grands rectangles	84
4.3.4	Premiers à quatre feuilles	94
4.3.5	Bols	104
4.3.6	Minimaux plus deux généraux	110

5	Polyominos d'index 0 à 2 à rotations près et à symétries près	112
5.1	Lemme de Burnside	113
5.2	Définitions et propriétés	120
5.2.1	Polyominos inscrits	121
5.2.2	Polyominos non-inscrits	122
5.2.3	Conditions pour être g -symétrique, $g \in \mathcal{C}_4$	122
5.3	Minimaux	123
5.3.1	Invariants sous une rotation donnée	124
5.3.2	Invariants sous une réflexion donnée	129
5.3.3	À rotations près	132
5.3.4	À symétries près	135
5.4	Minimaux plus un	137
5.4.1	Invariants sous une rotation donnée	137
5.4.2	Invariants sous une réflexion donnée	141
5.4.3	À rotations près	147
5.4.4	À symétries près	149
5.5	Minimaux plus deux	151
5.5.1	Invariants sous une rotation donnée	153
5.5.2	Invariants sous une réflexion donnée	163
5.5.3	À rotations près	173
5.5.4	À symétries près	174
6	Polycubes	176
6.1	Introduction	177
6.2	Contenus ou inscrits dans un prisme $2 \times 2 \times h$	178
6.2.1	Matrice de transfert des polycubes $2 \times 2 \times h$	179
6.2.2	Séries génératrices des polycubes $2 \times 2 \times h$	182
6.2.3	Généraliser pour les polycubes $b \times k \times h$?	187
7	Conclusion	188
	Bibliographie	191
A	Séries génératrices des polyominos d'index 1	195

A.1	Polyominos d'index 1 à translations près	195
A.2	Polyominos d'index 1 à rotations près	196
A.3	Polyominos d'index 1 à symétries près	197
B	Vérification informatique de l'invariance d'un polyomino sous une	
	symétrie donnée	198
B.1	Rotation de 90°	199
B.2	Rotation de 180°	199
B.3	Symétrie diagonale	200
B.4	Symétrie verticale	200
B.5	Programme	201

Liste des tableaux

2.1	Transitions des polyominos de largeur 2	36
3.1	Nombre de polyominos minimaux inscrits dans un $k \times b$	50
3.2	Nombre de bancs-coins inscrits dans un $k \times b$	63
3.3	Nombre de polyominos minimaux plus un inscrits dans un $k \times b$	64
4.1	Nombre de Banc×Banc inscrits dans un $k \times b$	78
4.2	Nombre de polyominos d'index 2 inscrits dans un $k \times b$ contenant un premier $t \times 2$ ou $2 \times t$	84
4.3	Nombre de polyominos d'index 2 inscrits dans un $k \times b$ contenant un grand rectangle	94
4.4	Nombre de polyominos d'index 2 inscrits dans un $k \times b$ contenant un premier à quatre feuilles	103
4.5	Nombre de polyominos d'index 2 inscrits dans un $k \times b$ contenant un bol	109
4.6	Nombre de polyominos d'index 2 inscrits dans un $k \times b$	110
5.1	Nombre de polyominos minimaux inscrits dans un $k \times b$ à rotations près	134
5.2	Nombre de polyominos minimaux inscrits dans un $k \times b$ à symétries près	136
5.3	Nombre de polyominos d'index 1 inscrits dans un $k \times b$ à rotations près	148
5.4	Nombre de polyominos d'index 1 inscrits dans un $k \times b$ à symétries près	150
5.5	Nombre de polyominos d'index 1 d'aire n à symétries près $(s_1(n))$, à rotations près $(r_1(n))$ et à translations près $(p_1(n))$	151
6.1	Matrice de transfert des polycubes $2 \times 2 \times h$	181
6.2	Nombre de polycubes contenus dans un $2 \times 2 \times h$ de volume v	184
6.3	Nombre de polycubes inscrits dans un $2 \times 2 \times h$ de volume v	185

Table des figures

1.1	Réseaux réguliers en deux dimensions	2
1.2	Objets de la géométrie combinatoire	4
1.3	Deux chemins associés au même polyomino	4
1.4	Polycube	5
1.5	Polyomino d'aire 13, de périmètre de site 16, de périmètre 26, de périmètre vertical 12 et horizontal 14	6
1.6	Polyominos verticalement convexes	7
1.7	Polyominos inscrits	8
1.8	Molécule d'ADN représentée par l'assemblage de deux polycubes	9
1.9	Polyominos d'aire n	10
2.1	Décomposition des polyominos $2 \times b$ selon la première et la deuxième ligne	25
2.2	Décomposition des polyominos $2 \times b$ à n cellules	27
2.3	Décomposition en taille de guêpe d'un bargraphe	30
2.4	Polyomino avant ou après la rangée de largeur 2	33
2.5	Configurations possibles pour un polyomino de largeur 2	36
3.1	Produit diagonal de deux polyominos	39
3.2	Polyominos d'aire minimale inscrits dans un 5×5	41
3.3	Construction de l'équation fonctionnelle des polyominos escaliers	42
3.4	Les trois constituantes d'une équerre	43
3.5	Construction de la récurrence décrivant les polyominos coins d'index 0	44
3.6	Polyominos minimaux inscrits dans un 7×5	47
3.7	Polyomino croix	48
3.8	Polyominos d'aire minimale plus un	52

3.9	Structure des polyominos d'index 1	52
3.10	Positions des équerres sur un banc $t \times 2$	54
3.11	Polyominos coins d'index 1	57
3.12	Polyominos coins d'index 1 contenant un banc $t \times 2$ horizontal de la forme « escalier · banc $t \times 2$ · équerre »	58
4.1	Polyominos d'index 2	65
4.2	Un polyomino et l'animal associé	67
4.3	Des cycles (cellules bleues)	68
4.4	Ajout d'une cellule de degré 1	69
4.5	Ajout d'une cellule de degré 2	69
4.6	Ajout d'une cellule de degré 3	69
4.7	Ajout d'une cellule de degré 4	69
4.8	Ajout d'une cellule à l'extérieur du rectangle circonscrit	69
4.9	Banc $\times$ Banc	72
4.10	Premiers $t \times 2$	72
4.11	Grands rectangles	73
4.12	Premiers à quatre feuilles	73
4.13	Bols	74
4.14	Polyominos d'index 2 ayant zéro trou linéaire	76
4.15	Polyominos d'index 2 ayant un trou linéaire	76
4.16	Polyominos d'index 2 ayant deux trous linéaires	76
4.17	Construction d'un Banc $\times$ Banc	77
4.18	Polyominos d'index 2 contenant un premier $t \times 2$	78
4.19	Ajout d'équerres sur un premier inscrit dans un $t \times 2$	79
4.20	Ajout de coins d'index 0 à un grand rectangle de première espèce	85
4.21	Ajout d'équerres sur un grand rectangle de première espèce	86
4.22	Ajout d'équerres sur un grand rectangle de seconde espèce	88
4.23	Polyominos d'index 2 contenant un H horizontal	95
4.24	Polyominos d'index 2 contenant un crabe	97
4.25	Polyominos d'index 2 contenant un chien	99
4.26	Ajout de la quatrième cellule d'un polyomino dromadaire	101
4.27	Polyominos d'index 2 contenant un dromadaire	102

5.1	Deux polyominos appartenant à la même orbite	115
5.2	Réflexions	121
5.3	Rectangle ayant subi une rotation de k°	123
5.4	Les 8 polyominos minimaux (à translations près) inscrits dans un 3×2 , les 5 classes à rotations près et les 3 classes à symétries près	124
5.5	Polyomino d'aire minimale r -symétrique	125
5.6	Polyominos d'index 0 r^2 -invariants	126
5.7	Symétrie horizontale d'un polyomino d'index 0	129
5.8	Polyomino d'index 0 d_1 -symétrique	131
5.9	Les bancs et leurs symétries	137
5.10	Rotation de 90° d'un polyomino d'index 1	138
5.11	Polyominos d'index 1 r^2 -invariants	139
5.12	Polyominos d'index 1 h -invariants	141
5.13	Polyominos d'index 1 h -symétriques inscrits dans un carré $b \times b$	143
5.14	Polyominos d'index 1 d_1 -symétriques	145
5.15	Les Banc $\times$ Banc et leurs symétries	152
5.16	Les premiers $t \times 2$ et leurs symétries	152
5.17	Les bols et leurs symétries	152
5.18	Les grands rectangles et leurs symétries	152
5.19	Les quatre-feuilles et leurs symétries	152
5.20	Division des quadrants d'un polyomino en fonction de la parité des côtés de son carré circonscrit	154
5.21	Polyominos r -symétriques inscrits dans un carré aux dimensions paires tels que les quatre cases autour du centre sont occupées	155
5.22	Polyominos r -symétriques inscrits dans un carré aux dimensions paires tels que les quatre cases autour du centre ne sont pas occupées	155
5.23	Polyominos r -symétriques inscrits dans un carré aux dimensions im- paires tel que la case centrale est occupée	156
5.24	Banc $\times$ Banc r^2 -invariants	157
5.25	Premiers $t \times 2$ en forme de S r^2 -invariants	158
5.26	Polyominos H r^2 -invariants	160
5.27	Dromadaires r^2 -invariants	161

5.28	3×2 h -symétriques	163
5.29	2×3 h -symétriques	163
5.30	Bancs d'index 2 h -symétriques	165
5.31	Bols symétriques h -symétriques où s est la hauteur du bol (gris)	166
5.32	Bols parfaits h -symétriques	167
5.33	H h -symétriques	167
5.34	Crabes h -symétriques	168
5.35	Banc $\times$ Banc d_1 -symétriques	170
5.36	Grands rectangles d_1 -symétriques	171
6.1	Des polycubes	177
6.2	Configurations possibles d'un étage d'un polycube $2 \times 2 \times h$	179
6.3	Polycubes inscrits dans un $2 \times 2 \times 4$	180
6.4	Configurations transitoires d'un polycube $2 \times 2 \times h$	180

Nomenclature

Cette liste comporte la description des variables et des séries génératrices qui reviennent le plus souvent et elle n'est pas exhaustive.

b	Hauteur du rectangle circonscrit
$BC(x, y)$	Série génératrice des bancs-coins
$c_i(k, b)$	Nombre de coins d'index i inscrits dans un $k \times b$
$C_1^{2 \times 2}(x, y)$	Série génératrice des coins d'index 1 contenant un banc 2×2
$C_1^{t \times 2}(x, y)$	Série génératrice des coins d'index 1 contenant un banc $t \times 2$, $t \geq 3$
$C_i^\square(x, y)$	Série génératrice des coins d'index i inscrits dans un carré
$C_i(x, y)$	Série génératrice des coins d'index i
$F_2(q, y)$	Série génératrice des polyominos $2 \times b$ d'aire n
$F_2(y)$	Série génératrice des polyominos $2 \times b$
$F_i^{g, \square}(x, y)$	Série génératrice des polyominos carrés d'index i g -invariants
$F_i^g(x, y)$	Série génératrice des polyominos d'index i g -invariants
k	Largeur du rectangle circonscrit
$P_i(x, y)$	Série génératrice des polyominos d'index i
$P_i^\square(x, y)$	Série génératrice des polyominos d'index i inscrits dans un carré
$\tilde{C}_i(x, y)$	Série génératrice des coins d'index i non dégénérés
$p_i(k, b)$	Nombre de polyominos d'index i inscrits dans un $k \times b$
$P_{1,h}(x, y)$	Série génératrice des polyominos d'index 1 ayant un banc $t \times 2$, $t \geq 3$
$P_1^{2 \times 2}(x, y)$	Série génératrice des polyominos d'index 1 ayant un banc 2×2
q	Variable formelle associée à l'aire d'un polyomino (chap. 2 à 5)
q	Variable formelle associée au volume d'un polycube (chap. 6)
x	Variable formelle associée à la largeur du rectangle circonscrit
y	Variable formelle associée à la hauteur du rectangle circonscrit

Chapitre 1

Introduction

*Counting is one of our first tools, and it is time to
appreciate its full mathematical power.
– A. T. Benjamin et J. Quinn [4, p. ix].*

Compter est une des premières notions mathématiques qui est apprise par les enfants à la petite école, mais ce sujet est loin d'être banal. En effet, il s'agit d'un concept fondamental en science et il existe toute une branche des mathématiques dédiée à cette tâche : la combinatoire.

Cette dernière s'articule principalement autour de trois types de problèmes qui portent sur les manières d'assembler un certain nombre d'éléments appartenant à un ensemble fini [5, 35]. Existe-t-il une solution ? Combien y a-t-il de façons de combiner des objets ? Parmi les arrangements possibles, quelle est la meilleure solution au problème posé ? Voilà les principales questions auxquelles la combinatoire s'attarde. Le présent ouvrage se consacrera à la deuxième interrogation qui forme la combinatoire énumérative.

La combinatoire interagit avec d'autres domaines, tels que l'algèbre, la géométrie, l'analyse et les statistiques. Ce mémoire portera sur son interaction avec la géométrie, appelée géométrie combinatoire, qui consiste à étudier des objets géométriques et

leurs caractéristiques. Par conséquent, une introduction à la géométrie combinatoire est proposée dans ce chapitre en abordant des objets d'intérêt de ce domaine ainsi que certains problèmes qui se posent dans ce contexte. Ensuite, les objets qu'on appelle des polyominos sont étudiés dans ce document. Ceux-ci sont des figures géométriques formées de carrés unitaires juxtaposés par leurs côtés et sont présentés dans ce chapitre par le biais de définitions, sous un aspect historique ainsi qu'en abordant le problème de leur dénombrement. Pour clore ce chapitre, la structure du mémoire est présentée.

1.1 Géométrie combinatoire

Plusieurs objets sont à l'étude dans la géométrie combinatoire et ont pour avantage d'être faciles à visualiser ; ceux-ci sont souvent formés de points, de lignes, de cercles ou plus généralement de figures géométriques. Parmi ces objets, on retrouve les chemins dans le plan discret, en particulier auto-évitants, les polygones auto-évitants, les polyominos et les polycubes. Ces quatre familles d'objets sont décrits dans cette section. On présente également le lien entre ces objets ainsi que certains paramètres d'étude. Pour ce qui est des polyominos, puisqu'ils sont le sujet principal de ce mémoire, ils sont traités plus en détail dans la section suivante.

Les chemins, les polygones et les polyominos peuvent être définis sur plusieurs réseaux réguliers en deux dimensions tels que les réseaux carré, hexagonal et triangulaire, illustrés à la figure 1.1. À moins d'avis contraire, les formes définies dans ce mémoire sont construites à partir du réseau carré en deux dimensions.

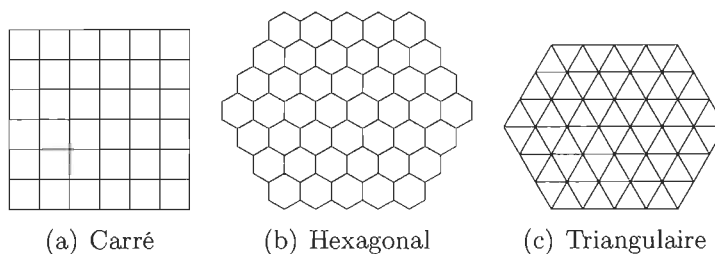


FIGURE 1.1 – Réseaux réguliers en deux dimensions

Définition 1.1. Un *chemin* sur le réseau carré est une suite de points à coordonnées entières reliés par la relation de voisinage, c'est-à-dire que deux points consécutifs dans la suite sont voisins.

Les figures 1.2(a) et 1.2(b) montrent des chemins dans le réseau carré. En particulier, à la figure 1.2(b), tous les points sont différents ; on ne revient jamais sur ses pas. Dans ce cas, on dit qu'il s'agit d'un chemin auto-évitant.

Définition 1.2. Un *chemin auto-évitant* à n pas sur le réseau carré est une suite de $n + 1$ points distincts tel que chaque point est le voisin le plus près de son prédécesseur dans le réseau, soit distants d'une unité.

À la figure 1.2(c), une figure similaire à un chemin auto-évitant est illustrée, mais il s'agit d'une figure fermée ; c'est un polygone auto-évitant.

Définition 1.3. Un *polygone auto-évitant* à n pas sur le réseau carré est une suite de $n + 1$ points dont uniquement le premier et le dernier coïncident et tel que chaque point est le voisin le plus près de son prédécesseur, c'est-à-dire à une distance d'une unité.

Bien qu'un polygone auto-évitant soit similaire à un chemin auto-évitant, ces deux objets géométriques sont différents. En effet, une fois le polygone construit, on ne peut plus identifier l'origine et la fin. Les $n + 1$ points formant le polygone à n pas sont tous des candidats pour être le point de départ.

Définition 1.4. Un *polyomino* est un ensemble de carrés unitaires joints par leurs côtés. Ces carrés sont appelés des *cellules* (voir figure 1.2(d)).

On peut établir plusieurs liens entre les polyominos et les autres objets définis ci-haut. Premièrement, comme on peut voir à la figure 1.2(c), on constate que l'intérieur d'un polygone auto-évitant est un polyomino. Par contre, ce type de construction ne pourra jamais posséder de trous, comme c'est le cas pour les polyominos en général

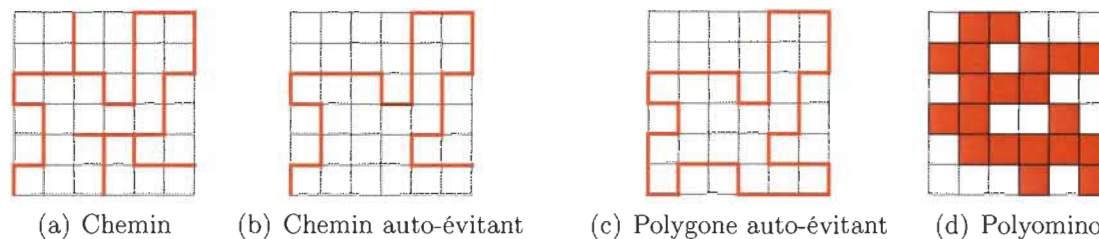


FIGURE 1.2 – Objets de la géométrie combinatoire

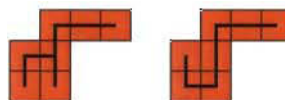


FIGURE 1.3 – Deux chemins associés au même polyomino

(voir figure 1.2(d)). Deuxièmement, un chemin peut être associé à un polyomino en plaçant un carré unitaire centré à la place d'un point. Toutefois, il n'y a pas autant de polyominos que de chemins de longueur n donnée, car deux chemins différents, et souvent plus, peuvent engendrer le même polyomino tel qu'illustré à la figure 1.3.

Ces figures peuvent être étudiées selon différents paramètres. D'une part, les chemins sont caractérisés par le nombre de points différents qui les forment ou selon leur nombre d'arêtes, soit le nombre de segments reliant les points. Par exemple, celui de la figure 1.2(a) possède 31 arêtes et 32 points différents. D'autre part, les chemins auto-évitants et les polygones auto-évitants sont habituellement comptés en fonction du nombre de pas qui les constituent. Pour les polygones, cette caractéristique est équivalente au périmètre. Par exemple, le chemin auto-évitant de la figure 1.2(b) possède 25 pas et le polygone de la figure 1.2(c) en a 34. Quant à eux, les polyominos sont souvent dénombrés selon le nombre de carrés qui les composent, c'est-à-dire leur aire. D'autres paramètres intéressants à considérer pour les polyominos sont leur périmètre (standard ou de site), leur hauteur et leur largeur. En guise d'exemple, celui de la figure 1.3 est d'aire 7, de périmètre 14, de périmètre de site 12, de hauteur 3 et de largeur 4.

Finalement, on ne peut pas passer sous silence l'existence d'objets géométriques en trois dimensions. En effet, les polyominos, des objets $2D$, peuvent être généralisés à la troisième dimension. Ces nouvelles formes sont appelées des polycubes. Plus

précisément, ces figures 3D sont constituées d'un assemblage de cubes unitaires reliés par leurs faces, tel qu'illustré à la figure 1.4. On peut étudier ceux-ci en fonction de leur volume, soit le nombre de cubes unitaires formant le polycube, et aussi en fonction du prisme rectangulaire circonscrit au polycube. Les polycubes sont présentés plus en détail au chapitre 6.



FIGURE 1.4 – Polycube

1.2 Polyominos

Le terme *polyomino* a été introduit par le mathématicien S. Golomb [19] et consiste en une généralisation du mot domino, cet objet formé de deux carrés de même dimension. En effet, tel que défini à la section précédente, un polyomino est constitué de plusieurs carrés unitaires connectés par leurs côtés. Ces carrés sont souvent nommés des *cellules*.

Dans ce mémoire, on désire dénombrer les polyominos en fonction de leur aire. La section débute par quelques définitions concernant différentes familles de polyominos. Ensuite, on discute de leur origine ainsi que du problème de dénombrement de ceux-ci en fonction de leur aire et des difficultés associées.

1.2.1 Définitions

Tel que mentionné précédemment, les polyominos peuvent entre autres être dénombrés en fonction de leur aire, de leur périmètre ou même des deux. L'*aire* d'un polyomino est le nombre de cellules qu'il contient, son *périmètre* est le nombre de côtés simultanément en contact avec une cellule à l'intérieur et à l'extérieur du polyomino et, finalement, le *périmètre de site* est le nombre de cellules voisines vacantes. De plus, on distingue parfois le *périmètre horizontal* du *périmètre vertical*, selon qu'il s'agit d'un côté horizontal ou vertical qui contribue au périmètre. À la figure 1.5, chacun de ces paramètres est évalué sur le polyomino illustré. Outre ces paramètres, les polyominos sont également étudiés selon leur convexité.

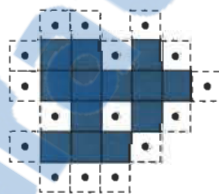


FIGURE 1.5 – Polyomino d'aire 13, de périmètre de site 16, de périmètre 26, de périmètre vertical 12 et horizontal 14

Définition 1.5. Un polyomino est *verticalement convexe* (resp. *horizontalement*) si son intersection avec n'importe quelle droite verticale (resp. horizontale) est connexe. Donc, aucun espace vide ne sépare les cellules appartenant à l'intersection.

Trois polyominos verticalement convexes sont illustrés à la figure 1.6. Notamment, on retrouve un bargraphe à la figure 1.6(a), qui est défini comme suit.

Définition 1.6. Un *bargraphe* est un polyomino verticalement convexe aligné sur l'axe horizontal, ce qui lui confère l'allure d'un histogramme.

Les bargraphes ont notamment été étudiés par M. Bousquet-Mélou et A. Rechenitzer dans [9]. De plus, un résultat tiré de cet article est présenté au chapitre 2 afin d'illustrer l'utilisation d'une équation fonctionnelle pour obtenir une série génératrice.

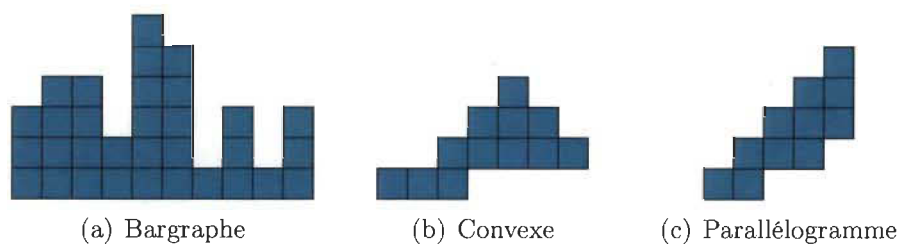


FIGURE 1.6 – Polyominos verticalement convexes

Les polyominos sont dit *convexes* lorsqu'ils sont horizontalement et verticalement convexes. Les figures 1.6(b) et 1.6(c) illustrent des polyominos convexes. En particulier, celui de la figure 1.6(c) est un polyomino *parallélogramme*.

Définition 1.7. Un polyomino *parallélogramme* est formé d'un agencement de colonnes tel que chacune d'elles placée directement à la droite d'une autre est soit à la même hauteur que cette dernière, soit plus haute.

Une manière équivalente de définir un polyomino parallélogramme est donnée dans [9]; c'est un polyomino circonscrit par deux chemins ayant seulement des pas en direction nord ou est, tous deux partant de l'origine et se terminant au même point, sans se rencontrer ailleurs. Ceux-ci ont, entre autres, été étudiés par G. Pólya en 1969 [29] et plus récemment par M. Bousquet-Mélou [7, 8] ou encore par M. Dukes et Y. Le Borgne [14] ainsi que par A. Del Lungo et col. [12].

Dès 1962, une autre astuce a été exploitée par R. C. Read dans [34] et reprise plus tard, notamment par A. Goupil et col. [21, 22, 23], soit d'inscrire les polyominos dans un rectangle. Cette méthode est d'ailleurs utilisée tout au long de ce mémoire.

Définition 1.8. Un polyomino est *inscrit* dans un rectangle s'il touche aux quatre côtés du rectangle et qu'aucune de ses cellules n'est à l'extérieur de ce rectangle. Ce rectangle est alors dit *circonscrit* au polyomino.

Le rectangle circonscrit à un polyomino est le plus petit rectangle tel que le polyomino est entièrement à l'intérieur du rectangle. Si un rectangle circonscrit est de largeur k et de hauteur b , alors on dit que le polyomino est inscrit dans un rectangle $k \times b$.

À l'aide de la notion d'inscription, plusieurs classes de polyominos ont été étudiées [22, 23, 28, 33]. On note entre autres les *polyominos de largeur 2 et de hauteur b à n cellules*, soit les polyominos inscrits dans un rectangle $2 \times b$ d'aire n . Ces polyominos ont été étudiés dans le mémoire de L. J. Llerena [28] et sont également présentés au chapitre 2 afin d'illustrer les différentes techniques permettant de construire une série génératrice.

Finalement, les polyominos considérés dans ce document sont définis à travers le concept d'inscription dans un rectangle. Il s'agit des polyominos d'aire minimale et d'aire minimale plus r (voir figure 1.7).

Définition 1.9. Un polyomino d'aire *minimale*, ou d'*index 0*, est un polyomino inscrit dans un rectangle $k \times b$ et d'aire $b + k - 1$.

Définition 1.10. Un polyomino d'aire *minimale plus r* , ou d'*index r* , est un polyomino inscrit dans un rectangle $k \times b$ et d'aire $b + k + r - 1$. Ce type de polyomino possède r cellules de plus qu'un polyomino d'aire minimale inscrit dans le même rectangle.

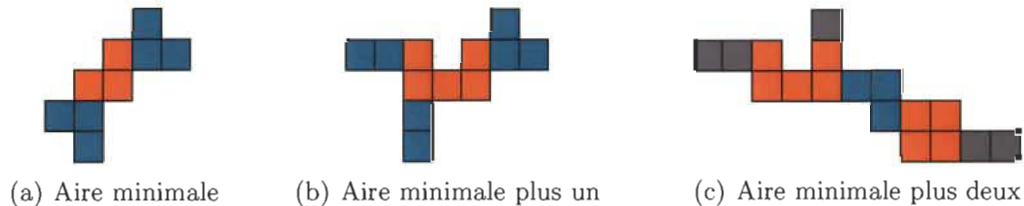


FIGURE 1.7 – Polyominos inscrits

L'étude des polyominos d'index 0 à 2 est un travail initié par le groupe de combinatoire de l'UQTR [21, 22, 23]. De plus, la généralisation de ces résultats pour n'importe quel index permettrait de résoudre le problème de dénombrement des polyominos en fonction de leur aire.



1.2.2 Un peu d'histoire

L'étude des polyominos et leur popularité sont dus en partie au mathématicien S. Golomb, qui les a introduits à une conférence au *Harvard Mathematics Club* en 1953 [25]. L'année suivante, il a publié un article intitulé *Checker boards and Polyominoes* [19] où on y aborde le problème du pavage d'un échiquier par des polyominos. Comme le mentionne lui-même S. Golomb, avant leur présentation au monde scientifique, les polyominos prenaient (et prennent encore) la forme de jeux et de casse-têtes.

Dans le livre *The Canterbury Puzzles* [13], publié en 1908, le problème nommé *The broken chessboard* fait intervenir les polyominos. En effet, on y relate l'histoire d'une joute d'échecs ayant tournée en bataille (initiée par le perdant) ; l'échiquier se serait alors séparé en 12 pièces de pentominos (polyominos d'aire 5) et en un carré d'aire 4. Le jeu consiste alors à reconstruire l'échiquier 8×8 en s'assurant d'avoir une alternance des couleurs.

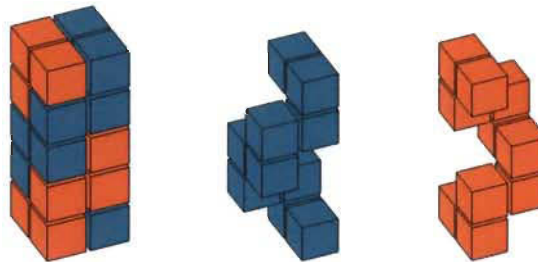


FIGURE 1.8 – Molécule d'ADN représentée par l'assemblage de deux polycubes

Les polyominos sont donc issus des mathématiques récréatives, mais plus tard, ils se sont avérés être à la base de modélisations mathématiques dans plusieurs domaines scientifiques, comme la physique et la chimie. En effet, en physique, ces objets modélisent l'écoulement d'un fluide dans les problèmes de percolation en physique statistique où on évalue entre autres la probabilité que le fluide passe au travers d'un certain matériau [36]. De plus, en chimie, les molécules et les polymères peuvent être représentés par des polyominos ou par des polycubes [9]. Par exemple, chacun des deux brins de la molécule d'ADN peut être modélisé par un polycube comme on le voit à la figure 1.8.

1.2.3 Le problème et ses difficultés

Peu après l'essor des polyominos au début des années cinquante, le problème du dénombrement des polyominos en fonction de leur aire fait surface et porte alors le nom de « *cell growth problem* » ou « problème de l'accroissement de cellules ». On s'interroge alors ainsi :

Combien y a-t-il de polyominos différents, à translations près, d'aire n ?

L'expression « à translations près » indique que deux polyominos sont identiques si l'un peut être obtenu de l'autre par une translation. On peut également les compter à rotations près ou à symétries près, comme ce sera le cas au chapitre 5. À moins d'avis contraire, les polyominos sont considérés à translations près. Par exemple, la figure 1.9 montre les polyominos ayant une aire entre 1 et 3. En 1962, R. C. Read résout en partie ce problème pour n entre 1 et 10 en utilisant la méthode de la matrice de transfert [34], décrite au chapitre 2.

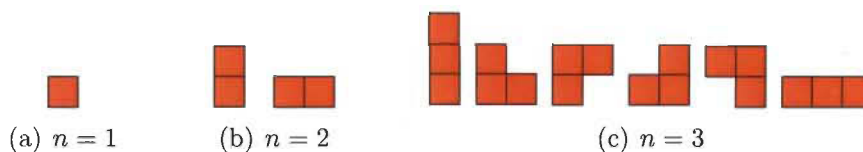


FIGURE 1.9 – Polyominos d'aire n

Pour l'instant, le nombre de polyominos est connu pour une aire entre 1 et 56. Cette suite est d'ailleurs disponible sur le site *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) [41]. Le record du dénombrement jusqu'à $n = 56$ est détenu par I. Jensen et a été obtenu à l'aide d'un programme informatique en 2003 [25]. Plus explicitement, le nombre de polyominos d'aire 56 est d'environ 7×10^{31} , soit 69 150 714 562 532 896 936 574 425 480 218.

Depuis ce temps, aucun autre algorithme n'a pu surpassé $n = 56$. Cela s'explique par le fait que le nombre de polyominos augmente exponentiellement avec un facteur d'environ 4 [25]. Plus précisément, en définissant a_n comme le nombre de polyominos

d'aire n , alors

$$a_n \approx 4,062570^n \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, implémenter informatiquement le problème demande beaucoup de mémoire aux ordinateurs, de même que beaucoup de temps de calcul. Les programmes se doivent donc d'être extrêmement efficaces afin de limiter tant la mémoire nécessaire que le temps de calcul.

Malgré ces avancées, le problème général pour une aire n donnée demeure encore ouvert. On est alors en droit de se poser la question : y arrivera-t-on un jour ? Les scientifiques ont des opinions plutôt divergentes sur un problème similaire, comme en témoigne A. Guttman concernant le dénombrement des polygones auto-évitants [25, p. viii] :

The scientific community in this field is divided into those who think we will never solve the problem, of say the perimeter or area generating function of self-avoiding polygons in two dimensions, and those who think that we will.

Pourtant, comme il est mentionné dans [25, p. vii] concernant les problèmes de dénombrement de chemins auto-évitants et de polyominos : « *These are all problems that are easy to state and look as if they should be solvable* ». Ainsi, pourquoi un problème qui semble simple est si compliqué ? La réponse à cette question est peut-être aussi difficile que le problème lui-même. Toutefois, pour reprendre les paroles de A. Goupil :

Pour compter, on doit mettre de l'ordre. Les polyominos représentent le chaos à une grande échelle, c'est-à-dire lorsque l'aire est très grande. Il s'agit donc de mettre de l'ordre dans ce chaos discret.

Non seulement la résolution du problème de dénombrement des polyominos permettra peut-être de faire régner l'ordre parmi le chaos, mais cela apportera certainement beaucoup plus d'information qu'une simple valeur numérique. En effet, comme le mentionne M. Bousquet-Mélou dans [8, p.16] :

À mes yeux, parvenir à énumérer une classe d'objets est surtout la garantie qu'on a compris quelque chose sur leur structure – et c'est sans doute là

le plus intéressant. Car pour obtenir quelque information sur un nombre d'objets, il faut pouvoir décrire une manière de les construire, transcriptible en termes mathématiques.

Face à la difficulté de résolution de ce problème, la communauté s'est alors peut-être inspirée de G. Pólya qui un jour a dit [30, p. xxi] : « *If there is a problem you can't solve, then there is an easier problem you can solve : find it.* »

En effet, plusieurs classes de polyominos ont pu être comptées en ajoutant des contraintes au problème. On peut, par exemple, limiter la taille du rectangle circonscrit au polyomino ou encore s'intéresser à la convexité, qu'elle soit horizontale, verticale ou les deux. Par exemple, les bargraphes [9], les polyominos à hauteur bornée [33] ainsi que les polyominos parallélogrammes [33] sont parmi les classes ayant été dénombrées. On réfère le lecteur à [8] pour une liste détaillée des travaux concernant les polyominos convexes. L'objectif derrière ce processus est de pouvoir généraliser ou assembler les classes afin de résoudre le problème général qu'est le dénombrement des polyominos selon l'aire.

Finalement, qu'est-ce qui est considéré comme une réponse à la question concernant le nombre de polyominos d'aire donnée ? En fait, il existe plusieurs solutions au problème, dont une formule exacte, une série génératrice, un algorithme ou une récurrence. Bref, la solution doit permettre d'évaluer de manière efficace le nombre de polyominos pour n'importe quelle valeur de l'aire. Dans cet ouvrage, l'obtention de séries génératrices est principalement exploitée en guise de réponse à ce problème.

1.3 Structure du mémoire

Dans le chapitre 2, une introduction aux séries génératrices est présentée, elles sont à la base des résultats mis de l'avant dans ce mémoire. En plus d'être définies, les opérations arithmétiques concernant les séries génératrices sont décrites et plusieurs méthodes pour construire celles-ci sont abordées.

Au chapitre 3, les séries génératrices de deux catégories de polyominos sont présentées, soit celles des polyominos d'aire minimale et d'aire minimale plus un. Pour ce faire, la notion de produit diagonal est introduite. Finalement, on décrit également des sous-classes de ces deux types de polyominos, comme les escaliers et les coins.

Le chapitre 4 est dédié aux polyominos d'aire minimale plus deux, aussi nommés d'index 2. La série génératrice associée à ceux-ci est obtenue à l'aide des résultats du chapitre 3. Pour ce faire, un résultat général inédit concernant les polyominos d'index r est démontré et permet de caractériser ces derniers en fonction de leur nombre de trous linéaires et de leur nombre de faces.

Au chapitre 5, on poursuit l'étude des polyominos d'aire minimale, minimale plus un et plus deux en les dénombrant à rotations près et à symétries près. À cet effet, le lemme de Burnside et les séries génératrices des objets introduits aux chapitres 3 et 4 sont utilisés. Ces résultats ne semblent pas avoir été publiés ailleurs.

Dans le chapitre 6, on aborde les polycubes, la généralisation des polyominos en trois dimensions. En particulier, la méthode de la matrice de transfert est appliquée afin d'obtenir la série génératrice des polycubes contenus dans un prisme $2 \times 2 \times h$. De cette série, celle des polycubes inscrits dans un prisme $2 \times 2 \times h$ est déduite. Comme pour le chapitre 5, aucune autre publication ne semble présenter ces résultats.

Au chapitre 7, on présente la conclusion et on expose les perspectives de recherche en lien avec les polyominos et les polycubes étudiés ainsi qu'avec les méthodes utilisées. De plus, on discute des difficultés reliées à la généralisation des résultats présentés dans cet ouvrage.

Deux annexes complètent ce mémoire. À l'annexe A, la forme rationnelle des séries génératrices à deux variables des polyominos d'index 1 à rotations près et à symétries près est développée à partir des expressions du chapitre 5. À l'annexe B, on présente les conditions pour qu'un polyomino soit invariant sous une symétrie donnée à partir de leur représentation matricielle.

Chapitre 2

Séries génératrices ordinaires

A set is a Many that allows itself to be thought of as One.

– G. Cantor [37, p. 191]

Les séries génératrices sont un puissant outil au service des problèmes d'énumération, telles qu'introduites dans [35] par F. S. Roberts et B. Tesman. M. Bóna [6] affirme même qu'il s'agit de l'outil le plus puissant de la combinatoire énumérative. Entre autres, leur puissance provient du fait que la série génératrice associée à une suite peut, par diverses méthodes, être obtenue sans la connaissance de cette suite. Elle contient également, de manière très compacte, l'information sur l'infinité d'éléments que contient la suite. De plus, elle permet parfois de trouver des formules exactes ou des récurrences. Dans le cas contraire, il est possible d'en retirer de l'information sur la suite même si la formule la décrivant est complexe ou encore inconnue.

En plus d'introduire ce sujet, ce chapitre vise à présenter quelques unes des opérations possibles sur les séries génératrices, tel que l'addition et la multiplication, ainsi que quelques méthodes pour les construire.

2.1 Introduction

Il existe plusieurs types de séries génératrices, dont les deux plus connus sont probablement les séries ordinaires et exponentielles [38]. Rigoureusement, la série génératrice ordinaire associée à la suite $\{f(n)\}_{n \geq i}$ est

$$\sum_{n \geq i} f(n)x^n$$

tandis que la série génératrice exponentielle pour la même suite est définie par

$$\sum_{n \geq i} f(n) \frac{x^n}{n!}.$$

Dans les deux cas, on parle également de série formelle, car aucune valeur n'est attribuée à la variable x et les questions de convergence et de divergence ne sont pas considérées. Par ailleurs, le mathématicien H. S. Wilf [43, p.30] rassure ceux qui seraient concernés par la négligence de la convergence :

there's no need for the guilt, because the various manipulations can be carried out in the ring of formal power series, where questions of convergence are nonexistent [...] we may still get lots of information from the formal series.

De ce fait, la série génératrice est considérée comme un objet purement algébrique, plutôt qu'analytique. Conséquemment, x agit à titre de support pour la suite : identifier $f(n)$ se résume à trouver le coefficient des termes x^n ou $x^n/n!$ dans la série. À ce sujet, comme le dit si bien H. S. Wilf [43, p. 1] : « *A generating function is a clothesline on which we hang up a sequence of numbers for display* ».

Il est à noter que, dans le cadre des travaux présentés dans ce mémoire, les séries génératrices décrivant les polyominos sont ordinaires. Ainsi, lorsque le type n'est pas précisé, il s'agira d'une série génératrice ordinaire.

Il est également possible de définir des séries génératrices à plusieurs variables pour une suite décrite par plusieurs paramètres, comme par exemple

$$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} f(n_1, n_2, \dots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

dans le cas d'une série ordinaire.

Un moyen simple mais peu commun pour obtenir une série génératrice est de connaître la formule exacte pour les termes de la suite, comme le montre l'exemple 2.1 tiré de [35, p. 289].

Exemple 2.1. Soit la suite à un paramètre $a_n = 1$ pour tout $n \geq 0$. Sa série génératrice associée est

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots. \quad (2.1)$$

Il s'agit exactement du développement de la série géométrique. D'où,

$$A(x) = \frac{1}{1-x}. \quad (2.2)$$

□

L'exemple 2.1 illustre qu'on peut obtenir une forme fermée pour une série génératrice, c'est-à-dire que la série n'est pas exprimée selon la sommation qui la définit, cette somme étant (2.1) dans le cas de l'exemple précédent, mais plutôt sous une forme compacte, comme à l'expression (2.2). C'est d'ailleurs idéalement sous cette forme qu'on désire travailler avec celles-ci. Il arrive par contre rarement que la suite soit connue et que la série génératrice puisse être automatiquement trouvée, comme ce fut le cas pour le dernier exemple.

Les deux exemples suivants montrent comment une suite peut être retrouvée à partir d'une série génératrice. La première méthode décrite à l'exemple 2.2 est d'effectuer le développement en série de MacLaurin, ce qui est très pratique dans le cas des séries

à plusieurs variables, car il est difficile d'en extraire une formule exacte. Le deuxième moyen présenté dans ce même exemple exige de chercher parmi une banque de séries génératrices déjà connues et de vérifier si la série étudiée fait partie de celles-ci. Cet exemple est inspiré de [35] qui présente ces deux méthodes.

Exemple 2.2. Soit la série génératrice ordinaire $G(x) = \sum_{k \geq 0} g(n)x^n$ telle que

$$G(x) = \frac{1}{(1-x)^2}. \quad (2.3)$$

Une première façon d'obtenir la suite décrite par $G(x)$, c'est-à-dire $\{g(n)\}$, est d'effectuer le développement en séries de MacLaurin défini par

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad (2.4)$$

où $G^{(n)}(x)$ est la dérivée n^e de $G(x)$. En appliquant (2.4) à (2.3), on trouve

$$G(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$$

Le coefficient de x^n est exactement $g(n)$. L'inconvénient de cette méthode est qu'on n'obtient pas une formule exacte décrivant les coefficients de la suite. La deuxième façon le permet, mais n'est pas toujours possible. Cette méthode consiste à comparer la série génératrice à d'autres séries connues.

Dans ce cas-ci, $G(x)$ est étroitement liée à la série géométrique $A(x)$ rencontrée à l'exemple 2.1. En effet, des propriétés des séries et puisque $A(x)$ converge pour x dans un certain rayon de convergence, la dérivée de $A(x)$ est calculée en dérivant terme à terme la série. D'une part,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1-x} \right] = \sum_{n \geq 0} \frac{d}{dx} [x^n] = \sum_{n \geq 1} nx^{n-1}. \quad (2.5)$$

D'autre part,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{(1-x)^2}. \quad (2.6)$$

Conséquemment, de (2.5) et (2.6),

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1)x^n.$$

Ainsi, on obtient une forme explicite pour $g(n)$. En effet, lorsque $n \geq 0$,

$$g(n) = n + 1,$$

car il s'agit du coefficient de x^n . □

Les séries génératrices rencontrées dans ce mémoire sont généralement des séries rationnelles, c'est-à-dire des quotients de polynômes. Il arrive alors qu'en exprimant ce quotient sous la forme d'une somme de fractions partielles, la forme explicite de la suite soit obtenue, comme c'est le cas dans l'exemple 2.3. L'utilisation de la décomposition en fractions partielles pour les séries génératrices est expliquée dans [43].

Exemple 2.3. Soit $H(x)$ la série génératrice de la suite $\{h(n)\}_{n \geq 0}$ définie par

$$H(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)},$$

une série rationnelle. En convertissant l'expression en fractions partielles, on trouve

$$H(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}.$$

Or, la première fraction est exactement la série géométrique rencontrée à l'exemple 2.1 tandis que l'autre est une variante de cette même série :

$$\frac{2}{1+2x} = \frac{2}{1-(-2x)} = 2 \sum_{n \geq 0} (-2x)^n = 2 \sum_{n \geq 0} (-2)^n x^n.$$

Ainsi,

$$H(x) = \sum_{n \geq 0} x^n + 2 \sum_{n \geq 0} (-2)^n x^n = \sum_{n \geq 0} [1 + 2(-2)^n] x^n$$

et la suite satisfait la formule

$$h(n) = 1 + 2(-2)^n, \quad n \geq 0.$$

□

En résumé, les exemples précédents ont mis en place trois outils de base très utiles pour traiter les séries génératrices :

- comparaison avec des séries génératrices connues ;
- décomposition en fractions partielles ;
- décomposition en série de MacLaurin.

Ces deux dernières peuvent s'effectuer avec des logiciels de calcul symbolique, tels que *Maple* ou *Sage*. Par exemple, soit $f(x)$ une fonction de x , alors pour obtenir les fractions partielles et le développement en série de MacLaurin (qui correspond à celui de Taylor autour de $x = 0$) de cette fonction, les commandes *Maple* sont respectivement `convert(f(x),parfrac)` et `taylor(f(x),x=0)`.

Même si l'utilisation des séries génératrices pour l'énumération ne semble pas évidente de prime abord, l'existence d'une interprétation combinatoire pour différents types d'opérations entre séries génératrices justifie le moyen, tel qu'abordé dans la prochaine section.

2.2 Opérations sur les séries génératrices

La beauté et l'efficacité des séries génératrices en énumération s'expliquent notamment par le fait que les opérations d'addition et de multiplication s'interprètent dans le cadre de ce type de problème, comme cela est expliqué à l'exemple 2.5. Ces deux opérations ainsi que la substitution sont décrites dans cette section.

Théorème 2.4. Soit $A(x)$ et $B(x)$ deux séries génératrices telles que

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n.$$

Leur addition et leur produit sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n, \\ A(x)B(x) &= \sum_{n \geq 0} c_n x^n \quad \text{où } c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}. \end{aligned}$$

Les exemples 2.5 et 2.6, extraits de [35], décrivent les deux règles qui sont à la base du dénombrement des polyominos présenté aux chapitres 3 à 5 de ce mémoire : celles de la somme et du produit.

Exemple 2.5. De combien de façons peut-on choisir un certain nombre d'objets parmi trois objets, soit parmi les lettres $\{a, b, c\}$?

Soit $g(k)$ le nombre de manières de choisir k lettres, $0 \leq k \leq 3$, parmi 3. Immédiatement, $g(k)$ est décrit par le coefficient binomial $g(k) = \binom{3}{k}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{k \geq 0} g(k) x^k = \binom{3}{0} x^0 + \binom{3}{1} x^1 + \binom{3}{2} x^2 + \binom{3}{3} x^3 \\ &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Il existe une autre manière d'obtenir $G(x)$. En effet, parmi les k lettres sélectionnées, il peut y avoir 0 a ou 1 a , et 0 b ou 1 b , et 0 c ou 1 c . La règle de la somme et la règle du produit en combinatoire s'appliquent sur les séries génératrices, c'est-à-dire qu'un « ou » est traduit par une addition tandis qu'un « et » correspond à une multiplication. Ainsi, par ces deux principes, l'expression suivante décrit les manières de choisir un certain nombre de lettres parmi 3 :

$$[(ax)^0 + (ax)^1] [(bx)^0 + (bx)^1] [(cx)^0 + (cx)^1]. \tag{2.8}$$

En développant les produits de (2.8) et en regroupant les puissances de x , on trouve

$$x^0 + (a + b + c)x + (ab + ac + bc)x^2 + abc x^3.$$

Le coefficient de x contient les façons de choisir 1 objet, celui de x^2 , 2 objets, etc. Par exemple, si une lettre est choisie, il y a trois possibilités : il s'agit soit de a , soit de b , soit de c , ce que le coefficient de x indique. De manière générale, le nombre de manières de sélectionner k objets est donné par le coefficient de x^k . Puisque les combinaisons d'objets choisies n'ont pas d'intérêt dans le problème, en prenant $a = b = c = 1$ dans (2.8), on trouve la série génératrice souhaitée, soit la même que (2.7) :

$$G(x) = (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3. \quad (2.9)$$

De plus, on remarque qu'en effectuant immédiatement la substitution $a = b = c = 1$ dans (2.8), on trouve directement (2.9). Donc, l'étiquetage des objets n'est pas nécessaire et la substitution par 1 peut immédiatement être effectuée. $\square$

L'exemple suivant illustre le même principe, celui du produit-somme, mais dans un cas moins trivial que l'exemple 2.5.

Exemple 2.6. De combien de manières peut-on choisir un nombre donné de boules parmi n boules rouges et m boules noires ?

De manière analogue à l'exemple 2.5, le nombre de manières de choisir k boules est donné par le coefficient de x^k . Pour ce faire, on peut choisir un certain nombre de boules rouges et ensuite un certain nombre de boules noires.

D'une part, on peut sélectionner zéro, une, deux, $\dots$, ou n boules rouges. Puisqu'ils sont impossibles à distinguer, il n'y a qu'un choix possible peu importe le nombre de boules sélectionnés. Cela se traduit par $x^0 + x + \dots + x^n$. De manière analogue, choisir un certain nombre de boules noires correspond à l'expression $x^0 + x + \dots + x^m$.

Conséquemment, par le principe du produit,

$$G(x) = (1 + x + \cdots + x^n)(1 + x + \cdots + x^m). \quad (2.10)$$

Par exemple, si $n = 4$ et $m = 6$, on a

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 + x + \cdots + x^4)(1 + x + \cdots + x^6) \\ &= x^{10} + 2x^9 + 3x^8 + 4x^7 + 5x^6 + 5x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'il y a notamment 3 manières de choisir 8 boules parmi les 4 rouges et les 6 noires.

Pour les curieux, on peut travailler l'expression (2.10) de $G(x)$:

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 + x + \cdots + x^n)(1 + x + \cdots + x^m) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} - x^{m+1} + x^{n+m+2}}{(1 - x)^2}. \end{aligned}$$

□

Outre ces opérations, celle de la substitution dans une série à plusieurs variables est fort intéressante. De manière générale, la substitution, ou la composition, consiste à remplacer une variable formelle par une autre série, qui peut être finie. Par exemple, x pourrait être substitué par x^2 . Ce genre d'opérations ne semble pas avoir d'interprétation combinatoire générale dans le cas d'une série à plusieurs variables. Ainsi, l'effet d'une substitution sera traité cas par cas pour les séries génératrices décrivant un polyomino au chapitre 5. Voici toutefois une description du remplacement d'une variable par 1 dans une série génératrice à plusieurs variables.

Exemple 2.7. Soit $F(x, y)$ une série génératrice à deux variables où x et y sont respectivement associées aux paramètres n et m :

$$F(x, y) = \sum_{n, m \geq 0} f(n, m) x^n y^m.$$

Par exemple, n pourrait décrire la largeur d'un objet et m , la hauteur. En substituant x par 1, on obtient

$$F(1, y) = \sum_{n, m \geq 0} f(n, m) 1^n y^m = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{n \geq 0} f(n, m) \right) y^m,$$

c'est-à-dire la série génératrice selon le paramètre m seulement, car la sommation $\sum_{n \geq 0} f(n, m)$ décrit le nombre d'objets de paramètre m . $\square$

2.3 Comment les construire ?

Il existe plusieurs astuces permettant de construire une série génératrice dont quatre sont décrites ci-bas : une formule exacte, une récurrence, une équation fonctionnelle et une matrice de transfert. Pour les trois dernières méthodes, les polyominos inscrits dans un $2 \times b$ sont utilisés à titre d'exemple.

2.3.1 Avec une formule exacte

La manière la plus simple d'obtenir une série génératrice est probablement de connaître l'expression générale des coefficients. Il faut alors utiliser la définition d'une série génératrice et tenter d'obtenir une forme compacte pour celle-ci.

Exemple 2.8. Soit la suite $f(n) = 2^n$ pour $n \geq 0$ alors, par définition,

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} f(n) x^n = \sum_{n \geq 0} 2^n x^n. \quad (2.11)$$

La forme rationnelle de $F(x)$ découle alors de la série géométrique :

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} (2x)^n = \frac{1}{1 - 2x}. \quad (2.12)$$

$\square$

Bien sûr, il est parfois difficile d'identifier la forme rationnelle d'une série, comme cela a été fait à l'exemple précédent. Effectuer une somme avec un logiciel de calcul symbolique peut alors être pratique. Par exemple, en utilisant *Maple* pour faire la somme (2.11) avec la commande `sum(2^n x^n, n=0..infinity)`, le résultat est celui de (2.12).

2.3.2 Avec une récurrence

Quatre étapes sont nécessaires pour trouver une série génératrice à partir d'une récurrence. Cette méthode est notamment expliquée dans [6] et [43].

Soit $\{a_n\}_{n \geq 0}$, la suite pour laquelle la série génératrice doit être obtenue.

1. Établir la récurrence que satisfait la suite $\{a_n\}_{n \geq 0}$;
2. Définir la série génératrice $G(x)$ associée à a_n ;
3. Transformer la récurrence en une équation en $G(x)$ (généralement en multipliant la récurrence par x^n et en faisant la somme sur n) ;
4. Isoler $G(x)$.

L'exemple qui suit est construit de manière à mettre en évidence ces étapes et a été présenté dans [28].

Exemple 2.9. Trouver la série génératrice à une variable du nombre $f_2(b)$ de polyominoes inscrits dans un rectangle $2 \times b$ à partir d'une formule de récurrence.

1. Les polyominoes $2 \times b$ satisfont la récurrence

$$\begin{aligned} f_2(b) &= 2f_2(b-1) + f_2(b-2) + 4, & b \geq 3 \\ f_2(1) &= 1 \quad \text{et} \quad f_2(2) = 5. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Cette récurrence est mise en évidence à la figure 2.1 où les polyominoes $2 \times b$ sont construits en deux étapes. D'abord, on liste les configurations possibles pour que la première ligne soit occupée (il y en a 3). Ensuite, à partir de ces trois configurations, on énumère les façons d'occuper la deuxième ligne. On

obtient onze situations qui se divisent en quatre groupes. Pour deux de ces regroupements (à gauche sur la figure 2.1), les trois configurations possibles pour une ligne d'un polyomino de largeur 2 apparaissent (en bleu). Comme l'objet restant est de hauteur $b - 1$ dans les deux groupes, il y a $2f_2(b - 1)$ polyominos de cette forme. Également, l'élimination des deux premières lignes dans le troisième bloc permet de constater que n'importe quel polyomino de largeur 2 de hauteur $b - 2$ peut être placé en-dessous, il y en a donc $f_2(b - 2)$. Finalement, le dernier groupe comporte quatre cas particuliers qui n'ont pas été considérés dans les autres regroupements, soit lorsque la première ou les deux premières lignes sont enlevées et que le polyomino restant n'est pas inscrit dans un rectangle de largeur 2.

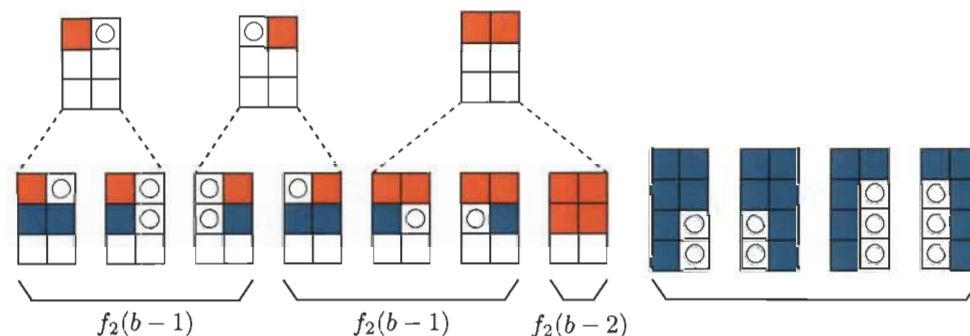


FIGURE 2.1 – Décomposition des polyominos $2 \times b$ selon la première et la deuxième ligne où une cellule bleue est occupée et incluse dans le polyomino de hauteur inférieure, une cellule orange est également occupée, une cellule avec un cercle est vide et une blanche est indéterminée

2. Soit $F_2(y) = \sum_{b \geq 1} f_2(b)y^b$.
3. En multipliant la récurrence (2.13) par y^b et en sommant sur b pour les valeurs telles que la récurrence est valide, on trouve

$$\sum_{b \geq 3} f_2(b)y^b = \sum_{b \geq 3} 2f_2(b-1)y^b + \sum_{b \geq 3} f_2(b-2)y^b + \sum_{b \geq 3} 4y^b.$$

L'objectif est d'exprimer chacune des parties en fonction de $F_2(y)$. Pour ce faire, il est préférable que l'exposant de y coïncide avec l'argument de f_2 . On obtient

$$\sum_{b \geq 3} f_2(b)y^b = y \sum_{b \geq 3} 2f_2(b-1)y^{b-1} + y^2 \sum_{b \geq 3} f_2(b-2)y^{b-2} + \sum_{b \geq 3} 4y^b. \quad (2.14)$$

On note que

$$\sum_{b \geq 3} f_2(b)y^b = f_2(3)y^3 + f_2(4)y^4 + \cdots = F_2(y) - y - 5y^2,$$

soit la série $F_2(y)$ à laquelle il manque les deux premiers termes. On peut faire un raisonnement analogue pour les autres termes de (2.14). On obtient ainsi

$$F_2(y) - y - 5y^2 = 2y(F_2(y) - y) + y^2 F_2(y) + \frac{4y^3}{1-y}. \quad (2.15)$$

4. En isolant $F_2(y)$ dans l'équation (2.15), on trouve

$$F_2(y) = \frac{y(y^2 + 2y + 1)}{(1-y)(1-y^2-2y)}. \quad (2.16)$$

Cette série génératrice se prête bien à la décomposition en fractions partielles pour trouver une formule exacte pour $f_2(b)$. En effet,

$$\begin{aligned} F_2(y) &= 1 + \frac{-2}{1-y} + \frac{1}{2} \frac{1-\sqrt{2}}{1-(1-\sqrt{2})y} + \frac{1}{2} \frac{1+\sqrt{2}}{1-(1+\sqrt{2})y} \\ &= 1 + \sum_{b \geq 0} -2y^b + \frac{1-\sqrt{2}}{2} \sum_{b \geq 0} (1-\sqrt{2})^b y^b + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \sum_{b \geq 0} (1+\sqrt{2})^b y^b. \end{aligned}$$

D'où,

$$f_2(b) = \frac{1}{2} \left[(1-\sqrt{2})^{b+1} + (1+\sqrt{2})^{b+1} \right] - 2.$$

□

L'exemple suivant illustre ce type de manipulation appliqué dans le cas d'une récurrence à plusieurs variables. On ajoute ici le paramètre supplémentaire de l'aire à l'exemple 2.9. Cet exemple est également présenté dans [28].

Exemple 2.10. Trouver la série génératrice à deux variables du nombre $f_2(n, b)$ de polyominos inscrits dans un $2 \times b$ à n cellules avec la méthode de la récurrence.

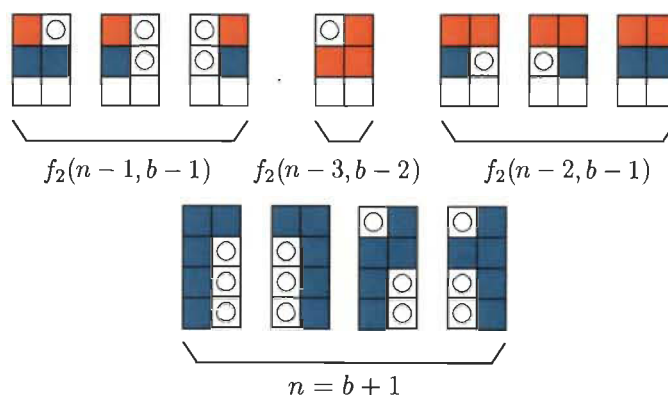


FIGURE 2.2 – Décomposition des polyominos $2 \times b$ à n cellules où une cellule bleue est occupée et incluse dans le polyomino de hauteur inférieure, une cellule orange est également occupée, une cellule avec un cercle est vide tandis qu'une blanche est indéterminée

En partitionnant cet ensemble de polyominos, tel qu'illustré à la figure 2.2, ceux-ci satisfont la récurrence

$$f_2(n, b) = f_2(n-1, b-1) + f_2(n-2, b-1) + f_2(n-3, b-2) + 4\chi(n = b+1), \quad n \geq 4, b \geq 2, \quad (2.17)$$

où $\chi(A)$ est la fonction caractéristique, c'est-à-dire que $\chi(A) = 1$ si A est vraie, 0 sinon. Les conditions initiales sont

$$f_2(2, 1) = 1, \quad f_2(3, 2) = 4 \quad \text{et} \quad f_2(n, b) = 0 \text{ si } n < b+1 \text{ ou } n > 2b.$$

Cette récurrence est obtenue de manière similaire à (2.13). Dans le premier des quatre regroupements de la figure 2.2 (en haut à gauche), en enlevant les cellules oranges, on remarque qu'il s'agit des polyominos $2 \times (b-1)$ d'aire $n-1$, il y en a donc $f_2(n-1, b-1)$. Dans le deuxième regroupement, en ignorant les deux lignes du haut, le polyomino résultant est inscrit dans un $2 \times (b-2)$ et a $n-3$ cellules, ils satisfont donc $f_2(n-3, b-2)$. Les deux cellules oranges ignorées du troisième regroupement conduisent à un polyomino $2 \times (b-1)$ à $n-2$ cellules, d'où le terme $f_2(n-2, b-1)$. Finalement, on doit considérer quatre cas particuliers lorsque $n = b+1$, soit ceux où en éliminant la première ou les deux premières lignes, le polyomino n'est pas inscrit dans un rectangle de largeur 2.

On définit la série génératrice associée à ces polyominos par

$$F_2(q, y) = \sum_{n \geq 2, b \geq 1} f_2(n, b) q^n y^b.$$

En multipliant (2.17) par $q^n y^b$ et en sommant sur toutes les valeurs de n et b admissibles pour la récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{b \geq 2, n \geq 4} f_2(n, b) q^n y^b &= \sum_{b \geq 2, n \geq 4} f_2(n-1, b-1) q^n y^b + \sum_{b \geq 2, n \geq 4} f_2(n-2, b-1) q^n y^b \quad (2.18) \\ &+ \sum_{b \geq 2, n \geq 4} f_2(n-3, b-2) q^n y^b + 4 \sum_{b \geq 2, n \geq 4} \chi(n=b+1) q^n y^b. \end{aligned}$$

En étudiant chacun des termes de (2.18), on trouve d'abord que l'expression de gauche correspond à $F_2(q, y)$ sans les deux premiers termes, soit

$$\sum_{b \geq 2, n \geq 4} f_2(n, b) q^n y^b = F_2(q, y) - q^2 y - 4q^3 y^2. \quad (2.19)$$

Pour les autres termes de (2.18), on développe la sommation afin d'extraire l'expression de $F_2(q, y)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{b \geq 2, n \geq 4} f_2(n-1, b-1) q^n y^b &= qy \left(\sum_{b \geq 2, n \geq 4} f_2(b-1, n-1) q^{n-1} y^{b-1} \right) \\ &= qy (f_2(3, 2) q^3 y^2 + f_2(4, 2) q^4 y^2 + \dots) \\ &= qy (F_2(q, y) - q^2 y), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \sum_{b \geq 2, n \geq 4} f_2(n-2, b-1) q^n y^b &= q^2 y \sum_{b \geq 2, n \geq 4} f_2(n-2, b-1) q^{n-2} y^{b-1} \\ &= q^2 y (f_2(2, 1) q^2 y + f_2(3, 2) q^3 y^2 + \dots) \\ &= q^2 y F_2(q, y), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{b \geq 2, n \geq 4} f_2(n-3, b-2) q^n y^b &= q^3 y^2 \sum_{b \geq 2, n \geq 4} f_2(n-3, b-2) q^{n-3} y^{b-2} \\
&= q^3 y^2 (f_2(2, 1) q^2 y + f_2(3, 2) q^3 y^2 + \dots) \\
&= q^3 y^2 F_2(q, y).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Finalement, le dernier terme de (2.18) se simplifie en utilisant les séries géométriques :

$$\begin{aligned}
4 \sum_{b \geq 2, n \geq 4} \chi(n = b+1) q^n y^b &= 4 \sum_{b \geq 3} q^{b+1} y^b \\
&= 4q \sum_{b \geq 3} (qy)^b \\
&= 4q \left(\frac{1}{1 - qy} - (1 - qy - q^2 y^2) \right) \\
&= \frac{4q}{1 - qy} - 4(q + q^2 y + q^3 y^2).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

En substituant les équations (2.19) à (2.23) dans (2.18), on trouve l'équation

$$\begin{aligned}
F_2(q, y) - q^2 y - 4q^3 y^2 &= qy (F_2(q, y) - q^2 y) + q^2 y F_2(q, y) + q^3 y^2 F_2(q, y) \\
&\quad + \frac{4q}{1 - qy} - 4(q + q^2 y + q^3 y^2)
\end{aligned}$$

et en isolant $F_2(q, y)$, la série génératrice à deux paramètres est

$$F_2(q, y) = \frac{q^2 y (q^2 y^2 + 2qy + 1)}{(1 - qy)(1 - q^3 y^2 - q^2 y - qy)}. \tag{2.24}$$

En substituant q par 1 dans (2.24), la série génératrice (2.16) est obtenue, soit celle des polyominos inscrits dans un $2 \times b$ selon le paramètre de la hauteur seulement. $\square$

2.3.3 Avec une équation fonctionnelle

La construction d'une équation fonctionnelle consiste à découper un objet générique en plusieurs parties à un endroit stratégique. De manière générale, on arrive à écrire une équation qui fait intervenir la série génératrice à trouver. Une fois l'équation

obtenue, il faut isoler la série génératrice. Cette étape est parfois directe, comme dans les deux exemples ci-dessous, mais requiert parfois d'autres techniques. À cet effet, on réfère le lecteur à [9] pour des exemples moins triviaux.

Pour bien saisir cette méthode, rien de mieux qu'un exemple : les bargraphes. La démarche et le résultat de cet exemple sont décrits dans [9].

Exemple 2.11. Trouver la série génératrice des bargraphes selon leur demi-périmètre horizontal et vertical.

Chaque bargraphe peut se diviser en un ou deux bargraphes plus petits à l'endroit où l'on retrouve la première colonne de hauteur 1 lorsqu'on parcourt le bargraphe de gauche à droite. Ce genre de division est appelé décomposition en taille de guêpe. Le principe de la somme conduit à une partition en cinq cas, illustrée à la figure 2.3 :

1. une seule cellule ;
2. la première colonne est de hauteur 1 ;
3. il n'y a pas de colonne de hauteur 1 ;
4. seulement la dernière colonne est de hauteur 1 ;
5. la première colonne de hauteur 1 se situe à l'intérieur du bargraphe.

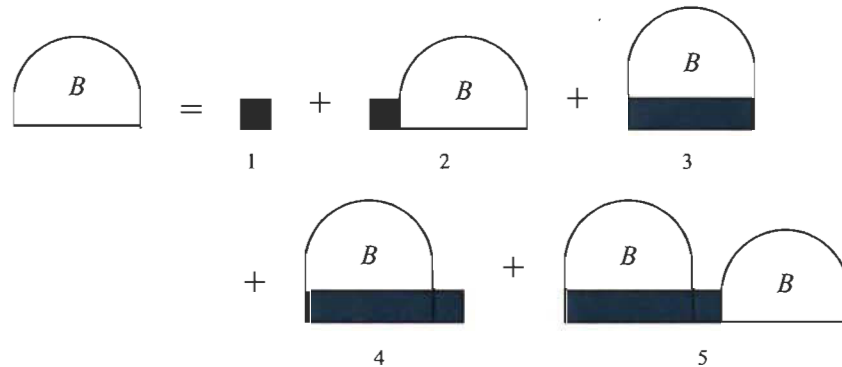


FIGURE 2.3 – Décomposition en taille de guêpe d'un bargraphe

Lorsqu'un bargraphe ou qu'une partie d'un bargraphe ne possède pas de colonne de hauteur 1, on peut alors considérer qu'il s'agit d'une rangée horizontale de cellules surmontée d'un bargraphe quelconque. Dans ce cas, on dira que la première ligne a

été *dupliquée*. Ainsi, on peut associer à chacun des cinq cas identifiés précédemment une construction qui sera pratique pour établir l'équation fonctionnelle :

1. une seule cellule ;
2. une cellule collée à la gauche d'un bargraphe ;
3. un bargraphe dont la première ligne a été dupliquée ;
4. un bargraphe dont la première ligne a été dupliquée, relié à une cellule de hauteur 1 à sa droite ;
5. un bargraphe dont la première ligne a été dupliquée, relié à une cellule de hauteur 1 à sa droite laquelle est reliée à un autre bargraphe.

Soit $B(x, y) = \sum_{h,v \geq 1} b(h, v) x^h y^v$, la série génératrice des bargraphes comptés selon le demi-périmètre horizontal h et vertical v . Pour chacun des cinq cas précédents, on peut trouver la série génératrice associée.

Cas 1 La cellule unique possède un demi-périmètre horizontal et vertical d'une unité chacun. Ainsi, la contribution de la cellule unique à la série génératrice $B(x, y)$ est

$$xy. \quad (2.25)$$

Cas 2 Le bargraphe est simplement décrit par la série génératrice $B(x, y)$, puisqu'il est quelconque. Le demi-périmètre vertical de la cellule ajoutée ne contribue pas à la série génératrice du cas 2, puisqu'il est inclus dans la série du bargraphe. Par contre, la cellule ajoutée contribue au demi-périmètre horizontal. Ainsi, la contribution totale à la série génératrice est

$$xB(x, y). \quad (2.26)$$

Cas 3 Dans le troisième cas, le bargraphe ne possède aucune colonne de hauteur 1 et la ligne collée au bargraphe contribue au demi-périmètre vertical seulement tandis que le bargraphe est quelconque :

$$yB(x, y). \quad (2.27)$$

Cas 4 Lorsque la dernière colonne est de hauteur 1 et qu'elle est la seule de cette hauteur, cela signifie que le reste du bargraphe est formé d'une ligne de cellules surmontée d'un bargraphe quelconque. La dernière cellule ajoute une unité au demi-périmètre vertical et le même nombre au demi-périmètre horizontal.

Donc, la série génératrice de ce cas est

$$xyB(x, y). \quad (2.28)$$

Cas 5 Pour ce dernier cas, le bargraphe est formé de deux bargraphes, chacun décrit par $B(x, y)$. La cellule reliant ces deux polyominos contribue uniquement au demi-périmètre horizontal. En effet, le demi-périmètre vertical est inclus dans le deuxième bargraphe. Ainsi, la série génératrice de ce cas est

$$xB(x, y)^2. \quad (2.29)$$

L'équation fonctionnelle est obtenue en additionnant les séries génératrices (2.25) à (2.29), qui représentent l'ensemble des bargraphes. D'où,

$$B(x, y) = xy + (x + y + xy)B(x, y) + xB(x, y)^2.$$

Cette équation est un polynôme de degré deux en $B(x, y)$ et en résolvant cette dernière, on trouve deux solutions

$$B_1(x, y) = \frac{1}{2x} \left(1 - x - y - xy - \sqrt{(1 - x - y - xy)^2 - 4x^2y} \right), \quad (2.30)$$

$$B_2(x, y) = \frac{1}{2x} \left(1 - x - y - xy + \sqrt{(1 - x - y - xy)^2 - 4x^2y} \right). \quad (2.31)$$

Or, en développant les deux solutions en séries, l'équation (2.31) contient des termes $1/x$ et ne décrit donc pas des bargraphes. Par contre, la première solution (2.30) est bien une série de Taylor dont les exposants sont supérieurs à 0. Conséquemment, la série génératrice $B(x, y)$ des bargraphes en terme de leur demi-périmètre horizontal et vertical est égale à $B_1(x, y)$. $\square$

L'établissement d'une équation fonctionnelle pour les bargraphes a inspiré ce nouvel exemple concernant les polyominos inscrits dans un $2 \times b$: il s'agit d'une nouvelle manière pour obtenir la série $F_2(q, y)$ des polyominos inscrits dans un $2 \times b$ à n cellules.

Exemple 2.12. La série génératrice des polyominos de largeur 2 à n cellules de hauteur b peut être obtenue à partir d'une équation fonctionnelle. En effet, un tel polyomino peut être séparé à l'endroit où il y a une rangée de largeur 2 pour la première fois à partir du bas, en bleu sur la figure 2.4. Puisque cette rangée de largeur 2 est d'aire 2 et de hauteur 1, sa série génératrice est q^2y . De plus, cette rangée appartient à chaque polyomino inscrit dans un $2 \times b$.

Avant ce bloc (voir la figure 2.4(a)), on a soit une rangée verticale de cellules pouvant être placée à deux endroits, soit rien du tout, ce qui est décrit par

$$\sum_{i \geq 1} 2q^i y^i + q^0 y^0 = \frac{2qy}{1 - qy} + 1.$$

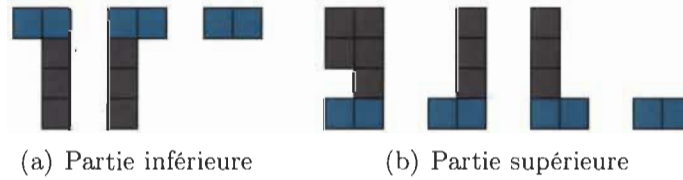


FIGURE 2.4 – Polyomino avant ou après la rangée de largeur 2

Après ce bloc (voir la figure 2.4(b)), il y a soit un polyomino quelconque de largeur 2, soit une rangée verticale pouvant être placée à deux endroits, soit rien du tout. Ces trois possibilités pour la partie supérieure sont respectivement décrites par

$$F_2(q, y) + \frac{2qy}{1 - qy} + 1.$$

Par le principe du produit, en regroupant les trois parties, on a

$$F_2(q, y) = \left(\frac{2qy}{1 - qy} + 1 \right) q^2 y \left(F_2(q, y) + \frac{2qy}{1 - qy} + 1 \right).$$

En résolvant l'équation, on trouve la même expression qu'à l'exemple 2.10, soit

$$F_2(q, y) = \frac{q^2 y (q^2 y^2 + 2 q y + 1)}{(1 - q y) (1 - q^3 y^2 - q^2 y - q y)}.$$

□

2.3.4 Avec la méthode de la matrice de transfert

La méthode de la matrice de transfert est utile dans des situations où un nombre fini de configurations peuvent être assemblées les unes à la suite des autres et où les configurations possibles à une étape fixée ne dépendent que de la configuration à l'étape précédente. Cette méthode est décrite par R. P. Stanley [38] et aussi par E. Rassart [33] et s'adapte bien au dénombrement des polyominos de largeur fixée. En effet, dans ce cas, les configurations représentent les différentes façons qu'une rangée d'un polyomino soit occupée par un certain nombre de cellules et le polyomino global est formé par l'ajout d'une configuration à la suite d'une autre.

Cette méthode est basée sur la construction d'un graphe qui représente le système dont les sommets sont les configurations. Le sommet a_i est relié par un arc au sommet a_j si la configuration a_i peut être suivie de la configuration a_j . Ce passage entre deux configurations est appelé *transition* et $\omega(a_i, a_j)$ dénote le poids de la transition. Ce poids est l'apport de la configuration a_j à l'objet global. Par exemple, si la configuration contribue à une unité pour la hauteur, le poids est de 1.

La matrice de transfert, notée A , d'un système combinatoire représenté par un graphe orienté G est définie par

$$A_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij} = \omega(a_i, a_j) & \text{s'il y a un arc entre } a_i \text{ et } a_j \text{ dans } G \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À partir de cette matrice, diverses informations concernant le système qu'elle décrit

peuvent être extraites. Notamment, on peut connaître le nombre d'objets construits après un certain nombre d'étapes ou encore l'obtention de la série génératrice du système, tel qu'exposé aux prochains théorèmes.

Théorème 2.13. Soit A une matrice de transfert d'un graphe G et $n \in \mathbb{N}$, alors l'entrée $[i, j]$ de la matrice A^n est le nombre d'objets construits en n étapes, qui commence par la configuration a_i et qui se termine par a_j . Autrement dit, il s'agit du nombre de chemins de longueur n commençant par a_i et se terminant par a_j .

Démonstration. On le constate en appliquant la définition de la multiplication de matrices :

$$(A^n)_{ij} = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}} \omega_{ik_1} \omega_{k_1 k_2} \omega_{k_2 k_3} \cdots \omega_{k_{n-1} j}.$$

La somme est prise sur les chemins passant successivement par $a_i, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_{n-1}}$ et a_j , un chemin de longueur n . Le produit des poids correspond exactement au nombre de façons d'aller du sommet a_i au sommet a_j . Ainsi, on obtient bien le nombre de chemins de longueur n allant de a_i à a_j . $\square$

Théorème 2.14. Soit A une matrice de transfert et la série génératrice définie par

$$F_{ij}(x) = \sum_{n \geq 0} (A^n)_{ij} x^n,$$

alors

$$F_{ij}(x) = \frac{(-1)^{i+j} \det(I - xA : j, i)}{\det(I - xA)} \quad (2.32)$$

où $(M : j, i)$ correspond à la matrice obtenue en enlevant la j^e ligne et la i^e colonne de M et $\det(M)$ est le déterminant de la matrice M .

Démonstration. Par définition, $F_{ij}(x)$ est l'entrée en position $[i, j]$ de la somme de matrices $\sum_{n \geq 0} x^n A^n$ qui se réécrit

$$\sum_{n \geq 0} x^n A^n = \frac{1}{I - xA} = (I - xA)^{-1}.$$

De la règle de Cramer pour le calcul de l'inverse d'une matrice (voir par exemple [27]), on sait que pour toute matrice M telle que $\det(M) \neq 0$, on a

$$(M^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(M : j, i)}{\det(M)}$$

de sorte que la formule (2.32) est vérifiée en prenant $M = I - xA$. $\square$

L'exemple suivant a été adapté du mémoire de E. Rassart [33] en ne tenant pas compte du périmètre du polyomino. En effet, ce dernier obtient la série génératrice de ce même type de polyominos, mais à trois variables : la hauteur, l'aire et le périmètre.

Exemple 2.15. Les polyominos de largeur 2, de hauteur b et à n cellules peuvent être étudiés par le biais de la matrice de transfert. En effet, ceux-ci peuvent être construits étape par étape avec l'une des trois configurations illustrées à la figure 2.5 en plus de la configuration vide pour initialiser l'aire.

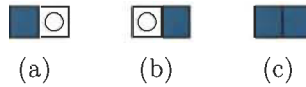


FIGURE 2.5 – Configurations possibles pour un polyomino de largeur 2

Le tableau des transitions est présenté au tableau 2.1 où le poids d'une configuration d'aire n est p^n .

$\nearrow$				
	0	p	p	p^2
	0	p	0	p^2
	0	0	p	p^2
	0	p	p	p^2

TABLEAU 2.1 – Transitions des polyominos de largeur 2

La matrice de transfert $A_2(p)$ est donc

$$A_2(p) = \begin{pmatrix} 0 & p & p & p^2 \\ 0 & p & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & p & p^2 \\ 0 & p & p & p^2 \end{pmatrix}.$$

Les polyominos qu'on doit dénombrer sont ceux qui débutent par une ligne vide et qui se terminent par une des trois configurations non vide. Ces objets correspondent aux entrées $[1, 2]$, $[1, 3]$ et $[1, 4]$ de la matrice $(I - yA_2(p))^{-1}$. Par contre, on distingue parmi ceux-ci des polyominos de largeur 1 qui sont issus de l'empilement successif des configurations 2.5(a) ou 2.5(b). Ainsi, en additionnant les entrées précédemment indiquées de la matrice $(I - yA_2(p))^{-1}$, on obtient la série génératrice des polyominos de largeur au plus 2 :

$$F_{\leq 2}(p, y) = \sum_{k=2}^4 (I - yA_2(p))^{-1}[1, k] = \frac{-2yp}{y^2p^3 + yp^2 + yp - 1} - \frac{yp^2(yp + 1)}{y^2p^3 + yp^2 + yp - 1}.$$

Ainsi, celle des polyominos de largeur 2, $F_2(p, y) = \sum_{b,n \geq 1} f_2(b, n) p^n y^b$, est

$$\begin{aligned} F_2(p, y) &= F_{\leq 2}(p, y) - \frac{2py}{1 - py} \\ &= \frac{p^2y(p^2y^2 + 2py + 1)}{(1 - py)(1 - p^3y^2 - p^2y - py)}, \end{aligned}$$

ce qui correspond exactement à ce qui a été trouvé avec la méthode de la récurrence à l'exemple 2.10 ainsi qu'avec la méthode de l'équation fonctionnelle à l'exemple 2.12. À noter que la matrice $(I - yA_2(p))^{-1}$ a été obtenue à l'aide du logiciel *Maple*. $\square$

Chapitre 3

Polyominos particuliers

*When a problem seems intractable, it is often a good idea
to try to study «toy» versions of it in the hope that [...] /
they would metamorphose, in the limit, to the real thing.*

– D. Zeilberger [45, p. 136]

Deux types de polyominos reviennent de manière récurrente dans les prochains chapitres : les polyominos d'aire minimale et d'aire minimale plus un. En effet, non seulement ils interviennent dans la construction des polyominos d'aire minimale plus deux au chapitre 4, mais ceux-ci sont énumérés à symétries près dans le chapitre 5.

Les résultats de ce chapitre sont le fruit du travail de A. Goupil et col. dans [22] et [23], à l'exception des formules et des séries génératrices concernant certains polyominos inscrits dans un carré et les coins d'index 1 qui ont été spécialement trouvées pour l'énumération à symétries près par l'auteur de ce mémoire. Dans certains cas, des preuves différentes sont proposées, notamment pour les escaliers, les coins d'index 0 et les croix.

Tels que définis au chapitre 1, les polyominos d'aire $b + k - 1$ inscrits dans un rectangle $k \times b$ sont les polyominos d'aire minimale tandis que ceux d'aire $b + k$ inscrits dans ce même rectangle sont les polyominos d'aire minimale plus un, ou plus

simplement les minimaux et les minimaux plus un. En lien avec ceux-ci, on définit l'index d'un polyomino dans [23] comme étant le nombre de cellules supplémentaires au nombre minimale. Ainsi, les polyominos d'aire minimale sont ceux d'index 0 et les minimaux plus un sont ceux d'index 1. Ces deux appellations seront utilisées en parallèle dans le texte qui suit.

Pour tous les cas de polyominos étudiés, les séries génératrices selon la hauteur b et la largeur k du polyomino sont obtenues, les paramètres de hauteur et de largeur étant respectivement associées aux variables formelles y et x :

$$G(x, y) = \sum_{b, k \geq 0} g(k, b) x^k y^b.$$

3.1 Produit diagonal

Une astuce élaborée afin de déterminer les séries génératrices de divers polyominos est l'utilisation du *produit diagonal*, également appelé *concaténation* dans [44]. Ce produit consiste en un collage diagonal de polyominos obtenu en superposant deux cellules dans un coin, comme on peut le voir à la figure 3.1. Dans la littérature, cette opération est symbolisée par « $\times$ » [23], mais ce dernier symbole étant utilisé pour les dimensions du rectangle circonscrit, on utilisera plutôt « $\cdot$ ».

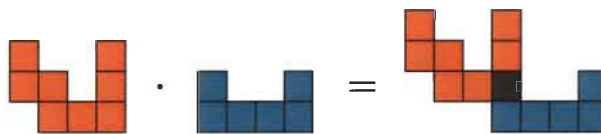


FIGURE 3.1 – Produit diagonal de deux polyominos

Le produit diagonal est mis à profit afin d'obtenir les séries génératrices de certaines classes de polyominos, dont les polyominos d'aire minimale plus un et plus deux ainsi que pour l'énumération à symétries près. Ce produit permet la construction d'un polyomino d'un index donné à l'aide de polyominos d'index inférieur, car l'index est une fonction additive sous ce produit et la série génératrice est obtenue par le produit

des séries des polyominos d'index inférieur moyennant un petit ajustement. Ces deux propriétés sont décrites plus en détail ci-bas.

Premièrement, l'index est additif sous le produit diagonal. Ainsi, soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux familles de polyominos, alors

$$\text{index}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \text{index}(\mathcal{A}) + \text{index}(\mathcal{B}).$$

La figure 3.1 illustre ce concept : le polyomino orange est d'index 2 tandis que le polyomino bleu est d'index 1 et celui résultant de leur produit diagonal est d'index 3. À cette étape, les index respectifs sont définis en regard du rectangle circonscrit de chacun des polyominos.

Deuxièmement, la série génératrice des polyominos issus du produit diagonal de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est

$$(A \cdot B)(x, y) = \frac{A(x, y) B(x, y)}{xy},$$

où $A(x, y)$ est la série génératrice de la famille $\mathcal{A}$ et $B(x, y)$, celle de $\mathcal{B}$. La division par xy est due à la cellule commune entre les polyominos issus des familles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$. En effet, la hauteur et la largeur du polyomino $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ correspondent respectivement à la somme des hauteurs et à la somme des largeurs de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$ à laquelle on doit soustraire 1 à cause de la cellule superposée. En termes de séries génératrices, la somme des mesures correspond au produit des séries, car les exposants s'additionnent, et la soustraction de 1, à la division par xy .

3.2 Minimaux

Tels qu'abordés dans le début du chapitre, les *polyominos minimaux*, ou d'index 0, sont définis comme étant des polyominos d'aire $b + k - 1$ inscrits dans un rectangle de largeur k et de hauteur b . Les résultats de cette section proviennent de [22].

Il existe trois types de polyominos minimaux qui interviennent dans la structure générale des minimaux : les escaliers, les équerres et les coins d'index 0, lesquels sont représentés à la figure 3.2. La série génératrice de chacun de ces trois sous-ensembles de polyominos d'index 0 est obtenue et celle des minimaux généraux est ensuite trouvée. Pour ces séries, les variables formelles x et y sont respectivement associées à la largeur et à la hauteur du rectangle circonscrit au polyomino.

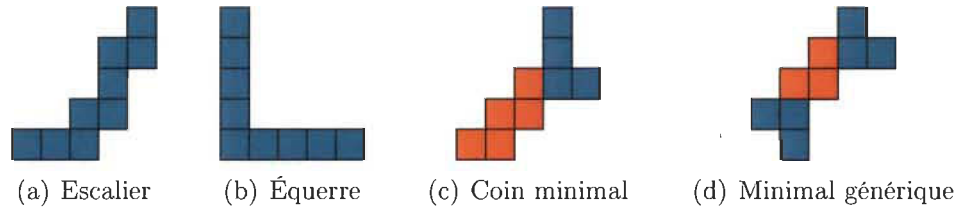


FIGURE 3.2 – Polyominos d'aire minimale inscrits dans un 5×5

3.2.1 Escaliers

Un polyomino *escalier* est un polyomino d'aire minimale tel que la cellule inférieure gauche du rectangle circonscrit est occupée et est construit par l'ajout successif de cellules directement en haut ou à la droite de la cellule précédente. Un exemple est présenté à la figure 3.2(a). Dans cette situation, l'escalier se développe le long de l'anti-diagonale du rectangle circonscrit. En appliquant une rotation de 90° à ces polyominos, on retrouve des escaliers qui suivent la diagonale principale. Il y en a autant dans les deux cas, et le résultat suivant est utilisé peu importe la direction de l'escalier.

Proposition 3.1. Soit $ESC(x, y) = \sum_{b, k \geq 1} esc(k, b)x^k y^b$ où $esc(k, b)$ est le nombre d'escaliers inscrits dans un $k \times b$, la série génératrice des escaliers, alors

$$ESC(x, y) = \frac{xy}{1 - x - y}. \quad (3.1)$$

Démonstration. On utilise la méthode de l'équation fonctionnelle établie à la section 2.3.3 pour démontrer cet énoncé. Un escalier quelconque est composé soit de :

1. une cellule unitaire ;

2. un escalier quelconque placé à la droite de la cellule de coin ;
3. un escalier quelconque placé au-dessus de la cellule de coin.

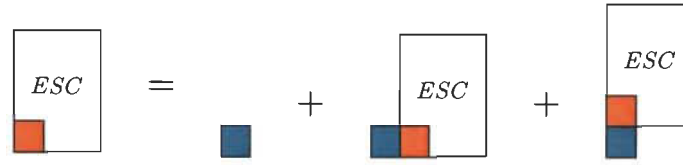


FIGURE 3.3 – Construction de l'équation fonctionnelle des polyominos escaliers

Ces trois cas sont illustrés à la figure 3.3 et se traduisent respectivement par les séries :

1. xy , car la cellule unitaire est de hauteur et de largeur 1 ;
2. $xESC(x, y)$, car l'escalier est quelconque et la cellule contribue à la largeur pour une unité ;
3. $yESC(x, y)$, car l'escalier est quelconque et la cellule contribue à la hauteur pour une unité.

Ainsi, l'équation fonctionnelle des escaliers est

$$ESC(x, y) = xy + xESC(x, y) + yESC(x, y).$$

En isolant $ESC(x, y)$, on trouve

$$(1 - x - y) ESC(x, y) = xy$$

$$ESC(x, y) = \frac{xy}{1 - x - y},$$

soit la relation (3.1). □

3.2.2 Équerres

Une équerre est un polyomino d'aire minimale tel que la cellule du coin inférieur gauche du rectangle circonscrit est occupée et dont toutes les autres cellules sont directement au-dessus dans la colonne de cette cellule de coin ou directement à sa droite sur la même ligne horizontale, tel qu'illustré aux figures 3.2(b) et 3.4.

Proposition 3.2. La série génératrice des équerres $EQ(x, y) = \sum_{b,k \geq 1} eq(k, b)x^k y^b$, où $eq(k, b)$ représente le nombre d'équerres inscrites dans un rectangle $k \times b$, est

$$EQ(x, y) = \frac{xy}{(1-x)(1-y)}. \quad (3.2)$$

Démonstration. Une équerre est formée d'au moins une cellule, dont la série génératrice est xy . À cette cellule, on ajoute une rangée verticale, possiblement vide, de cellules, soit une contribution de $\frac{1}{1-y}$. De manière similaire, on peut placer une rangée horizontale, soit $\frac{1}{1-x}$. Ces trois éléments de construction sont mis en évidence à la figure 3.4. Par le principe du produit, on obtient

$$\begin{aligned} EQ(x, y) &= \frac{1}{1-x} \cdot xy \cdot \frac{1}{1-y} \\ &= \frac{xy}{(1-x)(1-y)}. \end{aligned}$$

□

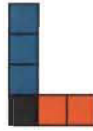


FIGURE 3.4 – Les trois constituantes d'une équerre : une rangée horizontale (orange), verticale (bleue) et la cellule obligatoire (grise)

3.2.3 Coins minimaux

Les polyominos coins minimaux, soit d'index 0, seront particulièrement utiles aux chapitres 4 et 5. Leur nom évoque leur description : il s'agit d'un polyomino inscrit d'aire minimale dont le coin inférieur gauche du rectangle circonscrit est occupé par une cellule. Bien sûr, par symétries, il y en a autant lorsqu'on fixe ce coin à une des quatre positions possibles dans un rectangle. Par conséquent, on utilise les résultats qui suivent peu importe la position de la cellule de coin dans le rectangle.

Proposition 3.3. Soit $c_0(k, b)$ le nombre de polyominos coins d'index 0 inscrits dans un $k \times b$, alors $c_0(k, b)$ satisfait la récurrence et la condition initiale

$$\begin{aligned} c(k, b) &= c(k, b-1) + c(k-1, b) + 1, \quad b, k \geq 2, \\ c(k, 1) &= c(1, b) = 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Démonstration. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la partition illustrée à la figure 3.5. En effet, à partir de la cellule inférieure gauche (orange), la prochaine cellule peut être à sa droite ou en haut. Une fois ce choix effectué, on retrouve un polyomino coin d'une dimension inférieure que l'original. Il existe un cas particulier où, à la fois la cellule du haut et celle à l'extrême droite de la cellule de coin sont occupées, formant ainsi une équerre. $\square$

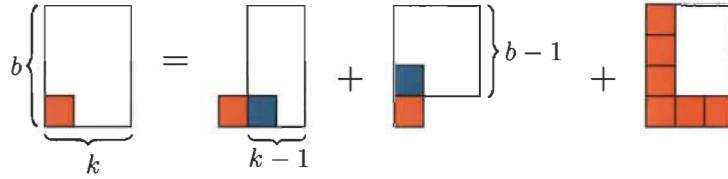


FIGURE 3.5 – Construction de la récurrence décrivant les polyominos coins d'index 0

Proposition 3.4. La série génératrice des coins minimaux $C_0(x, y)$ est

$$C_0(x, y) = \sum_{b, k \geq 1} c_0(k, b) x^k y^b = \frac{xy(2xy - x - y + 1)}{(1-x)(1-y)(1-x-y)} \quad (3.4)$$

$$= \frac{2xy}{1-x-y} - \frac{xy}{(1-x)(1-y)}. \quad (3.5)$$

Démonstration. De la récurrence (3.3) et de la méthode élaborée à la section 2.3.2, en multipliant par $x^k y^b$ et en sommant pour $b, k \geq 2$, on a

$$\sum_{b, k \geq 2} c_0(k, b) x^k y^b = \sum_{b, k \geq 2} c_0(k, b-1) x^k y^b + \sum_{b, k \geq 2} c_0(k-1, b) x^k y^b + \sum_{b, k \geq 2} x^k y^b. \quad (3.6)$$

Ensuite, en exprimant chacune des sommations en fonction de la série $C_0(x, y)$, l'équation (3.6) devient

$$\begin{aligned} C_0(x, y) - \sum_{k \geq 1} x^k y - \sum_{b \geq 2} x y^b &= y \left(C_0(x, y) - \sum_{b \geq 1} x y^b \right) + x \left(C_0(x, y) - \sum_{k \geq 1} x^k y \right) \\ &\quad + \left(\sum_{k \geq 2} x^k \right) \left(\sum_{b \geq 2} y^b \right). \end{aligned}$$

À partir de l'expression rationnelle de la série géométrique, on trouve

$$\begin{aligned} C_0(x, y) - \frac{xy}{1-x} - \frac{xy^2}{1-y} &= y \left(C_0(x, y) - \frac{xy}{1-y} \right) + x \left(C_0(x, y) - \frac{xy}{1-x} \right) \\ &\quad + \frac{x^2 y^2}{(1-x)(1-y)}. \end{aligned}$$

Finalement, en résolvant cette équation pour $C_0(x, y)$, on obtient la relation (3.4) et on peut vérifier, notamment à l'aide du développement en séries de MacLaurin, que cette expression est équivalente à (3.5). $\square$

À titre de curiosité, mais également pour obtenir la série génératrice des coins d'index 0 inscrits dans un carré, on peut déduire la formule exacte que satisfont ces polyominos inscrits à partir de la série $C_0(x, y)$.

Proposition 3.5. Soit $c_0(k, b)$ le nombre de coins minimaux inscrits dans un $k \times b$, alors

$$c_0(k, b) = 2 \binom{b+k-2}{b-1} - 1. \quad (3.7)$$

Démonstration. Pour le prouver, la forme (3.5) de $C_0(x, y)$ est utilisée.

D'une part, en utilisant les séries génératrices et la formule du binôme de Newton [4], on a

$$\frac{2xy}{1-x-y} = 2xy \sum_{n \geq 0} (x+y)^n = 2xy \sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} \binom{n}{p} x^{n-p} y^p. \quad (3.8)$$

De plus, en distribuant xy sur l'addition et en posant $k = n - p + 1$ et $b = p + 1$, l'égalité (3.8) devient

$$\frac{2xy}{1-x-y} = 2 \sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} \binom{n}{p} x^{n-p+1} y^{p+1} = \sum_{b \geq 1} \sum_{k \geq 1} 2 \binom{b+k-2}{b-1} x^k y^b. \quad (3.9)$$

D'autre part, par les propriétés des séries géométriques et de la sommation, on trouve

$$\frac{xy}{(1-x)(1-y)} = \sum_{k \geq 1} x^k \sum_{b \geq 1} y^b = \sum_{b \geq 1} \sum_{k \geq 1} x^k y^b. \quad (3.10)$$

En substituant (3.9) et (3.10) dans (3.5), on obtient

$$C_0(x, y) = \sum_{b \geq 1} \sum_{k \geq 1} 2 \binom{b+k-2}{b-1} x^k y^b - \sum_{b \geq 1} \sum_{k \geq 1} x^k y^b.$$

Comme le coefficient de $x^k y^b$ est $c_0(k, b)$,

$$c_0(k, b) = 2 \binom{b+k-2}{b-1} - 1.$$

□

À l'aide de cette formule, on peut trouver la série génératrice des coins minimaux inscrits dans un carré, qui sera utilisée au chapitre 5.

Proposition 3.6. La série génératrice $C_0^\square(x, y)$ des polyominos coins minimaux inscrits dans un carré est

$$C_0^\square(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{1-4xy}} - \frac{xy}{1-xy}. \quad (3.11)$$

Démonstration. Les coins d'index 0 dans un carré satisfont la formule exacte $c_0(k, b)$, soit (3.7), en posant $b = k$. Ainsi, par la définition d'une série génératrice,

$$C_0^\square(x, y) = \sum_{b \geq 1} c_0(b, b)(xy)^b = xy + \sum_{b \geq 2} \left(2 \binom{2b-2}{b-1} - 1 \right) (xy)^b$$

$$\begin{aligned}
&= xy + 2 \sum_{b \geq 1} \binom{2b}{b} (xy)^{b+1} - \sum_{b \geq 2} (xy)^b \\
&= xy + 2xy \left(\frac{1}{\sqrt{1-4xy}} - 1 \right) - \frac{x^2 y^2}{1-xy} \\
&= \frac{2xy}{\sqrt{1-4xy}} - \frac{xy}{1-xy}.
\end{aligned}$$

Les formes compactes des sommations précédentes ont été trouvées à l'aide de *Maple*.

□

Afin d'utiliser les coins minimaux dans la construction des polyominos d'index supérieur à 0, il est nécessaire de définir les *coins minimaux non dégénérés*. Il s'agit des coins minimaux inscrits dans un $k \times b$ où on exclut l'unique équerre inscrite dans ce rectangle dont la série génératrice est (3.2). Ainsi, la série génératrice des coins minimaux non dégénérés est

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_0(x, y) &= C_0(x, y) - \frac{xy}{(1-x)(1-y)} \\
&= \frac{2xy}{(1-x-y)} - \frac{2xy}{(1-x)(1-y)}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2.4 Minimaux généraux

Un polyomino d'index 0 se construit sur une des deux diagonales du rectangle circonscrit, tel qu'illustré à la figure 3.6. Pour une diagonale donnée, la structure du polyomino est composée d'une équerre, d'un escalier et d'une équerre où les équerres peuvent être absentes, ce qui mène à la proposition suivante par le principe du produit.

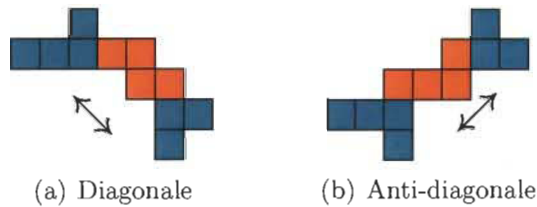


FIGURE 3.6 – Polyominos minimaux inscrits dans un 7×5

Proposition 3.7. La série génératrice des polyominos minimaux pour une diagonale donnée est

$$\begin{aligned} P_{\nearrow}(x, y) &= (EQ(x, y) + 1) ESC(x, y) (EQ(x, y) + 1) \\ &= \frac{xy}{1 - x - y} \cdot \left(\frac{xy}{(1 - x)(1 - y)} + 1 \right)^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où $ESC(x, y)$ et $EQ(x, y)$ sont respectivement les séries génératrices des escaliers et des équerres données aux équations (3.1) et (3.2).

Trouver la série génératrice des polyominos d'aire minimale ne se résume pas à multiplier par 2 la série $P_{\nearrow}(x, y)$, car il existe des polyominos appartenant aux deux diagonales : les croix. Un polyomino *croix* est composé de deux rangées de cellules perpendiculaires se croisant en une cellule. Autrement dit, une croix est le produit diagonal de deux équerres, tel que mis en évidence à la figure 3.7.



FIGURE 3.7 – Polyomino croix

Proposition 3.8. Les polyominos croix satisfont la série génératrice

$$P_{+}(x, y) = \frac{xy}{(1 - x)^2 (1 - y)^2} - \frac{xy}{(1 - y)^2} - \frac{xy}{(1 - x)^2} + \frac{xy}{1 - y} + \frac{xy}{1 - x}. \quad (3.14)$$

Démonstration. La structure d'une croix indique qu'elle est le produit diagonal de deux équerres, dont la série génératrice est donnée par

$$\frac{EQ(x, y)^2}{xy} = \frac{xy}{(1 - x)^2 (1 - y)^2}. \quad (3.15)$$

En effet, au côté gauche de l'équation (3.15), la division par xy est due à la cellule commune et au côté droit, on a substitué $EQ(x, y)$ par sa forme rationnelle (3.2). Toutefois, en considérant ce produit, les rangées horizontales et verticales sont comptées en surplus, car elles peuvent être construites de plusieurs manières en combinant

respectivement deux rangées horizontales et verticales. Plus précisément, ces combinaisons sont décrites par

$$\frac{xy}{(1-x)^2} + \frac{xy}{(1-y)^2}. \quad (3.16)$$

Ainsi, on les enlève pour intégrer l'unique rangée pour chaque largeur ou hauteur, soit

$$\frac{xy}{1-y} + \frac{xy}{1-x}. \quad (3.17)$$

En soustrayant (3.16) à (3.15) et en ajoutant (3.17) au reste, on obtient (3.14). $\square$

La preuve de la proposition 3.8 élaborée ci-haut est différente de celle présentée dans [23]. En effet, A. Goupil et col. exploitaient plutôt le fait que pour un rectangle $k \times b$ où $k, b \geq 2$, il y a kb croix et une seule croix lorsque $b = 1$ ou $k = 1$. Le même résultat est alors obtenu en faisant les sommes

$$\sum_{k \geq 1} x^k y + \sum_{b \geq 2} xy^b + \sum_{b, k \geq 2} kbx^k y^b.$$

Ainsi, la série génératrice des polyominos d'aire minimale est obtenue en considérant que ces polyominos peuvent être construits selon deux diagonales et en soustrayant ceux appartenant à ces deux diagonales, ce qui conduit à la proposition 3.9.

Proposition 3.9. Soit $P_0(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale, alors

$$\begin{aligned} P_0(x, y) &= 2P_{\nearrow}(x, y) - P_+(x, y) \\ &= 2 \frac{xy}{1-x-y} \cdot \left(\frac{xy}{(1-x)(1-y)} + 1 \right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{xy}{(1-x)^2(1-y)^2} - \frac{xy}{(1-y)^2} - \frac{xy}{(1-x)^2} + \frac{xy}{1-y} + \frac{xy}{1-x} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

où $P_{\nearrow}(x, y)$ est la série génératrice des polyominos minimaux pour une diagonale donnée, soit (3.13), et $P_+(x, y)$, celle des croix donnée à l'équation (3.14).

Au tableau 3.1 est regroupé le nombre de polyominos minimaux inscrits dans des rectangles ayant une dimension inférieure ou égale à 10×10 . On remarque qu'il y a autant de minimaux inscrits dans un $b \times k$ que dans un $k \times b$. Il existe effectivement une bijection entre ces deux ensembles où la fonction bijective est la rotation de 90° .

b/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	4	8	12	16	20	24	28	32	36
3	1	8	25	50	83	124	173	230	295	368
4	1	12	50	120	230	388	602	880	1230	1660
5	1	16	83	230	497	932	1591	2538	3845	5592
6	1	20	124	388	932	1924	3588	6212	10156	15860
7	1	24	173	602	1591	3588	7265	13582	23859	39856
8	1	28	230	880	2538	6212	13582	27288	51290	91308
9	1	32	295	1230	3845	10156	23859	51290	102745	194240
10	1	36	368	1660	5592	15860	39856	91308	194240	388692

TABLEAU 3.1 – Nombre de polyominos minimaux inscrits dans un $k \times b$

Une formule exacte a été obtenue par A. Goupil et col. [22] pour dénombrer les polyominos d'aire minimale inscrits. En effet, soit $p_0(k, b)$ le nombre de polyominos minimaux inscrits dans un $k \times b$, alors

$$p_0(k, b) = 2b + 2k - 3bk - 8 + 8 \binom{b+k-2}{k-1} \quad k, b \geq 2, \quad (3.19)$$

$$p_0(1, b) = p_0(k, 1) = 1.$$

On réfère le lecteur à [22] pour la preuve de cette dernière formule.

Proposition 3.10. La série génératrice des polyominos minimaux inscrits dans un carré correspond à l'expression suivante

$$P_0^\square(x, y) = \frac{xy(1 - 15xy + 16x^2y^2 - 8x^3y^3)}{(1 - xy)^3} + \frac{8xy}{\sqrt{1 - 4xy}} - 8xy. \quad (3.20)$$

Démonstration. Les polyominos mininaux inscrits dans un carré satisfont la formule (3.19), en posant $b = k$. Ainsi, par définition d'une série génératrice,

$$\begin{aligned} P_0^\square(x, y) &= \sum_{b \geq 1} p_0(b, b) x^b y^b \\ &= xy + \sum_{b \geq 2} \left(4b - 3b^2 - 8 + 8 \binom{2b-2}{b-1} \right) (xy)^b \\ &= \frac{xy(1 - 15xy + 16x^2y^2 - 8x^3y^3)}{(1 - xy)^3} + \frac{8xy}{\sqrt{1 - 4xy}} - 8xy. \end{aligned}$$

Tout comme pour la proposition 3.6, le résultat de ces sommations a été obtenu avec *Maple*. □

3.3 Minimaux plus un

On rappelle que les *minimaux plus un* sont des polyominos d'aire $b + k$ inscrits dans un $k \times b$, ils ont ainsi une cellule de plus que les polyominos d'aire minimale inscrits dans le même rectangle.

À l'exception de quelques résultats, les séries génératrices de cette section sont présentées dans [22] et dans [23]. Ces polyominos ont été l'objet d'étude dans le mémoire de L. J. Llerena [28]. Toutefois, les séries génératrices des bancs-coins et des coins d'index 1 ont été obtenues par l'auteur de ce mémoire pour l'énumération des polyominos à symétries près.

Les minimaux plus un sont aussi les polyominos d'*index 1* et ils sont caractérisés par la présence d'un *banc*, tel qu'illustré à la figure 3.8. En position horizontale, comme aux figures 3.8(a) et 3.8(b), ces bancs sont inscrits dans un rectangle $t \times 2$ et sont d'aire $t + 2$. De plus, t cellules sont alignées avec un côté horizontal du banc, qu'on appelle le *dos* ou la *base* du banc, et les deux autres cellules sont dans les deux coins restants du rectangle. Ces deux cellules forment les *pattes* du banc. Dans le cas particulier où t égale 2, le banc est un carré et doit être traité séparément, puisqu'il possède

plus de symétries. Les autres bancs, soit ceux où $t \geq 3$, sont appelés des bancs non dégénérés. Dans le cas vertical, on parlera d'un banc inscrit dans un $2 \times t$, comme à la figure 3.8(c).

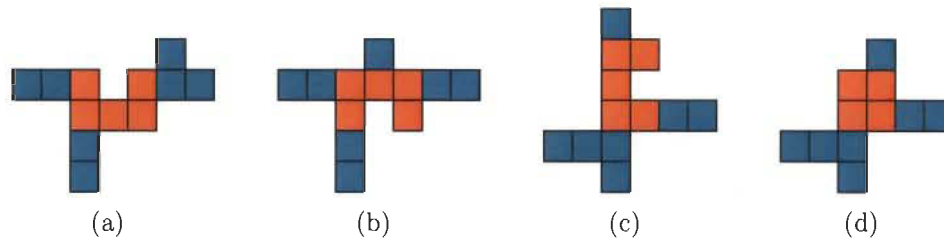


FIGURE 3.8 – Polyominos d'aire minimale plus un où l'ensemble des cellules oranges forme un banc

Puisqu'un banc est lui-même un polyomino d'index 1, le reste du polyomino est obligatoirement d'index 0. De manière générale, les polyominos d'index 1 ont la structure multiplicative suivante :

$$(\text{équerre}_1 \text{ ou coin}) \cdot \text{banc} \cdot (\text{équerre}_2 \text{ ou coin}), \quad (3.21)$$

dont deux cas sont présentés à la figure 3.9. Il est nécessaire de distinguer les équerres par des indices, car il n'y en a pas le même nombre selon l'endroit où elles sont ajoutées sur le banc. Tout comme les polyominos minimaux, les polyominos d'index 1 se construisent le long d'une des deux diagonales du rectangle circonscrit.

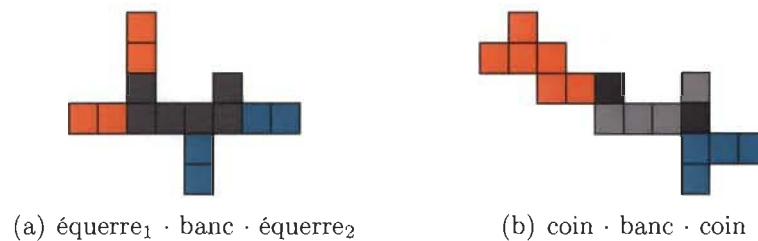


FIGURE 3.9 – Structure des polyominos d'index 1

3.3.1 Bancs non dégénérés

Proposition 3.11. La série génératrice $P_{1,h}(x, y, t)$ des polyominos d'index 1 contenant un banc horizontal $t \times 2$ où $t \geq 3$ est donnée par

$$\begin{aligned} P_{1,h}(x, y, t) = & 2 \left(EQ_1(x, y) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right) \cdot 2x^t y^2 \cdot \left(EQ_2(x, y, t) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right) \\ & - EQ_1(x, y) \cdot 2x^t y^2 \cdot EQ_2(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

où

$$EQ_1(x, y) = \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \quad (3.23)$$

$$EQ_2(x, y, t) = \left(1 + \frac{ty}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \quad (3.24)$$

et $\tilde{C}_0(x, y)$ est donné par (3.12).

Démonstration. Par symétrie, il y a autant de polyominos minimaux plus un contenant un banc horizontal avec les pattes vers le haut que vers le bas. Ainsi, la série génératrice pour ces bancs est $2x^t y^2$, car ils sont de largeur t et de hauteur 2.

Sans perte de généralité, le banc horizontal avec les pattes vers le haut est étudié et est illustré en gris sur la figure 3.10. Dans le coin supérieur gauche de ce banc, une rangée horizontale non vide peut être positionnée à deux endroits de même qu'une rangée verticale non vide, tel que présenté à la figure 3.10. On peut également n'ajouter aucune rangée horizontale ou verticale, cela se fait d'une seule façon et se traduit par l'ajout de 1 à chaque facteur :

$$EQ_1(x, y) = \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right).$$

Dans le coin inférieur droit de ce même banc, la rangée horizontale a encore deux positions possibles, mais la rangée verticale peut être attachée à une des t cellules du dos du banc. Ces rangées sont illustrées en orange sur la figure 3.10. Puisque la rangée

verticale contribue à la hauteur du polyomino, elle est associée à y . On a ainsi

$$EQ_2(x, y, t) = \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)$$

où on prend en compte le fait qu'on ne peut pas ajouter de rangée en additionnant 1 à chaque facteur.

$$\left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) t \quad \begin{array}{c} \text{Diagram of a } t \times 2 \text{ grid with colored cells (blue, red, black) representing the positions of L-shaped tiles.} \end{array} \quad \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)$$

FIGURE 3.10 – Positions des équerres sur un banc $t \times 2$

À chacune de ces positions sur le banc et avec le produit diagonal, il est également possible de positionner un coin d'index 0 non dégénéré, car l'équerre issue des coins est déjà considérée avec $EQ_1(x, y)$ et $EQ_2(x, y, t)$. De plus, la cellule de coin de ce polyomino d'aire minimale coïncide avec une cellule du banc, comme on peut le remarquer à la figure 3.9(b). Ainsi, le produit diagonal force la division par xy afin d'éviter que cette cellule contribue deux fois à la hauteur et à la largeur.

La série $P_{1,h}(x, y, t)$ est alors obtenue avec la structure multiplicative (3.21) en considérant que le polyomino peut se construire sur deux diagonales :

$$2 \left(EQ_1(x, y) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right) \cdot 2x^t y^2 \cdot \left(EQ_2(x, y, t) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right),$$

mais en soustrayant ceux appartenant aux deux diagonales, c'est-à-dire de la forme équerre₁ · banc · équerre₂ :

$$EQ_1(x, y) \cdot 2x^t y^2 \cdot EQ_2(x, y, t),$$

on obtient alors (3.22). □

La série génératrice des polyominos d'aire minimale plus un contenant un banc vertical est obtenue en interchangeant les variables x et y afin que la hauteur devienne la largeur et vice versa.

Ainsi, la série génératrice $P_1^{t \times 2}(x, y)$ des polyominos d'index 1 avec un banc non dégénéré quelconque est

$$P_1^{t \times 2}(x, y) = \sum_{t \geq 3} (P_{1,h}(x, y, t) + P_{1,h}(y, x, t)) \quad (3.25)$$

où

$$\begin{aligned} \sum_{t \geq 3} P_{1,h}(x, y, t) = \frac{2x^3y^2}{1-x} & \left\{ 2 \left[\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \right. \\ & \cdot \left[\frac{1+x}{1-x} \left(1 + \frac{(3-2x)y}{(1-x)(1-y)} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \\ & \left. - \frac{(1+x)^2(1+y)}{(1-x)^2(1-y)} \left(1 + \frac{(3-2x)y}{(1-x)(1-y)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

3.3.2 Bancs 2×2

Proposition 3.12. La série génératrice des polyominos d'index 1 contenant un banc 2×2 , notée $P_1^{2 \times 2}(x, y)$, est donnée par

$$\begin{aligned} P_1^{2 \times 2}(x, y) = 2 & \left(EQ_1(x, y) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right) \cdot x^2y^2 \cdot \left(EQ_1(x, y) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right) \\ & - EQ_1(x, y) \cdot x^2y^2 \cdot EQ_1(x, y) \end{aligned} \quad (3.26)$$

où

$$EQ_1(x, y) = \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)$$

et $\tilde{C}_0(x, y)$ est donné par (3.12).

Démonstration. Les mêmes arguments que pour la démonstration de la proposition 3.11 sont utilisés. Il suffit de prendre $t = 2$ dans (3.22) et de considérer que la série pour le banc 2×2 est x^2y^2 plutôt que $2x^ty^2$. De plus, puisque $t = 2$, alors $EQ_1(x, y) = EQ_2(x, y, 2)$. $\square$

3.3.3 Coins minimaux plus un

Comme son nom l'indique, un polyomino coin d'aire minimale plus un est un polyomino d'index 1 tel que le coin supérieur gauche du rectangle circonscrit est occupé. Par symétrie, les mêmes résultats décrivent ces objets si la cellule de coin occupée est fixée à un des trois autres coins du rectangle. De plus, tout comme les coins d'index 0, les coins minimaux plus un serviront à l'énumération des polyominos à symétries près au chapitre 5. Comme pour la section précédente, on doit distinguer les coins contenant un banc 2×2 de ceux avec un banc non dégénéré.

Proposition 3.13. La série génératrice des polyominos coins d'index 1 contenant un banc 2×2 est

$$C_1^{2 \times 2}(x, y) = \frac{ESC(x, y)}{xy} \cdot x^2y^2 \cdot \left(\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \right) \quad (3.27)$$

où $ESC(x, y)$ et $\tilde{C}_0(x, y)$ sont respectivement (3.1) et (3.12).

Démonstration. Un polyomino coin d'index 1 est obtenu par les produits diagonaux suivants (voir figure 3.11) :

$$\text{escalier} \cdot \text{banc } 2 \times 2 \cdot (\text{coin d'index 0 non dégénéré ou équerre}). \quad (3.28)$$

Dans cette structure, l'escalier et le coin ont une cellule en commun avec le banc. Par conséquent, la série pour les escaliers est $ESC(x, y)/xy$ et celle des coins est $\tilde{C}_0(xy)/xy$. Un banc 2×2 a pour série génératrice x^2y^2 . De plus, pour former l'équerre, une rangée horizontale non vide de même qu'une verticale peuvent être placées à

deux endroits possibles sur le banc et leurs séries sont respectivement $2y/(1-y)$ et $2x/(1-x)$. Par contre, autant horizontalement que verticalement, on peut ne pas ajouter de rangée, cette situation ayant pour série 1. Ainsi, en traduisant la structure (3.28) avec les arguments précédents, on a (3.27). $\square$

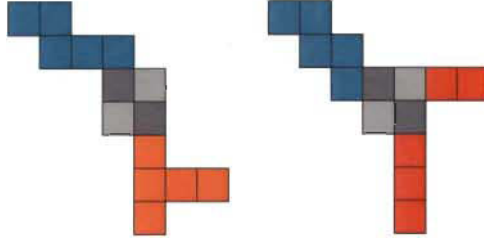


FIGURE 3.11 – Polyominos coins d'index 1 où les cellules bleues, grises, oranges et rouges forment respectivement un escalier, un banc 2×2 , un coin d'index 0 non dégénéré et une équerre

Proposition 3.14. La série génératrice des polyominos coins d'index 1 contenant un banc $t \times 2$, $t \geq 3$, dénotée par $C_1^{t \times 2}(x, y)$, est

$$C_1^{t \times 2}(x, y, t) = \frac{ESC(x, y)}{xy} x^t y^2 \left(\frac{2\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + EQ_1(x, y) + EQ_2(x, y, t) \right) \quad (3.29)$$

où $EQ_1(x, y)$ et $EQ_2(x, y, t)$ sont respectivement (3.23) et (3.24).

Démonstration. Ces polyominos coins possèdent la même structure que celle des coins d'index 1 contenant un banc 2×2 :

$$\text{escalier} \cdot \text{banc } t \times 2 \cdot (\text{coin d'index 0 non dégénéré ou équerre}).$$

Toutefois, il y a parfois plus de possibilités pour les positions d'équerre selon l'orientation du banc horizontal $t \times 2$, tel qu'illustré à la figure 3.12. En considérant le banc avec les pattes vers le haut (figure 3.12(a)), les rangées verticales et horizontales formant cette équerre ont respectivement 2 et t positions possibles. On a alors la série

$$\frac{ESC(x, y)}{xy} x^t y^2 \left(\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + EQ_2(x, y, t) \right) \quad (3.30)$$

avec

$$EQ_2(x, y, t) = \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right).$$

Pour ce qui est du banc avec les pattes vers le bas (figure 3.12(b)), la différence est dans les positions possibles pour les rangées verticales et horizontales : chacune en ayant 2. Ainsi, la série pour ces polyominos est

$$\frac{ESC(x, y)}{xy} x^t y^2 \left(\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + EQ_1(x, y) \right) \quad (3.31)$$

avec

$$EQ_1(x, y) = \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right).$$

En additionnant (3.30) et (3.31), on obtient le résultat voulu, soit (3.29). $\square$

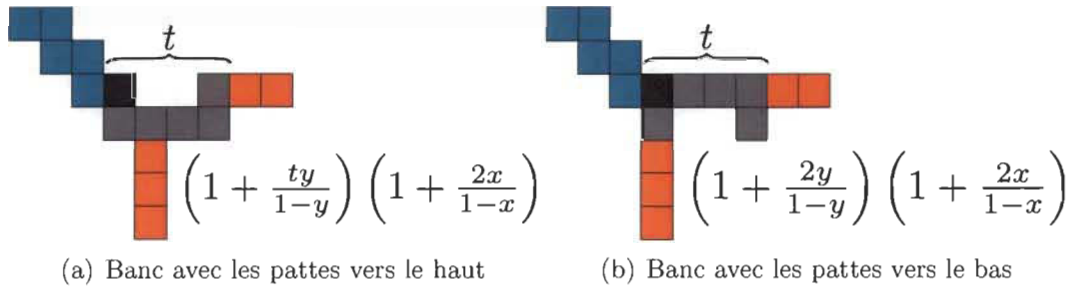


FIGURE 3.12 – Polyominos coins d'index 1 contenant un banc $t \times 2$ horizontal de la forme « escalier · banc $t \times 2$ · équerre »

En permutant x et y dans (3.29), on obtient la série des coins d'index 1 contenant un banc vertical, soit un banc $2 \times t$. Ainsi, la série génératrice de tous les coins d'index 1 contenant un banc quelconque non dégénéré est

$$C_1(x, y, t) = C_1^{t \times 2}(x, y, t) + C_1^{t \times 2}(y, x, t). \quad (3.32)$$

Puisqu'un coin d'index 1 contient un banc 2×2 ou un banc non dégénéré, par le



principe d'addition et en faisant la somme pour $t \geq 3$ pour les bancs non dégénérés, on a la proposition suivante.

Proposition 3.15. Soit $C_1(x, y)$ la série génératrice des coins d'index 1 généraux, alors

$$\begin{aligned}
 C_1(x, y) &= C_1^{2 \times 2}(x, y) + \sum_{t \geq 3} C_1(x, y, t) \\
 &= \frac{6x^2y^3\gamma_1(x, y)\gamma_2(x, y)}{(3x^2y + 3xy^2 + 3x^2 - 2xy + 2y^2 - x - 2)(y - 1)^3(x - 1)(1 - x - y)^2} \\
 &\quad + \frac{2y^2x^3\gamma_3(x, y)\gamma_4(x, y)}{(x - 1)^3(2x^2y + 2xy^2 + x^2 - xy + 2y^2 - y - 1)(y - 1)(1 - x - y)^2} \\
 &\quad + \frac{x^2y^2}{1 - x - y} \left[\frac{-2xy}{(-1 + x + y)(x - 1)(y - 1)} + \frac{1 + y}{1 - y} \frac{1 + x}{1 - x} \right] \\
 &\quad + \frac{x^3y^2(x^2y + xy^2 + x^2 - xy + y^2 - 1)}{(1 - x - y)^2(x - 1)^2(y - 1)} \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(x, y) &= (y^2 - 3/2 - 1/2y)x^2 + (1/2 + y^3 + y - 5/2y^2)x + (1 + y)(y - 1)^2 \\
 \gamma_2(x, y) &= (1 + y)x^2 + (y^2 - 2/3y - 1/3)x + 2/3y^2 - 2/3 \\
 \gamma_3(x, y) &= (1 + y)x^3 + (y^2 - 3y - 1)x^2 + (-y^2 + y - 1)x - 2y^2 + y + 1 \\
 \gamma_4(x, y) &= (y + 1/2)x^2 + (-1/2y + y^2)x + y^2 - 1/2y - 1/2.
 \end{aligned}$$

3.3.4 Bancs-coins

Dans le cadre de l'étude des polyominos à symétries près au chapitre 5 et aussi pour les polyominos d'aire minimale plus deux, il faut connaître les séries génératrices des polyominos d'index 1 lorsque le coin supérieur gauche est occupé par un banc et les distinguer selon les différentes positions possibles de ce dernier. Ils sont appelés *bancs-coins*. En particulier, lorsque le banc qui occupe le coin est un $t \times 2$, $t \geq 2$, on parlera de bancs-coins $t \times 2$.

Proposition 3.16. Les bancs-coins 2×2 satisfont la série génératrice

$$BC_{2 \times 2}(x, y) = x^2 y^2 \left(\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \right) \quad (3.34)$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est l'équation (3.12).

Démonstration. Il suffit d'éliminer l'escalier dans les coins d'index 1 de la proposition 3.13. $\square$

Proposition 3.17. Les bancs-coins $t \times 2$ non dégénérés où t est fixé et où le banc a les pattes vers le haut satisfont la série génératrice



$$BC_{h1}(x, y, t) = x^t y^2 \left(\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + \left(1 + \frac{ty}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \right) \quad (3.35)$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est donné par la série génératrice (3.12).

Démonstration. La structure de ces coins est

$$\text{banc } t \times 2 \cdot (\text{coin d'index 0 non dégénéré ou équerre}). \quad (3.36)$$

Les bancs horizontaux ont pour série génératrice $x^t y^2$. À chacun de ces bancs, un coin d'index 0 non dégénéré peut s'ajouter par le produit diagonal au coin inférieur droit du banc. Cet ajout est décrit par la série

$$\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy}.$$

Pour ce qui est de l'équerre, la rangée horizontale non vide a deux positions possibles tandis que la rangée verticale non vide a t positions où elle peut être ajoutée :

$$\left(1 + \frac{ty}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right),$$

où l'ajout de 1 à chaque facteur est dû au fait qu'on peut ne pas ajouter de rangée. En appliquant la structure (3.36), on obtient l'équation (3.37). $\square$

Proposition 3.18. Les bancs-coins $t \times 2$ non dégénérés où t est fixé et où le banc a les pattes vers le bas satisfont la série génératrice



$$BC_{h2}(x, y, t) = x^t y^2 \left(\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \right) \quad (3.37)$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est la série génératrice (3.12).

Démonstration. Tout comme dans la proposition 3.17, la structure de ces coins est

$$\text{banc } t \times 2 \cdot (\text{coin d'index 0 non dégénéré ou équerre}). \quad (3.38)$$

Les bancs horizontaux ont pour série génératrice $x^t y^2$. À chacun de ces bancs, un coin d'index 0 non dégénéré peut s'ajouter par le produit diagonal au coin inférieur droit du banc :

$$\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy}.$$

Les rangées horizontales et verticales servant à former l'équerre peuvent chacune être placées à deux endroits possibles ou être absentes :

$$\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right).$$

Encore une fois, en utilisant la structure (3.38), on déduit l'équation (3.37). $\square$

Proposition 3.19. La série génératrice $BC_{h1}(x, y)$ de tous les bancs-coins $t \times 2$ avec les pattes vers le haut où $t \geq 3$ est

$$BC_{h1}(x, y) = \frac{y^2 x^3}{1-x} \left(\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) + \frac{y(3-2x)}{(1-y)(1-x)} \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \right) \quad (3.39)$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est donné par (3.12).

Démonstration. Pour obtenir $BC_{h1}(x, y)$, on effectue la somme sur tous les t possibles de $BC_{h1}(x, y, t)$ décrit à l'équation (3.35). On trouve alors

$$\begin{aligned} BC_{h1}(x, y) &= \sum_{t \geq 3} BC_{h1}(x, y, t) = \sum_{t \geq 3} x^t y^2 \left(\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \right) \\ &= y^2 \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \sum_{t \geq 3} x^t + y^2 \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \sum_{t \geq 3} x^t \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) \\ &= \frac{y^2 x^3}{1-x} \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + \frac{y^2 x^3}{1-x} \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) + \frac{y^3}{1-y} \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \frac{x^3 (3-2x)}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.20. La série génératrice $BC_{h2}(x, y)$ de tous les bancs-coins $t \times 2$ avec les pattes vers le bas où $t \geq 3$ est

$$BC_{h2}(x, y) = \frac{y^2 x^3}{1-x} \left(\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \right) \quad (3.40)$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est la série génératrice (3.12).

Démonstration. De manière analogue à la proposition 3.19, on trouve $BC_{h2}(x, y)$ en faisant la somme des $BC_{h2}(x, y, t)$, soit l'équation (3.37), pour $t \geq 3$:

$$\begin{aligned} BC_{h2}(x, y) &= \sum_{t \geq 3} BC_{h2}(x, y, t) = \sum_{t \geq 3} x^t y^2 \left(\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \right) \\ &= y^2 \left(\frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} + \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \right) \frac{x^3}{1-x}. \end{aligned} \quad \square$$

Avec les séries génératrices de cette section, on obtient la proposition suivante concernant tous les bancs-coins.

Proposition 3.21. La série génératrice $BC(x, y)$ de tous les bancs-coins est

$$BC(x, y) = BC_{h1}(x, y) + BC_{h2}(x, y) + BC_{h1}(y, x) + BC_{h2}(y, x) + BC_{2 \times 2}(x, y) \quad (3.41)$$

où $BC_{2 \times 2}(x, y)$, $BC_{h1}(x, y)$ et $BC_{h2}(x, y)$ sont respectivement donnés aux équations (3.34), (3.39) et (3.40)

Démonstration. Un banc-coin appartient à une des trois classes suivantes :

- banc-coin $t \times 2$ non dégénéré : $BC_{h_1}(x, y) + BC_{h_2}(x, y)$;
- banc-coin $2 \times t$ non dégénéré : $BC_{h_1}(y, x) + BC_{h_2}(y, x)$;
- banc-coin 2×2 : $BC_{2 \times 2}(x, y)$.

En additionnant les séries génératrices de ces cas, on a (3.41). □

Le nombre de bancs-coins inscrits dans un rectangle de dimensions inférieures ou égales à 9×9 est présenté au tableau 3.2.

$b \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	4	8	12	16	20	24	28
3	0	4	16	33	56	85	120	161	208
4	0	8	33	62	107	172	261	378	527
5	0	12	56	107	196	341	564	891	1352
6	0	16	85	172	341	646	1163	1994	3271
7	0	20	120	261	564	1163	2268	4191	7376
8	0	24	161	378	891	1994	4191	8298	15575
9	0	28	208	527	1352	3271	7376	15575	31036

TABLEAU 3.2 – Nombre de bancs-coins inscrits dans un $k \times b$

3.3.5 Minimaux plus un généraux

En regroupant les polyominos d'index 1 contenant un banc quelconque $t \times 2$, $t \geq 3$ ou un banc 2×2 , la série génératrice de tous les polyominos d'aire minimale plus un est obtenue :

$$P_1(x, y) = P_1^{t \times 2}(x, y) + P_1^{2 \times 2}(x, y) \quad (3.42)$$

où $P_1^{t \times 2}(x, y)$ et $P_1^{2 \times 2}(x, y)$ sont respectivement donnés par (3.25) et (3.26). De cette série, on extrait le tableau 3.3.

Dans [22], A. Goupil et col. ont développé une formule exacte pour le nombre de

$b \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	6	18	38	66	102	146	198
3	0	6	44	154	376	750	1316	2114	3184
4	0	18	154	584	1526	3276	6194	10704	17294
5	0	38	376	1526	4180	9458	18936	34726	59556
6	0	66	750	3276	9458	22576	47798	92820	168602
7	0	102	1316	6194	18936	47798	107052	219922	422376
8	0	146	2114	10704	34726	92820	219922	477464	967894
9	0	198	3184	17294	59556	168602	422376	967894	2067300

TABLEAU 3.3 – Nombre de polyominos minimaux plus un inscrits dans un $k \times b$ polyominos d'index 1 inscrits :

$$p_1(k, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b = 1 \text{ ou } k = 1 \\ 1 & \text{si } b = k = 2 \\ 4b^2 - 16 + 18 & \text{si } k = 2 \text{ et } b > 2 \\ 8(b+k-22) \binom{b+k-4}{b-2} + 48 \binom{b+k-2}{b-1} \\ + \frac{8(2k^2 + 2bk + b - 13k + 13)}{k-2} \binom{b+k-4}{b-1} \\ + \frac{8(2b^2 + 2bk + k - 13b + 13)}{b-2} \binom{b+k-4}{k-1} \\ -4/3 (b^3 + k^3) - 12(b^2k + bk^2 + 16(b^2 + k^2)) \\ + 72bk - 266/3(b+k) + 120 & \text{si } b \geq 3 \text{ et } k \geq 3 \end{cases} \quad (3.43)$$

De cette formule, la série génératrice exprimant le nombre de polyominos d'index 1 inscrits dans un carré, notée $P_1^\square(x, y)$, est obtenue :

$$P_1^\square(x, y) = \sum_{b \geq 1} p_1(b, b) x^b y^b = \frac{-4y^2 x^2 \zeta(x, y)}{(1 - yx)^4 (1 - 4yx)^{3/2} (1 + \sqrt{1 - 4yx})^3} \quad (3.44)$$

où

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & 16x^7 y^7 - 248x^6 y^6 - 551y^5 x^5 + 183y^4 x^4 + 726x^3 y^3 - 94y^2 x^2 - 31yx - 1 \\ & + \sqrt{1 - 4yx} (84x^6 y^6 - 105x^5 y^5 + 847x^4 y^4 + 298x^3 y^3 - 130x^2 y^2 - 33xy - 1). \end{aligned}$$

Cette série sera particulièrement importante pour obtenir les polyominos d'index 1 à rotations près et à symétries près.

Chapitre 4

Polyominos d'aire minimale plus deux

Mathematical reasoning may be regarded rather schematically as the exercise of a combination of two facilities, which we may call intuition and ingenuity.

– Alan Turing [42, p. 214]

Les polyominos d'aire *minimale plus deux* inscrits dans un rectangle $k \times b$ sont d'aire $b + k + 1$. Ils ont deux cellules supplémentaires au nombre minimal et sont également appelés polyominos d'*index 2*. Ceux-ci se partitionnent en deux catégories. Ils contiennent soit deux bancs d'index 1, soit une structure d'index 2 nommée *bol*, respectivement illustrés aux figures 4.1(a) et 4.1(b).

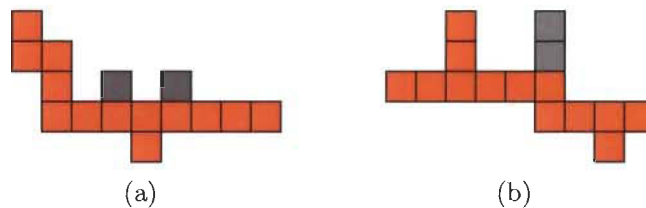


FIGURE 4.1 – Polyominos d'index 2

Ils ont été étudiés par A. Goupil, H. Cloutier et M.-E. Pellerin dans [23]. A. Goupil a proposé la classification et a obtenu la majorité des séries génératrices, H. Cloutier a validé les résultats à l'aide d'un programme informatique qu'il a développé à cet effet

et M.-E. Pellerin a obtenu les séries génératrices de la classe des grands rectangles, définie à la section 4.2.3. Suite à ce travail, M.-E. Pellerin a prouvé l'énoncé conjecturé par A. Goupil présenté à la section 4.1 et a également défini le concept de face d'un polyomino. Un article décrivant ce résultat est en préparation.

Dans un premier temps, une caractérisation géométrique des polyominos d'index r est présentée ; on démontre qu'ils sont entièrement définis par la somme du nombre de trous linéaires et de faces. À partir de ce nouveau résultat, on déduit comment classer les polyominos d'index 2 et la série génératrice pour chacune des classes est obtenue. De plus, tout au long de ce chapitre, la même convention que dans [23] est utilisée, c'est-à-dire qu'un endroit marqué par un 0 sur une figure représente une cellule vide.



4.1 Caractérisation des polyominos d'index r

Dans cette section, on développe une manière de caractériser géométriquement les polyominos d'index r , c'est-à-dire les polyominos inscrits dans un rectangle de dimension $k \times b$ et d'aire $b + k + r - 1$ aussi appelés d'aire minimale plus r . Pour ce faire, plusieurs concepts doivent être définis, dont celui de trou linéaire.

Définition 4.1. Un *trou linéaire* dans un polyomino est un ensemble de deux cellules situées sur une rangée horizontale ou verticale du polyomino qui sont séparées par des cellules vides. On note $t(P)$ le nombre de trous linéaires d'un polyomino P .

Par exemple, un banc non dégénéré possède un trou linéaire et le polyomino de la figure 4.2 en a deux (un horizontal et un vertical). De plus, puisque deux points définissent une seule droite, un trou linéaire est soit horizontal, soit vertical : il ne peut pas être les deux à la fois.

Définition 4.2. Un *cycle* dans un polyomino P est une suite de cellules $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in P$, telle que les cellules consécutives x_i et x_{i+1} sont voisines dans le polyomino

et où seuls le début et la fin coïncident. Autrement dit, il s'agit d'un parcours dans le polyomino à partir d'une cellule x qui permet de revenir à x sans rebrousser chemin. Le cycle est indépendant de la cellule x choisie.

Un polyomino peut être associé à un objet géométrique, appelé un *animal*, où chaque cellule du polyomino est représentée par un point du plan discret et chaque côté commun à deux cellules voisines est représenté par une arête entre les deux points correspondants. Un exemple est illustré à la figure 4.2.

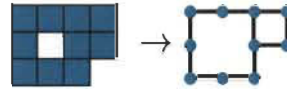


FIGURE 4.2 – Un polyomino et l'animal associé

Dans la littérature (voir par exemple [8] et [11]), il n'y a pas d'arêtes dans un animal. Toutefois, cette notion est nécessaire pour les résultats ci-dessous et n'affecte pas la nature de l'objet. En effet, la présence d'arêtes dans un animal permet d'introduire le concept d'arête interne et subséquemment de définir une face d'un polyomino.

Définition 4.3. Une *arête interne* d'un animal qui représente un cycle est une arête qui est à l'intérieur du polygone circonscrit à l'animal, c'est-à-dire qu'en imaginant un insecte se promenant sur ce polygone, dans le sens anti-horaire, l'arête interne est toujours à sa gauche. Les arêtes situées sur le polygone circonscrit ne sont pas à l'intérieur de l'animal.

Par exemple, les arêtes oranges de la figure 4.3 sont les arêtes internes aux animaux illustrés.

Définition 4.4. Une *face* d'un polyomino P est un polyomino cycle tel que son animal correspondant ne possède aucun chemin entre deux cellules du cycle composé d'arêtes internes à l'animal. On note $f(P)$ le nombre de faces du polyomino P .

Par exemple, les polyominos constitués de cellules bleues à la figure 4.3 sont des cycles, mais seuls ceux de la figure 4.3(b) sont des faces. En fait, les polyominos illustrés à la figure 4.3(a) contiennent chacun deux faces, tout comme celui de la figure 4.2.

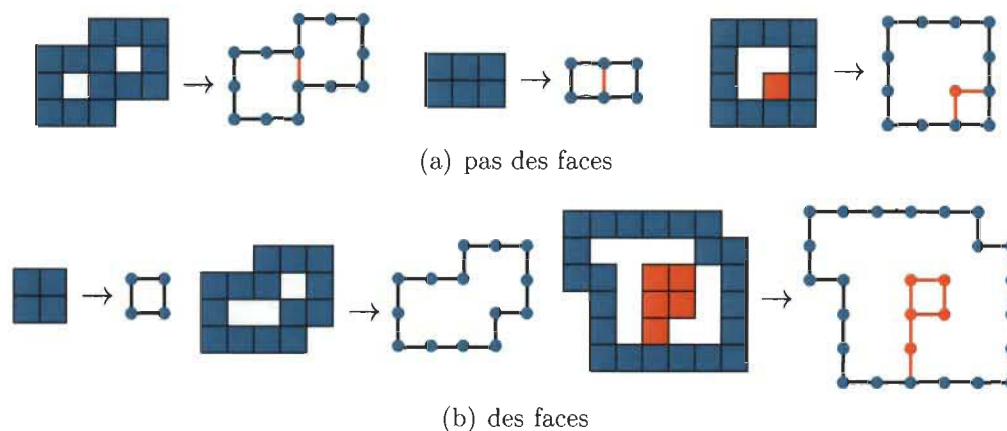


FIGURE 4.3 – Des cycles (cellules bleues)

Le lemme qui suit est fondamental pour démontrer que les polyominos d'index r sont caractérisés par leur nombre de trous linéaires et de faces.

Lemme 4.5. Soit P un polyomino tel que $t(P) + f(P) = m$, où $t(P)$ est le nombre de trous linéaires de P et $f(P)$ est le nombre de faces. Soit P' , un polyomino construit par l'ajout d'une cellule à P et tel que P et P' ont le même rectangle circonscrit, alors

$$t(P') + f(P') = m + 1.$$

Démonstration. On doit considérer toutes les façons d'ajouter une cellule x à P . Pour ce faire, le degré de la cellule ajoutée est considéré. Avant cet ajout, les cellules adjacentes à x sont contenues dans un polyomino et doivent donc être connectées d'une certaine manière. Les figures 4.4 à 4.7 illustrent toutes les situations possibles. Sur ces figures, la cellule orange est la cellule ajoutée. La connection entre les cellules adjacentes (en bleu) à la cellule ajoutée est représentée par des segments linéaires.

On constate que, dans chacun des cas, il y a un gain de un dans la somme du nombre de trous linéaires et de faces par rapport au polyomino initial. Plus précisément, lorsque la cellule ajoutée est de

- degré 1 : il y a un trou linéaire de plus ;
- degré 2 : il y a une face de plus ;
- degré 3 : il y a deux faces de plus, mais un trou linéaire de moins ;
- degré 4 : il y a trois faces de plus, mais deux trous linéaires de moins.

Ces observations permettent de conclure que l'énoncé du lemme 4.5 est vérifié. De plus, on constate le lien suivant entre le degré de la cellule ajoutée d_x , le nombre de trous linéaires de plus t_x et le nombre de faces de plus f_x :

$$d_x = t_x + 2f_x.$$

□



FIGURE 4.4 – Ajout d'une cellule de degré 1

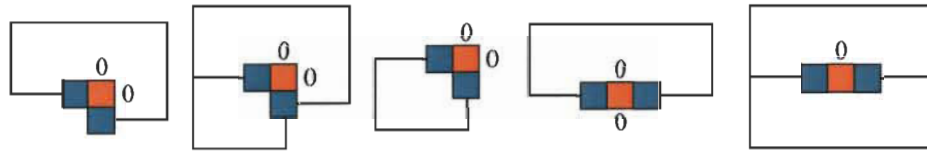


FIGURE 4.5 – Ajout d'une cellule de degré 2

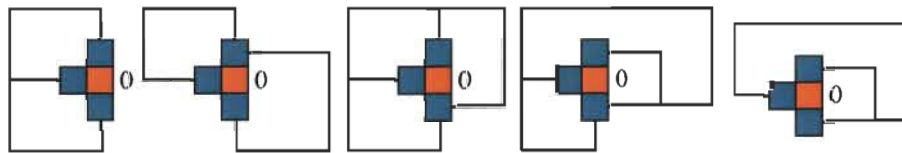


FIGURE 4.6 – Ajout d'une cellule de degré 3

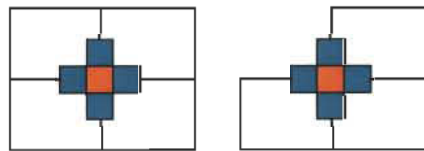


FIGURE 4.7 – Ajout d'une cellule de degré 4

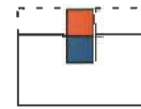


FIGURE 4.8 – Ajout d'une cellule à l'extérieur du rectangle circonscrit

Remarque Le lemme précédent traite seulement du cas où la cellule est ajoutée à l'intérieur du rectangle circonscrit. Lorsque ce n'est pas le cas, le rectangle circonscrit

change comme en témoigne la figure 4.8; l'ajout n'a aucun impact sur le nombre de trous linéaires ou le nombre de faces et l'index demeure inchangé par rapport au nouveau rectangle. En effet, on suppose que le polyomino de départ est inscrit dans un $k \times b$ et est d'index r , c'est-à-dire d'aire $b + k + r - 1$. Alors, après l'ajout de la cellule à l'extérieur du rectangle, le polyomino est maintenant inscrit dans un $(k + 1) \times b$ ou un $k \times (b + 1)$ et est d'aire $b + k + r$. Ainsi, il est bien d'index r , car l'aire est de $b + (k + 1) + r - 1$ ou de $(b + 1) + k + r - 1$.

Théorème 4.6. Soit $i(P)$, l'index du polyomino P , alors la somme du nombre de trous linéaires et de faces égale à $i(P)$:

$$i(P) = t(P) + f(P). \quad (4.1)$$

Démonstration. La preuve se fait par induction.

- i) Soit $i(P) = 0$. Un polyomino d'index 0 ne possède aucun trou linéaire, ni de face de par leur forme géométrique (voir chapitre 3). Ainsi, l'équation (4.1) est vérifiée lorsque $i(P) = 0$.
- ii) On suppose que l'identité (4.1) est vraie pour tout index inférieur ou égal à k . L'objectif est de montrer qu'elle est aussi vraie pour l'index $k + 1$. Pour ce faire, la démarche ci-dessous est inspirée de celle présentée dans [23] concernant le cas particulier des polyominos d'index 1.

D'abord, par définition, ajouter une cellule à l'intérieur du rectangle circonscrit d'un polyomino d'index k donne un polyomino d'index $k + 1$. Du lemme 4.5 et de l'hypothèse d'induction, la somme du nombre de trous linéaires et de faces du nouveau polyomino est $k + 1$. Par contre, les polyominos d'index $k + 1$ ne sont pas tous construits par l'ajout d'une cellule à un polyomino d'index k ayant le même rectangle circonscrit.

Soit P un polyomino d'index $k + 1$. Soit x une cellule de P , alors cette cellule est minimale dans son rectangle circonscrit : un rectangle 1×1 . Soit P' , l'ensemble constitué de x et d'une cellule voisine appartenant à P .

En ajoutant à P' une cellule voisine appartenant à P et en vérifiant à chaque fois l'index, deux situations peuvent intervenir : le rectangle circonscrit est modifié et l'index est inchangé (voir remarque ci-haut) ou le rectangle circonscrit est le même et l'index est augmenté d'une unité. Avec ces ajouts successifs, P' est éventuellement d'index k et, par l'hypothèse d'induction, la somme du nombre de trous linéaires et de faces est k .

En poursuivant l'ajout des cellules une à la fois, une cellule augmentera éventuellement l'index de P' à $k + 1$. Du lemme 4.5, $f(P') + t(P') = k + 1$. En continuant d'ajouter les cellules de P à P' , l'index ne change pas, car P est d'index $k + 1$; les cellules augmentent alors la taille du rectangle circonscrit de P' et ne modifient donc pas le nombre de trous linéaires et de faces. On conclut que $t(P) + f(P) = k + 1$.

Ainsi, par le principe d'induction, $i(P) = t(P) + f(P)$, $\forall P$ et $\forall i(P)$. □

4.2 Classification des polyominos d'index 2

Pour construire les polyominos d'index 2, on s'appuie sur la propriété d'additivité de l'index sous le produit diagonal, abordée à la section 3.1. Tel que mentionné dans l'introduction de ce chapitre, et qu'on peut déduire à partir du théorème 4.6, il y a deux cas à considérer. D'une part, il faut regarder les différentes façons d'agencer deux bancs d'index 1 et de compléter avec des polyominos d'index 0. Ce premier cas se subdivise en quatre sous-cas : les Banc $\times$ Banc, les premiers $t \times 2$ ou $2 \times t$, les grands rectangles et les quatre-feuilles. D'autre part, il y a les bols, qui ne sont pas construits avec deux bancs et qui sont aussi complétés par des polyominos d'index 0. Dans cette section, ces cas sont définis et la preuve qu'un polyomino d'aire minimale plus deux appartient obligatoirement à une de ces formes est établie.

4.2.1 Banc×Banc

La classe des $Banc \times Banc$ est composée de deux bancs d'index 1 partageant au plus une cellule. Ils sont construits à l'aide du produit diagonal selon la structure suivante :

$$\text{Banc coin} \cdot \text{escalier} \cdot \text{Banc coin}$$

tel qu'illustré à la figure 4.9. Les bancs-coins sont des polyominos d'aire minimale plus un et ont été étudiés à la section 3.3.4.

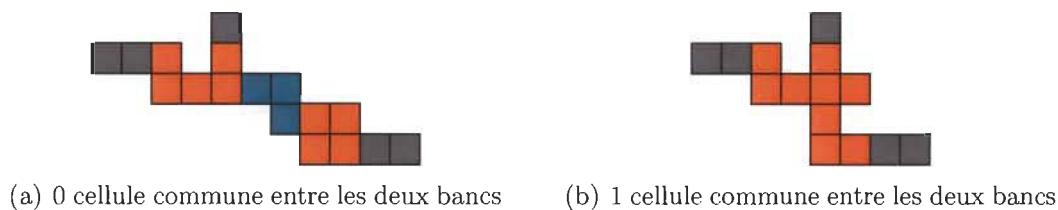


FIGURE 4.9 – Banc×Banc

4.2.2 Premiers inscrits dans un $t \times 2$ ou $2 \times t$

Les *premiers inscrits dans un $t \times 2$* , ou simplement premiers $t \times 2$, sont formés de deux bancs horizontaux placés côte à côte et partageant deux cellules. Cet ensemble est partitionné en deux sous-ensembles nommés *bancs d'index 2* et *en forme de S* et sont illustrés à la figure 4.10. Dans le premier cas, les deux bancs ont leurs pattes dans le même sens tandis que pour ceux en forme de S , elles sont dans des sens opposés. Les *premiers inscrits dans un $2 \times t$* sont les analogues des premiers $t \times 2$ et ils sont formés de deux bancs verticaux.

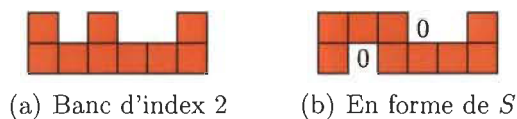


FIGURE 4.10 – Premiers $t \times 2$

4.2.3 Grands rectangles

Les *grands rectangles* sont composés de deux bancs placés perpendiculairement l'un par rapport à l'autre tel que deux cellules de la patte d'un banc appartiennent à la base de l'autre banc. Ce type de polyomino d'index 2 se divise en deux classes, nommés de première espèce et de seconde espèce. Des représentants de celles-ci sont illustrés à la figure 4.11. En particulier, on spécifiera qu'un polyomino de seconde espèce est *horizontal* lorsque le banc horizontal prend toute la largeur du rectangle qui circonscrit la figure, comme c'est le cas à la figure 4.11(b). Il y a également ceux dits verticaux, issus d'une rotation de 90° des horizontaux, et dont le banc en position verticale occupe entièrement la hauteur du rectangle circonscrit.

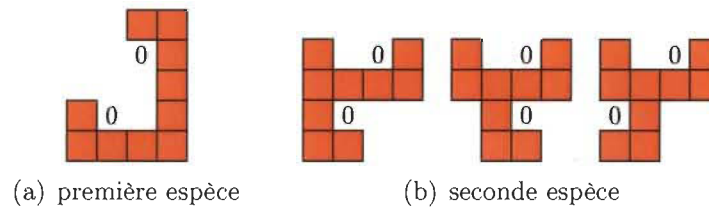


FIGURE 4.11 – Grands rectangles

4.2.4 Premiers à quatre feuilles

La dernière classe d'index 2 construite avec deux bancs d'index 1 sont les *premiers à quatre feuilles* ou simplement les quatre-feuilles : les deux bancs sont disposés dos à dos, c'est-à-dire que leurs pattes ont des directions opposées, de manière à ce que la base d'un banc partage au moins deux cellules avec la base de l'autre banc.

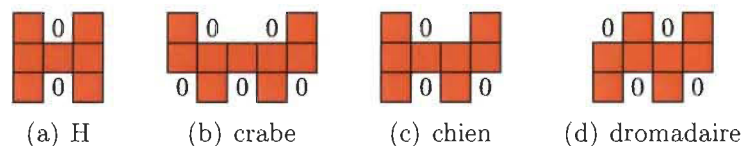


FIGURE 4.12 – Premiers à quatre feuilles

Cette catégorie tient son nom du fait qu'une feuille d'un polyomino est une cellule qui est reliée à une seule autre cellule : les polyominos appartenant à cette catégorie

en possèdent quatre. La figure 4.12 présente les sous-cas des premiers à quatre feuilles horizontaux, dont le nom est inspiré de leur forme. Les versions verticales de ces figures, obtenues par une rotation de 90° , font également partie de la classe des premiers à quatre feuilles.

4.2.5 Bols

La catégorie des *bols* est la seule qui, en général, n'est pas composée de deux bancs d'index 1. On distingue trois types de bols : les bols parfaits, les bols asymétriques et les bols symétriques. Ils sont formés d'un banc d'index 1 auquel des cellules sont ajoutées stratégiquement pour former un polyomino d'index 2, comme on peut le constater sur la figure 4.13. On peut également voir les bols comme ayant deux trous linéaires parallèles directement l'un au-dessus de l'autre ou, dans le cas des bols asymétriques et symétriques, ayant parfois un banc 2×2 et un trou linéaire. Ainsi, dans ce deuxième cas, il peut y avoir deux bancs d'index 1 par la combinaison d'un carré 2×2 avec un autre banc. Cependant, il s'agit d'un cas bien particulier et, dans la majorité des cas, un bol ne contiendra pas deux bancs d'index 1.

Les bols illustrés à la figure 4.13 sont les *bols horizontaux*. De plus, ils n'ont pas été considérés dans les autres classes. Les formes obtenues par une rotation de 90° des polyominos illustrés à cette figure appartiennent aussi à la classe des bols et sont les *bols verticaux*.

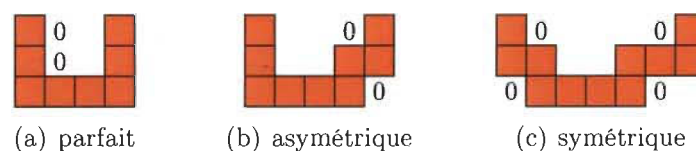


FIGURE 4.13 – Bols

4.2.6 Minimaux plus deux généraux

Les cinq classes décrites précédemment sont mutuellement disjointes par définition. La proposition 4.8 indique que ces classes sont suffisantes pour former l'ensemble des polyominos d'aire minimale plus deux.

Corollaire 4.7. Un polyomino est d'index 2 si et seulement si la somme du nombre de trous linéaires et de bancs 2×2 est égale à 2.

Démonstration. Directement du théorème 4.6. □

Proposition 4.8. L'ensemble des polyominos d'index 2 correspond à la réunion des Banc $\times$ Banc et des polyominos d'index 2 contenant une des structures suivantes : un premier $t \times 2$ ou $2 \times t$, un grand rectangle, un quatre-feuilles et un bol.

Démonstration. Du corollaire 4.7, la classification des polyominos d'index 2 pour les besoins de la preuve est faite en fonction du nombre de trous linéaires

- Ceux avec zéro trou linéaire ne contiennent aucun banc non dégénéré. Ils appartiennent soit à la classe des Banc $\times$ Banc (figure 4.14(a)), lorsque les deux bancs sont des 2×2 , soit à la classe des premiers $t \times 2$ ou $2 \times t$ (figure 4.14(b)), lorsque les deux bancs côte à côte sont des 2×2 , c'est-à-dire lorsque $t = 3$.
- Ceux avec un seul trou linéaire contiennent exactement un banc 2×2 . Ils sont dans une des trois classes suivantes :
 - Banc $\times$ Banc où un des deux bancs dans le produit diagonal est un 2×2 (figure 4.15(a)) ;
 - premier $t \times 2$ ou $2 \times t$ où un des bancs côte à côte est un 2×2 (figure 4.15(b)) ;
 - bols asymétrique ou symétrique où la base du bol est un 2×2 (figure 4.15(c)).
- Ceux avec deux trous linéaires se partitionnent en deux cas selon la position des deux trous. Si ces trous sont directement l'un au-dessus de l'autre, il s'agit de la classe des bols (figure 4.16(c)). Autrement, les deux trous linéaires sont créés par la présence de deux bancs non dégénérés. Ce dernier cas appartient à la classe des Banc $\times$ Banc (figure 4.16(a)), des premiers $t \times 2$ ou $2 \times t$ (figure 4.16(b)), des grands rectangles (figure 4.16(d)) ou des quatre-feuilles (figure 4.16(e)).

Ainsi, toutes les façons d'avoir au plus deux trous linéaires ont été considérées, ce qui démontre la proposition 4.8. $\square$

Les polyominos d'index 2 inscrits dans tous les rectangles inclus dans un carré 10×10 ont été générés informatiquement par H. Cloutier, ce qui a permis de vérifier que chacun d'eux appartient à la classification établie précédemment.

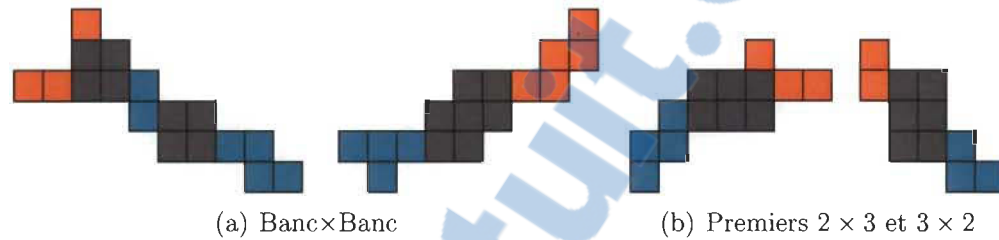


FIGURE 4.14 – Polyominos d'index 2 ayant zéro trou linéaire

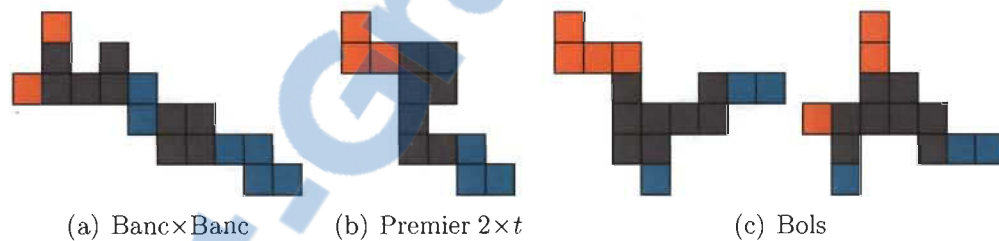


FIGURE 4.15 – Polyominos d'index 2 ayant un trou linéaire

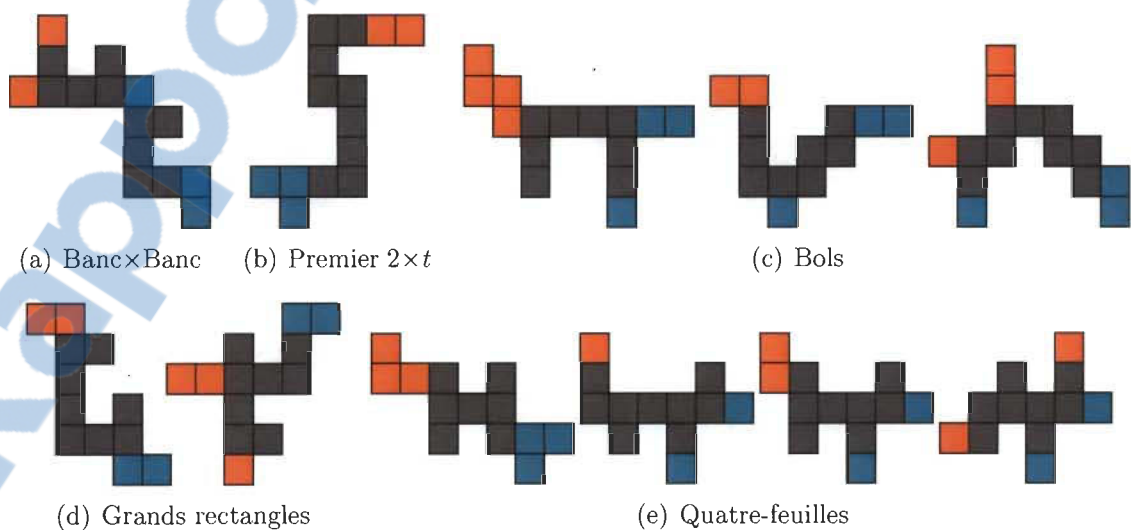


FIGURE 4.16 – Polyominos d'index 2 ayant deux trous linéaires

4.3 Séries génératrices des polyominos d'index 2

Comme au chapitre 3, les séries génératrices trouvées dans ce chapitre dépendent de la largeur k et de la hauteur b du rectangle circonscrit au polyomino :

$$G(x, y) = \sum_{b, k \geq 0} g(k, b) x^k y^b.$$

4.3.1 Banc×Banc

Par définition des Banc×Banc (voir section 4.2.1), ceux-ci sont construits par le produit diagonal

$$\text{Banc coin} \cdot \text{escalier} \cdot \text{Banc coin} \quad (4.2)$$

suivant une des deux diagonales du rectangle, dont un exemple est illustré à la figure 4.17. Puisqu'aucun polyomino de cette forme n'appartient à deux diagonales en même temps, on obtient directement la proposition 4.9. De plus, au tableau 4.1, on présente le nombre de polyominos Banc×Banc en fonction des dimensions du rectangle circonscrit.

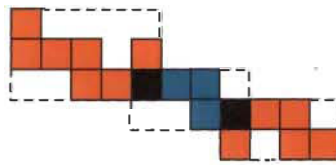


FIGURE 4.17 – Construction d'un Banc×Banc le long d'une diagonale

Proposition 4.9. Soit $BXB(x, y)$, la série génératrice des polyominos Banc×Banc, alors

$$BXB(x, y) = \frac{2BC(x, y)^2 ESC(x, y)}{x^2 y^2} \quad (4.3)$$

où $BC(x, y)$ est la série génératrice des bancs-coins, donnée par l'équation (3.41), et $ESC(x, y)$ est celle des escaliers donnée par l'équation (3.1).

$k \backslash b$	3	4	5	6	7	8	9
3	2	18	82	258	642	1362	2578
4	18	164	762	2476	6434	14356	28682
5	82	762	3596	11940	31976	74032	154166
6	258	2476	11940	40572	111824	267776	578826
7	642	6434	31976	111824	31830	790092	1774244
8	1362	14356	74032	267776	790092	2036312	4755336
9	2578	28682	154166	578826	1774244	4755336	11554784

TABLEAU 4.1 – Nombre de Banc×Banc inscrits dans un $k \times b$

4.3.2 Premiers inscrits dans un $t \times 2$ ou $2 \times t$

Les polyominos d'index 2 contenant un premier inscrit dans un $t \times 2$ en forme de S adoptent la même structure que ceux qui possèdent un banc d'index 2, tel que décrit dans les paragraphes suivants.

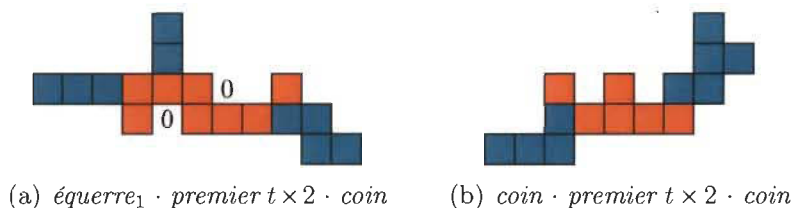


FIGURE 4.18 – Polyominos d'index 2 contenant un premier $t \times 2$

Puisque les premiers $t \times 2$ sont des polyominos d'index 2 dans leur rectangle circonscrit, on doit compléter par des polyominos d'index 0 à l'aide du produit diagonal



en ajoutant des coins d'index 0 non dégénérés ou des équerres à chacune des extrémités du $t \times 2$. Plus généralement, les polyominos d'index 2 contenant un premier $t \times 2$ ont la structure

$$(\text{Coin d'index 0 non dégénéré ou équerre}_1) \cdot \text{premier } t \times 2 \\ \cdot (\text{Coin d'index 0 non dégénéré ou équerre}_2).$$

Cette construction peut se faire sur l'une des deux diagonales en attachant les composantes d'index 0 sur les deux paires de coins diagonalement opposés du premier $t \times 2$, comme illustré à la figure 4.18. Par conséquent, pour les compter, on doit utiliser la formule

$$2 (\text{Coin d'index 0 non dégénéré ou équerre}_1) \cdot \text{premier } t \times 2 \\ \cdot (\text{Coin d'index 0 non dégénéré ou équerre}_2) \quad (4.4) \\ - \text{équerre}_1 \cdot \text{premier } t \times 2 \cdot \text{équerre}_2,$$

car il faut exclure les polyominos d'index 2 contenant un premier $t \times 2$ appartenant aux deux diagonales, soit ceux avec des équerres à chaque extrémité (voir la figure 4.19).

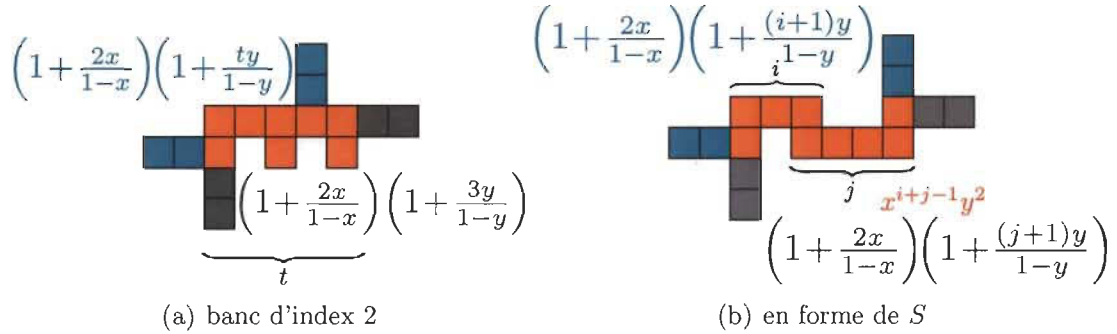


FIGURE 4.19 – Ajout d'équerres sur un premier inscrit dans un $t \times 2$

Proposition 4.10. La série génératrice des bancs d'index 2 horizontaux est

$$B_2(x, y, t) = 2(t - 2)x^t y^2, \quad t \geq 4 \quad (4.5)$$

et celle des bancs d'index 2 horizontaux quelconques est

$$B_2(x, y) = \sum_{t \geq 4} B_2(x, y, t) = \frac{2x^4 y^2 (2 - x)}{(1 - x)^2}. \quad (4.6)$$

Démonstration. Pour former un banc d'index 2 de largeur $t \geq 4$, on prend d'abord un banc d'index 1 horizontal de largeur t et on y insère une cellule entre les deux pattes du banc à l'une des $t - 2$ places possibles. Puisqu'il y a deux bancs horizontaux de même largeur pour $t \geq 4$, il y a $2(t - 2)$ bancs d'index 2 de largeur t , d'où (4.5). En faisant la somme pour tous les $t \geq 4$, on obtient (4.6).

À noter que le cas $t = 3$ est exclu de (4.6). En effet, le facteur 2 ne s'applique pas dans ce cas, puisqu'il n'y a seulement qu'un polyomino de cette largeur de série x^3y^2 . $\square$

Proposition 4.11. Soit $T_2(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un banc d'index 2 horizontal de largeur supérieure ou égale à 4, alors

$$\begin{aligned} T_2(x, y) = & 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(\frac{2x^4y^2(2-x)}{(1-x)^2} + \frac{2x^4y^3(3x^2-9x+8)}{(1-x)^3(1-y)} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2x^3y(2-x)\tilde{C}_0(x, y)}{(1-x)^2} \right] \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{3y}{1-y} \right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & - \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)^2 \left(\frac{2x^4y^2(2-x)}{(1-x)^2} + \frac{2x^4y^3(3x^2-9x+8)}{(1-x)^3(1-y)} \right) \left(1 + \frac{3y}{1-y} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est donnée par l'équation (3.12).

Démonstration. En appliquant la structure multiplicative (4.4), on a

$$\begin{aligned} T_2(x, y, t) = & 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{ty}{1-y} \right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & \cdot B_2(x, y, t) \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{3y}{1-y} \right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & - \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{ty}{1-y} \right) B_2(x, y, t) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{3y}{1-y} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

où l'ajout d'équerres sur un banc d'index 2 est illustré à la figure 4.19(a) et $B_2(x, y, t)$ correspond à l'équation (4.5).

En faisant la somme pour $t \geq 4$, on a

$$\begin{aligned}
T_2(x, y) &= \sum_{t \geq 4} T_2(x, y, t) \\
&= 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(\sum_{t \geq 4} B_2(x, y, t) + \frac{y}{1-y} \sum_{t \geq 4} t B_2(x, y, t) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \sum_{t \geq 4} B_2(x, y, t) \right] \cdot \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{3y}{1-y} \right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \quad (4.9) \\
&\quad - \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)^2 \left(1 + \frac{3y}{1-y} \right) \left(\sum_{t \geq 4} B_2(x, y, t) + \frac{y}{1-y} \sum_{t \geq 4} t B_2(x, y, t) \right).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{t \geq 4} B_2(x, y, t) = \frac{2x^4 y^2 (2-x)}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{t \geq 4} t B_2(x, y, t) = \frac{2x^4 y^2 (3x^2 - 9x + 8)}{(1-x)^3}, \quad (4.10)$$

alors en substituant (4.10) dans (4.9), on obtient (4.7). $\square$

Proposition 4.12. Soit $T_S(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un premier en forme de S horizontal, alors

$$\begin{aligned}
T_S(x, y) &= \frac{4y^2}{x} \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(\frac{x^3}{1-x} + \frac{x^3 y (4-3x)}{(1-x)^2 (1-y)} \right) + \frac{x^2 \tilde{C}_0(x, y)}{y(1-x)} \right]^2 \\
&\quad - \frac{2y^2}{x} \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(\frac{x^3}{1-x} + \frac{x^3 y (4-3x)}{(1-x)^2 (1-y)} \right) \right]^2 \quad (4.11)
\end{aligned}$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est donné par (3.12).

Démonstration. Soit i et j des entiers positifs tel que $i + j - 1 = t$. Il existe deux premiers $t \times 2$ en forme de S formés d'un banc $i \times 2$ et d'un autre de dimensions $j \times 2$. En appliquant la structure multiplicative (4.4) et en se basant sur l'ajout d'équerres illustré à la figure 4.19(b), on a

$$T_S(x, y, i, j) = 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{(i+1)y}{1-y} \right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \cdot 2x^{i+j-1} y^2$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(j+1)y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(i+1)y}{1-y}\right) \cdot 2x^{i+j-1}y^2 \cdot \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(j+1)y}{1-y}\right) \end{aligned}$$

ou de manière équivalente,

$$\begin{aligned} T_S(x, y, i, j) &= 2x^i \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(i+1)y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & \cdot \frac{2y^2}{x} \cdot x^j \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(j+1)y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & - x^i \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(i+1)y}{1-y}\right) \cdot \frac{2y^2}{x} \cdot x^j \cdot \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(j+1)y}{1-y}\right). \end{aligned}$$

En faisant la somme sur tous les $i \geq 3$ et les $j \geq 3$, on obtient la série génératrice $T_S(x, y)$, car on comptabilise alors tous les premiers $t \times 2$ en forme de S.

$$\begin{aligned} T_S(x, y) &= \sum_{i, j \geq 3} T_S(x, y, i, j) \\ &= 2 \sum_{i \geq 3} x^i \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(i+1)y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & \cdot \frac{2y^2}{x} \cdot \sum_{j \geq 3} x^j \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(j+1)y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & - \sum_{i \geq 3} x^i \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(i+1)y}{1-y}\right) \cdot \frac{2y^2}{x} \cdot \sum_{j \geq 3} x^j \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(j+1)y}{1-y}\right). \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\begin{aligned} T_S(x, y) &= \frac{4y^2}{x} \left[\sum_{i \geq 3} x^i \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(i+1)y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \right]^2 \\ & - \frac{2y^2}{x} \left[\sum_{i \geq 3} x^i \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(i+1)y}{1-y}\right) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 3} x^i \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{(i+1)y}{1-y}\right) &= \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(\sum_{i \geq 3} x^i + \frac{y}{1-y} \sum_{i \geq 3} (i+1)x^i\right) \\ &= \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(\frac{x^3}{1-x} + \frac{y}{1-y} \frac{x^3(4-3x)}{(1-x)^2}\right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ainsi, en substituant (4.13) dans (4.12), on obtient (4.11). $\square$

Proposition 4.13. Soit $T_{3 \times 2}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un premier 3×2 , alors

$$\begin{aligned} T_{3 \times 2}(x, y) &= 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{3y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right]^2 \cdot x^3 y^2 \\ &\quad - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{3y}{1-y}\right)^2 \cdot x^3 y^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est donné par (3.12).

Démonstration. Les polyominos d'index 2 contenant un premier 3×2 ont la même structure multiplicative qu'un banc d'index 2, laquelle est donnée à l'équation (4.4). Ainsi, en remplaçant t par 3 et $B_2(x, y, t)$ par $x^3 y^2$ dans (4.8), on obtient $T_{3 \times 2}(x, y)$. $\square$

Proposition 4.14. Soit $T(x, y)$, la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un premier $t \times 2$ ou $2 \times t$, alors

$$T(x, y) = T_2(x, y) + T_2(y, x) + T_S(x, y) + T_S(y, x) + T_{3 \times 2}(x, y) + T_{3 \times 2}(y, x) \quad (4.15)$$

où $T_2(x, y)$, $T_S(x, y)$ et $T_{3 \times 2}(x, y)$ sont les séries génératrices présentées aux équations (4.7), (4.11) et (4.14).

Démonstration. Les polyominos d'index 2 contenant un premier $t \times 2$, $t \geq 3$, sont partitionnés en trois sous-ensembles. Un polyomino de cette catégorie contient soit un banc d'index 2 horizontal, soit un premier $t \times 2$ en forme de S, soit un premier 3×2 . Ainsi, la somme des séries génératrices de ces trois sous-ensembles donne la série des

polyominos d'index 2 contenant un premier inscrit dans un $t \times 2$, $t \geq 3$. Pour avoir les polyominos d'index 2 contenant un premier $2 \times t$, la version verticale des $t \times 2$, il suffit d'interchanger x et y dans les séries génératrices des trois sous-catégories de premier $t \times 2$. $\square$

À partir du développement en séries de MacLaurin de la série $T(x, y)$, soit (4.15), on construit le tableau 4.2 du nombre de polyominos d'index 2 inscrits contenant un premier $t \times 2$ ou $2 \times t$.

$k \backslash b$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1	8	32	88	192	360	608
3	1	12	75	312	957	2346	4911	9180
4	8	75	352	1278	3928	10144	22688	45410
5	32	312	1278	3784	10458	26400	60230	125352
6	88	957	3928	10458	25968	61968	139976	296910
7	192	2346	10144	26400	61968	140832	311144	662352
8	360	4911	22688	60230	139976	311144	676192	1436282
9	608	9180	45410	125352	296910	662352	1436282	3053448

TABLEAU 4.2 – Nombre de polyominos d'index 2 inscrits dans un $k \times b$ contenant un premier $t \times 2$ ou $2 \times t$

4.3.3 Grands rectangles

Il y a deux types de grands rectangles, ceux de première espèce et ceux de seconde espèce. La classe des grands rectangles est la seule dont les structures d'index 2 ont une hauteur et une largeur variables. De plus, une autre particularité intéressante de ces structures est qu'elles occupent au plus trois des quatre coins de leur rectangle circonscrit. Par conséquent, ils n'ont pas la même structure sur les deux diagonales.

Proposition 4.15. La série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un grand rectangle de première espèce est

$$GR_1(x, y) = 4 \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left[A(y, x) A(x, y) + \frac{x^2 y^2 \tilde{C}_0(x, y)}{(1-x)(1-y)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \left[A(y, x) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) + \frac{y^2 \tilde{C}_0(x, y)}{x(1-y)} \right] \cdot \left[A(x, y) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) + \frac{x^2 \tilde{C}_0(x, y)}{y(1-x)} \right] \\
& - 4 \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) A(x, y) A(y, x)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est donné par (3.12) et

$$A(x, y) = \frac{x^3}{1-x} + \frac{x^3 y (3-2x)}{(1-x)^2 (1-y)}.$$

Démonstration. Puisqu'un des coins du rectangle circonscrit n'est pas occupé pour un grand rectangle de première espèce, la construction du polyomino d'index 2 contenant ce type de grand rectangle sur la diagonale¹ est différente de celle sur l'anti-diagonale², comme on peut le constater à la figure 4.20.

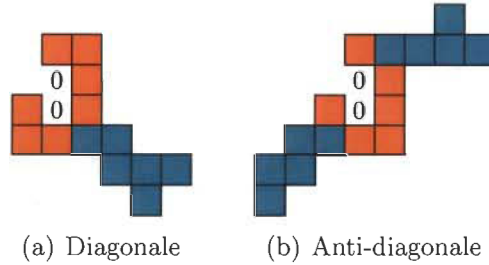


FIGURE 4.20 – Ajout de coins d'index 0 à un grand rectangle de première espèce

Sur la diagonale, un polyomino d'index 2 contenant un grand rectangle de première espèce est construit à l'aide du produit diagonal avec la structure

$$GR_1^d = \text{équerre}_1 \cdot \text{grand rectangle}_1 \cdot (\text{équerre}_2 \text{ ou coin minimal non dégénéré})$$

tandis que sur l'anti-diagonale, on a plutôt

$$GR_1^a = (\text{équerre}_1 \text{ ou coin minimal}) \cdot \text{grand rectangle}_1 \cdot (\text{équerre}_2 \text{ ou coin minimal})$$

où le coin minimal est non dégénéré. Ainsi, en additionnant GR_1^d avec GR_1^a et en soustrayant les polyominos appartenant aux deux diagonales, on obtient l'ensemble

-
1. diagonale : diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit du rectangle
 2. anti-diagonale : diagonale allant du coin supérieur droit au coin inférieur gauche du rectangle

GR_1 des polyominos d'index 2 contenant un grand rectangle de première espèce :

$$GR_1 = GR_1^d + GR_1^a - \text{équerre}_1 \cdot \text{grand rectangle}_1 \cdot \text{équerre}_2. \quad (4.17)$$

L'ajout des équerres sur ce type de grand rectangle est illustré à la figure 4.21 en fonction des deux diagonales. En traduisant (4.17) en séries génératrices, on a

$$\begin{aligned} GR_1(x, y, s, t) = & \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \cdot 4x^t y^s \cdot \left[\left(1 + \frac{sx}{1-x}\right) \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & + \left[\left(1 + \frac{sx}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \cdot 4x^t y^s \\ & \cdot \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \cdot 4x^t y^s \left(1 + \frac{sx}{1-x}\right) \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right), \end{aligned}$$

où $4x^t y^s$ est la série génératrice des grands rectangles de première espèce, puisqu'il y a quatre façons de laisser un coin vide dans un rectangle $t \times s$ afin de construire ces grands rectangles.

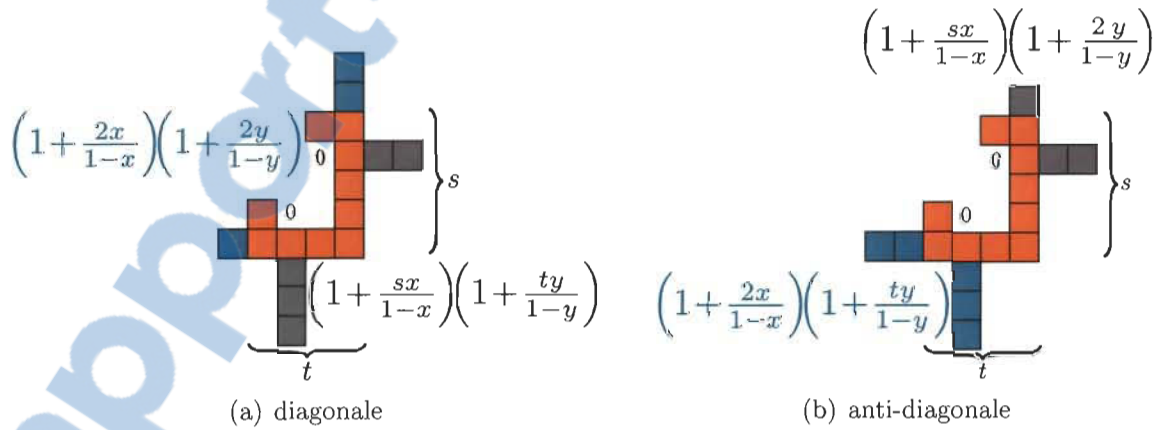


FIGURE 4.21 – Ajout d'équerres sur un grand rectangle de première espèce

Pour avoir la série $GR_1(x, y)$, peu importe la dimension du grand rectangle, on somme sur tous les $t \geq 3$ et $s \geq 3$:

$$GR_1(x, y) = \sum_{t \geq 3} \sum_{s \geq 3} GR_1(x, y, s, t). \quad (4.18)$$

Les sommations suivantes ont pour forme rationnelle

$$\sum_{t \geq 3} x^t = \frac{x^3}{1-x} \quad \text{et} \quad \sum_{t \geq 3} tx^t = \frac{x^3(3-2x)}{(1-x)^2}.$$

Alors,

$$A(x, y) = \sum_{t \geq 3} x^t \left(1 + \frac{ty}{1-y} \right) = \frac{x^3}{1-x} + \frac{x^3 y (3-2x)}{(1-x)^2 (1-y)}.$$

Ainsi, par les propriétés des sommes, l'équation (4.18) devient :

$$\begin{aligned} GR_1(x, y) &= 4 \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \\ &\quad \cdot \left[\sum_{s \geq 3} y^s \left(1 + \frac{sx}{1-x} \right) \sum_{t \geq 3} x^t \left(1 + \frac{ty}{1-y} \right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \sum_{t, s \geq 3} x^t y^s \right] \\ &\quad + 4 \sum_{s \geq 3} \left[\left(1 + \frac{sx}{1-x} \right) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) y^s + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} y^s \right] \\ &\quad \cdot \sum_{t \geq 3} \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{ty}{1-y} \right) x^t + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} x^t \right] \\ &\quad - 4 \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \sum_{t \geq 3} x^t \left(1 + \frac{ty}{1-y} \right) \sum_{s \geq 3} y^s \left(1 + \frac{sx}{1-x} \right) \\ &= 4 \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left[A(y, x) A(x, y) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \frac{x^3 y^3}{(1-x)(1-y)} \right] \\ &\quad + 4 \left[A(y, x) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \frac{y^3}{1-y} \right] \\ &\quad \cdot \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) A(x, y) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \frac{x^3}{1-x} \right] \\ &\quad - 4 \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) A(x, y) A(y, x). \end{aligned}$$

Après quelques simplifications et réorganisation des termes, on obtient (4.16). $\square$

Les grands rectangles de seconde espèce se divisent en trois catégories, lesquelles sont illustrées à la figure 4.22.

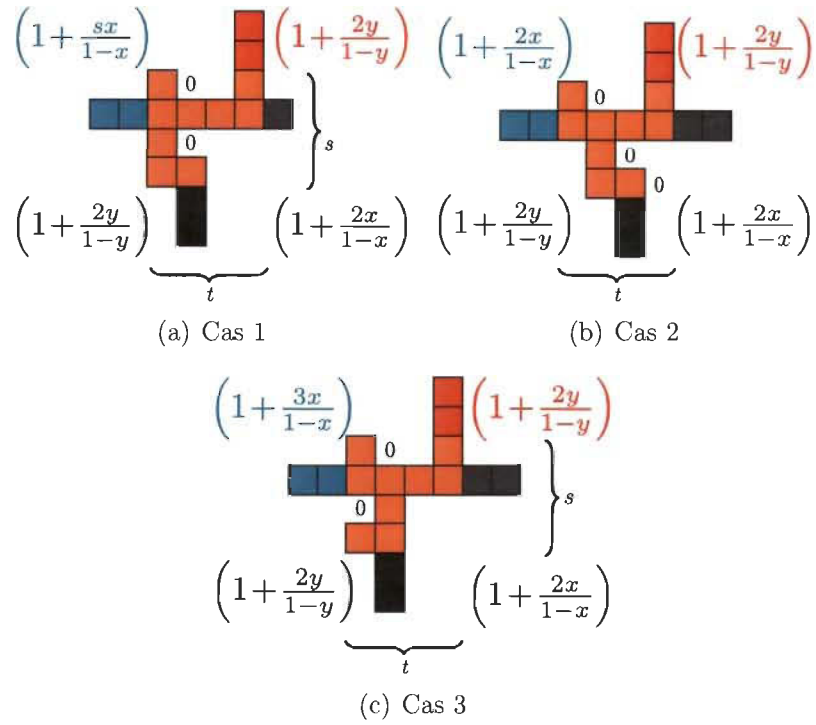


FIGURE 4.22 – Ajout d'équerres sur un grand rectangle de seconde espèce

Proposition 4.16. Soit $B_{gr}^i(x, y, t, s)$ la série génératrice d'un grand rectangle de seconde espèce horizontal de cas i , alors

$$B_{gr}^1(x, y, t, s) = 4x^t y^s,$$

$$B_{gr}^2(x, y, t, s) = 4(t-3)x^t y^s,$$

$$B_{gr}^3(x, y, t, s) = 4x^t y^s.$$

Démonstration. Pour construire un grand rectangle de seconde espèce horizontal, on peut d'abord fixer un banc $t \times 2$. Il y a deux façons de le faire, soit il a les pattes vers le haut (voir figure 4.22), soit vers le bas. À la base de ce banc, on en ajoute un autre, mais en position verticale de dimension $2 \times (s-1)$, de sorte que le grand rectangle soit inscrit dans un $t \times s$.

- En ce qui concerne les cas 1 et 3, il y a deux façons de faire l'ajout d'un banc vertical : à la gauche (voir figures 4.22(a) et 4.22(c)) ou à la droite du banc $t \times 2$. Ainsi, par le principe du produit, il y a $2 \times 2 = 4$ grands rectangles de seconde espèce de cas 1, de même que pour le cas 3.

- Pour le deuxième cas, le banc vertical peut être placé à $t - 3$ endroits le long du banc et il peut avoir les pattes vers la gauche ou vers la droite. Il y a donc $2(t - 3)$ façons d'attacher le banc vertical au banc horizontal. Ainsi, par le principe du produit, il y a $2 \times 2(t - 3) = 4(t - 3)$ grands rectangles de seconde espèce inscrits dans un $t \times s$ de cas 2.

□

Proposition 4.17. Soit $G_2^i(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un grand rectangle de seconde espèce horizontal du cas $i \in \{1, 2, 3\}$, alors

$$\begin{aligned} GR_2^1(x, y) = & \left[B(x, y) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) + \frac{y^3 \tilde{C}_0(x, y)}{x(1-y)} \right] \cdot \frac{4x^3}{1-x} \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \\ & + \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \frac{4x^3}{1-x} \\ & \cdot \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) B(x, y) + \frac{y^3 \tilde{C}_0(x, y)}{x(1-y)} \right] \\ & - \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right)^2 \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \frac{4x^3 B(x, y)}{1-x} \end{aligned}$$

où

$$B(x, y) = \frac{y^4}{1-y} + \frac{xy^4(4-3y)}{(1-x)(1-y)^2}$$

et,

$$\begin{aligned} GR_2^2(x, y) = & 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & \cdot \frac{4x^4 y^4}{(1-x)^2(1-y)} \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \\ & - \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right)^2 \frac{4x^4 y^4}{(1-x)^2(1-y)} \end{aligned}$$

et,

$$GR_2^3(x, y) = \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{4x^3y^4}{(1-x)(1-y)} \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \\
& + \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x,y)}{xy} \right] \frac{4x^3y^4}{(1-x)(1-y)} \\
& \cdot \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x,y)}{xy} \right] \\
& - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 \frac{4x^3y^4}{(1-x)(1-y)}.
\end{aligned}$$

Démonstration. Le cas 1 et le cas 3 possèdent la même structure, soit

$$\begin{aligned}
GR_2^1, GR_2^3 &= (\text{équerre}_1 \text{ ou coin}) \cdot \text{grand rectangle}_2 \cdot \text{équerre}_2 \\
&+ (\text{équerre}_1 \text{ ou coin}) \cdot \text{grand rectangle}_2 \cdot (\text{équerre}_2 \text{ ou coin}) \\
&- \text{équerre}_1 \cdot \text{grand rectangle}_2 \cdot \text{équerre}_2
\end{aligned} \tag{4.19}$$

tandis que pour le cas 2, un coin d'aire minimale ne peut pas être placé dans un des coins du rectangle, celui inférieur gauche sur la figure 4.22(b), c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}
GR_2^2 &= 2 (\text{équerre}_1 \text{ ou coin minimal}) \cdot \text{grand rectangle}_2 \cdot \text{équerre}_2 \\
&- \text{équerre}_1 \cdot \text{grand rectangle}_2 \cdot \text{équerre}_2.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Autant pour (4.19) que pour (4.20), le polyomino coin intervenant dans les structures est un coin d'index 0 non dégénéré. Bien que les cas 1 et 3 se construisent de manière semblable, l'ajout d'équerres se fait différemment, lequel est présenté à la figure 4.22. La traduction des structures décrites aux équations (4.19) et (4.20) en séries génératrices permet d'obtenir, en fonction de la largeur et de la hauteur du grand rectangle, les séries génératrices des polyominos d'index 2 contenant un grand rectangle de seconde espèce pour chacun des trois cas. La couleur dans les équations (4.21) à (4.23) sert à mettre en évidence la construction des équerres illustrées avec la même couleur à la figure 4.22.

$$GR_2^1(x, y, t, s) = \left[\left(1 + \frac{sx}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x,y)}{xy} \right] 4x^t y^s \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] 4x^t y^s \\
& \cdot \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{sx}{1-x}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& - \left(1 + \frac{sx}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) 4x^t y^s \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right), \quad (4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
GR_2^2(x, y, t, s) &= 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& \cdot 4(t-3)x^t y^s \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \\
& - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) 4(t-3)x^t y^s \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \quad (4.22)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
GR_2^3(x, y, t, s) &= \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \cdot 4x^t y^s \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \\
& + \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] 4x^t y^s \\
& \cdot \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& - \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) 4x^t y^s \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right). \quad (4.23)
\end{aligned}$$

En prenant la somme sur $t \geq 3$ et $s \geq 4$, on obtient la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant n'importe quel grand rectangle de seconde espèce, en regard du cas auquel le grand rectangle appartient :

$$\begin{aligned}
GR_2^1(x, y) &= \sum_{s \geq 4, t \geq 3} GR_2^1(x, y, t, s) \\
&= \left[\sum_{s \geq 4} \left(1 + \frac{sx}{1-x}\right) y^s \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \sum_{s \geq 4} y^s \right] \\
& \cdot 4 \sum_{t \geq 3} x^t \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] 4 \sum_{t \geq 3} x^t \\
& \cdot \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \sum_{s \geq 4} \left(1 + \frac{sx}{1-x}\right) y^s + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \sum_{s \geq 4} y^s \right] \\
& - \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \sum_{s \geq 4} \left(1 + \frac{sx}{1-x}\right) y^s \cdot 4 \sum_{t \geq 3} x^t \\
& = \left[B(x, y) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \frac{y^4}{1-y} \right] \\
& \cdot 4 \frac{x^3}{1-x} \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \\
& + \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] 4 \frac{x^3}{1-x} \\
& \cdot \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) B(x, y) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \frac{y^4}{1-y} \right] \\
& - B(x, y) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \frac{4x^3}{1-x}
\end{aligned}$$

où

$$B(x, y) = \sum_{s \geq 4} \left(1 + \frac{sx}{1-x}\right) y^s = \frac{y^4}{1-y} + \frac{xy^4(4-3y)}{(1-x)(1-y)^2}.$$

Puisque

$$\sum_{s \geq 4} \sum_{t \geq 3} (t-3) x^t y^s = \frac{x^4 y^4}{(1-x)^2 (1-y)} \quad \text{et} \quad \sum_{s \geq 4} \sum_{t \geq 3} x^t y^s = \frac{x^3 y^4}{(1-x)(1-y)},$$

alors

$$\begin{aligned}
GR_2^2(x, y) &= \sum_{s \geq 4} \sum_{t \geq 3} GR_2^2(x, y, t, s) \\
&= 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
&\quad \cdot 4 \sum_{s \geq 4} \sum_{t \geq 3} (t-3) x^t y^s \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 4 \sum_{s \geq 4} \sum_{t \geq 3} (t-3) x^t y^s \\
& = 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& \quad \cdot \frac{4x^4 y^4}{(1-x)^2(1-y)} \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \\
& \quad - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 \frac{4x^4 y^4}{(1-x)^2(1-y)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
GR_2^3(x, y) &= \sum_{s \geq 4} \sum_{t \geq 3} GR_2^3(x, y, s, t) \\
&= \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& \quad \cdot 4 \sum_{s \geq 4} \sum_{t \geq 3} x^t y^s \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \\
& \quad + \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] 4 \sum_{s \geq 4} \sum_{t \geq 3} x^t y^s \\
& \quad \cdot \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& \quad - \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 4 \sum_{s \geq 4} \sum_{t \geq 3} x^t y^s \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \\
&= \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& \quad \cdot \frac{4x^3 y^4}{(1-x)(1-y)} \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \\
& \quad + \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \frac{4x^3 y^4}{(1-x)(1-y)} \\
& \quad \cdot \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& \quad - \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 \frac{4x^3 y^4}{(1-x)(1-y)} \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.18. Soit $GR(x, y)$ la série génératrice des minimaux plus deux contenant un grand rectangle quelconque, alors

$$\begin{aligned} GR(x, y) = & GR_1(x, y) + GR_2^1(x, y) + GR_2^1(y, x) \\ & + GR_2^2(x, y) + GR_2^2(y, x) + GR_2^3(x, y) + GR_2^3(y, x) \end{aligned} \quad (4.24)$$

où $GR_1^1(x, y)$, $GR_2^1(x, y)$, $GR_2^2(x, y)$ et $GR_2^3(x, y)$ sont donnés aux propositions 4.16 et 4.17.

Démonstration. En combinant les grands rectangles de première espèce à ceux de seconde espèce horizontaux et verticaux, on obtient (4.24). $\square$

À l'aide de cette dernière série, on trouve le nombre de polyominos d'index 2 inscrits contenant un grand rectangle tel que présenté au tableau 4.3.

$k \backslash b$	3	4	5	6	7	8	9
3	4	32	108	240	428	672	972
4	32	288	1088	2692	5308	9144	14408
5	108	1088	4472	11924	25212	46368	77688
6	240	2692	11924	33964	76524	149660	266084
7	428	5308	25212	76524	183588	382020	721748
8	672	9144	46368	149660	382020	845776	1698624
9	972	14408	77688	266084	721748	1698624	3623576

TABLEAU 4.3 – Nombre de polyominos d'index 2 inscrits dans un $k \times b$ contenant un grand rectangle

4.3.4 Premiers à quatre feuilles

La classe des premiers à quatre feuilles (voir section 4.2.4) est divisée en quatre catégories : les polyominos H , les polyominos crabes, les polyominos chiens et les polyominos dromadaires. Ceux en position horizontale sont de hauteur 3 et de largeur variable. Pour ceux en position verticale, c'est le contraire.

Proposition 4.19. Soit $B_H(x, y, t)$ la série génératrice des polyominos H horizontaux inscrits dans un $t \times 3$, alors

$$B_H(x, y, t) = x^t y^3. \quad (4.25)$$

Démonstration. Il n'y a qu'une façon de construire un polyomino H dans un $t \times 3$. En effet, on choisit un banc $t \times 2$ et on complète le H en ajoutant deux cellules aux extrémités de la base du banc. □

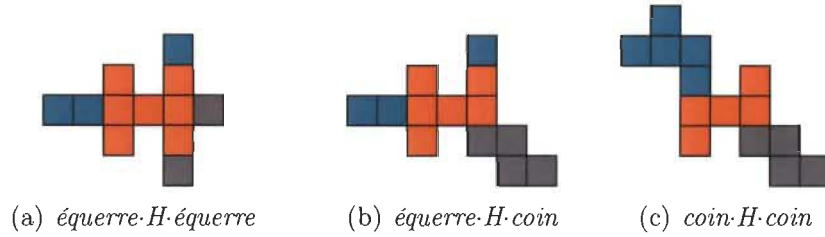


FIGURE 4.23 – Polyominos d'index 2 contenant un H horizontal

Proposition 4.20. Soit $Q_{F_H}(x, y)$, la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un polyomino H horizontal, alors

$$Q_{F_H}(x, y) = 2 \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right]^2 \frac{x^3 y^3}{1-x} - \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 \frac{x^3 y^3}{1-x} \quad (4.26)$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est la série génératrice des coins d'index 0 non dégénérés qui correspond à l'équation (3.12).

Démonstration. La structure de ces polyominos est

$$2(\text{équerre}_1 \text{ ou coin minimal}) \cdot H \cdot (\text{équerre}_2 \text{ ou coin minimal}) - \text{équerre}_1 \cdot H \cdot \text{équerre}_2$$

où le coin minimal est non dégénéré. Des exemples sont présentés à la figure 4.23.

Ainsi, de manière analogue à la proposition 4.17, on a

$$QF_H(x, y, t) = 2 \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right]^2 B_H(x, y, t) - \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 B_H(x, y, t)$$

où $B_H(x, y, t)$ est la série génératrice des polyominos H horizontaux, donnée par l'équation (4.25).

Puisqu'un H horizontal est de largeur 3 ou plus, en prenant la somme sur $t \geq 3$, on obtient $QF_H(x, y)$:

$$\begin{aligned} QF_H(x, y) &= \sum_{t \geq 3} QF_H(x, y, t) \\ &= 2 \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right]^2 \sum_{t \geq 3} B_H(x, y, t) \\ &\quad - \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 \sum_{t \geq 3} B_H(x, y, t). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Puisque

$$\sum_{t \geq 3} B_H(x, y, t) = \sum_{t \geq 3} x^t y^3 = \frac{x^3 y^3}{1-x}, \quad (4.28)$$

alors, en substituant (4.28) dans (4.27), on obtient (4.26). $\square$

Proposition 4.21. Soit $B_C(x, y, t)$, la série génératrice des polyominos crabes horizontaux, alors

$$B_C(x, y, t) = 2 \binom{t-3}{2} x^t y^3. \quad (4.29)$$

Démonstration. On choisit un banc $t \times 2$ avec les pattes vers le haut. Pour compléter le polyomino crabe, deux cellules doivent être ajoutées à l'intérieur du banc sur le côté opposé aux pattes. Elles ne peuvent pas être placées aux trois endroits marqués par un zéro sur la figure 4.12(b). Autrement, ce serait un bol ou un autre type de polyomino

à quatre feuilles. Pour construire un polyomino crabe, il faut donc sélectionner deux endroits où ajouter les deux cellules parmi les $t-3$ endroits possibles. De plus, on peut construire un polyomino crabe en sélectionnant d'abord un banc $t \times 2$ avec les pattes vers le bas. Ainsi, il y a $2\binom{t-3}{2}$ polyominos crabes horizontaux dans un $t \times 3$. $\square$

Proposition 4.22. Soit $QF_C(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un crabe horizontal, alors

$$QF_C(x, y) = 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \frac{2x^5y^3}{(1-x)^3} \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 \frac{2x^5y^3}{(1-x)^3} \quad (4.30)$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est donnée par l'équation (3.12).

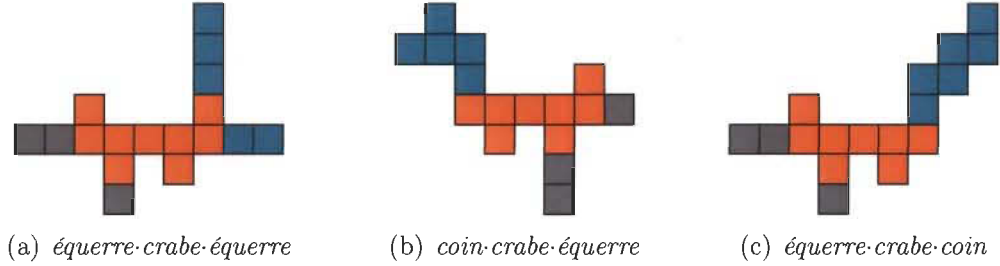


FIGURE 4.24 – Polyominos d'index 2 contenant un crabe

Démonstration. Tel que mis en évidence à la figure 4.24, ces polyominos ont la structure

$$2(\text{équerre}_1 \text{ ou coin minimal non dégénéré}) \cdot \text{crabe} \cdot \text{équerre}_2 \\ - \text{équerre}_1 \cdot \text{crabe} \cdot \text{équerre}_2.$$

Ainsi, en tenant compte que la série génératrice des crabes est $B_C(x, y, t)$, soit (4.29), et que les séries génératrices des équerres s'obtiennent de manière similaire à la proposition 4.17,

$$QF_C(x, y, t) = 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right]$$

$$\begin{aligned} & \cdot B_C(x, y, t) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \\ & - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 B_C(x, y, t). \end{aligned}$$

Puisqu'un crabe est de largeur $t \geq 5$,

$$\begin{aligned} QF_C(x, y) &= \sum_{t \geq 5} QF_C(x, y, t) \\ &= 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & \quad \cdot \sum_{t \geq 5} B_C(x, y, t) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \\ & \quad - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 \sum_{t \geq 5} B_C(x, y, t). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Puisque

$$\sum_{t \geq 5} B_C(x, y, t) = 2 \sum_{t \geq 5} \binom{t-3}{2} x^t y^3 = \frac{2x^5 y^3}{(1-x)^3}, \quad (4.32)$$

alors, en remplaçant (4.32) dans (4.31), on a $QF_C(x, y)$, soit l'équation (4.30). $\square$

Proposition 4.23. Soit $B_A(x, y, t)$ la série génératrices des polyominos chiens horizontaux, alors

$$B_A(x, y, t) = 4(t-3)x^t y^3. \quad (4.33)$$

Démonstration. La construction d'un polyomino chien horizontal, dont des exemples sont illustrés à la figure 4.25, se divise en trois étapes :

- Choix d'un banc $t \times 2$: il y en a deux possibles ;
- Ajout d'une cellule à une des extrémités du dos de ce banc : il y a deux possibilités (à gauche ou à droite) ;
- Ajout d'une cellule sur le dos du banc : il y a $t-3$ endroits où on peut la placer.

Par le principe du produit, il y a donc $2 \times 2 \times (t-3)$ polyominos chiens horizontaux dans un $t \times 3$. $\square$

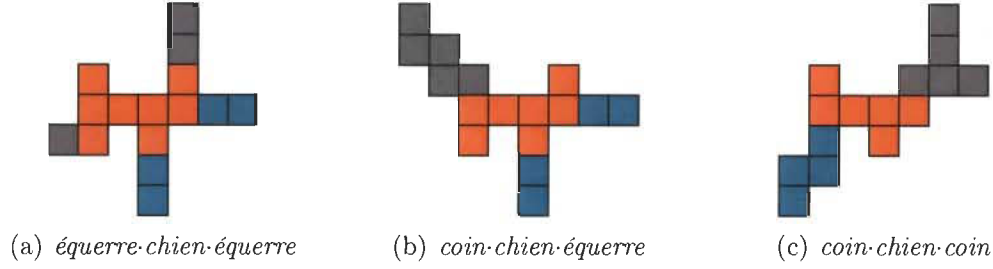


FIGURE 4.25 – Polyominos d'index 2 contenant un chien

Proposition 4.24. Soit $QF_A(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un polyomino chien horizontal, alors

$$\begin{aligned}
 QF_A(x, y) = & \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
 & \cdot \frac{4x^4y^3}{(1-x)^2} \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \\
 & + \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
 & \cdot \frac{4x^4y^3}{(1-x)^2} \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
 & - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 \frac{4x^4y^3}{(1-x)^2}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est donné par l'équation (3.12).

Démonstration. Les polyominos d'index 2 contenant un chien sont construits avec la structure multiplicative :

$$\begin{aligned}
 & (\text{équerre}_1 \text{ ou coin d'index } 0) \cdot \text{chien} \cdot \text{équerre}_2 \\
 & + (\text{équerre}_1 \text{ ou coin d'index } 0) \cdot \text{chien} \cdot (\text{équerre}_2 \text{ ou coin d'index } 0) \\
 & - \text{équerre}_1 \cdot \text{chien} \cdot \text{équerre}_2
 \end{aligned}$$

où chaque coin est non dégénéré. En traduisant cette structure en série génératrice de façon analogue à la proposition 4.17, on obtient QF_A en fonction de la largeur t du chien :

$$\begin{aligned}
QF_A(x, y, t) = & \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] B_A(x, y, t) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \\
& + \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& \cdot B_A(x, y, t) \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 B_A(x, y, t).
\end{aligned}$$

où $B_A(x, y)$ est la série génératrice des chiens horizontaux décrite à l'équation (4.33).

Un polyomino chien est de largeur $t \geq 4$. Donc,

$$\begin{aligned}
QF_A(x, y) &= \sum_{t \geq 4} QF_A(x, y, t) \\
&= \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
&\quad \cdot \sum_{t \geq 4} B_A(x, y, t) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \\
&\quad + \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
&\quad \cdot \sum_{t \geq 4} B_A(x, y, t) \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
&\quad - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right)^2 \sum_{t \geq 4} B_A(x, y, t).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Puisque

$$\sum_{t \geq 4} B_A(x, y, t) = \sum_{t \geq 4} 4(t-3)x^t y^3 = \frac{4x^4 y^3}{(1-x)^2}, \tag{4.36}$$

alors en substituant (4.36) dans (4.35), on a (4.34). $\square$

Proposition 4.25. Soit $B_D(x, y, t)$ la série génératrice des polyominos dromadaires horizontaux, alors

$$B_D(x, y, t) = (t - 2)(t - 3)x^t y^3. \quad (4.37)$$

Démonstration. Soit un rectangle $t \times 3$. Pour y inscrire un polyomino dromadaire horizontal comme à la figure 4.26, une rangée de largeur t est d'abord placée au milieu du rectangle. À cette rangée, quatre cellules doivent être ajoutées.

- Deux de celles-ci doivent être placées dans deux coins opposés du rectangle, soit dans une des deux diagonales de ce dernier.
- Il reste alors deux cellules à placer, mais l'ajout d'une de ces deux cellules limite les endroits où peut se situer l'autre. Afin de simplifier les explications, les deux cellules placées à l'étape précédente le sont dans l'anti-diagonale, sans perte de généralité.

De manière générale, on fixe la position de la troisième cellule et on regarde le nombre de façons de placer la dernière, tel qu'illustré à la figure 4.26. Si la troisième cellule est disposée le plus à gauche possible au-dessus de la rangée, la quatrième a $t - 3$ endroits possibles. Si on décale la troisième cellule d'une unité vers la droite, l'autre cellule a $t - 4$ endroits possibles, et ainsi de suite. En faisant la somme, on a le nombre de façons de mettre ces deux cellules pour former un dromadaire :

$$(t - 3) + (t - 4) + \dots = \sum_{i \geq 3}^{t-1} (t - i) = \frac{(t - 2)(t - 3)}{2}.$$

Encore une fois, par le principe du produit, il y a $(t - 2)(t - 3)$ polyominos dromadaires horizontaux. □

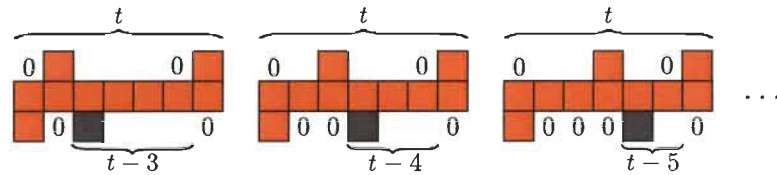


FIGURE 4.26 – Ajout de la quatrième cellule d'un polyomino dromadaire

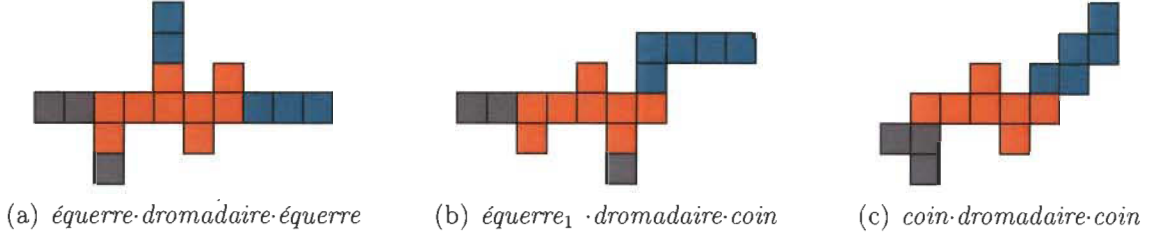


FIGURE 4.27 – Polyominos d'index 2 contenant un dromadaire

Proposition 4.26. Soit $QF_D(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un polyomino dromadaire horizontal, alors

$$QF_D(x, y) = \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right]^2 \frac{2x^4y^3}{(1-x)^3} \quad (4.38)$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est donnée à l'équation (3.12).

Démonstration. Ces polyominos sont particuliers, puisqu'il suffit d'établir la structure qui suit sur l'anti-diagonale pour les compter tous :

$$(\text{équerre}_1 \text{ ou coin minimal}) \cdot \text{dromadaire} \cdot (\text{équerre}_2 \text{ ou coin minimal})$$

où les coins sont non dégénérés. En effet, sur la diagonale, on ne peut qu'ajouter des équerres au dromadaire. En ajoutant ceux-ci à ceux de l'anti-diagonale et en retranchant les objets appartenant aux deux diagonales, on retrouve uniquement la construction sur l'anti-diagonale. Ainsi,

$$QF_D(x, y, t) = \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right]^2 B_D(x, y, t).$$

La largeur d'un dromadaire est plus grande ou égale à 4. Donc,

$$\begin{aligned} QF_D(x, y) &= \sum_{t \geq 4} QF_D(x, y, t) \\ &= \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right]^2 \sum_{t \geq 4} B_D(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.39)$$

où $B_D(x, y, t)$ est la série génératrice des dromadaires, soit (4.37).

Puisque

$$\sum_{t \geq 4} B_D(x, y, t) = \sum_{t \geq 4} (t-2)(t-3)x^t y^3 = \frac{2x^4 y^3}{(1-x)^3}, \quad (4.40)$$

en substituant (4.40) dans (4.39), on obtient (4.38). $\square$

La série génératrice de chacun des quatre-feuilles verticaux est obtenue en permutant x et y dans la série des horizontaux. En additionnant les quatre catégories de polyominos à quatre feuilles horizontaux et celles des verticaux, la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant n'importe quel premier à quatre feuilles est obtenue, telle que décrite à la proposition suivante.

Proposition 4.27. Soit $QF(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un premier à quatre feuilles, alors

$$\begin{aligned} QF(x, y) = & QF_H(x, y) + QF_H(y, x) + QF_C(x, y) + QF_C(y, x) \\ & + QF_A(x, y) + QF_A(y, x) + QF_D(x, y) + QF_D(y, x) \end{aligned} \quad (4.41)$$

où $QF_H(x, y)$, $QF_C(x, y)$, $QF_A(x, y)$ et $QF_D(x, y)$ sont donnés respectivement aux équations (4.26), (4.30), (4.34) et (4.38).

Le tableau 4.4 présente le nombre de polyominos d'index 2 inscrits contenant n'importe quel premier à quatre feuilles.

$k \backslash b$	3	4	5	6	7	8	9
3	2	17	74	220	519	1051	1912
4	17	120	480	1420	3460	7336	14032
5	74	480	1728	4840	11720	25376	50248
6	220	1420	4840	12912	30700	67012	136112
7	519	3460	11720	30700	72320	158836	329144
8	1051	7336	25376	67012	158836	352856	745344
9	1912	14032	50248	136112	329144	745344	1608656

TABLEAU 4.4 – Nombre de polyominos d'index 2 inscrits dans un $k \times b$ contenant un premier à quatre feuilles

4.3.5 Bols

Les bols parfaits, asymétriques et symétriques font tous partie de la même catégorie : celle des bols. Ils sont tous de hauteur 3, mais ne se construisent pas de la même manière, comme on en discutera dans cette section.

Proposition 4.28. Soit $B_{BP}(x, y, t)$ la série génératrice des bols parfaits horizontaux, alors

$$B_{BP}(x, y, t) = 2x^t y^3. \quad (4.42)$$

Démonstration. On construit un bol parfait horizontal à l'aide d'un banc $t \times 2$, $t \geq 3$, auquel on ajoute une cellule à chacune des pattes. Puisqu'il y a 2 bancs d'index 1 horizontaux, il y a 2 bols parfaits horizontaux inscrits dans un $t \times 3$. $\square$

Proposition 4.29. Soit $B_{BA}(x, y, t)$ la série génératrice des bols asymétriques horizontaux, alors

$$B_{BA}(x, y, t) = \frac{4x^{t+1}y^3}{1-x}. \quad (4.43)$$

Démonstration. Un bol asymétrique horizontal est constitué d'un banc $t \times 2$, $t \geq 2$. On prolonge la patte du banc d'un côté. De l'autre côté, on complète le bol asymétrique en ajoutant une rangée non vide et en plaçant perpendiculairement une cellule au-dessus de l'extrémité de cette rangée. Ainsi, on a le choix entre deux bancs $t \times 2$ et ensuite entre deux côtés. De plus, puisque l'ajout d'une rangée de largeur supérieure ou égale à 1 est traduite en série génératrice par $\frac{x}{1-x}$, par le principe du produit, on a (4.43). $\square$

Proposition 4.30. Soit $B_{BS}(x, y, t)$ la série génératrice des bols symétriques horizontaux, alors

$$B_{BS}(x, y, t) = \frac{2x^{t+2}y^3}{(1-x)^2}. \quad (4.44)$$

Démonstration. Les bols symétriques sont similaires aux asymétriques, à l'exception du fait que, des deux côtés du banc $t \times 2$, on ajoute une rangée horizontale de largeur supérieure ou égale à 1 et où on place perpendiculairement une cellule au-dessus de chacune des rangées :

$$B_{BS}(x, y, t) = 2x^t y^2 \frac{x}{1-x} \frac{x}{1-x}.$$

□

Proposition 4.31. Soit $BOL_{BP}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un bol parfait horizontal, alors

$$\begin{aligned} BOL_{BP}(x, y) = & 2 \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & \cdot \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(\frac{2x^3 y^3}{1-x} + \frac{2x^3 y^4 (3-2x)}{(1-x)^2 (1-y)}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \frac{2x^3 y^3}{1-x} \right] \\ & - \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(\frac{2x^3 y^3}{1-x} + \frac{2x^3 y^4 (3-2x)}{(1-x)^2 (1-y)}\right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est la série génératrice des coins d'index 0 non dégénérés, soit (3.12).

Démonstration. Ce genre de polyomino possède la forme

$$2(\text{équerre}_1 \text{ ou coin}) \cdot \text{bol parfait} \cdot (\text{équerre}_2 \text{ ou coin}) - \text{équerre}_1 \cdot \text{bol parfait} \cdot \text{équerre}_2$$

où chaque coin est un coin d'index 0 non dégénéré. Ainsi,

$$\begin{aligned} BOL_{BP}(x, y, t) = & 2 \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & \cdot B_{BP}(x, y, t) \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & - \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) B_{BP}(x, y, t). \end{aligned}$$

où $B_{BP}(x, y, t)$ est donné par l'équation (4.42).

Puisque $t \geq 3$, alors

$$\begin{aligned}
 BOL_{BP}(x, y) &= \sum_{t \geq 3} BOL_{BP}(x, y, t) \\
 &= 2 \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
 &\quad \cdot \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \sum_{t \geq 3} B_{BP}(x, y, t) \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \sum_{t \geq 3} B_{BP}(x, y, t) \right] \\
 &\quad - \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \sum_{t \geq 3} \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) B_{BP}(x, y, t).
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Comme

$$\sum_{t \geq 3} B_{BP}(x, y, t) = \sum_{t \geq 3} 2x^t y^3 = \frac{2x^3 y^3}{1-x} \tag{4.47}$$

et que

$$\sum_{t \geq 3} \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) B_{BP}(x, y, t) = \sum_{t \geq 3} \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) 2x^t y^3 = \frac{2x^3 y^3}{1-x} + \frac{2x^3 y^4 (3-2x)}{(1-x)^2 (1-y)} \tag{4.48}$$

on trouve (4.45) en substituant (4.47) et (4.48) dans (4.46). $\square$

Proposition 4.32. Soit $BOL_{BA}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un bol asymétrique horizontal, alors

$$\begin{aligned}
 BOL_{BA}(x, y) &= \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
 &\quad \cdot \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(\frac{4x^3 y^3}{(1-x)^2} + \frac{4y^4 x^3 (2-x)}{(1-x)^3 (1-y)} \right) \\
 &\quad + \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
 &\quad \cdot \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(\frac{4x^3 y^3}{(1-x)^2} + \frac{4y^4 x^3 (2-x)}{(1-x)^3 (1-y)} \right) + \frac{4x^2 y^2 \tilde{C}_0(x, y)}{(1-x)^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \\
& \cdot \left(\frac{4x^3y^3}{(1-x)^2} + \frac{4y^4x^3(2-x)}{(1-x)^3(1-y)} \right)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

où $\tilde{C}(x, y)$ est donné par l'équation (3.12).

Démonstration. Ces polyominos ont la structure

$$\begin{aligned}
& (\text{équerre}_1 \text{ ou coin}) \cdot \text{bol asymétrique} \cdot \text{équerre}_2 \\
& + (\text{équerre}_1 \text{ ou coin}) \cdot \text{bol asymétrique} \cdot (\text{équerre}_2 \text{ ou coin}) \\
& - \text{équerre}_1 \cdot \text{bol asymétrique} \cdot \text{équerre}_2,
\end{aligned}$$

en considérant que chacun des coins est d'index 0 et non dégénéré. Celle-ci conduit à la série génératrice en fonction de t suivante

$$\begin{aligned}
BOL_{BA}(x, y, t) = & \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& \cdot B_{BA}(x, y, t) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) \\
& + \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& \cdot B_{BA}(x, y, t) \left[\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\
& - \left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \\
& \cdot \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) B_{BA}(x, y, t)
\end{aligned}$$

où $B_{BA}(x, y, t)$ est la série génératrice des bols asymétriques, soit (4.43).

Puisque $t \geq 2$, et

$$\sum_{t \geq 2} \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) B_{BA}(x, y, t) = \frac{4x^3y^3}{(1-x)^2} + \frac{4y^4x^3(2-x)}{(1-x)^3(1-y)},$$

et que

$$\sum_{t \geq 2} B_{BA}(x, y, t) = \sum_{t \geq 2} \frac{4x^{t+1}y^3}{1-x} = \frac{4x^3y^3}{(1-x)^2},$$

alors, en effectuant la somme $\sum_{t \geq 2} BOL_{BA}(x, y, t)$, qui correspond à $BOL_{BA}(x, y)$, on obtient (4.49). $\square$

Proposition 4.33. Soit $BOL_{BS}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un bol symétrique horizontal, alors

$$\begin{aligned} BOL_{BS}(x, y) = & 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & \cdot \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(\frac{2x^4y^3}{(1-x)^3} + \frac{2x^4y^4(2-x)}{(1-y)(1-x)^4} \right) \\ & - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(\frac{2x^4y^3}{(1-x)^3} + \frac{2x^4y^4(2-x)}{(1-y)(1-x)^4} \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

où $\tilde{C}(x, y)$ est la série génératrice des polyominos coins d'index 0 non dégénérés, soit l'équation (3.12).

Démonstration. La structure

$$\begin{aligned} & 2 (\text{équerre}_1 \text{ ou coin minimal non dégénéré}) \cdot \text{bol symétrique} \cdot \text{équerre}_2 \\ & - \text{équerre}_1 \cdot \text{bol symétrique} \cdot \text{équerre}_2 \end{aligned}$$

décrit l'ensemble des polyominos d'index 2 contenant un bol symétrique horizontal.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} BOL_{BS}(x, y, t) = & 2 \left[\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) + \frac{\tilde{C}_0(x, y)}{xy} \right] \\ & \cdot B_{BS}(x, y, t) \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) \\ & - \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y}\right) \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) B_{BS}(x, y, t) \end{aligned}$$

où $B_{BS}(x, y, t)$ est donné par l'équation (4.44). En prenant la somme pour $t \geq 2$, on

obtient $BOL_{BS}(x, y, t)$ tel que décrit à l'équation (4.50), cela sachant que

$$\sum_{t \geq 2} \left(1 + \frac{ty}{1-y}\right) B_{BS}(x, y, t) = \frac{2x^4y^3}{(1-x)^3} + \frac{2x^4y^4(2-x)}{(1-y)(1-x)^4}.$$

□

En ajoutant les trois catégories de bols verticaux aux horizontaux, on obtient la série génératrice de tous les polyominos d'index 2 contenant un bol, tel que stipulé à la prochaine proposition. De plus, à partir de cette série génératrice, on trouve le nombre de polyominos d'aire minimale plus deux contenant un bol, tel que présenté au tableau 4.5.

Proposition 4.34. Soit $BOL(x, y)$, la série génératrice des polyominos d'index 2 contenant un bol, alors

$$\begin{aligned} BOL(x, y) = & BOL_{BP}(x, y) + BOL_{BP}(y, x) + BOL_{BA}(x, y) \\ & + BOL_{BA}(y, x) + BOL_{BS}(x, y) + BOL_{BS}(y, x) \end{aligned} \quad (4.51)$$

où les équations (4.45), (4.49) et (4.50) donnent les expressions de $BOL_{BP}(x, y)$, $BOL_{BA}(x, y)$ et $BOL_{BS}(x, y)$.

$k \backslash b$	3	4	5	6	7	8	9
3	12	70	208	458	968	1494	2400
4	70	472	1546	3676	7478	13760	23546
5	208	1546	5364	13326	28344	54610	97908
6	458	3676	13326	34240	75498	151220	282366
7	868	7478	28344	75498	172892	360478	701720
8	1494	13760	54610	151220	360478	783592	1591746
9	2400	23546	97908	282366	701720	1591746	3375252

TABLEAU 4.5 – Nombre de polyominos d'index 2 inscrits dans un $k \times b$ contenant un bol

4.3.6 Minimaux plus deux généraux

De la proposition 4.8, l'ensemble des polyominos minimaux plus deux correspond à la réunion des cinq classes étudiées ci-haut, c'est-à-dire les Banc $\times$ Banc, les premiers $t \times 2$ et $2 \times t$, les grands rectangles, les premiers à quatre feuilles et les bols. Par conséquent, la série génératrice des polyominos minimaux plus deux $P_2(x, y)$ est donnée par la somme des séries de ces cinq classes.

Proposition 4.35. Soit $P_2(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale plus deux, alors

$$P_2(x, y) = BXB(x, y) + T(x, y) + GR(x, y) + QF(x, y) + BOL(x, y), \quad (4.52)$$

où les formes rationnelles des séries $BXB(x, y)$, $T(x, y)$, $GR(x, y)$, $QF(x, y)$ et $BOL(x, y)$ sont développées aux équations (4.3), (4.15), (4.24), (4.41) et (4.51).

Le tableau 4.6 présente le nombre de polyominos d'index 2 inscrits dans un rectangle de dimension inférieure ou égale à 9×9 . Ces valeurs ont été obtenues en développant $P_2(x, y)$ en série de MacLaurin à l'aide du logiciel *Maple*. Elles ont aussi été validées informatiquement par un programme de H. Cloutier en générant, de manière indépendante à la classification, les polyominos d'aire minimale plus deux selon les dimensions b et k du rectangle circonscrit pour $b, k \leq 10$.

$k \backslash b$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1	8	32	88	192	360	608
3	1	32	212	784	2133	4803	9490	17042
4	8	212	1396	5154	14192	32824	67284	126078
5	32	784	5154	18944	52488	123652	260616	505362
6	88	2133	14192	52488	147656	356514	775644	1560298
7	192	4803	32824	123652	356514	887992	2002570	4189208
8	360	9490	67284	260616	775644	2002570	34071432	10227332
9	608	17042	126078	505362	1560298	4189208	10227332	23215716

TABLEAU 4.6 – Nombre de polyominos d'index 2 inscrits dans un $k \times b$

Voici une question qui pourrait intéresser les lecteurs les plus curieux : parmi les cinq familles de polyominos d'index 2, laquelle croît le plus rapidement lorsque les dimensions k et b du rectangle augmentent ? En examinant les résultats présentés aux tableaux 4.1 à 4.5, il semblerait que ce soit les Banc×Banc. En effet, de par leur forme composée de deux bancs-coins et d'un escalier, cette famille semble avoir plus de liberté, ce qui expliquerait leur prédominance.

À partir de la série génératrice $P_2(x, y)$ des polyominos d'index 2, on peut déduire la série $P_2(q)$ associée aux nombres $p_2(n)$ de polyominos d'index 2 d'aire n .

Proposition 4.36. Soit $P_2(q)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 d'aire n , alors

$$P_2(q) = qP_2(q, q) = \frac{2q^6\psi(q)}{(-1+q)^7(-1+2q)^3} \quad (4.53)$$

où

$$\psi(q) = 244q^{10} + 32q^9 - 493q^8 + 57q^7 + 483q^6 + 71q^5 - 150q^4 - 55q^3 + 7q^2 + 11q + 1.$$

Démonstration. Par définition, $P_2(q) = \sum_{n \geq 1} p_2(n) q^n$, où $p_2(n)$ est le nombre de polyominos d'index 2 d'aire n . Puisqu'il existe un lien entre les dimensions $k \times b$ du rectangle circonscrit d'un polyomino d'index 2 et l'aire, soit $n = b+k+1$, cette sommation devient $P_2(q) = \sum_{b,k \geq 1} p_2(k, b) q^{b+k+1}$. Par définition, $P_2(x, y) = \sum_{b,k \geq 1} p_2(k, b) x^k y^b$. En remplaçant x et y par q dans $P_2(x, y)$, et en multipliant ensuite par q , on obtient le résultat désiré (4.53). $\square$

En effectuant le développement en série de (4.53), on trouve

$$\begin{aligned} P_2(q) = & 2q^6 + 48q^7 + 488q^8 + 3140q^9 + 14958q^{10} + 57654q^{11} + 190820q^{12} + 565516q^{13} \\ & + 1546150q^{14} + 3984446q^{15} + 9830180q^{16} + 23483820q^{17} + \dots \end{aligned}$$

On constate notamment qu'il n'y a aucun polyomino d'index 2 d'aire inférieure à 6 et qu'il y a 488 polyominos d'index 2 d'aire 8.

Chapitre 5

Polyominos d'index 0 à 2 à rotations près et à symétries près

An idea which can be used once is a trick. If it can be used more than once it becomes a method.
– G. Pólya et G. Szegő [32, p. viii]

Les polyominos ont jusqu'à présent été considérés à translations près, c'est-à-dire que deux polyominos sont équivalents si l'un peut être obtenu de l'autre par une translation. Dans ce chapitre, ce sont plutôt les polyominos à rotations près et les polyominos à symétries près qui seront énumérés. Pour ceux à *rotations près*, deux polyominos sont considérés identiques si l'un peut être obtenu de l'autre par une rotation tandis que pour ceux à *symétries près*, par une rotation ou par une réflexion. Les figures peuvent alors bouger dans l'espace, comme dans les problèmes de pavage du plan notamment abordés dans [17] et [20].

Le problème d'énumération à symétries près, parfois appelé à congruence près, n'est pas nouveau et certaines classes de polyominos ont été énumérées selon cette contrainte. Entre autres, cela a été effectué dans [24, 26, 33] respectivement pour l'ensemble des polyominos convexes dans les réseaux hexagonal et carré ainsi que pour les polyominos parallélogrammes.

L'objectif est de poursuivre l'investigation des polyominos à symétries près en dénombrant les polyominos d'aire minimale ainsi que ceux d'index 1 et 2 par l'obtention de séries génératrices, ce qui semble n'avoir jamais été effectuée pour ces polyominos avec les outils utilisés dans ce mémoire. Ces travaux ont été faits par M.-E. Pellerin, l'auteur de ce mémoire, sous la supervision de A. Goupil.

Pour résoudre ce problème, la même méthode que celle utilisée dans [24, 26, 33] est appliquée, soit le lemme de Burnside. On recourt également à ce lemme pour énumérer les polyominos à rotations près. Globalement, il suffit d'identifier le nombre de polyominos *g-symétriques*, c'est-à-dire invariants sous la symétrie g , et d'employer la formule du lemme de Burnside, décrite en détail dans la prochaine section.

5.1 Lemme de Burnside

Le miraculeux « lemme de Burnside », tel que présenté par J.-P. Delahaye dans [10], est très utile pour dénombrer les objets à symétries près et aussi ceux à rotations près, comme les polyominos. Bien que ce lemme porte le nom de Burnside, celui-ci ne l'aurait pas découvert. En effet, ce résultat semble avoir été connu et utilisé préalablement par Cauchy et Frobenius [10, 31]. Bref, comme l'énonce J.-P. Delahaye dans [10] : « *En définitive, personne ne sait qui l'a découvert et énoncé pour la première fois* ». Pour corriger cette mauvaise attribution, on lui donne parfois le nom de lemme de Cauchy-Frobenius ou encore de lemme « qui n'est pas de Burnside ». Par contre, ces corrections n'ont pas eu particulièrement de succès et l'appellation « lemme de Burnside » semble être la plus couramment utilisée [31].

Ce lemme s'appuie sur des résultats de la théorie des groupes et sur le concept d'action de groupe. Ainsi, diverses définitions et quelques théorèmes sont présentés afin de prouver le lemme de Burnside, qui est le lemme 5.12 du présent mémoire, et aussi le lemme de Burnside pondéré. On retrouve également quelques exemples afin d'illustrer certaines notions.

Définition 5.1. Un ensemble non vide G muni d'une opération binaire $\cdot$ forme un *groupe*, noté $(G, \cdot)$, lorsque

- G est *fermé* sous l'opération $\cdot$: $a \cdot b \in G, \forall a, b \in G$;
- l'opération $\cdot$ est *associative* : $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in G$;
- il existe un élément *neutre* unique $e \in G$: $e \cdot a = a \cdot e = a, \forall a \in G$;
- pour chaque $a \in G$, il existe un *inverse* unique a^{-1} : $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Parfois, lorsque l'opération binaire n'est pas ambiguë, on dira que G est un groupe plutôt que de parler du couple $(G, \cdot)$.

Exemple 5.2. L'ensemble des symétries d'un carré muni de la composition forme un groupe, soit l'ensemble $\{1, r, r^2, r^3, h, v, d_1, d_2\}$ où 1 est le neutre, r est la rotation de 90° , h et v sont respectivement les symétries horizontale et verticale et d_1 et d_2 sont les deux symétries diagonales. Il est appelé le groupe diédral ou le groupe des symétries du carré et est noté $\mathcal{D}_4$.

Définition 5.3. Soit H un sous-ensemble non vide de l'ensemble G tel que $(G, \cdot)$ est un groupe, alors $(H, \cdot)$ est un *sous-groupe* de $(G, \cdot)$ s'il est un groupe avec la même opération binaire $\cdot$.

Exemple 5.4. Le groupe diédral possède plusieurs sous-groupes dont

- celui des symétries rotationnelles d'un rectangle : $\mathcal{C}_2 = \{1, r^2\}$;
- celui des symétries rotationnelles d'un carré : $\mathcal{C}_4 = \{1, r, r^2, r^3\}$;
- celui des symétries d'un rectangle : $\{1, r^2, h, v\}$.

Définition 5.5. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et E un ensemble. La fonction F définie par

$$\begin{aligned} F : G \times E &\rightarrow E \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

est une *action du groupe G sur E* si elle satisfait les deux conditions suivantes :

- $e \cdot x = x, \forall x \in E$ (e est l'élément neutre de G) ;
- $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 (g_2 \cdot x), \forall g_1, g_2 \in G, x \in E$.

Exemple 5.6. Le groupe $\mathcal{D}_4$ agit naturellement sur l'ensemble des polyominos inscrits dans un carré.

Définition 5.7. L'orbite $\mathcal{O}(x)$ d'un élément $x \in E$ est l'ensemble

$$\mathcal{O}(x) = \{y \in E \mid \exists g \in G, g \cdot x = y\}.$$

L'ensemble des orbites de E sous l'action de G est noté E/G .

Exemple 5.8. Les polyominos de la figure 5.1 font partie de la même orbite, en considérant le groupe des rotations du rectangle, car appliquer une rotation de 180° à celui de gauche donne celui de droite.

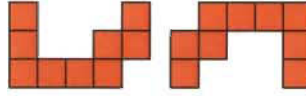


FIGURE 5.1 – Deux polyominos appartenant à la même orbite

Autrement dit, l'orbite $\mathcal{O}(x)$ de $x \in E$ est l'ensemble des éléments de E qui peuvent être obtenus en appliquant chaque élément du groupe G à x . L'ensemble E est ainsi partitionné en orbites. En considérant le groupe diédral et l'ensemble des polyominos, deux polyominos sont dans la même orbite si et seulement si l'un peut être obtenu de l'autre par une symétrie. Ainsi, en considérant chaque orbite comme un élément, ces orbites sont équivalentes aux polyominos à *symétries près*. L'objectif du lemme de Burnside est alors de dénombrer le nombre d'orbites d'un ensemble en fonction du groupe qui agit sur cet ensemble. Pour ce faire, on doit connaître la taille de chaque orbite, ce qui se fait notamment à l'aide du stabilisateur.

Définition 5.9. Le *stabilisateur* d'un élément $x \in E$, noté $Stab_G(x)$, est l'ensemble

$$Stab_G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

On peut montrer que le stabilisateur $Stab_G(x)$ est un sous-groupe de G .

Définition 5.10. L'ensemble des points fixes de $g \in G$ dans E , noté $Fix_E(g)$, est donné par

$$Fix_E(g) = \{x \in E \mid g \cdot x = x\}.$$

Un résultat pratique et très connu de la théorie des groupes est la formule de Lagrange, qui affirme que la taille d'un sous-groupe divise la taille du groupe. Plus précisément, soit H un sous-groupe de G alors

$$|G| = |G/H| \cdot |H| \quad (5.1)$$

où $|G/H|$ est le nombre de classes latérales à gauche de H et où $G/H = \{gH \mid g \in G\}$.

Ce théorème permet de prouver la formule des classes énoncée au théorème suivant.

Théorème 5.11. (Formule des classes) Soit G un groupe, E un ensemble et $x \in E$, alors

$$|\mathcal{O}(x)| = \frac{|G|}{|Stab_G(x)|}. \quad (5.2)$$

Démonstration. Puisque l'ensemble $Stab_G(x)$ est un sous-groupe de G , la formule de Lagrange (5.1) s'applique :

$$|G| = |G/Stab_G(x)| |Stab_G(x)|,$$

ce qui est équivalent à,

$$|G/Stab_G(x)| = \frac{|G|}{|Stab_G(x)|}.$$

Ainsi, en montrant qu'il existe une bijection entre $\mathcal{O}(x)$ et $G/Stab_G(x)$, on aura le résultat désiré. La bijection est définie par la fonction f ,

$$\begin{aligned} f : \mathcal{O}(x) &\rightarrow G/Stab_G(x) \\ g \cdot x &\mapsto gStab_G(x). \end{aligned}$$

On doit d'abord vérifier que f est bien définie, c'est-à-dire que si $g \cdot x = g' \cdot x$ pour $g, g' \in G$, alors $gStab_G(x) = g'Stab_G(x)$. Puisque $g \cdot x = g' \cdot x$, alors $x = g^{-1} \cdot g' \cdot x$. Par conséquent, $g^{-1}g' \in Stab_G(x)$. Ainsi, g et g' font partie de la même classe latérale, soit que $gStab_G(x) = g'Stab_G(x)$. Cette conclusion s'appuie sur le résultat suivant de la

théorie des groupes : soit H un sous-groupe de G et $a, b \in G$, alors a et b appartiennent à la même classe d'équivalence si et seulement si $a^{-1}b \in H$.

La fonction f est injective. En effet, soient $x_1, x_2 \in \mathcal{O}(x)$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Par définition de $\mathcal{O}(x)$, il existe $g_1, g_2 \in G$ tels que $g_1 \cdot x = x_1$ et $g_2 \cdot x = x_2$. Puisque $f(x_1) = f(x_2)$, alors $g_2 \text{Stab}_G(x) = g_1 \text{Stab}_G(x)$ et on en déduit que $g_2 \in g_1 \text{Stab}_G(x)$. Par conséquent, il existe $g \in \text{Stab}_G(x)$ tel que $g_2 = g_1 g$. Ainsi,

$$x_2 = g_2 \cdot x = g_1 g \cdot x. \quad (5.3)$$

Comme $g \in \text{Stab}_G(x)$, $g \cdot x = x$ et en considérant ce résultat dans l'équation (5.3), on a $x_2 = g_1 \cdot x = x_1$.

Finalement, f est surjective, car pour chaque $y \in g \text{Stab}_G(x)$ on peut lui associer l'élément $g \cdot x$.

Donc, de la bijection entre ces deux ensembles, $|\mathcal{O}(x)| = |G/\text{Stab}_G(x)|$ et, de la formule de Lagrange (5.1), l'égalité (5.2) est vérifiée. $\square$

Voici deux propriétés utilisées dans la preuve du lemme de Burnside. Soit A un ensemble, alors sa cardinalité peut être obtenue en comptant un à un chacun des éléments appartenant à A . D'où,

$$|A| = \sum_{a \in A} 1. \quad (5.4)$$

En divisant (5.4) par $|A|$, on obtient cette autre propriété :

$$1 = \sum_{a \in A} \frac{1}{|A|}. \quad (5.5)$$

Lemme 5.12. (Lemme de Burnside) Soit un groupe G agissant sur un ensemble E . Alors

$$|E/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix_E(g)| \quad (5.6)$$

où $|E/G|$ est le nombre d'orbites dans E .

Démonstration. La preuve décrite ici est basée sur celle présentée dans [33]. De la propriété (5.4), le nombre d'orbites correspond à

$$|E/G| = \sum_{k \in E/G} 1.$$

Chaque orbite étant un ensemble, on peut utiliser la propriété (5.5) :

$$|E/G| = \sum_{k \in E/G} \sum_{x \in k} \frac{1}{|k|}.$$

Cette double sommation équivaut à prendre chacun des $x \in E$ et à évaluer la taille de l'orbite contenant x , soit $|\mathcal{O}(x)|$:

$$|E/G| = \sum_{x \in E} \frac{1}{|\mathcal{O}(x)|}.$$

De la formule des classes énoncée au théorème 5.11 et subséquemment par définition de l'ensemble $Stab_G(x)$,

$$|E/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in E} |Stab_G(x)| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in E} \sum_{g | g \cdot x = x} 1.$$

Finalement, cela est équivalent à

$$|E/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x | g \cdot x = x} 1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix_E(g)|,$$

par définition de $Fix_E(g)$. □

Le lemme de Burnside s'adapte bien à l'utilisation des séries génératrices en tant que cardinalité d'un ensemble, tel que présentée à l'exemple suivant.

Exemple 5.13. Soit une famille $\mathcal{F}$ de polyominos énumérés selon la largeur k et la hauteur b de leur rectangle circonscrit. Pour k et b fixés, on peut appliquer le lemme de Burnside afin d'obtenir le nombre d'orbites de $\mathcal{F}$ sous l'action d'un groupe G :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix_{\mathcal{F}}^{k \times b}(g)| \quad (5.7)$$

où $Fix_{\mathcal{F}}^{k \times b}(g)$ est l'ensemble des polyominos appartenant à $\mathcal{F}$, g -invariants pour $g \in G$ et inscrits dans un rectangle $k \times b$.

On aura un résultat équivalent en utilisant les séries génératrices, mais on aura traité tous les rectangles en une seule fois. Soit $F^g(x, y) = \sum_{b, k \geq 1} |Fix_{\mathcal{F}}^{k \times b}(g)| x^k y^b$ la série génératrice des polyominos g -invariants de $\mathcal{F}$. Alors, en appliquant le lemme de Burnside en utilisant cette série plutôt que la cardinalité, par les propriétés de sommation et de multiplication par un scalaire des séries, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} F^g(x, y) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{b, k \geq 1} |Fix_{\mathcal{F}}^{k \times b}(g)| x^k y^b \\ &= \sum_{b, k \geq 1} \left[\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix_{\mathcal{F}}^{k \times b}(g)| \right] x^k y^b. \end{aligned}$$

On constate alors que le coefficient de $x^k y^b$ est le même que (5.7), c'est-à-dire le nombre d'orbites de $\mathcal{F}$ sous l'action d'un groupe G pour k et b fixés. Ainsi, en utilisant les séries génératrices, on obtient le même raisonnement que lorsque chaque ensemble de polyominos $k \times b$ est traité séparément. $\square$

Dans l'exemple précédent, le terme $x^k y^b$ est le poids d'un polyomino, une étiquette qui permet d'identifier les dimensions de son rectangle circonscrit. Une version généralisée du lemme de Burnside permet ce genre de situation, c'est-à-dire l'utilisation d'une fonction de poids (comme une série génératrice) plutôt que la cardinalité d'un ensemble. Cette fonction de poids, notée W , n'est pas très bien définie, mais elle doit satisfaire quelques propriétés. Premièrement, il faut qu'il soit possible d'additionner

le poids des éléments et de les multiplier par un nombre rationnel. Finalement, la fonction pondérée W doit être constante sur les orbites, c'est-à-dire que si x et y sont dans la même orbite, alors x et y ont le même poids : $W(y) = W(x)$.

Le lecteur peut se référer à [3] pour divers exemples d'application du lemme de Burnside pondéré de même que pour les détails de la preuve. Cette démonstration repose sur les mêmes arguments que pour celle du lemme original 5.12. De plus, le lemme de Burnside pondéré est une généralisation du lemme de Burnside, car en fixant le poids de tous les éléments à 1, on retrouve (5.6).

Lemme 5.14. (Lemme de Burnside pondéré) Soit E/G l'ensemble des orbites de l'action de G sur l'ensemble E . Alors

$$\sum_{k \in E/G} W(k) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix_E(g)|_W$$

où on définit $|Fix_E(g)|_W$ par $|Fix_E(g)|_W = \sum_{x \in E | g \cdot x = x} W(x)$.

5.2 Définitions et propriétés

Le groupe diédral $\mathcal{D}_4$, ou un de ses sous-groupes, agit naturellement sur les polyominos. Entre autres, appliquer une rotation ou une réflexion à un de ces objets redonne un polyomino. On peut donc utiliser le lemme de Burnside pour compter les polyominos à rotations près et à symétries près : ces derniers correspondent exactement au nombre d'orbites. En effet, deux polyominos sont dans la même orbite si et seulement si l'un peut être obtenu de l'autre par une symétrie.

Ce lemme s'applique différemment pour les polyominos inscrits et les polyominos non-inscrits : le groupe de rotations ou de symétries à considérer n'est pas le même. De plus, dans la section 5.2.3, les conditions pour qu'un polyomino soit g -symétrique pour $g \in \mathcal{C}_4$ sont étudiées.

5.2.1 Polyominos inscrits

Un concept de base de l'action d'un groupe sur un ensemble est que l'image de cette action doit demeurer dans l'ensemble. Par conséquent, puisque le résultat de la rotation de 90° ou de 270° d'un polyomino inscrit dans un rectangle de dimension $k \times b$ où $k \neq b$ est un polyomino inscrit dans un $b \times k$, ces deux rotations n'agiront pas sur un de ces objets inscrits dans un rectangle. Il en va de même pour les symétries diagonales. Pour cette raison, on doit distinguer les polyominos inscrits dans un carré de ceux inscrits dans un rectangle et appliquer le lemme de Burnside avec le bon groupe. Le choix de ce groupe est détaillé dans les deux paragraphes ci-dessous.

À rotations près En considérant le groupe des rotations, deux polyominos sont dans la même orbite si et seulement si l'un peut être obtenu de l'autre par une rotation. Ainsi, compter les polyominos à rotations près est équivalent à compter le nombre d'orbites, donné par le lemme de Burnside. Le groupe de rotations agissant sur l'ensemble de polyominos dépend du rectangle circonscrit :

- Symétries rotationnelles d'un carré : $\mathcal{C}_4 = \{1, r, r^2, r^3\}$;
 - Symétries rotationnelles d'un rectangle : $\mathcal{C}_2 = \{1, r^2\}$,
- où 1 est l'identité (rotation de 0°) et r est une rotation de 90° .

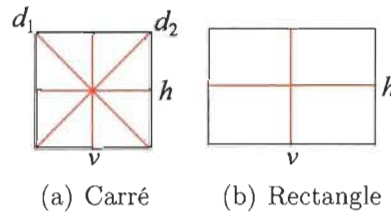


FIGURE 5.2 – Réflexions

À symétries près En faisant agir le groupe des symétries sur les polyominos, deux polyominos sont dans la même orbite lorsque l'un peut être obtenu de l'autre par une rotation ou une réflexion et vice versa. Ainsi, avec le lemme de Burnside, on peut connaître le nombre de polyominos à symétries près, puisque ce problème est le même que de compter le nombre d'orbites. Dépendamment du rectangle circonscrit

au polyomino, le groupe de symétries à considérer est différent, tel qu'illustré à la figure 5.2 :

- Symétries d'un carré : $\mathcal{D}_4 = \{1, r, r^2, r^3, h, v, d_1, d_2\}$;
- Symétries d'un rectangle : $\mathcal{H} = \{1, r^2, h, v\}$,

où 1 est l'identité (rotation de 0°), r est une rotation de 90° , h et v sont respectivement une réflexion horizontale et verticale, d_1 est la symétrie suivant l'axe $y = -x$ et d_2 correspond à l'axe $y = x$.

5.2.2 Polyominos non-inscrits

D'abord, que signifie le terme polyomino non-inscrit ? De manière générale, on ne s'intéresse plus à la dimension du rectangle circonscrit, mais uniquement à l'aire du polyomino. Dans le cas des *polyominos d'index r non-inscrits et d'aire n* , cela se traduit par l'ensemble :

$$\{\text{polyominos d'index } r \text{ inscrits dans un rectangle } k \times b \mid b + k + r - 1 = n\}.$$

Dans ce cas, plutôt que de mentionner que les polyominos sont considérés non-inscrits, on peut simplement parler de polyominos d'index r d'aire n . Par conséquent, les polyominos d'index r inscrits dans un $b \times k$ et ceux dans un $k \times b$ sont dans le même ensemble puisque leur aire est égale à $b + k + r - 1$. Donc, contrairement aux inscrits, il n'est pas nécessaire de traiter de manières différentes les carrés et les rectangles. Ainsi, pour connaître leur nombre à rotations près, le groupe $\mathcal{C}_4$ agira sur cet ensemble tandis que, pour obtenir ceux à symétries près, ce sera plutôt le groupe diédral $\mathcal{D}_4$.

5.2.3 Conditions pour être g -symétrique, $g \in \mathcal{C}_4$

D'abord, il est bon de rappeler qu'un polyomino P est dit *g -symétrique* ou *g -invariant* si l'action de g sur cette figure n'a aucun effet : le polyomino avant et après est le même, c'est-à-dire que $g \cdot P = P$. Pour effectuer une rotation sur un

polyomino, on peut diviser son rectangle circonscrit en quatre régions en séparant en deux chacun des côtés du rectangle. On complète la rotation en déplaçant chacune des régions initiales vers la région dictée par la rotation à effectuer. La figure 5.3 illustre la rotation d'un rectangle où un numéro a été attribué à chaque quadrant.

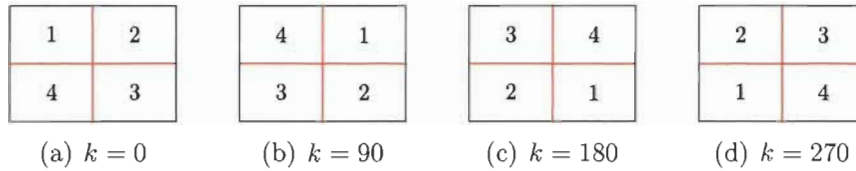


FIGURE 5.3 – Rectangle ayant subi une rotation de k°

Par conséquent, en comparant les figures 5.3(a) et 5.3(b), on déduit que pour être r -symétrique, c'est-à-dire invariant sous la rotation de 90° , le contenu des quatre régions doit être identique à 90° près. En observant les figures 5.3(a) et 5.3(d), la même condition apparaît pour être r^3 -invariant. Donc, les polyominos r -symétriques sont aussi r^3 -invariants et vice versa. En effet, cela est une conséquence du fait qu'une rotation de 270° est une rotation de 90° , mais prise dans le sens contraire. Finalement, en examinant les figures 5.3(a) et 5.3(c), pour être r^2 -invariant, il faut que la région 1 soit la même que la troisième à 180° près et que la région 2 soit identique à la région 4 à 180° près.

Remarque On notera $F_i^g(x, y)$ la série génératrice des polyominos inscrits d'index i qui sont g -symétriques et $F_i^{g, \square}(x, y)$, celle de ceux inscrits dans un carré. Dans les deux cas, les variables formelles x et y sont respectivement associées à la largeur et à la hauteur du rectangle circonscrit.

5.3 Minimaux

Dans cette section, l'ensemble des polyominos minimaux est traité afin de connaître leur nombre à rotations près ainsi que leur nombre à symétries près. À titre d'exemple, la figure 5.4 présente ceux inscrits dans un 3×2 selon les trois façons de les compter.

Les polyominos minimaux symétriques selon chaque rotation et chaque réflexion sont étudiés. Finalement, par le lemme de Burnside, les séries génératrices des polyominos minimaux inscrits et non-inscrits à rotations près et à symétries près sont obtenues.

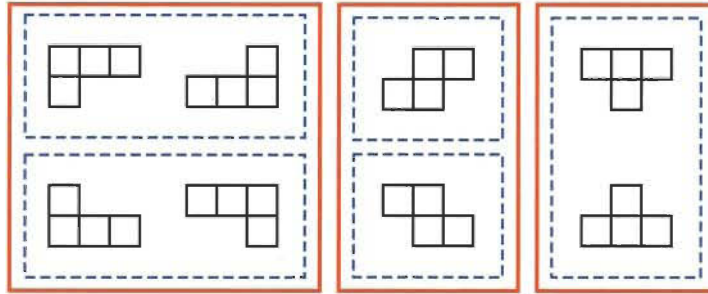


FIGURE 5.4 – Les 8 polyominos minimaux (à translations près) inscrits dans un 3×2 , les 5 classes à rotations près et les 3 classes à symétries près

5.3.1 Invariants sous une rotation donnée

Proposition 5.15. Soit $F_0^1(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 0 invariants sous l'identité 1, et $F_0^{1, \square}(x, y)$, celle des polyominos d'index 0 inscrits dans un carré et 1-invariants, alors

$$F_0^1(x, y) = P_0(x, y) \quad (5.8)$$

et

$$F_0^{1, \square}(x, y) = P_0^{\square}(x, y) \quad (5.9)$$

où $P_0(x, y)$ est la série génératrice des polyominos d'aire minimale, soit l'équation (3.18), et $P_0^{\square}(x, y)$, celle des polyominos d'aire minimale inscrits dans un carré, soit (3.20).

Démonstration. Puisqu'une rotation de 0° laisse tous les polyominos inchangés, on a directement que $F_0^1(x, y) = P_0(x, y)$ et $F_0^{1, \square}(x, y) = P_0^{\square}(x, y)$. $\square$

Proposition 5.16. Soit $F_0^r(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale invariants selon la rotation de 90° , alors

$$\begin{aligned} F_0^r(x, y) &= \frac{xy}{1 - x^2y^2} \\ &= xy + x^3y^3 + x^5y^5 + y^7x^7 + x^9y^9 + x^{11}y^{11} + x^{13}y^{13} + \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

Démonstration. Pour chaque carré de dimension impaire, il existe un seul polyomino r -symétrique tandis que pour des dimensions paires, il n'y en a aucun. En effet, de la section 5.2.3, pour être r -symétrique, le contenu des quatre quadrants divisant en parts égales le carré doit être identique (à 90° près). Or, pour qu'un polyomino soit d'aire minimale et r -symétrique, les cellules doivent être placées à la frontière de ces régions, comme on peut le voir à la figure 5.5. Une cellule centrale est placée et on y ajoute quatre rangées de cellules de même longueur. En conséquence, le carré est de dimension impaire.



FIGURE 5.5 – Polyomino d'aire minimale r -symétrique

Ainsi, le nombre de polyominos d'index 0 r -invariants est donné par la série génératrice

$$F_0^r(x, y) = \sum_{i \geq 0} (xy)^{2i+1} = \frac{xy}{1 - x^2y^2}.$$

□

Proposition 5.17. Soit $F_0^{r^2}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale r^2 -symétriques, alors

$$F_0^{r^2}(x, y) = 2C_0(x^2, y^2) \left(\frac{1 + x + y}{xy} \right) - \frac{xy(1 + x + y - x^2y - xy^2)}{(1 - x^2)(1 - y^2)} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} &= (y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y)x + (2y^7 + 2y^5 + 2y^3 + y)x^2 \\ &\quad + (9y^5 + 6y^4 + 5y^3 + 2y^2 + y)x^3 + (10y^5 + 6y^3 + y)x^4 + \dots \end{aligned} \quad (5.12)$$

où $C_0(x, y)$ est la série génératrice des polyominos coins d'index 0, donné à l'équation (3.5). À noter que chaque parenthèse du développement (5.12) possède une infinité d'éléments, mais que seulement un nombre fini est présenté. On fera de même dans les développements subséquents, mais ce commentaire sera omis.

Démonstration. Tel que mentionné à la section 5.2.3, pour qu'un polyomino soit r^2 -invariant, les régions diagonalement opposées doivent être identiques (à 180° près). Pour ce faire, les polyominos d'aire minimale r^2 -symétriques se construisent en dupliquant un coin d'index 0 selon les trois cas illustrés à la figure 5.6 : les cellules de coins se superposent, sont côte à côte ou bien sont une au-dessus de l'autre.

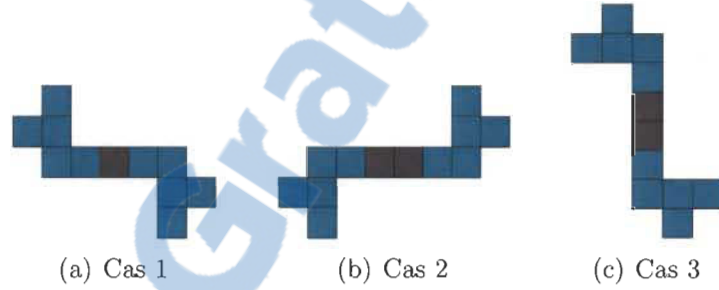


FIGURE 5.6 – Polyominos d'index 0 r^2 -invariants

Cas 1 Un coin d'index 0 $k \times b$ est dupliqué et est ajouté au coin initial en superposant les cellules de coin : le rectangle ainsi obtenu possède des dimensions $(2k-1) \times (2b-1)$. De plus, ce type de collage peut s'effectuer selon une des deux diagonales du rectangle et le seul polyomino commun à celles-ci est l'unique croix passant par le centre d'un rectangle aux dimensions impaires. En considérant une seule de ces diagonales, il y a autant de polyominos d'index 0 r^2 -invariants inscrits dans un rectangle $(2k-1) \times (2b-1)$ que de coins d'index 0 inscrits dans un $k \times b$. Donc, la série génératrice des polyominos d'index 0 r^2 -symétriques inscrits dans un rectangle de dimensions impaires est

$$\begin{aligned} 2 \sum_{b,k \geq 1} c_0(b, k) x^{2k-1} y^{2b-1} - \sum_{b,k \geq 1} x^{2k-1} y^{2b-1} \\ = \frac{2}{xy} \sum_{b,k \geq 1} c_0(b, k) (x^2)^k (y^2)^b - \frac{xy}{(1-x^2)(1-y^2)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Mais, $\sum_{b,k \geq 1} c_0(b, k) (x^2)^k (y^2)^b$ est la série génératrice des coins d'index 0 où on a substitué $x \mapsto x^2$ et $y \mapsto y^2$. Donc, l'expression (5.13) devient

$$\frac{2}{xy} C_0(x^2, y^2) - \frac{xy}{(1-x^2)(1-y^2)}. \quad (5.14)$$

Quelle est la signification combinatoire de cette substitution algébrique? En fait, la clé pour résoudre cette énigme est de constater que la largeur de presque chaque cellule du polyomino coin contribue à deux cellules en largeur au polyomino complet, la même chose pour la hauteur. Cette contribution se traduit par la substitution $x \mapsto x^2$ et $y \mapsto y^2$ dans la série $C_0(x, y)$. Il n'y a que la cellule de coin (en gris sur la figure 5.6(a)) qui n'a pas cette caractéristique : elle n'apporte seulement qu'une unité en largeur et qu'une en hauteur. Pour cette raison, $C_0(x^2, y^2)$ est divisé par xy .

Cas 2 En dupliquant un polyomino coin selon la figure 5.6(b), la largeur du rectangle est paire tandis que sa hauteur est impaire. De manière analogue au cas 1, on a que

$$2 \sum_{b,k \geq 1} c_0(b, k) x^{2k} y^{2b-1} - \sum_{i \geq 1} x^{2i} y = \frac{2C_0(x^2, y^2)}{y} - \frac{x^2 y}{1-x^2} \quad (5.15)$$

est la série génératrice qui décrit les polyominos r^2 -symétriques du cas 2. En effet, on divise $C_0(x^2, y^2)$ par y uniquement, car la hauteur de la cellule grise de la figure 5.6(b) compte seulement pour une unité de la hauteur du rectangle lorsqu'elle est dupliquée. De plus, seul le polyomino $2i \times 1$ est à la fois r^2 -symétrique et inclus dans les deux diagonales du cas 2.

Cas 3 Il s'agit du cas 2 auquel une rotation de 90° est appliquée. Par conséquent, la série génératrice de ce cas est obtenue en inversant x et y dans la série génératrice du deuxième cas :

$$\frac{2C_0(y^2, x^2)}{x} - \frac{y^2 x}{1-y^2} = \frac{2C_0(x^2, y^2)}{x} - \frac{y^2 x}{1-y^2}. \quad (5.16)$$

En additionnant les séries génératrices de ces trois cas, on a (5.11). □

Du développement en séries de MacLaurin (5.12), on constate qu'il y a 10 polyominos d'index 0 inscrits dans un 3×6 qui sont r^2 -symétriques.

Proposition 5.18. Soit $F_0^{r^2, \square}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale r^2 -symétriques inscrits dans un carré, alors

$$F_0^{r^2, \square}(x, y) = \frac{2C_0^{\square}(x^2, y^2)}{xy} - \frac{xy}{1 - x^2y^2}. \quad (5.17)$$

$$= xy + 5x^3y^3 + 21y^5x^5 + 77x^7y^7 + 277x^9y^9 + 1005x^{11}y^{11} + \dots$$

où $C_0^{\square}(x, y)$ est la série génératrice des coins d'index 0 inscrits dans un carré, développée à l'équation (3.11).

Démonstration. Ces polyominos d'index 0 r^2 -symétriques appartiennent à l'ensemble des polyominos de même index inscrits dans un rectangle. Ainsi, ils sont construits de manière similaire à partir des trois cas décrits à la preuve de la proposition 5.17. Cependant, pour être inscrits dans un carré, ils sont nécessairement de la forme du cas 1. De plus, il faut que le polyomino coin soit inscrit dans un carré pour que le polyomino r^2 -invariant soit carré. Par conséquent, comme pour le cas 1 de la proposition 5.17, les substitutions $x \mapsto x^2$ et $y \mapsto y^2$ sont effectuées dans la série génératrice $C_0^{\square}(x, y)$. Celle-ci est divisée par xy puisque la cellule de coin apporte seulement une unité en hauteur et en largeur au polyomino global, et multipliée par 2, car la construction se fait sur l'une des deux diagonales. Finalement, la série génératrice des polyominos d'index 0 r^2 -symétriques appartenant aux deux diagonales, une croix centrée dans un carré $(2i + 1) \times (2i + 1)$, est soustraite. D'où,

$$F_0^{r^2, \square}(x, y) = 2 \frac{C_0^{\square}(x^2, y^2)}{xy} - \sum_{i \geq 0} x^{2i+1} y^{2i+1} = 2 \frac{C_0^{\square}(x^2, y^2)}{xy} - \frac{xy}{1 - x^2y^2}.$$

□

Proposition 5.19. Soit $F_0^{r^3}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale r^3 -symétriques, alors

$$F_0^{r^3}(x, y) = F_0^r(x, y). \quad (5.18)$$



Démonstration. Directement de la section 5.2.3 où on y établit que les polyominos r^3 -symétriques sont les polyominos r -symétriques. $\square$

5.3.2 Invariants sous une réflexion donnée

Proposition 5.20. Soit $F_0^h(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale h -symétriques, alors

$$\begin{aligned} F_0^h(x, y) &= \frac{xy^2}{1-y^2} + \frac{xy^3}{(x-1)^2(1-y^2)} + \frac{xy}{1-x} \\ &= x(y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y) + (2y^7 + 2y^5 + 2y^3 + y)x^2 \\ &\quad + (3y^5 + 3y^3 + y)x^3 + (4y^5 + 4y^3 + y)x^4 + (5y^3 + y)x^5 + \dots \end{aligned} \quad (5.19)$$

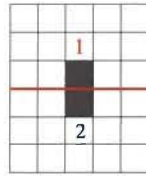
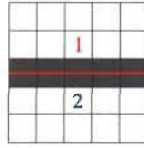
(a) b paire(b) b impaire(c) Polyomino d'index 0 h -invariant

FIGURE 5.7 – Symétrie horizontale d'un polyomino d'index 0

Démonstration. Puisqu'une symétrie horizontale divise un rectangle en deux parts, on distingue deux cas : la hauteur b est paire ou impaire.

b paire L'axe de symétrie est exactement entre deux rangées de cellules. La symétrie horizontale interchange les régions 1 et 2 de la figure 5.7(a). Pour que ces deux régions demeurent connexes, il y a au moins une cellule à la frontière de chaque région, comme à la figure 5.7(a). Ce polyomino ne peut pas être minimal et invariant à la fois, sauf si sa largeur est égale à 1. Donc, lorsque b est paire, seul les polyominos d'index 0 de largeur 1 sont h -symétriques et leur série génératrice est

$$\sum_{i \geq 1} xy^{2i} = \frac{xy^2}{1-y^2}. \quad (5.20)$$

b impaire Tel qu'illustré à la figure 5.7(b), l'axe de symétrie horizontale sépare une rangée de cellules en deux, ce qui implique que cette rangée doit obligatoirement être entièrement occupée pour que le polyomino soit h -symétrique et d'index 0. Si $b \neq 1$, un polyomino minimal h -symétrique inscrit dans un $k \times b$ est construit en sélectionnant une des k colonnes. Si $b = 1$, alors il y a un seul polyomino h -symétrique. D'où, la série génératrice des polyominos minimaux h -symétriques tel que b est impaire est

$$\sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} k x^k y^{2i+1} + \sum_{k \geq 1} x^k y = \frac{xy^3}{(x-1)^2(1-y^2)} + \frac{xy}{1-x}. \quad (5.21)$$

On a donc la série génératrice des polyominos minimaux h -symétriques, soit (5.19), en additionnant (5.20) et (5.21). $\square$

Proposition 5.21. Soit $F_0^{h,\square}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale inscrits dans un carré et h -invariants, alors

$$\begin{aligned} F_0^{h,\square}(x, y) &= \frac{xy(y^2x^2 + 1)}{(y^2x^2 - 1)^2} \\ &= xy + 3x^3y^3 + 5y^5x^5 + 7x^7y^7 + 9x^9y^9 + 11x^{11}y^{11} + 13x^{13}y^{13} + \dots \end{aligned} \quad (5.22)$$

Démonstration. Ces polyominos sont un cas particulier de ceux de la proposition 5.20. Le cas d'une hauteur paire est immédiatement rejeté car, de la preuve de la proposition 5.20, ce type de polyomino doit être de largeur 1 : il ne peut pas être inscrit dans un carré. Il s'agit donc d'un polyomino inscrit dans un carré aux dimensions impaires : $(2i + 1) \times (2i + 1)$. De la proposition précédente, lorsque la hauteur est supérieure à 3, la largeur du polyomino correspond au nombre de polyominos d'index 0 inscrits h -symétriques. De plus, si la hauteur est 1, le polyomino d'index 0 inscrit dans un carré h -symétrique est l'unique cellule unitaire. Conséquemment,

$$F_0^{h,\square}(x, y) = \sum_{i \geq 0} (2i + 1)(xy)^{2i+1} = \frac{xy(y^2x^2 + 1)}{(y^2x^2 - 1)^2}.$$

$\square$

Proposition 5.22. Soit $F_0^v(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale v -invariant, alors

$$F_0^v(x, y) = F_0^h(y, x), \quad (5.23)$$

$$F_0^{v, \square}(x, y) = F_0^{h, \square}(y, x). \quad (5.24)$$

Démonstration. Les polyominos v -invariants sont en bijection avec les h -invariants par une rotation de 90° . Par conséquent, interchanger x et y dans $F_0^h(x, y)$ (resp. $F_0^{h, \square}(x, y)$) permet d'obtenir la série génératrice $F_0^v(x, y)$ (resp. $F_0^{v, \square}(x, y)$). $\square$

Proposition 5.23. Soit $F_0^{d_1}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale d_1 -invariants, alors

$$\begin{aligned} F_0^{d_1}(x, y) &= \frac{xy(2x^2y^2 - 2xy + 1)}{(1 - xy)^2(1 - 2xy)} \\ &= xy + 2x^2y^2 + 5y^3x^3 + 12x^4y^4 + 27x^5y^5 + 58y^6x^6 + \dots \end{aligned} \quad (5.25)$$

Démonstration. Un polyomino d'index 0 d_1 -invariant est construit à partir d'un coin d'index 0 et du même coin auquel la symétrie diagonale d_1 est appliquée. Ceux-ci sont assemblés en superposant la cellule de coin du premier polyomino avec celle du deuxième, dont un exemple est illustré à la figure 5.8.

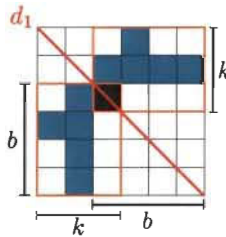


FIGURE 5.8 – Polyomino d'index 0 d_1 -symétrique

Par exemple, si le polyomino coin est de dimension $k \times b$, tel qu'illustré à la figure 5.8, alors le carré circonscrit du polyomino d_1 -symétrique construit est de dimension $(b + k - 1) \times (b + k - 1)$. La série génératrice sous forme rationnelle est

alors

$$F_0^{d_1}(x, y) = \sum_{b, k \geq 1} c_0(b, k) x^{b+k-1} y^{b+k-1} = \frac{C_0(xy, xy)}{xy} = \frac{xy(2x^2y^2 - 2xy + 1)}{(1 - xy)^2(1 - 2xy)}$$

où $C_0(x, y)$ est la série génératrice donnée à l'équation (3.5).

Pourquoi $F_0^{d_1}(x, y)$ correspond-elle à la série génératrice $C_0(x, y)$ avec la substitution $x \mapsto xy$ et $y \mapsto xy$ divisée par xy ? En examinant la figure 5.8, on constate que la largeur de chaque cellule du polyomino coin initial contribue à une unité en largeur et à une unité en hauteur au polyomino d_1 -symétrique, à l'exception des cellules superposées. D'où, $x \mapsto xy$ dans $C_0(x, y)$. La même chose se produit pour la hauteur de chaque cellule du coin initial. Finalement, il faut diviser par xy , car la cellule de coin n'est pas dupliquée et contribue ainsi uniquement à une unité en largeur au polyomino d_1 -invariant, de même qu'en hauteur. $\square$

Proposition 5.24. Soit $F_0^{d_2}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale d_2 -symétriques, alors

$$F_0^{d_2}(x, y) = F_0^{d_1}(x, y). \quad (5.26)$$

Démonstration. Il y a une bijection entre l'ensemble des polyominos d_1 -invariants et d_2 -invariants : une rotation de 90° . Conséquemment, par la substitution $x \mapsto y$ et $y \mapsto x$ dans $F_0^{d_1}(x, y)$, on obtient $F_0^{d_2}(x, y)$. Mais, $F_0^{d_1}(y, x) = F_0^{d_1}(x, y)$. D'où, on a l'égalité $F_0^{d_2}(x, y) = F_0^{d_1}(y, x) = F_0^{d_1}(x, y)$. $\square$

5.3.3 À rotations près

À l'aide du lemme de Burnside, on obtient la série génératrice des polyominos minimaux à rotations près pour les inscrits et les non-inscrits. De plus, le tableau 5.1 présente quelques valeurs donnant le nombre de polyominos inscrits d'index 0 à rotations près.

Proposition 5.25. Soit $R_0(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale à rotations près, alors

$$\begin{aligned}
R_0(x, y) = & -\frac{yx}{(1-yx)^2} - \frac{3yx(yx+1)}{4(yx-1)^3} - \frac{2yx}{yx-1} - \frac{2yx}{\sqrt{1-4yx}} + \frac{3yx}{4(1-y^2x^2)} \\
& - \frac{1}{2xy} \left(2\frac{y^2x^2}{\sqrt{1-4y^2x^2}} + \frac{y^2x^2}{1-y^2x^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{yx}{(1-x)^2(1-y)^2} \\
& + \frac{xy}{1-x-y} \left(1 + \frac{yx}{(1-x)(1-y)} \right)^2 + \frac{y^2x}{2(1-y)^2} + \frac{x^2y}{2(1-x)^2} \\
& + \frac{xy}{1-x^2-y^2} \left(1 + \frac{y^2x^2}{(1-x^2)(1-y^2)} \right) - \frac{yx}{2(1-x^2)(1-y^2)} \\
& - \frac{1}{2} \frac{x^2y}{1-x^2} + \frac{xy^2}{1-x^2-y^2} \left(1 + \frac{y^2x^2}{(1-x^2)(1-y^2)} \right) - \frac{1}{2} \frac{y^2x}{1-y^2} \\
& + \frac{x^2y}{1-x^2-y^2} \left(1 + \frac{y^2x^2}{(1-x^2)(1-y^2)} \right). \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Démonstration. En appliquant le lemme de Burnside avec le groupe cyclique des rotations $\mathcal{C}_4$ sur les polyominos d'index 0 carrés et le groupe $\mathcal{C}_2$ sur les rectangulaires non carrés, on a

$$R_0(x, y) = \frac{1}{|\mathcal{C}_4|} \sum_{g \in \mathcal{C}_4} F_0^{g, \square}(x, y) + \frac{1}{|\mathcal{C}_2|} \sum_{g \in \mathcal{C}_2} \left(F_0^g(x, y) - F_0^{g, \square}(x, y) \right).$$

De (5.8) et (5.9), $F_0^1(x, y) = P_0(x, y)$ et $F_0^{1, \square}(x, y) = P_0^\square(x, y)$. De plus, comme les polyominos d'index 0 r -invariants et r^3 -invariants sont nécessairement inscrits dans un carré $F_0^{r, \square}(x, y) = F_0^r(x, y)$ et $F_0^{r^3, \square}(x, y) = F_0^{r^3}(x, y)$. Finalement, de (5.18), $F_0^{r^3}(x, y) = F_0^r(x, y)$. On a donc

$$\begin{aligned}
R_0(x, y) = & \frac{1}{4} \left(P_0^\square(x, y) + 2F_0^r(x, y) + F_0^{r^2, \square}(x, y) \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(P_0(x, y) - P_0^\square(x, y) + F_0^{r^2}(x, y) - F_0^{r^2, \square}(x, y) \right), \tag{5.28}
\end{aligned}$$

où $P_0(x, y)$, $P_0^\square(x, y)$, $F_0^r(x, y)$, $F_0^{r^2}(x, y)$ et $F_0^{r^2, \square}(x, y)$ correspondent respectivement aux séries génératrices (3.18), (3.20), (5.10), (5.11) et (5.17). En remplaçant ces séries dans (5.28), on obtient (5.27). $\square$

$b \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	5	6	9	10	13	14	17	18
3	1	5	8	28	46	67	93	122	156	193
4	1	6	28	30	120	194	308	440	624	830
5	1	9	46	120	130	477	814	1288	1951	2825
6	1	10	67	194	477	481	1813	3106	5107	7930
7	1	13	93	308	814	1813	1836	6830	11998	19997
8	1	14	122	440	1288	3106	6830	6822	25714	45654
9	1	17	156	624	1951	5107	11998	25714	25756	97259
10	1	18	193	830	2825	7930	19997	45654	97259	97173

TABLEAU 5.1 – Nombre de polyominos minimaux inscrits dans un $k \times b$ à rotations près

Proposition 5.26. Soit $R_0(q)$, la série génératrice des polyominos d'aire minimale non-inscrits d'aire n à rotations près, alors :

$$\begin{aligned}
 R_0(q) &= -\frac{q(4q^{10} - 2q^9 + q^8 + 7q^7 - 7q^6 + 2q^5 + 9q^4 - 10q^3 + 3q - 1)}{(q^2 - 1)^2(2q^2 - 1)(q^3 - q^2 + q - 1)(q - 1)(2q - 1)} \\
 &= q + q^2 + 2q^3 + 6q^4 + 15q^5 + 38q^6 + 87q^7 + 201q^8 + \dots
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Démonstration. Par définition d'un polyomino non-inscrit, la série génératrice $R_0(q)$ est la sommation $\sum_{b,k \geq 1} r_0(b,k)q^{b+k-1}$ où $r_0(b,k)$ est le nombre de polyominos d'index 0 inscrits dans un $k \times b$ à rotations près. Tel que discuté à la section 5.2.2, le groupe $\mathcal{C}_4$ agit sur ces polyominos. Pour connaître le nombre de polyominos non-inscrits d'index 0 g -invariants pour $g \in \{1, r, r^2, r^3\}$, il suffit de remplacer x et y par q dans $F_0^g(x, y) = \sum_{b,k \geq 1} f_0^g(b, k) x^b y^k$ et ensuite de diviser par q . En faisant cela, on aura bien q^{b+k-1} et le coefficient voulu. Le lemme de Burnside permet alors de conclure que

$$R_0(q) = \frac{1}{q|\mathcal{C}_4|} \sum_{g \in \mathcal{C}_4} F_0^g(q, q) = \frac{1}{4q} \left(P_0(q, q) + 2F_0^r(q, q) + F_0^{r^2}(q, q) \right), \tag{5.30}$$

de (5.8) et (5.18) et où $P_0(x, y)$, $P_0^\square(x, y)$, $F_0^r(x, y)$, $F_0^{r^2}(x, y)$ et $F_0^{r^2\square}(x, y)$ sont données respectivement aux équations (3.18), (3.20), (5.10), (5.11) et (5.17). En simplifiant l'expression (5.30), on a (5.29). $\square$

5.3.4 À symétries près

Proposition 5.27. Soit $S_0(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale à symétries près, alors

$$\begin{aligned}
S_0(x, y) = & \frac{-3yx}{4(1-yx)^2} + \frac{y^3x}{4(1-x)^2(1-y^2)} + \frac{x^3y}{4(1-y)^2(1-x^2)} + \frac{y^2x}{4(1-y)^2} \\
& - \frac{xy(2y^2x^2 - x^2 - y^2 + 1)(x+y+1)}{2(x^2+y^2-1)(x-1)(1+x)(y-1)(y+1)} + \frac{yx}{1-yx} \\
& + \frac{yx(2x^2y + 2y^2x - 2yx - 3x - 3y + 4)}{4(1-2yx)(1-x)(1-y)} - \frac{yx}{4(1-x)^2(1-y)^2} \\
& + \frac{3yx(yx+1)}{8(1-yx)^3} + \frac{xy}{2(1-x-y)} \left(1 + \frac{yx}{(1-x)(1-y)} \right)^2 - \frac{yx}{4} \\
& - \frac{yx}{4(1-x^2)(1-y^2)} - \frac{1}{4xy} \left(2 \frac{y^2x^2}{\sqrt{1-4y^2x^2}} + \frac{y^2x^2}{y^2x^2-1} \right) \\
& + \frac{3yx}{8(1-y^2x^2)} - \frac{yx}{\sqrt{1-4yx}} + \frac{x^2y}{4(1-x)^2} + \frac{x^3y^3(y^2x^2-3)}{4(1-y^2x^2)^2}. \quad (5.31)
\end{aligned}$$

Démonstration. Par le lemme de Burnside, en appliquant le groupe $\mathcal{D}_4$ à l'ensemble des polyominos minimaux carrés et le groupe $\mathcal{H} = \{1, r^2, h, v\}$ sur les polyominos rectangulaires non carrés, on a

$$S_0(x, y) = \frac{1}{|\mathcal{D}_4|} \sum_{g \in \mathcal{D}_4} F_0^{g, \square}(x, y) + \frac{1}{|\mathcal{H}|} \sum_{g \in \mathcal{H}} \left(F_0^g(x, y) - F_0^{g, \square}(x, y) \right).$$

De (5.8), (5.9) et (5.18),

$$\begin{aligned}
S_0(x, y) = & \frac{1}{8} \left(P_0^\square(x, y) + 2F_0^r(x, y) + F_0^{r^2, \square}(x, y) + F_0^{h, \square}(x, y) + F_0^{v, \square}(x, y) + 2F_0^{d_1}(x, y) \right) \\
& + \frac{1}{4} \left(P_0(x, y) - P_0^\square(x, y) + F_0^{r^2}(x, y) - F_0^{r^2, \square}(x, y) + F_0^h(x, y) - F_0^{h, \square}(x, y) \right. \\
& \left. + F_0^v(x, y) - F_0^{v, \square}(x, y) \right), \quad (5.32)
\end{aligned}$$

où $P_0(x, y)$, $P_0^\square(x, y)$, $F_0^r(x, y)$, $F_0^{r^2}(x, y)$, $F_0^{r^2, \square}(x, y)$, $F_0^h(x, y)$, $F_0^{v, \square}(x, y)$, $F_0^v(x, y)$, $F_0^{v, \square}(x, y)$ et $F_0^{d_1}(x, y)$ correspondent respectivement aux expressions (3.18), (3.20), (5.10), (5.11), (5.17), (5.19) et (5.22) à (5.25). On obtient alors (5.31). $\square$

Par le développement en séries de MacLaurin de $S_0(x, y)$, on déduit le tableau 5.2 donnant le nombre de polyominos d'aire minimale inscrits à symétries près.

b/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	3	3	5	5	7	7	9	9
3	1	3	6	15	25	35	49	63	81	99
4	1	3	15	18	61	97	155	220	313	415
5	1	5	25	61	73	240	410	646	979	1415
6	1	5	35	97	240	255	908	1553	2555	3965
7	1	7	49	155	410	908	950	3417	6003	10001
8	1	7	63	220	646	1553	3417	3473	12859	22827
9	1	9	81	313	979	2555	6003	12859	13006	48632
10	1	9	99	415	1415	3965	10001	22827	48632	48840

TABLEAU 5.2 – Nombre de polyominos minimaux inscrits dans un $k \times b$ à symétries près

Proposition 5.28. Le nombre de polyominos d'aire minimale non-inscrits d'aire n à symétries près est décrit par la série génératrice

$$\begin{aligned}
 S_0(q) &= -\frac{q(4q^{10} - 3q^9 - 2q^8 + 8q^7 - 7q^6 + 3q^5 + 6q^4 - 8q^3 + 3q - 1)}{(q^2 - 1)^2(2q^2 - 1)(q^3 - q^2 + q - 1)(q - 1)(2q - 1)} \\
 &= q + q^2 + 2q^3 + 4q^4 + 10q^5 + 21q^6 + 49q^7 + 104q^8 + 227q^9 + \dots
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Démonstration. En utilisant la même astuce de substitution qu'à la proposition 5.26 et en appliquant le lemme de Burnside avec le groupe $\mathcal{D}_4$, on obtient

$$S_0(q) = \frac{1}{8q} \left(P_0(q, q) + 2F_0^r(q, q) + F_0^{r^2}(q, q) + F_0^h(q, q) + F_0^v(q, q) + 2F_0^{d_1}(q, q) \right), \tag{5.34}$$

où $P_0(x, y)$, $F_0^r(x, y)$, $F_0^{r^2}(x, y)$, $F_0^h(x, y)$, $F_0^v(x, y)$ et $F_0^{d_1}(x, y)$ sont respectivement données par les équations (3.18), (5.10), (5.11), (5.19), (5.23) et (5.25). En exprimant (5.34) en fonction de q , on a (5.33). $\square$

5.4 Minimaux plus un

À l'aide du lemme de Burnside, les polyominos d'aire minimale plus un sont comptés à rotations près et à symétries près. Pour ce faire, la construction des polyominos d'index 1 symétriques se fait autour d'un banc, puisque ces polyominos sont caractérisés par la présence de cette structure. En effet, ce banc doit lui-même être un polyomino g -symétrique pour que le polyomino global le soit également sous $g \in \mathcal{D}_4$. Comme la figure 5.9 en témoigne, le banc 2×2 possède toutes les symétries tandis que les bancs non dégénérés $2 \times t$ sont h -symétriques et les $t \times 2$ sont v -symétriques.

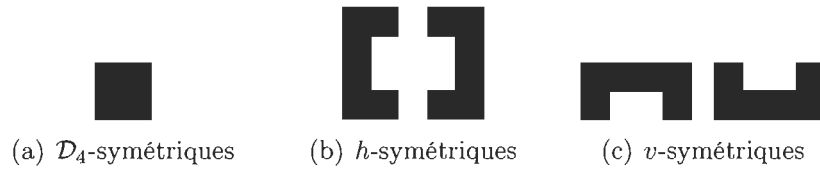


FIGURE 5.9 – Les bancs et leurs symétries

5.4.1 Invariants sous une rotation donnée

Une rotation de 0° laisse n'importe quel objet invariant, en particulier les polyominos d'index 1. Ainsi, on a le résultat suivant concernant ces derniers.

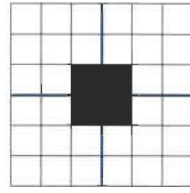
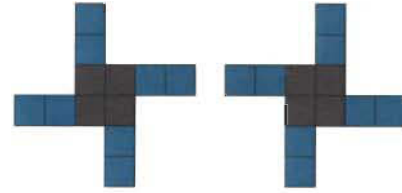
Proposition 5.29. Soit $F_1^1(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 1 symétriques sous la rotation de 0° , alors

$$F_1^1(x, y) = P_1(x, y) \quad (5.35)$$

où $P_1(x, y)$ est la série génératrice des polyominos d'index 1, soit l'expression (3.42).

Proposition 5.30. Soit $F_1^r(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 1 r -symétriques, alors

$$\begin{aligned} F_1^r(x, y) &= x^2y^2 + \frac{2x^4y^4}{1 - x^2y^2} \\ &= x^2y^2 + 2x^4y^4 + 2x^6y^6 + 2x^8y^8 + 2x^{10}y^{10} + \dots \end{aligned} \quad (5.36)$$

(a) Division des quadrants et position du 2×2 (b) Polyominos d'index 1 r -invariantsFIGURE 5.10 – Rotation de 90° d'un polyomino d'index 1

Démonstration. Pour qu'un polyomino d'index 1 soit r -symétrique, le contenu des quatre quadrants de la figure 5.11(a) doit être identique à 90° près. Deux répondent à cette exigence pour un carré $b \times b$, $b \geq 4$. Ceux-ci ont la forme d'une hélice à quatre pales, tel que présenté à la figure 5.10(b). De la façon dont est construite l'hélice, la longueur des côtés du carré circonscrit est nécessairement paire. De plus, dans un carré 2×2 , il n'y a qu'un polyomino d'index 1 r -invariant : le banc 2×2 . Conséquemment,

$$F_1^r(x, y) = x^2 y^2 + \sum_{i \geq 2} 2x^{2i} y^{2i} = x^2 y^2 + \frac{2x^4 y^4}{1 - x^2 y^2}.$$

□

Proposition 5.31. Soit $F_1^{r^2}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 1 r^2 -symétriques, alors

$$\begin{aligned} F_1^{r^2}(x, y) &= \frac{x^2 y^2 (x^4 y^2 + x^2 y^4 + x^4 - 3x^2 y^2 + y^4 - 1)}{(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - 1)(y^2 - 1)} \\ &= (2y^8 + 2y^6 + 2y^4 + y^2)x^2 + (12y^6 + 8y^4 + 2y^2)x^4 \\ &\quad + (12y^4 + 2y^2)x^6 + 2y^2 x^8 + \dots \end{aligned} \quad (5.37)$$

Démonstration. Un polyomino d'index 1 r^2 -symétrique est soit formé d'un polyomino coin minimal, d'un banc 2×2 et du même polyomino coin minimal tel qu'illustré à la figure 5.11(b), soit il est de la forme d'une hélice (figure 5.11(c)). En effet, pour être r^2 -symétrique, les quadrants diagonalement opposés doivent être identiques à 180° près et le banc 2×2 est obligatoirement centré dans le rectangle, comme représenté à la figure 5.11(a).

Lorsque le polyomino est de la forme *Coin d'index 0* · *Banc* 2×2 · *Coin d'index 0* :

- les régions 1 et 3 sont occupées par le même coin d'index 0. Dans ce cas, les régions 2 et 4 peuvent seulement avoir une cellule du banc 2×2 , autrement l'index du polyomino est supérieur à 1 ;
- les régions 2 et 4 sont occupées par le même coin d'index 0. Dans ce cas, les régions 1 et 3 peuvent seulement avoir une cellule du banc 2×2 , sinon l'index du polyomino augmenterait.

En plaçant ainsi un coin dans deux régions opposées, celui-ci contribue à la largeur et à la hauteur du polyomino global et laisse peu de choix pour les autres régions.

Il y a deux autres manières de construire un polyomino d'aire minimale plus un r^2 -symétrique, chacune menant à un polyomino en forme d'hélice :

- les régions 1 et 3 possèdent un pilier vertical ajouté au banc 2×2 et les régions 2 et 4 sont occupées par un pilier horizontal ;
- les régions 2 et 4 possèdent un pilier vertical ajouté au banc 2×2 et les régions 1 et 3 sont occupées par un pilier horizontal.

Ainsi, deux quadrants diagonalement opposés contribuent en hauteur et les deux autres, en largeur.

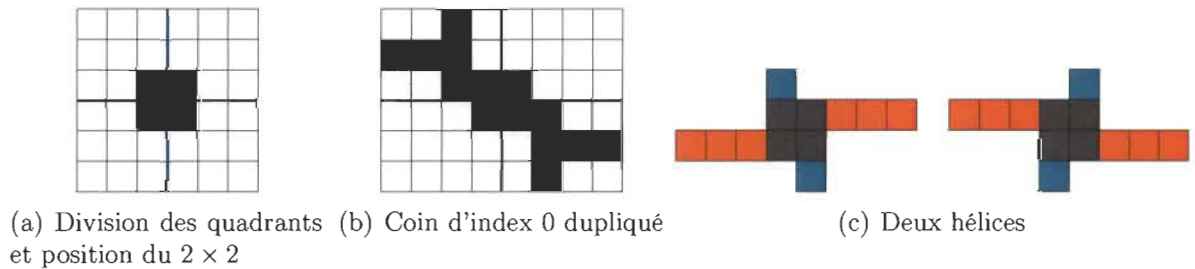


FIGURE 5.11 – Polyominos d'index 1 r^2 -invariants

De la figure 5.11(b), on conclut qu'il y a deux fois plus de polyominos d'index 1 r^2 -invariants de la forme *Coin* · *Banc* 2×2 · *Coin* inscrits dans un rectangle $2i \times 2j$, pour $i, j > 1$, que de coins d'index 0 $i \times j$, car la construction peut s'effectuer sur chacune des deux diagonales. Cela se traduit par la série génératrice

$$2 \sum_{i,j \geq 1} c_0(i, j) x^{2i} y^{2j} - x^2 y^2 = 2C_0(x^2, y^2) - x^2 y^2, \quad (5.38)$$

où on doit soustraire x^2y^2 , puisque le banc 2×2 appartient aux deux diagonales et où $C_0(x, y)$ est la série génératrice des coins d'index 0 donnée par l'équation (3.5). On retrouve une substitution de x par x^2 et de y par y^2 dans la série génératrice $C_0(x, y)$, car chaque cellule du polyomino coin apporte deux unités en largeur et deux unités en hauteur au polyomino r^2 -invariant.

Ensuite, ceux en forme d'hélice sont décrits par la série

$$\frac{2x^4y^4}{(1-x^2)(1-y^2)}. \quad (5.39)$$

En effet, les deux hélices les plus petites sont inscrites dans un carré $4 \times 4 : 2x^4y^4$. À partir d'une des hélices, on peut ajouter un certain nombre de cellules horizontalement ou verticalement. Pour chaque cellule ajoutée d'un côté, une cellule est placée de l'autre côté. De plus, les pales verticales peuvent être de longueurs différentes des pales horizontales. Ainsi, l'ajout horizontal de cellules est indépendant de l'ajout vertical, cela entraîne une division par $1-x^2$ et $1-y^2$, car c'est équivalent à $2x^4y^4 \sum_{i,j \geq 0} x^{2i}y^{2j}$.

Ainsi, en additionnant (5.38) avec (5.39), on obtient $F_1^{r^2}(x, y)$. $\square$

En particulier, si on considère uniquement les polyominos d'index 1 inscrits dans un carré, ceux qui sont r^2 -symétriques sont construits en dupliquant un coin d'index 0 inscrit dans un carré de manière analogue à la figure 5.11(b) ou en forme d'hélice avec des pales de même longueur (les mêmes que les polyominos d'index 1 r -invariants). Avec les mêmes arguments qu'à la proposition 5.31, on a le résultat suivant.

Proposition 5.32. Soit $F_1^{r^2, \square}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 1 r^2 -symétriques inscrits dans un carré, alors

$$\begin{aligned} F_1^{r^2, \square}(x, y) &= 2C_0^{\square}(x^2, y^2) - x^2y^2 + \frac{2x^4y^4}{1-x^2y^2} = -\frac{(3\sqrt{1-4x^2y^2}-4)x^2y^2}{\sqrt{1-4x^2y^2}} \quad (5.40) \\ &= x^2y^2 + 8x^4y^4 + 24x^6y^6 + 80x^8y^8 + 280x^{10}y^{10} + 1008x^{12}y^{12} + \dots \end{aligned}$$

où $C_0^{\square}(x, y)$ est la série génératrice (3.11) des coins d'index 0 inscrits dans un carré.

Finalement, les polyominos r^3 -symétriques sont les mêmes que ceux qui sont r -symétriques, ainsi

$$F_1^{r^3}(x, y) = F_1^r(x, y). \quad (5.41)$$

5.4.2 Invariants sous une réflexion donnée

Proposition 5.33. Soit $F_1^h(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 1 h -symétriques, alors

$$\begin{aligned} F_1^h(x, y) &= \frac{x^2 y^2 (xy^4 - y^4 + 2xy^2 - 2y^3 - 2y^2 + x - 2y - 1)}{(y^2 - 1)^2 (x - 1)} \\ &= (14y^9 + 12y^8 + 10y^7 + 8y^6 + 6y^5 + 4y^4 + 2y^3 + y^2) x^2 \\ &\quad + (10y^7 + 6y^5 + 2y^3) x^3 + (10y^7 + 6y^5 + 2y^3) x^4 \\ &\quad + (6y^5 + 2y^3) x^5 + (6y^5 + 2y^3) x^6 + 2y^3 x^7 + 2y^3 x^8 + \dots \end{aligned} \quad (5.42)$$

Démonstration. Un polyomino h -symétrique d'index 1 contient un banc 2×2 ou un banc $2 \times t$ non dégénéré, tel qu'illustré à la figure 5.12.

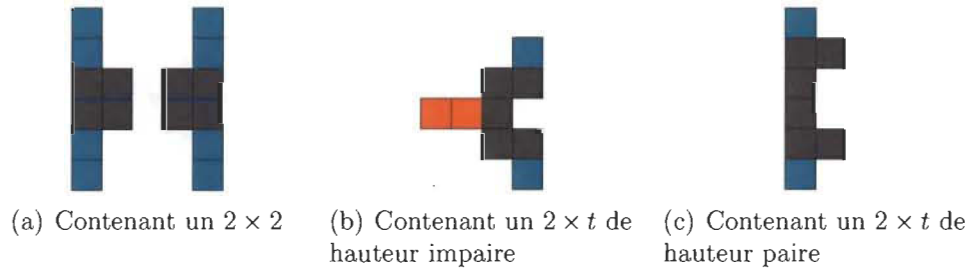


FIGURE 5.12 – Polyominos d'index 1 h -invariants

Banc 2×2 Les polyominos d'index 1 contenant un banc 2×2 sont construits en ajoutant de part et d'autre du banc un pilier vertical comme à la figure 5.12(a). De plus, il y a deux positions possibles pour la colonne. Cette multiplication ne s'applique pas lorsqu'aucune colonne n'est ajoutée au banc,

d'où la soustraction de x^2y^2 :

$$\sum_{i \geq 1} 2x^2y^{2i} - x^2y^2 = \frac{2x^2y^2}{1-y^2} - x^2y^2. \quad (5.43)$$

Pour les bancs $2 \times t$ non dégénérés, on doit distinguer les bancs de hauteur paire et les bancs de hauteur impaire tel qu'illustré aux figures 5.12(b) et 5.12(c).

Banc $2 \times t$, t paire Les h -symétriques d'index 1 contenant un banc de hauteur paire ont la même forme que le cas avec un banc 2×2 : une colonne est ajoutée de chaque côté du banc à un des deux endroits possibles. Cela se traduit par la multiplication par $2/(1-y^2)$ de la série génératrice du banc $2 \times 2i$, soit x^2y^{2i} . Par contre, lorsque la hauteur du rectangle circonscrit est également la hauteur du banc, il n'y a qu'un seul h -symétrique, d'où la soustraction de x^2y^{2i} dans la série génératrice des polyominos d'index 1 h -invariants contenant un banc non dégénéré de hauteur paire :

$$2 \left(\sum_{i \geq 2} \left(\frac{2x^2y^{2i}}{1-y^2} - x^2y^{2i} \right) \right) = \frac{2x^2y^4(y^2+1)}{(1-y^2)^2}. \quad (5.44)$$

On a multiplié par 2 l'équation précédente pour considérer les deux bancs $2 \times t$, soient celui illustré à la figure 5.12(c) et sa réflexion verticale.

Banc $2 \times t$, t impaire En ce qui concerne les polyominos avec un banc de hauteur impaire dont la série est x^2y^{2i+1} , ceux-ci ont également deux colonnes verticales de même hauteur de part et d'autre du banc, ce qui se traduit par la multiplication par $2/(1-y^2)$. En plus de ces colonnes, une rangée horizontale de cellules peut être placée au milieu du banc, ce qui se traduit par une division par $1-x$. De plus, la soustraction de $x^2y^{2i+1}/(1-x)$ est nécessaire, car il n'y a qu'une manière de ne placer aucun pilier vertical et on l'a comptée en trop par la multiplication par 2 de $x^2y^{2i+1}/((1-y^2)(1-x))$. Finalement, comme pour le cas paire, on multiplie par deux pour les deux bancs $2 \times (2i+1)$, ce qui donne

$$2 \left(\sum_{i \geq 1} \left(\frac{2x^2y^{2i+1}}{(1-y^2)(1-x)} - \frac{x^2y^{2i+1}}{1-x} \right) \right) = \frac{2x^2y^3(y^2+1)}{(1-y^2)^2(1-x)}. \quad (5.45)$$

En additionnant les séries pour les polyominos d'index 1 h -symétriques contenant un banc 2×2 (5.43), un banc $2 \times t$ non dégénéré tel que t est paire (5.44) ou un banc $2 \times t$ tel que t est impaire (5.45), on obtient moyennant quelques simplifications l'égalité (5.42). $\square$

Proposition 5.34. Soit $F_1^{h,\square}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale plus un h -symétriques inscrits dans un carré, alors

$$\begin{aligned} F_1^{h,\square}(x, y) &= \frac{x^2 y^2 (x^4 y^4 + 2x^3 y^3 - 2x^2 y^2 + 2xy + 1)}{(x^2 y^2 - 1)^2} \\ &= x^2 y^2 + 2x^3 y^3 + 6x^5 y^5 + 10x^7 y^7 + 14x^9 y^9 + 18x^{11} y^{11} + 22x^{13} y^{13} + \dots \end{aligned} \quad (5.46)$$

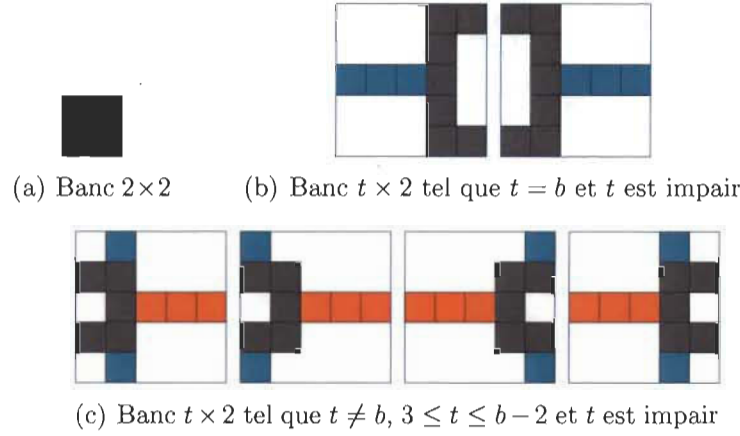


FIGURE 5.13 – Polyominos d'index 1 h -symétriques inscrits dans un carré $b \times b$

Démonstration. Dans un carré, les trois formes possibles d'un polyomino d'index 1 h -symétrique sont présentées à la figure 5.13.

- La première forme contient un banc 2×2 . Or, le seul polyomino à être h -symétrique et inscrit dans un carré parmi les polyominos d'index 1 contenant un banc 2×2 est le banc 2×2 , car les autres sont tous inscrits dans un rectangle $2 \times b$, $b \geq 3$. La série suivante décrit donc ce cas :

$$x^2 y^2. \quad (5.47)$$

- La deuxième forme est faite d'un banc de la même hauteur que le carré circonscrit auquel un pilier horizontal est ajouté. Il existe deux copies par carré à partir

de $t = 3$, tel que présenté à la figure 5.13(b). Ainsi,

$$2 \sum_{i \geq 1} (xy)^{2i+1} = \frac{2x^3y^3}{1 - x^2y^2} \quad (5.48)$$

est la série génératrice du deuxième cas.

- Finalement, on peut également placer un banc de hauteur impaire et inférieure à la hauteur du carré. À celui-ci, on ajoute un pilier horizontal et deux verticaux de part et d'autre du banc comme à la figure 5.13(c). Combien y a-t-il de hauteurs de banc possibles satisfaisant ces conditions ?

Soit un carré $b \times b$ tel que b est impaire et $b \geq 5$. Lorsque $b = 5$, il y en a 1 : le banc 2×3 . Lorsque $b = 7$, il y en a 2 : les bancs 2×3 et 2×5 . De manière générale, il y a toujours un banc de plus que le cas précédent. Ainsi, on constate que le nombre $\lambda(2i + 1)$ de bancs satisfait la récurrence suivante

$$\lambda(2i + 1) = \lambda(2i - 1) + 1 \quad (5.49)$$

avec $\lambda(5) = 1$. Par induction, on peut montrer que le nombre $\lambda(2i + 1) = i - 1$, car cette égalité satisfait la récurrence et la condition initiale. Ainsi, la série génératrice $\Lambda(x, y)$ associée à λ est

$$\Lambda(x, y) = \sum_{i \geq 2} (i - 1) (xy)^{2i+1} = \frac{x^5y^5}{(1 - x^2y^2)^2}.$$

Pour une hauteur donnée, il y a quatre polyominos h -symétriques (voir figure 5.13(c)). Donc, la série génératrice décrivant les polyominos d'index 1 h -symétriques inscrits dans un carré $(2i + 1) \times (2i + 1)$ contenant un banc $2 \times t$, $3 \leq t < 2i + 1$ et t impair est

$$4\Lambda(x, y) = \frac{4x^5y^5}{(1 - x^2y^2)^2}. \quad (5.50)$$

En additionnant (5.47), (5.48) et (5.50), la série recherchée est (5.46). $\square$

Proposition 5.35. Soit $F_1^{d_1}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale plus un d_1 -invariants, alors

$$\begin{aligned} F_1^{d_1}(x, y) &= \frac{x^2 y^2 (2x^3 y^3 + x^2 y^2 - 1)}{(2xy - 1)(xy - 1)^2} \\ &= x^2 y^2 + 4y^3 x^3 + 10y^4 x^4 + 20x^5 y^5 + 38y^6 x^6 \\ &\quad + 72y^7 x^7 + 138y^8 x^8 + 268y^9 x^9 + \dots \end{aligned} \quad (5.51)$$

Démonstration. Un polyomino d'index 1 d_1 -symétrique possède un banc 2×2 sur la diagonale et possède une des deux formes suivantes présentées à la figure 5.14 :

- (a) coin d'index 0 non dégénéré $\cdot 2 \times 2 \cdot$ coin d'index 0 non dégénéré ;
- (b) équerre $\cdot 2 \times 2 \cdot$ équerre.

Le polyomino coin d'index 0 doit être non dégénéré afin que les cas (a) et (b) soient disjoints.

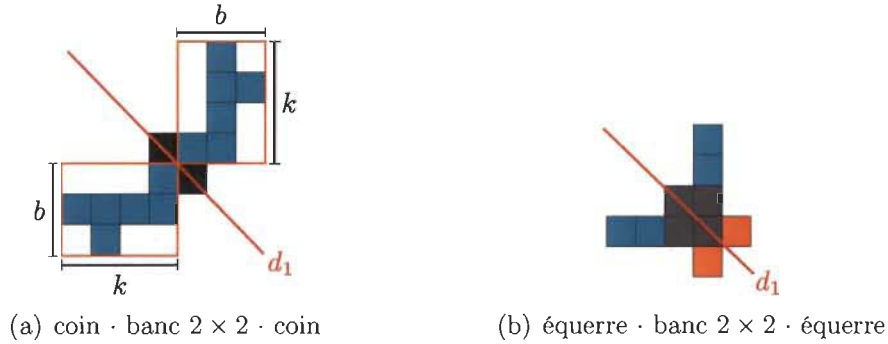


FIGURE 5.14 – Polyominos d'index 1 d_1 -symétriques

Dans le premier cas, il y a autant de coins d'index 0 non dégénérés inscrits dans un $k \times b$ que de polyominos d'index 1 d_1 -invariants inscrits dans un $(b + k) \times (b + k)$. Ainsi, la série génératrice décrivant cette situation est

$$\sum_{b, k \geq 1} \tilde{c}_0(b, k) x^{b+k} y^{b+k} = \tilde{C}_0(xy, xy), \quad (5.52)$$

où $\tilde{C}_0(x, y)$ est donné par (3.12).

Dans le deuxième cas, il y a deux équerres à placer, illustrées en bleu et en orange à la figure 5.14(b). Soit le pilier horizontal bleu. Celui-ci a deux positions possibles le long du banc 2×2 . Une fois ce choix fait, cela détermine entièrement la position du pilier vertical bleu. Puisque chaque cellule placée en largeur est également placée en hauteur, le nombre de façons de former l'équerre bleue est donné par la série

$$1 + \frac{2xy}{1 - xy},$$

où on additionne 1 pour considérer la situation où aucune équerre n'est ajoutée au banc 2×2 . Cette série est la même pour les piliers oranges. Ces équerres sont ajoutées au banc 2×2 et par le principe du produit, la série génératrice

$$x^2 y^2 \left(1 + \frac{2xy}{1 - xy} \right)^2 \quad (5.53)$$

décrit le deuxième cas.

Conséquemment, en additionnant (5.52) et (5.53), on a (5.51). $\square$

Par les mêmes arguments que pour les polyominos d'index 0 aux propositions 5.22 et 5.24, on a les égalités suivantes

$$F_1^{v,\square}(x, y) = F_1^{h,\square}(y, x) \quad (5.54)$$

$$F_1^v(x, y) = F_1^h(y, x) \quad (5.55)$$

$$F_1^{d_2}(x, y) = F_1^{d_1}(x, y). \quad (5.56)$$

5.4.3 À rotations près

Proposition 5.36. Soit $R_1(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 1 à rotations près. Alors, cette série est donnée par l'expression

$$R_1(x, y) = \frac{1}{4} \left(P_1^\square(x, y) + 2F_1^r(x, y) + F_1^{r^2, \square}(x, y) \right) + \frac{1}{2} \left(P_1(x, y) - P_1^\square(x, y) + F_1^{r^2}(x, y) - F_1^{r^2, \square}(x, y) \right) \quad (5.57)$$

où $P_1^\square(x, y)$, $F_1^r(x, y)$, $F_1^{r^2, \square}(x, y)$, $P_1(x, y)$ et $F_1^{r^2}(x, y)$ sont respectivement donnés aux équations (3.44), (5.36), (5.40), (3.42) et (5.37). La forme rationnelle de $R_1(x, y)$ est développée en annexe à la section A.2. Au tableau 5.3, on présente le nombre de polyominos de cette catégorie en fonction des dimensions du rectangle circonscrit.

Démonstration. En appliquant le lemme de Burnside pour le groupe cyclique $\mathcal{C}_4$ sur les polyominos d'index 1 carrés et le groupe $\mathcal{C}_2 = \{1, r^2\}$ sur ceux d'index 1 rectangulaires non carrés, on obtient la série génératrice des polyominos d'index 1 à rotations près :

$$R_1(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{g \in \mathcal{C}_4} F_1^{g, \square}(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{g \in \mathcal{C}_2} \left(F_1^g(x, y) - F_1^{g, \square}(x, y) \right). \quad (5.58)$$

En considérant les égalités $F_1^1(x, y) = P_1(x, y)$, $F_1^{1, \square}(x, y) = P_1^\square(x, y)$ et $F_1^{r, \square}(x, y) = F_1^{r^3, \square}(x, y) = F_1^r(x, y)$ dans (5.58), on a (5.57). $\square$

Proposition 5.37. Soit $R_1(q)$ la série génératrice des polyominos d'index 1 non-inscrits d'aire n à rotations près, alors

$$R_1(q) = -\frac{q^4 \delta(q)}{(q^2 - 1)(q - 1)^3 (2q^2 - 1)(q^3 - q^2 + q - 1)(2q - 1)^2} \quad (5.59)$$

où

$$\begin{aligned} \delta(q) = & 8q^{12} - 16q^{11} - 14q^{10} - 32q^9 - 66q^8 + 32q^7 \\ & + q^6 + 23q^5 - 11q^4 + 28q^3 - 21q^2 + 5q - 1. \end{aligned}$$

$b \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	3	10	19	34	51	74	99	130
3	0	3	11	77	188	375	658	1057	1592	2283
4	0	10	77	149	763	1644	3097	5360	8647	13268
5	0	19	188	763	1045	4729	9468	17363	29778	48425
6	0	34	375	1644	4729	5651	23899	46430	84301	145130
7	0	51	658	3097	9468	23899	26763	109961	211188	383943
8	0	74	1057	5360	17363	46430	109961	119387	483947	927380
9	0	99	1592	8647	29778	84301	211188	483947	516825	2083153
10	0	130	2283	13268	48425	145130	383943	927380	2083153	2203511

TABLEAU 5.3 – Nombre de polyominos d'index 1 inscrits dans un $k \times b$ à rotations près

Démonstration. Par définition, les polyominos d'index 1 d'aire n sont tous les polyominos d'index 1 inscrits dans un rectangle $k \times b$ tel que $n = b + k$. De plus, par la propriété des exposants, en substituant q à x et y dans les séries génératrices des polyominos d'index 1 inscrits, les polyominos tels que $n = b + k$ sont tous regroupés comme coefficients de q^{b+k} . Ainsi, du lemme de Burnside et en faisant agir le groupe $\mathcal{C}_4$ sur les polyominos d'index 1 d'aire donnée, on a

$$R_1(q) = \frac{1}{|\mathcal{C}_4|} \sum_{g \in \mathcal{C}_4} F_1^g(q, q) = \frac{1}{4} \left(P_1(q, q) + 2F_1^r(q, q) + F_1^{r^2}(q, q) \right).$$

En utilisant les expressions (3.42), (5.36) et (5.37), associées respectivement à $P_1(x, y)$, à $F_1^r(x, y)$ et à $F_1^{r^2}(x, y)$, on a la forme rationnelle (5.59). $\square$

Le développement en série de $R_1(q)$ est

$$\begin{aligned} R_1(q) = & q^4 + 3q^5 + 21q^6 + 96q^7 + 371q^8 + 1189q^9 + 3421q^{10} + 8982q^{11} \\ & + 22201q^{12} + 52355q^{13} + 119591q^{14} + 266636q^{15} + 584595q^{16} \\ & + 1265553q^{17} + 2715113q^{18} + 5784562q^{19} + \dots \end{aligned}$$

Par exemple, il n'y a effectivement qu'un polyomino d'index 1 d'aire 4 à rotations près, soit le banc 2×2 .

5.4.4 À symétries près

Proposition 5.38. Soit $S_1(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 1 à symétries près, alors

$$\begin{aligned} S_1(x, y) = & \frac{1}{8} \left(P_1^\square(x, y) + 2F_1^r(x, y) + F_1^{r^2, \square}(x, y) + F_1^{h, \square}(x, y) + F_1^{v, \square}(x, y) + 2F_1^{d_1}(x, y) \right) \\ & + \frac{1}{4} \left(P_1(x, y) - P_1^\square(x, y) + F_1^{r^2}(x, y) - F_1^{r^2, \square}(x, y) + F_1^h(x, y) - F_1^{h, \square}(x, y) \right. \\ & \left. + F_1^v(x, y) - F_1^{v, \square}(x, y) \right). \end{aligned} \quad (5.60)$$

La forme rationnelle de $S_1(x, y)$ est présentée en annexe à la section A.3 et le tableau 5.4 présente le nombre de polyominos de cette catégorie en fonction des dimensions du rectangle circonscrit.

Démonstration. Par le lemme de Burnside, en appliquant le groupe des symétries $\mathcal{D}_4$ à l'ensemble des polyominos d'index 1 inscrits dans un carré et le groupe $\mathcal{H} = \{1, r^2, h, v\}$ aux polyominos d'index 1 inscrits dans un rectangle non carré, la série génératrice des polyominos d'aire minimale plus un inscrits à symétries près est

$$S_1(x, y) = \frac{1}{8} \sum_{g \in \mathcal{D}_4} F_1^{g, \square}(x, y) + \frac{1}{4} \sum_{g \in \mathcal{H}} \left(F_1^g(x, y) - F_1^{g, \square}(x, y) \right).$$

Cette expression est équivalente à (5.60), en considérant les égalités des propositions 5.29 à 5.35 et celles des équations (5.54) à (5.56). $\square$

Proposition 5.39. Soit $S_1(q)$ la série génératrice des polyominos d'index 1 non-inscrits d'aire n à symétries près, alors

$$S_1(q) = - \frac{q^4 \gamma(q)}{(1+q)^2 (q-1)^4 (2q^2-1) (q^3-q^2+q-1) (2q-1)^2} \quad (5.61)$$

où

$$\begin{aligned} \gamma(q) = & 12q^{12} - 44q^{11} + 16q^{10} - 91q^9 + 14q^8 + 16q^6 \\ & + 13q^5 - 2q^4 + 13q^3 - 15q^2 + 5q - 1. \end{aligned}$$

$b \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	2	6	11	19	28	40	53	69
3	0	2	7	39	96	188	332	529	800	1142
4	0	6	39	77	383	822	1551	2680	4327	6634
5	0	11	96	383	529	2366	4738	8683	14894	24214
6	0	19	188	822	2366	2835	11952	23215	42154	72565
7	0	28	332	1551	4738	11952	13402	54983	105600	191974
8	0	40	529	2680	8683	23215	54983	59728	241977	463690
9	0	53	800	4327	14894	42154	105600	241977	258483	1041580
10	0	69	1142	6634	24214	72565	191974	463690	1041580	1101887

TABLEAU 5.4 – Nombre de polyominos d'index 1 inscrits dans un $k \times b$ à symétries près

Démonstration. Par le même principe de substitution qu'à la proposition 5.37 et en faisant agir le groupe des symétries $\mathcal{D}_4$ à l'ensemble des polyominos voulus, on a

$$\begin{aligned}
S_1(q) &= \frac{1}{8} \sum_{g \in \mathcal{D}_4} F_1^g(q, q) \\
&= \frac{1}{8} \left(P_1(q, q) + 2F_1^r(q, q) + F_1^{r^2}(q, q) + F_1^h(q, q) + F_1^v(q, q) + 2F_1^{d_1}(q, q) \right).
\end{aligned}$$

□

Le développement en séries de MacLaurin de $S_1(q)$ correspond à

$$\begin{aligned}
S_1(q) &= q^4 + 2q^5 + 13q^6 + 50q^7 + 192q^8 + 599q^9 + 1723q^{10} + 4499q^{11} \\
&\quad + 11122q^{12} + 26190q^{13} + 59831q^{14} + 133336q^{15} + 292356q^{16} \\
&\quad + 632801q^{17} + 1357655q^{18} + 2892313q^{19} + \dots
\end{aligned}$$

Au tableau 5.5, on regroupe le nombre de polyominos d'index 1 d'aire n en fonction des trois manières de les compter. Il semblerait ainsi que, lorsque n devient grand,

$$s_1(n) \approx p_1(n)/8 \quad \text{et} \quad r_1(n) \approx p_1(n)/4.$$

Autrement dit, il y a de moins en moins de polyominos d'index 1 symétriques par rapport au nombre total.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s_1(n)$	1	2	13	50	192	599	1723	4499	11122
$r_1(n)$	1	3	21	96	371	1189	3421	8982	22201
$p_1(n)$	1	12	80	384	1468	4756	13656	35928	88740

TABLEAU 5.5 – Nombre de polyominos d'index 1 d'aire n à symétries près ($s_1(n)$), à rotations près ($r_1(n)$) et à translations près ($p_1(n)$)

5.5 Minimaux plus deux

Pour les autres index traités, les polyominos à rotations près et les polyominos à symétries près sont énumérés en fonction de leur rectangle circonscrit. Pour ce faire, les polyominos à translations près inscrits dans un carré doivent être bien connus, puisqu'ils ont plus de symétries. La méthode développée pour connaître la série génératrice des polyominos inscrits dans un carré est basée sur l'existence d'une formule exacte en fonction de la largeur et de la hauteur, se référer par exemple aux pages 50 et 64. Par contre, aucune formule n'a été extraite des séries génératrices connues sur les index 2 (voir chapitre 4), ce qui ne permet pas de compter les polyominos d'index 2 à rotations près ou à symétries près en fonction des dimensions du rectangle circonscrit. Par contre, cette information n'est pas nécessaire pour étudier les polyominos d'index 2 non-inscrits, c'est-à-dire d'aire donnée. Puisque l'objectif est de compter les polyominos en fonction de leur aire, le but est quand même atteint. Ainsi, après l'étude des polyominos d'aire minimale plus deux symétriques sous $\mathcal{D}_4$, les séries génératrices des polyominos d'index 2 d'aire n à rotations près et à symétries près sont trouvées.

Pour ce faire, les symétries des structures d'index 2 doivent être étudiées comme pour les polyominos d'index 1. Aux figure 5.15 à 5.19, les cinq catégories de polyominos d'index 2 invariants sous une certaine symétrie sont illustrées et un représentant est montré. La preuve que cette liste est complète est effectuée au moment d'entreprendre la symétrie considérée.

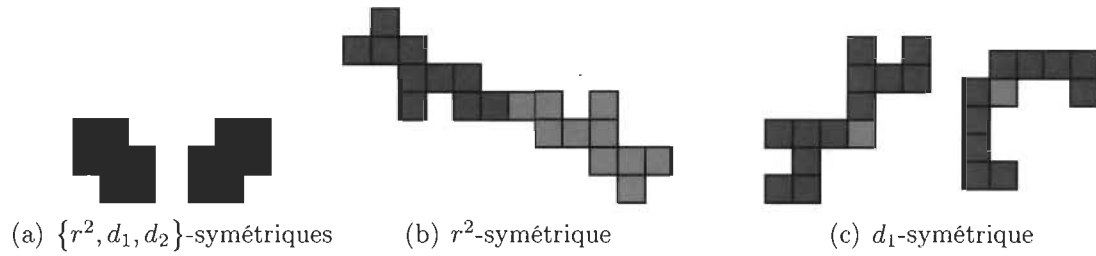


FIGURE 5.15 – Les Banc×Banc et leurs symétries

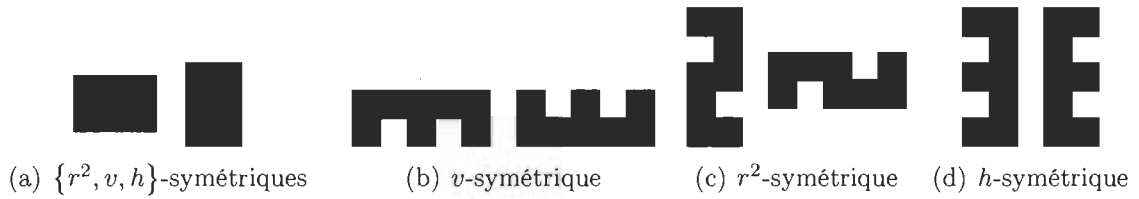
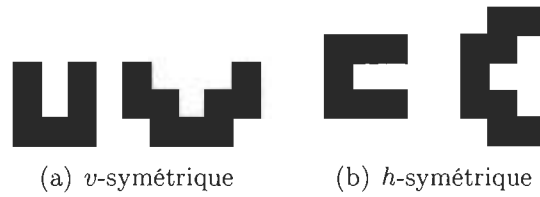

 FIGURE 5.16 – Les premiers $t \times 2$ et leurs symétries


FIGURE 5.17 – Les bols et leurs symétries

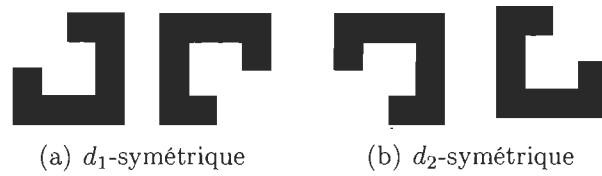


FIGURE 5.18 – Les grands rectangles et leurs symétries

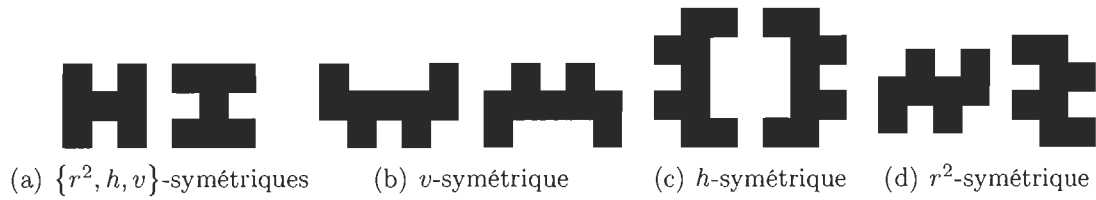


FIGURE 5.19 – Les quatre-feuilles et leurs symétries

5.5.1 Invariants sous une rotation donnée

Proposition 5.40. Soit $F_2^1(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 invariants sous la rotation de 0° , alors

$$F_2^1(x, y) = P_2(x, y), \quad (5.62)$$

où $P_2(x, y)$ est la série génératrice des polyominos d'index 2 inscrits, donnée à l'équation (4.52).

Démonstration. Directement du fait que tous les polyominos d'index 2 sont symétriques sous la rotation de 0° . $\square$

Proposition 5.41. Soit $F_2^r(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 r -symétriques et $F_2^{r^3}(x, y)$, celle des polyominos d'index 2 r^3 -symétriques, alors

$$F_2^r(x, y) = F_2^{r^3}(x, y) = 0. \quad (5.63)$$

Démonstration. Suite à l'étude des symétries des différentes catégories de polyominos d'index 2 aux figures 5.15 à 5.19, on remarque qu'il n'y en a aucune qui soit invariante sous la rotation r , ni sous r^3 . Plus rigoureusement, voici quelques propriétés utiles pour démontrer qu'il n'y a aucun polyomino P r -symétrique d'index 2 :

- P est inscrit dans un carré ;
- Les portions de P contenues à l'intérieur des quatre quadrants du carré circonscrit sont identiques (à 90° près) ;
- Les polyominos d'index 2 contiennent soit deux trous linéaires, soit un trou linéaire et un banc 2×2 , soit deux bancs 2×2 .

On construit le polyomino r -symétrique autour du centre du carré. Pour ce faire, on doit distinguer deux situations : le carré circonscrit est de dimension paire ou impaire, car la division des quadrants est différente selon la parité des côtés du carré, tel qu'illustré à la figure 5.20. Dans le premier cas, pour que le polyomino soit r -invariant, il doit posséder soit un banc 2×2 en son centre, soit aucun, c'est-à-dire

que les quatre cases autour du centre sont vides (voir figures 5.21 et 5.22). Dans le deuxième cas, un polyomino r -symétrique a soit une cellule au centre du carré, soit il n'en a pas (voir figure 5.23). Ces deux situations sont étudiées dans les prochains paragraphes.

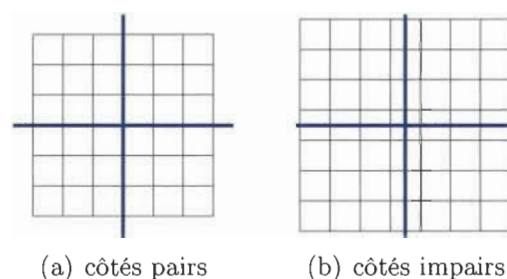


FIGURE 5.20 – Division des quadrants d'un polyomino en fonction de la parité des côtés de son carré circonscrit

- **côtés pairs**

- Le polyomino possède un banc 2×2 en son centre. Pour le compléter et atteindre l'index 2, on doit ajouter soit un autre banc 2×2 , soit un trou linéaire. Dans les deux cas, on doit considérer deux situations : le banc 2×2 (resp. le trou linéaire) chevauche deux régions ou est placé entièrement dans un quadrant. Pour conserver la symétrie sous 90° , le banc 2×2 (resp. trou linéaire) doit être dupliqué dans les autres quadrants, tel qu'illustré à la figure 5.21. De cette manière, l'index du polyomino est forcément supérieur à 2. Ainsi, un polyomino d'index 2 r -symétrique ne peut pas avoir de banc 2×2 au centre du carré circonscrit ;
- Le polyomino ne contient pas de banc 2×2 au centre du carré circonscrit alors, comme on peut le constater à la figure 5.22, le polyomino r -symétrique issu de cette situation est d'index supérieur à 2. En effet, relier les quatre régions de manière à créer un polyomino r -symétrique engendre la formation de plus de deux trous linéaires. Pour s'en convaincre, on peut reprendre les polyominos de la figure 5.21 et enlever le banc 2×2 central : le polyomino est encore d'index supérieur à 2 ;



(a) Ajout d'un banc 2×2 (en orange) et ses conséquences (en bleu) (b) Ajout d'un trou linéaire (en orange) et ses conséquences (en bleu)

FIGURE 5.21 – Polyominos r -symétriques inscrits dans un carré aux dimensions paires tels que les quatre cases autour du centre sont occupées

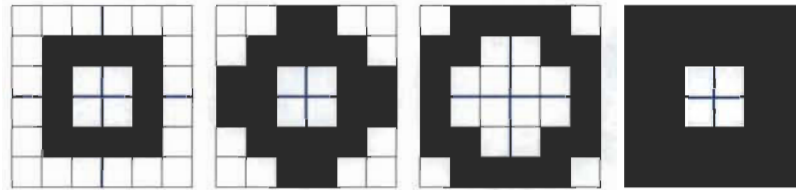


FIGURE 5.22 – Polyominos r -symétriques inscrits dans un carré aux dimensions paires tels que les quatre cases autour du centre ne sont pas occupées

• côtés impairs

- Le polyomino a une seule cellule au centre du carré. On désire augmenter l'index du polyomino à 2. Or, par des arguments analogues au cas pair, l'ajout d'un trou linéaire ou d'un banc 2×2 donne un polyomino d'index supérieur à 2, tel qu'illustré à la figure 5.23. En plus des deux situations illustrées, il ne peut pas y avoir un banc 2×2 et un trou linéaire, car cela conduit également à un polyomino d'index supérieur à 2. Ainsi, un polyomino d'index 2 r -symétrique ne peut pas avoir une cellule unique au centre du carré circonscrit ;
- Le polyomino n'a pas de cellule au centre du carré. On retrouve les mêmes situations illustrées à la figure 5.23, mais en éliminant la cellule centrale. Aussi, il ne peut pas y avoir un mélange d'un banc 2×2 avec un trou linéaire. En effet, dans tous les cas, on constate que le polyomino obtenu suite à la contrainte d'invariance sous la rotation de 90° est d'index supérieur à 2.

Ainsi, il n'y a aucun cas où un polyomino est r -symétrique et d'index 2. Par symétrie, les mêmes arguments tiennent pour les polyominos d'index 2 r^3 -invariants.

□



(a) Ajout d'un banc 2×2 (en orange) et ses conséquences (en bleu) (b) Ajout d'un trou linéaire (en orange) et ses conséquences (en bleu)

FIGURE 5.23 – Polyominos r -symétriques inscrits dans un carré aux dimensions impaires tel que la case centrale est occupée

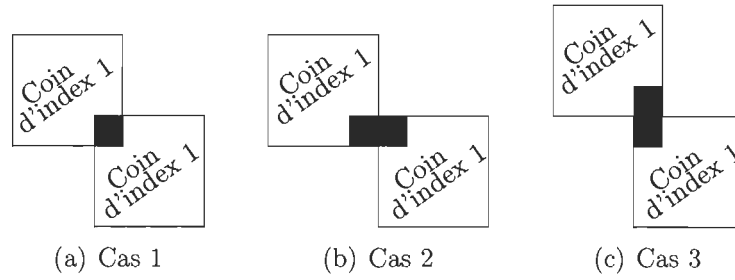
Il y a quatre types de polyominos d'index 2 r^2 -invariants : les Banc $\times$ Banc, les premiers $t \times 2$ ou $2 \times t$ en forme de S , les H et les dromadaires, respectivement illustrés aux figures 5.15, 5.16, 5.19(a) et 5.19(d). Une proposition pour chacun de ces cas est présentée et qui sont ensuite regroupés afin d'obtenir la série génératrice des polyominos d'index 2 r^2 -symétriques.

Proposition 5.42. Soit $F_{2,BB}^{r^2}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 r^2 -invariants de forme Banc $\times$ Banc, alors

$$\begin{aligned}
 F_{2,BB}^{r^2}(x, y) &= 2C_1(x^2, y^2) \left(\frac{1 + x + y}{xy} \right) \\
 &= (26y^8 + 26y^7 + 10y^6 + 10y^5 + 2y^4 + 2y^3) x^3 \\
 &\quad + (26y^7 + 10y^5 + 2y^3) x^4 + (52y^6 + 52y^5 + 10y^4 + 10y^3) x^5 \\
 &\quad + (52y^5 + 10y^3) x^6 + (26y^4 + 26y^3) x^7 + 26y^3 x^8 + \dots
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

où $C_1(x, y)$ est donnée par (3.33).

Démonstration. Tel que présenté à la figure 5.24, les polyominos d'aire minimale plus deux r^2 -symétriques sont constitués de deux copies identiques à 180° près d'un polyomino coin d'index 1, lesquelles peuvent être agencées de trois façons : en superposant les deux cellules de coin, en les plaçant côte à côte ou en les positionnant une au-dessus de l'autre. Ces agencements peuvent se faire selon une des deux diagonales et aucun polyomino n'appartient aux deux diagonales. Ces trois cas sont analogues à ceux qui interviennent dans la construction des polyominos d'aire minimale r^2 -symétriques à la proposition 5.17. Par conséquent, on y retrouve le même genre de substitutions.

FIGURE 5.24 – Banc $\times$ Banc r^2 -invariants

Soit $C_1(x, y)$ la série génératrice des polyominos coins d'index 1, donnée par l'équation (3.33).

- Dans le premier cas, chaque cellule dupliquée du coin d'index 1 contribue à doubler la largeur et la hauteur du polyomino à l'exception de celle superposée, ce qui donne $C_1(x^2, y^2)/(xy)$.
- Dans le deuxième cas, les dimensions du polyomino sont également doublées à l'exception de la hauteur des cellules de coin côte à côte d'où $C_1(x^2, y^2)/y$.
- De manière similaire au cas 2, le dernier cas satisfait la série $C_1(x^2, y^2)/x$.

En additionnant ces trois cas et en multipliant par 2 pour tenir compte des deux diagonales, on obtient (5.64). $\square$

Proposition 5.43. Soit $F_{2,S}^{r^2}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 r^2 -symétriques contenant un premier $t \times 2$ en forme de S, alors

$$\begin{aligned}
 F_{2,S}^{r^2}(x, y) &= \frac{2BC_{2 \times 2}(x^2, y^2) + 2BC_{h_1}(x^2, y^2) + 2BC_{h_2}(x^2, y^2)}{xy^2} \\
 &\quad - \frac{x^3y^2}{1-y^2} \left(1 + \frac{2x^2}{1-x^2}\right) - \frac{2x^5y^2}{(1-x^2)(1-y^2)} \left(1 + \frac{2x^2}{1-x^2}\right) \quad (5.65) \\
 &= (3y^{10} + 3y^8 + 3y^6 + 3y^4 + y^2) x^3 + (26y^8 + 22y^6 + 18y^4 + 4y^2) x^5 \\
 &\quad + (68y^6 + 48y^4 + 8y^2) x^7 + (90y^4 + 12y^2) x^9 + 16x^{11}y^2 + \dots
 \end{aligned}$$

où les expressions rationnelles des $BC_i(x, y)$ sont présentées aux propositions 3.16, 3.19 et 3.20.

Démonstration. Un polyomino d'index 2 r^2 -invariant contenant un premier $t \times 2$ en forme de S est composé de deux bancs-coins identiques à 180° près, tel qu'illustré à la

figure 5.25. Les deux bancs sont placés de telle sorte qu'ils forment le $t \times 2$. Ce type de coins peut s'agencer de deux manières pour former un r^2 -symétrique, lesquelles ne sont pas disjointes et où on doit soustraire les cas apparaissant dans les deux constructions.

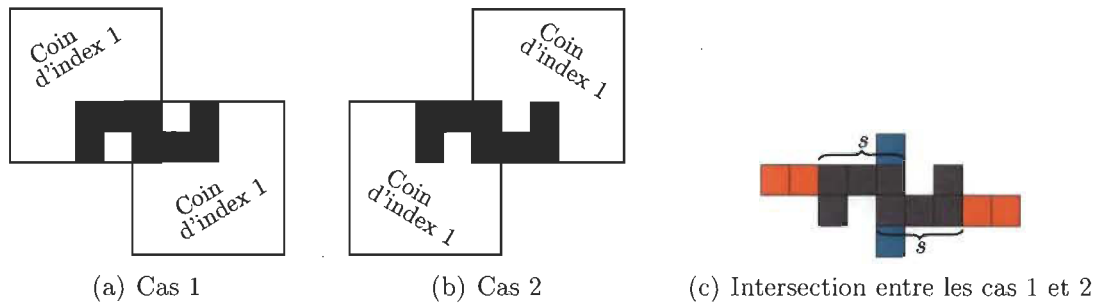


FIGURE 5.25 – Premiers $t \times 2$ en forme de S r^2 -invariants

Cas 1 Le banc-coin peut être constitué d'un banc 2×2 ou d'un banc $t \times 2$ non dégénéré tel que les pattes du banc sont vers le côté du rectangle circonscrit, dont les séries sont $BC_{2 \times 2}(x, y)$ et $BC_{h_1}(x, y)$ (équations (3.34) et (3.35)). Puisqu'il y a autant de bancs-coins inscrits dans un $k \times b$ que de polyominos d'index 2 r^2 -symétriques de la forme de la figure 5.25(a) inscrits dans un $(2k-1) \times (2b-2)$, la série génératrice du cas 1 est

$$\frac{1}{xy^2} (BC_{2 \times 2}(x^2, y^2) + 2BC_{h_1}(x^2, y^2)), \quad (5.66)$$

où la série $BC_{h_1}(x^2, y^2)$ est multipliée par 2 car, en appliquant une symétrie horizontale aux polyominos de la même forme que la figure 5.25(a), on retrouve d'autres r^2 -symétriques d'index 2 contenant un premier $t \times 2$ en forme de S .

Cas 2 Tel qu'illustré à la figure 5.25(b), le banc situé dans le coin peut être un banc 2×2 ou un banc $t \times 2$ non dégénéré de manière à ce que son dos soit adjacent au côté du rectangle circonscrit, dont les séries sont $BC_{2 \times 2}(x, y)$ et $BC_{h_2}(x, y)$ (équations (3.34) et (3.37)). Pour les mêmes raisons qu'au cas 1, la



série génératrice du cas 2 est

$$\frac{1}{xy^2} (BC_{2 \times 2}(x^2, y^2) + 2BC_{h_2}(x^2, y^2)). \quad (5.67)$$

Cependant, tel que mentionné ci-haut et illustré à la figure 5.25(c), ces deux cas ne sont pas disjoints. Dans cette situation, le banc est de dimension $(2s-1) \times 2$ et possède la série $2x^{2s-1}y^2$ pour $s \geq 3$ et x^3y^2 lorsque $s = 2$. À ce banc, on peut ajouter un pilier vertical. Pour chaque cellule ajoutée sous le banc une autre doit être ajoutée au-dessus pour conserver la symétrie : $1/(1-y^2)$ est la série qui décrit l'ajout de cette rangée. Finalement, deux rangées horizontales peuvent être placées de part et d'autre du banc. Comme pour la rangée verticale, les cellules sont toujours ajoutées par paire. Si on place une cellule ou plus de chaque côté du $t \times 2$, la rangée horizontale créée a deux positions possibles. Donc, cette rangée a pour série

$$1 + \frac{2x^2}{1-x^2}$$

où on additionne 1 pour considérer le cas où aucun pilier n'est ajouté. Par le principe de multiplication et en faisant la somme sur $s \geq 2$, la série

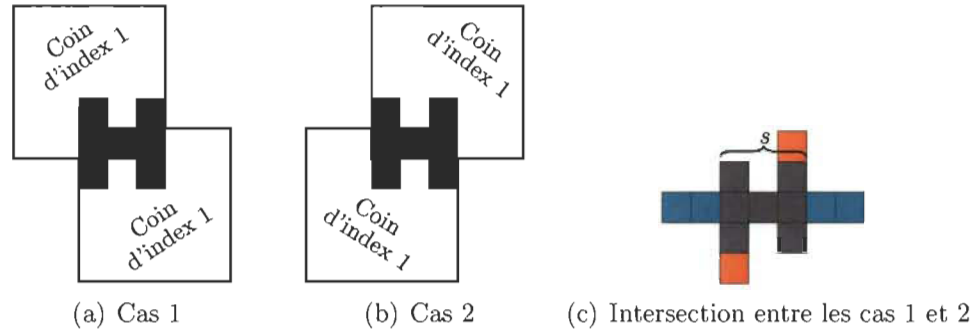
$$\begin{aligned} & \frac{x^3y^2}{1-y^2} \left(1 + \frac{2x^2}{1-x^2}\right) + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{2x^{2s-1}y^2}{1-y^2} \left(1 + \frac{2x^2}{1-x^2}\right) \\ &= \frac{x^3y^2}{1-y^2} \left(1 + \frac{2x^2}{1-x^2}\right) + \frac{2x^5y^2}{(1-x^2)(1-y^2)} \left(1 + \frac{2x^2}{1-x^2}\right) \end{aligned} \quad (5.68)$$

décrit les polyominos du cas 1 et du cas 2.

En additionnant (5.66) à (5.67) et en soustrayant (5.68), on obtient (5.65). $\square$

Proposition 5.44. Soit $F_{2,H}^{r^2}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 r^2 -symétriques contenant un H horizontal, alors

$$\begin{aligned} F_{2,H}^{r^2}(x, y) &= \frac{y^3x^3(2y^2x^4 + 2y^4x^2 + 2x^4 - 3x^2y^2 + y^4 - x^2 - 1)}{(x^2 + y^2 - 1)(1-x^2)(1-y^2)(1-x)} \\ &= (2y^9 + 2y^7 + 2y^5 + y^3)x^3 + (2y^9 + 2y^7 + 2y^5 + y^3)x^4 \\ &\quad + (16y^7 + 12y^5 + 4y^3)x^5 + (16y^7 + 12y^5 + 4y^3)x^6 + \dots \end{aligned} \quad (5.69)$$

FIGURE 5.26 – Polyominos H r^2 -invariants

Démonstration. Les polyominos d'index 2 r^2 -symétriques contenant un H horizontal $s \times 3$ ont une des deux formes présentées aux figures 5.26(a) et 5.26(b). Pour chacun des cas, il y en a autant d'inscrits dans un $(2k - s) \times (2b - 1)$ que de bancs-coins $s \times 2$ avec le dos adjacent au rectangle circonscrit inscrits dans un $k \times b$. De plus, de manière similaire à la proposition 5.43, on doit soustraire les figures qui sont communes aux cas 1 et 2, illustrées à la figure 5.26(c). Ainsi,

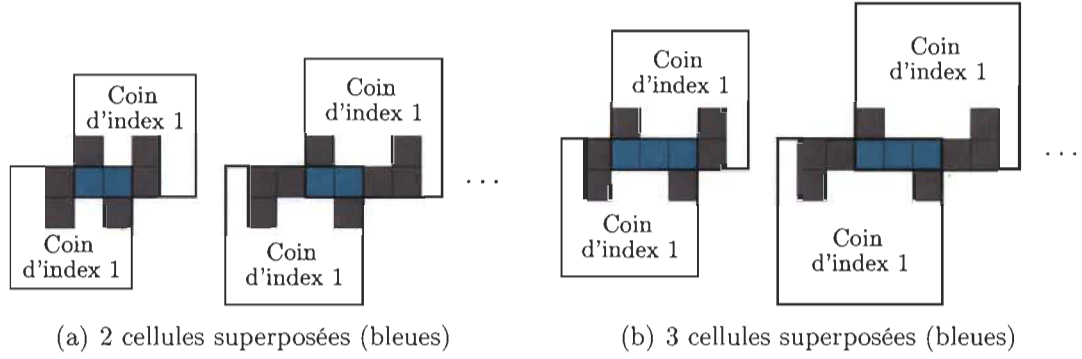
$$F_{2,H}^{r^2}(x, y) = \sum_{s=3}^{\infty} \left[\frac{2BC_{h2}(x^2, y^2, s)}{x^s y} - \frac{x^s y^3}{1 - x^2} \left(1 + \frac{2y^2}{1 - y^2} \right) \right]$$

où $BC_{h2}(x, y, s)$ est la série génératrice des bancs-coins de la proposition 3.18. Cette expression est égale à (5.69). $\square$

Proposition 5.45. Soit $F_{2,D}^{r^2}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 r^2 -invariants contenant un dromadaire horizontal, alors

$$\begin{aligned} F_{2,D}^{r^2}(x, y) &= \frac{2y^3 (y^2 x^4 + x^2 y^4 + x^4 - x^2 y^2 + y^4 - 1) x^4}{(x - 1)^3 (1 + x)^2 (x^2 + y^2 - 1) (y^2 - 1)} \\ &= (4y^7 + 4y^5 + 2y^3) x^4 + (4y^7 + 4y^5 + 2y^3) x^5 + (20y^5 + 8y^3) x^6 \\ &\quad + (20y^5 + 8y^3) x^7 + 18x^8 y^3 + 18x^9 y^3 + \dots \end{aligned} \tag{5.70}$$

Démonstration. Pour obtenir un dromadaire r^2 -symétrique, il faut dupliquer un banc-coin avec le dos adjacent au côté du rectangle circonscrit de la manière présentée à la figure 5.27. Celle-ci peut également être effectuée sur l'autre diagonale, qui correspond à une réflexion verticale des cas illustrés à la figure 5.27.

FIGURE 5.27 – Dromadaires r^2 -invariants

Pour un banc $s \times 2$ donné, il y a plusieurs façons de former un dromadaire r^2 -invariant : on doit considérer le nombre de cellules du banc qui sont superposées. Par exemple, la figure 5.27 présente des cas où les bancs ont deux et trois cellules communes. Lorsque les bancs ont deux cellules en commun, ceux-ci peuvent être de largeur s supérieure ou égale à trois. Dans la situation où il y en a trois en commun, la largeur du banc est de quatre unités ou plus. De manière générale, lorsque les bancs ont $t \geq 2$ cellules en commun, ceux-ci sont de largeur $s \geq t + 1$. En additionnant tous les cas possibles et en procédant à des substitutions similaires aux polyominos H (proposition 5.44), la série $F_{2,D}^{r^2}(x, y)$ est obtenue :

$$F_{2,D}^{r^2}(x, y) = 2 \sum_{t=2}^{\infty} \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{BC_{h2}(x^2, y^2, s)}{x^t y}, \quad (5.71)$$

où on multiplie par 2 pour considérer la construction sur une des deux diagonales et où $BC_{h2}(x, y, s)$ est donnée à la proposition 3.18. En développant (5.71), on a (5.70). $\square$

Proposition 5.46. Soit $F_2^{r^2}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'aire minimale plus deux r^2 -invariants, alors

$$\begin{aligned} F_2^{r^2}(x, y) &= F_{2,BB}^{r^2}(x, y) + F_{2,S}^{r^2}(x, y) + F_{2,S}^{r^2}(y, x) + F_{2,H}^{r^2}(x, y) \\ &\quad + F_{2,H}^{r^2}(y, x) + F_{2,D}^{r^2}(x, y) + F_{2,D}^{r^2}(y, x) \\ &= (8y^7 + 4y^5 + y^3) x^2 + (43y^7 + 25y^6 + 18y^5 + 8y^4 + 4y^3 + y^2) x^3 \\ &\quad + (34y^5 + 8y^3) x^4 + (84y^5 + 34y^4 + 18y^3 + 4y^2) x^5 + \dots \end{aligned} \quad (5.72)$$

où la forme rationnelle des séries $F_{2,i}^{r^2}(x, y)$ est donnée aux propositions 5.42 à 5.45.

Démonstration. Pour les premiers $t \times 2$ en forme de S , les H et les dromadaires, seul le représentant horizontal a été considéré. La situation où ces formes sont positionnées verticalement est en fait une rotation de 90° de ceux en position horizontale, il suffit donc d'interchanger x et y dans les séries respectives. En additionnant les polyominos d'index 2 r^2 -symétriques de la forme Banc $\times$ Banc, ceux contenant un premier $t \times 2$ ou $2 \times t$, un H horizontal ou vertical et un dromadaire horizontal ou vertical, on a alors que le nombre de polyominos d'index 2 r^2 -invariants satisfait la série génératrice (5.72).

En effet, les cas considérés forment tous les polyominos d'index 2 r^2 -invariants. Pour le montrer, on exploite le fait qu'un polyomino d'index 2 possède au plus deux trous linéaires et que les quadrants diamétralement opposés d'un polyomino r^2 -symétrique sont identiques à 180° près. En fonction de la position relative des trous linéaires, on retrouve tous les cas impliqués dans la construction de (5.72) :

- Si un trou linéaire (resp. un banc 2×2) est placé dans un des quadrants, un autre trou (resp. banc 2×2) doit être situé dans le quadrant diamétralement opposé pour que le polyomino soit r^2 -invariants. On forme ainsi un Banc $\times$ Banc.
- Si un trou linéaire chevauche deux quadrants, alors la contrainte d'être r^2 -symétrique implique qu'un deuxième trou chevauche les deux autres quadrants. Lorsque ce chevauchement est symétrique, on a un polyomino H . Dans le cas contraire, il s'agit d'un polyomino dromadaire. Pour chacune de ces deux situations, le polyomino peut être en position horizontale ou verticale. Si on place un banc 2×2 de cette même façon, on obtient un premier 3×2 ou 2×3 .
- Si un trou linéaire est placé à la frontière de deux quadrants, un deuxième se retrouve nécessairement à la frontière des deux autres quadrants afin de conserver la propriété de symétrie sous la rotation de 180° . On retrouve alors les premiers $t \times 2$ ou $2 \times t$ en forme de S . On peut également placer un banc 2×2 de cette manière et un premier 3×2 ou 2×3 est issu de la contrainte d'invariance sous la rotation de 90° , déjà obtenu précédemment.

□

5.5.2 Invariants sous une réflexion donnée

Il y a cinq catégories de polyominos d'index 2 h -symétriques. Ceux-ci contiennent un premier 3×2 , ou un premier 2×3 , ou une des formes suivantes en position verticale : un banc d'index 2, un bol symétrique, un bol parfait, un polyomino H ou un crabe. Parmi ces polyominos, les h -invariants partagent tous une forme similaire, soit l'ajout stratégique de rangées horizontales ou verticales à la structure de base. Par conséquent, les explications concernant les séries génératrices de ces rangées sont très similaires. Pour éviter d'être redondantes, ces explications sont énoncées à la première proposition uniquement, soit à la proposition 5.47. Pour les autres, soient les propositions 5.48 à 5.52, les images agiront à titre d'explications.

Proposition 5.47. Soit $F_{2,3 \times 2}^h(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 h -symétriques contenant un premier 3×2 ou 2×3 , alors

$$\begin{aligned} F_{2,3 \times 2}^h(x, y) &= x^3 y^2 \left(1 + \frac{3y^2}{1 - y^2} \right) + \frac{x^2 y^3}{(1 - x)^2} \left(1 + \frac{2y^2}{1 - y^2} \right) \\ &= (2y^{11} + 2y^9 + 2y^7 + 2y^5 + y^3) x^2 + (3y^6 + 4y^5 + 3y^4 + 2y^3 + y^2) x^3 \\ &\quad + (6y^9 + 6y^7 + 6y^5 + 3y^3) x^4 + (8y^7 + 8y^5 + 4y^3) x^5 + \dots \end{aligned} \quad (5.73)$$

Démonstration. On divise ce cas en deux catégories : ceux contenant un premier 3×2 et ceux contenant un premier 2×3 .

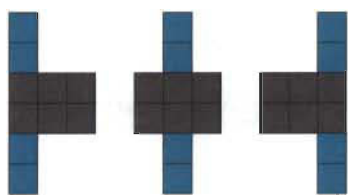


FIGURE 5.28 – 3×2 h -symétriques

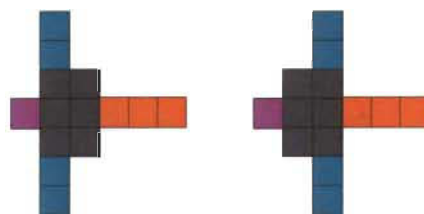


FIGURE 5.29 – 2×3 h -symétriques

- Le premier cas est illustré à la figure 5.28. Dans cette situation, on débute la construction avec un premier 3×2 , dont la série génératrice est $x^3 y^2$. À ce polyomino, on peut ajouter de part et d'autre une rangée verticale de cellules à trois endroits possibles. Par le principe du produit et puisque les cellules des

rangées sont toujours ajoutées par paires, la série génératrice qui décrit ce cas est

$$x^3 y^2 \left(1 + \frac{3y^2}{1-y^2} \right). \quad (5.74)$$

En effet, la hauteur du polyomino ainsi construite est toujours paire. Lorsqu'elle est supérieure à deux unités, il y a trois polyominos h -symétriques de cette forme. Sinon, le polyomino est de hauteur deux et il y en a uniquement un. En sommant sur toutes les hauteurs possibles, on a $x^3 y^2 + \sum_{i \geq 2} 3x^3 y^{2i}$, ce qui est équivalent à (5.74).

- Le deuxième cas est illustré à la figure 5.29. Les polyominos de ce cas sont constitués d'un premier 2×3 , dont la série génératrice est $x^2 y^3$. Comme pour le premier cas, une rangée verticale de cellules peut être ajoutée au 2×3 , mais elle a deux positions possibles (en bleu). Sa série est donc

$$1 + \frac{2y^2}{1-y^2}.$$

On peut également placer, de manière indépendante, une rangée horizontale de cellules de chaque côté du premier 2×3 (en orange et en rose). La série d'une de ces rangées est $\sum_{i \geq 0} x^i = 1/(1-x)$.

Par le principe du produit, l'expression

$$\frac{x^2 y^3}{(1-x)^2} \left(1 + \frac{2y^2}{1-y^2} \right) \quad (5.75)$$

est la série génératrice du cas 2.

En additionnant ces deux cas, soit (5.74) et (5.75), on obtient (5.73). $\square$

Proposition 5.48. Soit $F_{2,E}^h(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 h -invariants contenant un banc d'index 2, alors

$$\begin{aligned} F_{2,E}^h(x, y) &= \frac{2x^2 y^5}{(1-y^2)(1-x)^2} \left(1 + \frac{2y^2}{1-y^2} \right) \\ &= (14y^{11} + 10y^9 + 6y^7 + 2y^5) x^2 + (20y^9 + 12y^7 + 4y^5) x^3 \\ &\quad + (30y^9 + 18y^7 + 6y^5) x^4 + (24y^7 + 8y^5) x^5 + (30y^7 + 10y^5) x^6 + \dots \end{aligned} \quad (5.76)$$

Démonstration. De manière générale, les polyominos d'index 2 h -invariants contenant un banc d'index 2 ont la forme présentée à la figure 5.30. De manière analogue à la proposition 5.47, on déduit les séries des rangées horizontales et verticales. Le banc d'index 2 est toujours de largeur 2 mais, pour être h -symétrique, il doit être de hauteur impaire. De plus, pour chaque rectangle $2 \times (2s - 1)$ avec $s \geq 3$, il y a deux bancs d'index 2 verticaux. Donc, par le principe de multiplication, on trouve

$$F_{2,E}^h(x, y) = \sum_{s \geq 3} 2x^2 y^{2s-1} \left(\frac{1}{1-x} \right)^2 \left(1 + \frac{2y^2}{1-y^2} \right).$$

En développant cette expression, on obtient (5.76). □

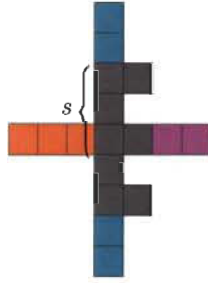


FIGURE 5.30 – Bancs d'index 2 h -symétriques

Proposition 5.49. Soit $F_{2,BS}^h(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 h -invariants contenant un bol symétrique, alors

$$\begin{aligned} F_{2,BS}^h(x, y) &= \frac{2x^3 y^5}{(1-y^2)^2 (1-x)} \left(1 + \frac{2y^2}{1-y^2} \right) + \frac{2x^3 y^4}{(1-y^2)^2} \left(1 + \frac{2y^2}{1-y^2} \right) \quad (5.77) \\ &= (18y^9 + 18y^8 + 8y^7 + 8y^6 + 2y^5 + 2y^4) x^3 + (8y^7 + 2y^5) x^4 \\ &\quad + (8y^7 + 2y^5) x^5 + 2y^5 x^6 + 2x^7 y^5 + \dots \end{aligned}$$

Démonstration. Tel qu'illustré à la figure 5.31, ces polyominos se séparent en deux catégories : celle où le bol symétrique est de hauteur impaire et celle où il est de hauteur paire.

- Dans le cas impair, le bol h -symétrique a la forme illustrée à la figure 5.31(a). Le plus petit rectangle circonscrit à un tel bol est de largeur 3 et de hauteur 5 : il y a deux bols symétriques h -symétriques pouvant y être inscrits. Pour modifier

sa hauteur, on peut placer par paire à deux endroits des rangées verticales de cellules. Ces endroits sont identifiés par des pointillés verts et rouges à la figure 5.31(a). De plus, à ce bol, on peut ajouter un pilier horizontal et deux piliers verticaux. Ainsi,

$$2x^3y^5 \left(\frac{1}{1-y^2} \right) \left(\frac{1}{1-y^2} \right) \left(1 + \frac{2y^2}{1-y^2} \right) \left(\frac{1}{1-x} \right) \quad (5.78)$$

est la série génératrice décrivant le cas où le polyomino d'index 2 est h -symétrique et contient un bol symétrique de hauteur impaire.

- De manière similaire à la situation impaire et de la figure 5.31(b), on déduit la série génératrice associée au cas pair :

$$2x^3y^4 \left(\frac{1}{1-y^2} \right) \left(\frac{1}{1-y^2} \right) \left(1 + \frac{2y^2}{1-y^2} \right). \quad (5.79)$$

La somme de (5.78) et (5.79) donne $F_{2,BS}^h(x, y)$, soit (5.77). $\square$

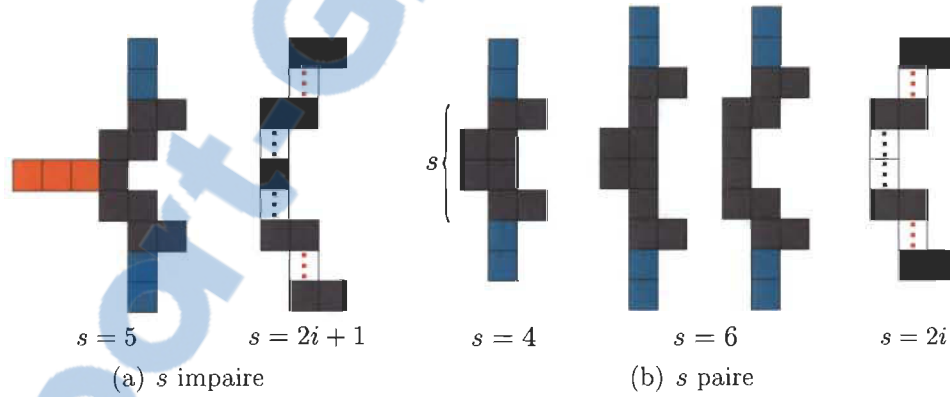


FIGURE 5.31 – Bols symétriques h -symétriques où s est la hauteur du bol (gris)

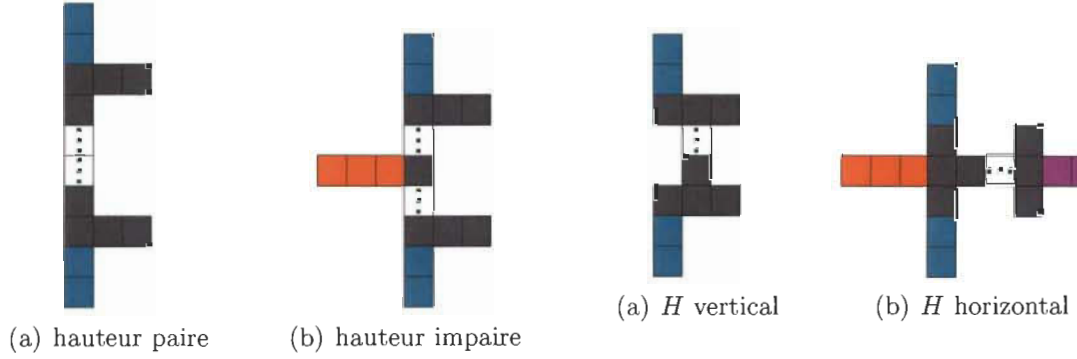
Proposition 5.50. Soit $F_{2,BP}^h(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 h -invariants contenant un bol parfait, alors

$$\begin{aligned} F_{2,BP}^h(x, y) &= \frac{2x^3y^4}{1-y^2} \left(1 + \frac{3y^2}{1-y^2} \right) + \frac{2x^3y^3}{(1-y^2)(1-x)} \left(1 + \frac{3y^2}{1-y^2} \right) \\ &= (20y^9 + 14y^8 + 14y^7 + 8y^6 + 8y^5 + 2y^4 + 2y^3) x^3 \\ &\quad + (14y^7 + 8y^5 + 2y^3) x^4 + (14y^7 + 8y^5 + 2y^3) x^5 \\ &\quad + (8y^5 + 2y^3) x^6 + (8y^5 + 2y^3) x^7 + 2x^8y^3 + 2x^9y^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.80)$$

Démonstration. De manière analogue aux preuves des propositions 5.47 et 5.49, à partir de la figure 5.32, on trouve que la série génératrice $F_{2,BP}^h(x, y)$ est

$$F_{2,BP}^h(x, y) = \frac{2x^3y^4}{1-y^2} \left(1 + \frac{3y^2}{1-y^2}\right) + \frac{2x^3y^3}{1-y^2} \left(1 + \frac{3y^2}{1-y^2}\right) \left(\frac{1}{1-x}\right).$$

□

FIGURE 5.33 – H h -symétriquesFIGURE 5.32 – Bols parfaits h -symétriques

Proposition 5.51. Soit $F_{2,H}^h(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 h -invariants contenant un H , alors

$$\begin{aligned} F_{2,H}^h(x, y) &= \frac{x^3y^3}{1-y} \left(1 + \frac{3y^2}{1-y^2}\right) + \frac{x^3y^3}{(1-x)^3} \left(1 + \frac{2y^2}{1-y^2}\right) \\ &= (9y^7 + 4y^6 + 6y^5 + y^4 + 2y^3) x^3 + (6y^5 + 3y^3) x^4 \\ &\quad + (12y^5 + 6y^3) x^5 + 10y^3x^6 + 15y^3x^7 + \dots \end{aligned} \quad (5.81)$$

Démonstration. En distinguant les H verticaux et horizontaux, à l'aide de la figure 5.33, on trouve que

$$F_{2,H}^h(x, y) = \frac{x^3y^3}{1-y} \left(1 + \frac{3y^2}{1-y^2}\right) + \frac{x^3y^3}{1-x} \left(\frac{1}{1-x}\right) \left(\frac{1}{1-x}\right) \left(1 + \frac{2y^2}{1-y^2}\right)$$

par des arguments de même nature qu'aux propositions 5.47 et 5.48.

□

FIGURE 5.34 – Crabes h -symétriques

Proposition 5.52. Soit $F_{2,C}^h(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 h -invariants contenant un crabe, alors

$$\begin{aligned} F_{2,C}^h(x, y) &= \frac{2x^3y^5}{(1-y^2)(1-y)} \left(1 + \frac{2y^2}{1-y^2} \right) \\ &= y^5x^3 + y^6x^3 + 4y^7x^3 + 4y^8x^3 + 9y^9x^3 + 9y^{10}x^3 \\ &\quad + 16y^{11}x^3 + 16y^{12}x^3 + 25y^{13}x^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.82)$$

Démonstration. La forme générale des polyominos d'index 2 h -invariants contenant un crabe est présentée à la figure 5.34. Similairement aux propositions 5.47 et 5.49, à partir de cette figure, on trouve

$$F_{2,C}^h(x, y) = 2x^3y^5 \frac{1}{1-y^2} \frac{1}{1-y} \left(1 + \frac{2y^2}{1-y^2} \right).$$

□

En considérant tous les types de polyominos d'index 2 h -symétriques étudiés aux propositions 5.47 à 5.52, on obtient l'énoncé suivant.

Proposition 5.53. Soit $F_2^h(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 h -invariants, alors

$$\begin{aligned} F_2^h(x, y) &= F_{2,3 \times 2}^h(x, y) + F_{2,E}^h(x, y) + F_{2,BS}^h(x, y) + F_{2,BP}^h(x, y) \\ &\quad + F_{2,H}^h(x, y) + F_{2,C}^h(x, y) \\ &= (8y^7 + 4y^5 + y^3) x^2 + (25y^6 + 26y^5 + 8y^4 + 6y^3 + y^2) x^3 + 28y^5x^4 + \dots \end{aligned} \quad (5.83)$$



De plus, la série génératrice des polyominos d'index 2 v -invariants $F_2^v(x, y)$ est donnée par

$$F_2^v(x, y) = F_2^h(y, x). \quad (5.84)$$

Démonstration. On doit montrer que tous les polyominos d'index 2 h -symétriques sont inclus dans la sommation (5.83). Comme pour la proposition 5.46, on se sert du fait que la somme du nombre de trous linéaires et de bancs 2×2 est égale à 2 dans un polyomino d'index 2. Soit P un polyomino d'index 2 h -symétrique.

- Si P possède un banc 2×2 , alors on peut le compléter pour atteindre l'index 2 de deux manières. Premièrement, on peut former un premier 2×3 ou 3×2 avec ce banc, deux structures h -invariantes d'index 2. C'est le seul cas où il y a deux bancs 2×2 dans P . Deuxièmement, on peut ajouter un trou linéaire vertical au banc formant ainsi un bol symétrique. De plus, on ne peut pas construire P en ajoutant un trou horizontal au banc 2×2 . En effet, peu importe la position de celui-ci, la contrainte d'être h -symétrique engendre un polyomino d'index supérieur à 2. On a donc considéré les situations où P a soit deux bancs 2×2 , soit un banc 2×2 et un trou linéaire.
- Si P a deux trous linéaires, alors ceux-ci sont horizontaux ou verticaux. Dans le premier cas, les deux trous forment un polyomino H horizontal. Plus précisément, en plaçant un premier trou au-dessus de l'axe de symétrie, l'autre se retrouve en-dessous et possède la même largeur que le premier. La seule catégorie de polyominos d'index 2 possédant cette propriété est celle des polyominos H . Dans le deuxième cas, les deux trous verticaux peuvent être parallèles, menant aux bols symétriques, aux bols parfaits, aux H verticaux et aux crabes, ou superposés l'un au-dessus de l'autre, menant aux bancs d'index 2. Finalement, il ne peut pas y avoir un trou horizontal et un vertical, car cela mène aux grands rectangles ou aux Banc $\times$ Banc, qui ne sont pas h -invariants.

□

Les polyominos d'index 2 d_1 -symétriques se divisent en deux catégories : ceux de la forme Banc $\times$ Banc et ceux contenant un grand rectangle de première espèce.

Proposition 5.54. Soit $F_{2,BB}^{d_1}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 d_1 -invariants de forme Banc×Banc, alors

$$\begin{aligned} F_{2,BB}^{d_1}(x, y) &= \frac{2x^3y^3(2x^6y^6 + y^5x^5 - 6x^4y^4 + x^3y^3 - xy + 1)}{(xy - 1)^4(2xy - 1)^2} \\ &= 2y^3x^3 + 14y^4x^4 + 60x^5y^5 + 206y^6x^6 + 610y^7x^7 + 1632y^8x^8 + \dots \end{aligned} \quad (5.85)$$

Démonstration. Les polyominos Banc×Banc d_1 -invariants adoptent une forme similaire aux polyominos d'index 1 d_1 -symétriques décrits à la proposition 5.35.

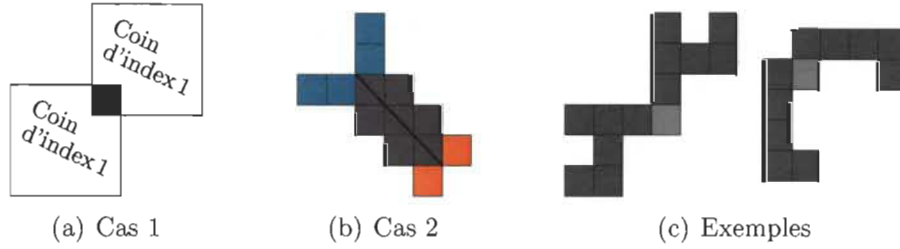


FIGURE 5.35 – Banc×Banc d_1 -symétriques

Au cas 1, ils sont construits à partir de deux copies d'un même coin d'index 1, comme aux figures 5.35(a) et 5.35(c). On en conclut qu'il y a autant de coins d'index 1 inscrits dans un $k \times b$ que de Banc×Banc d_1 -symétriques de cette forme inscrits dans un $(b + k - 1) \times (b + k - 1)$. Ainsi, la série génératrice de ce cas est

$$\sum_{b,k \geq 1} \frac{c_1(b, k) (xy)^b (xy)^k}{xy} = \frac{C_1(xy, xy)}{xy} \quad (5.86)$$

où $C_1(x, y)$ est la série génératrice des coins d'index 1 donnée à l'équation (3.33).

Le deuxième cas est présenté à la figure 5.35(b). À partir de deux bancs 2×2 placés diagonalement, des piliers horizontaux et verticaux sont ajoutés. La figure formée de ces deux bancs est inscrite dans un 3×3 , sa série est donc x^3y^3 . Comme pour la proposition 5.35, ces piliers ont pour série génératrice

$$\left(1 + \frac{2xy}{1 - xy}\right)^2.$$

Ainsi, par le principe de multiplication, la série génératrice du cas 2 est

$$x^3y^3 \left(1 + \frac{2xy}{1-xy} \right)^2. \quad (5.87)$$

En additionnant (5.86) et (5.87), on obtient (5.85). $\square$

Proposition 5.55. Soit $F_{2,GR}^{d_1}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 d_1 -invariants contenant un grand rectangle de première espèce, alors

$$\begin{aligned} F_{2,GR}^{d_1}(x, y) &= \frac{-2x^3y^3(2x^4y^4 - 3x^3y^3 - 2x^2y^2 + 1)}{(2xy - 1)(xy - 1)^4} \\ &= 2y^3x^3 + 12y^4x^4 + 40x^5y^5 + 98y^6x^6 + 206y^7x^7 + 400y^8x^8 + \dots \end{aligned} \quad (5.88)$$

Démonstration. Tel qu'illustrés à la figure 5.36, ces polyominos d_1 -symétriques sont construits à partir d'un grand rectangle de première espèce inscrit dans un carré. Pour un rectangle $s \times s$, $s \geq 3$, deux grands rectangles d_1 -symétriques y sont inscrits.

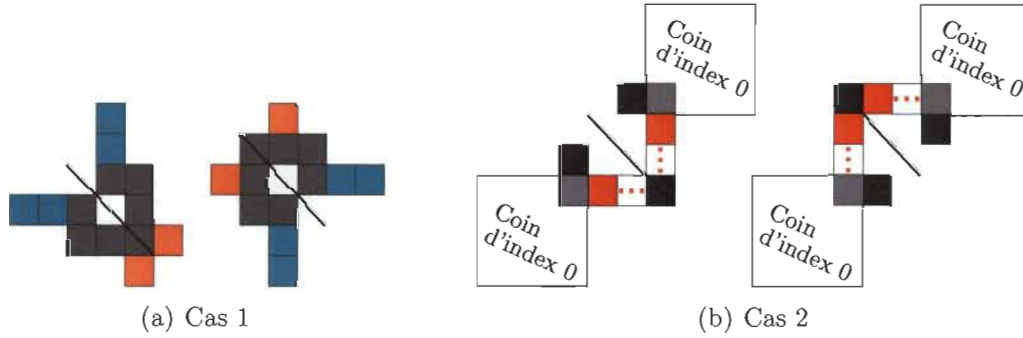


FIGURE 5.36 – Grands rectangles d_1 -symétriques

Il y a deux façons de compléter ces grands rectangles pour obtenir un autre polyomino d'index 2 d_1 -symétrique : en plaçant des rangées horizontales et verticales de cellules (voir figure 5.36(a)) ou en dupliquant un coin d'index 0 non dégénéré (voir figure 5.36(b)). Ce dernier doit effectivement être non dégénéré afin que les deux cas soient disjoints.

- La série génératrice des polyominos d'index 2 issus de la combinaison d'un grand rectangle et de piliers verticaux et horizontaux est donnée par la sommation

suivante :

$$\sum_{s \geq 3} 2x^s y^s \left(1 + \frac{2xy}{1 - xy}\right) \left(1 + \frac{sxy}{1 - xy}\right). \quad (5.89)$$

En effet, il y a 2 grands rectangles d_1 -symétriques dans un $s \times s$, $s \geq 3$. Donc, $2x^s y^s$ est la série génératrice décrivant ces grands rectangles. D'autre part, l'ajout d'un pilier bleu horizontal sur la figure 5.36(a) détermine entièrement la position de celui de même couleur, mais vertical. Ainsi, l'ajout d'une cellule bleue en largeur contribue à l'ajout d'une cellule en hauteur. Lorsque le pilier est non vide il y a deux positions possibles pour ces rangées. Ainsi, la série génératrice des rangées bleues est

$$1 + \frac{2xy}{1 - xy}.$$

Similairement, les rangées oranges peuvent être placées à s endroits, d'où :

$$1 + \frac{sxy}{1 - xy}.$$

En sommant sur toutes les dimensions de grands rectangles possibles et par le principe du produit, on trouve (5.89).

- Lorsqu'un coin d'index 0 est dupliqué de sorte à former un polyomino de même structure que la figure 5.36(b), la largeur d'une cellule du polyomino coin contribue à une unité en largeur et à une unité en hauteur. La même chose se produit pour la hauteur. Ainsi, on substitue x et y par le produit xy dans la série $\tilde{C}_0(x, y)$, décrite par l'équation (3.12). Tel qu'illustré en rouge sur cette figure, le grand rectangle est complété par l'ajout d'une ou plusieurs cellules en hauteur et en largeur. Cet ajout se décrit par l'expression $2xy/(1 - xy)$, où on multiplie par 2 pour tenir compte des deux grands rectangles de même dimension. Ainsi, la série génératrice de ce deuxième cas est

$$\frac{2xy}{1 - xy} \tilde{C}_0(xy, xy). \quad (5.90)$$

En additionnant (5.89) avec (5.90) et en simplifiant le résultat obtenu, on a (5.88). $\square$

La somme des polyominos d'index 2 d_1 -invariants de forme Banc×Banc et de ceux contenant un grand rectangle permet d'obtenir la série génératrice de tous les polyominos d'index 2 d_1 -symétriques, tel que mentionné à la proposition suivante.

Proposition 5.56. Soit $F_2^{d_1}(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 2 d_1 -invariants, alors

$$F_2^{d_1}(x, y) = F_{2,BB}^{d_1}(x, y) + F_{2,GR}^{d_1}(x, y) \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2x^3y^3(2x^6y^6 + y^5x^5 - 6x^4y^4 + x^3y^3 - xy + 1)}{(xy - 1)^4(2xy - 1)^2} \\ &\quad + \frac{-2x^3y^3(2x^4y^4 - 3x^3y^3 - 2x^2y^2 + 1)}{(2xy - 1)(xy - 1)^4} \quad (5.92) \\ &= 4y^3x^3 + 26y^4x^4 + 100x^5y^5 + 304y^6x^6 + 816y^7x^7 + 2032y^8x^8 + \dots \end{aligned}$$

De plus, la série génératrice $F_2^{d_2}(x, y)$ des polyominos d'index 2 d_2 -invariants est

$$F_2^{d_2}(x, y) = F_2^{d_1}(x, y). \quad (5.93)$$

Démonstration. On doit s'assurer que toutes les situations ont été prises en compte dans la sommation (5.91). L'axe de symétrie diagonale d_1 divise le carré circonscrit au polyomino en deux régions. Si une de celles-ci contient un trou horizontal, l'autre sera vertical pour respecter la contrainte d'invariance sous d_1 . Les deux seules catégories de polyominos d'aire minimale plus deux ayant cette propriété sont les Banc×Banc et les grands rectangles. Si une région contient un banc 2×2 , l'autre en possède un également, ce qui mène aux Banc×Banc. Il peut également y avoir deux bancs 2×2 disposés de manière à ce qu'ils aient une cellule de coin en commun, ce qui a été considéré dans la série génératrice $F_{2,BB}^{d_1}(x, y)$. $\square$

5.5.3 À rotations près

Comme mentionné au début de la section 5.5, avec les informations connues sur les polyominos d'aire minimale plus deux, ceux-ci ne peuvent pas être énumérés à

rotations près en fonction des dimensions de leur rectangle circonscrit : il faut connaître ceux inscrits dans un carré. Par contre, cette information n'est pas nécessaire pour étudier les non-inscrits et le but d'énumérer ces polyominos selon l'aire est atteint. Ainsi, par le lemme de Burnside avec le groupe des rotations d'un carré $\mathcal{C}_4$, la série génératrice $R_2(q)$ des polyominos d'index 2 non-inscrits à rotation près d'aire n est obtenue. On rappelle que q est la variable formelle associée à l'aire. En effet, en substituant x et y par q dans $F_2^i(x, y)$ et en multipliant par q pour obtenir l'aire d'un polyomino d'index 2, soit le terme q^{b+k+1} , on a

$$R_2(q) = \frac{q}{4} \left(F_2^1(q, q) + F_2^r(q, q) + 2F_2^s(q, q) \right) = \frac{q^6 \theta(q)}{(2q^2 - 1)^2 (q^2 - 1)^3 (q - 1)^4 (-1 + 2q)^3}$$

où

$$\begin{aligned} \theta(q) = & 72q^{17} + 440q^{16} - 882q^{15} - 2672q^{14} - 925q^{13} + 4620q^{12} \\ & + 5111q^{11} - 3099q^{10} - 4350q^9 - 416q^8 + 1806q^7 + 848q^6 - 330q^5 \\ & - 171q^4 - 57q^3 + 33q^2 + 3q + 1. \end{aligned}$$

En développant $R_2(q)$, on trouve

$$\begin{aligned} R_2(q) = & q^6 + 13q^7 + 128q^8 + 794q^9 + 3773q^{10} + 14456q^{11} + 47831q^{12} \\ & + 141524q^{13} + 386916q^{14} + 996525q^{15} + 2458546q^{16} + \dots \end{aligned}$$

Par exemple, il y a 128 polyominos d'index 2 et d'aire 8 à rotations près.

5.5.4 À symétries près

Pour les mêmes raisons que le cas à rotations près (section 5.5.3), seulement les polyominos d'index 2 non-inscrits d'aire n peuvent être comptés à symétries près.

À l'aide du lemme de Burnside et avec la même substitution que pour le cas à rotations près, les polyominos d'index 2 non-inscrits à symétries près satisfont la série

$$\begin{aligned}
 S_2(q) &= \frac{q}{8} \sum_{g \in \mathcal{D}_4} F_2^g(q, q) \\
 &= \frac{q}{8} \left[F_2^1(q, q) + 2F_2^r(q, q) + F_2^{r^2}(q, q) + F_2^h(q, q) + F_2^v(q, q) + 2F_2^{d_1}(q, q) \right] \\
 &= \frac{\eta(q) q^6}{(2q-1)^3 (2q^2-1)^2 (q^2-1)^3 (q-1)^4}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \eta(q) &= 8q^{18} + 8q^{17} + 230q^{16} - 392q^{15} - 1281q^{14} - 798q^{13} + 2675q^{12} + 2432q^{11} \\
 &\quad - 1462q^{10} - 2383q^9 - 40q^8 + 857q^7 + 376q^6 - 51q^5 - 189q^4 \\
 &\quad + 12q^3 + 14q^2 - q + 1.
 \end{aligned}$$

Plus explicitement, $S_2(q)$ possède le développement

$$\begin{aligned}
 S_2(q) &= q^6 + 9q^7 + 69q^8 + 413q^9 + 1906q^{10} + 7282q^{11} + 23964q^{12} \\
 &\quad + 70903q^{13} + 193555q^{14} + 498589q^{15} + 1229443q^{16} + \dots
 \end{aligned}$$

Il y a donc 69 polyominos d'index 2 d'aire 8 lorsqu'ils sont comptés à symétries près.

Chapitre 6

Polycubes

Nothing in life is to be feared. It is only to be understood.

– M. Curie [2, p. v]

Jusqu'à présent les polyominos ont été le centre des préoccupations de ce mémoire mais, dans ce chapitre, ils sont laissés de côté pour faire place à des objets étroitement liés : les polycubes. Ces derniers sont en fait une extension des polyominos à la troisième dimension. En effet, au même titre qu'un polyomino est composé de carrés, un *polycube* est défini comme un ensemble connexe de cubes de même dimension joints par leurs faces, tel que proposé dans [21] et dans [25] et illustré à la figure 6.1. Due à cette relation, un polycube est souvent nommé un polyomino en trois dimensions ou, sa version compacte, un polyomino $3D$ [1, 18, 21]. Ces appellations sont les plus fréquentes, mais ils sont parfois nommés polyominos solides (« *solid polyominoes* »), notamment par S. W. Golomb dans [20] et sur *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS)[39]. Alors, pour éviter toute ambiguïté, un polyomino dénotera un polyomino $2D$ et le terme polycube sera utilisé pour parler des polyominos $3D$.

Dans ce chapitre, des définitions concernant les polycubes sont présentées en guise d'introduction. De plus, l'ensemble de tous les polycubes contenus et inscrits dans un prisme $2 \times 2 \times h$ est compté par l'obtention d'une série génératrice par la méthode

de la matrice de transfert. Ces résultats ont été obtenus par M.-E. Pellerin sous la supervision de A. Goupil.

6.1 Introduction

Les polycubes, ces figures 3D constituées d'un assemblage de cubes reliés par leurs faces, peuvent être comptés à translations près et à symétries près, comme pour les polyominos. Les polycubes sont dits *fixes*, ou à translations près, lorsque deux polycubes sont équivalents si seulement si une translation les fait coïncider, tandis que les polycubes *libres*, soit ceux à symétries près, sont tels que deux polycubes sont considérés identiques lorsque l'un peut être obtenu de l'autre par une rotation ou par une réflexion. Dans ce chapitre, seulement les polycubes fixes sont étudiés.

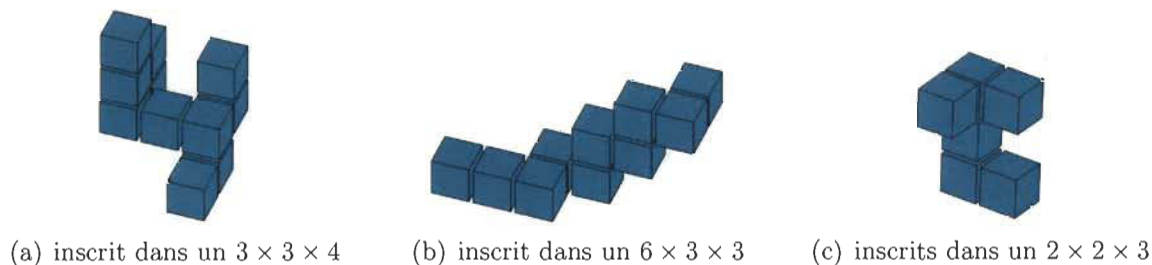


FIGURE 6.1 – Des polycubes

Un des problèmes ouverts concernant les polycubes est leur énumération selon leur *volume*, soit le nombre de cubes qui composent le polycube. Ces cubes sont souvent nommés *cellules*. Aucune formule close n'est encore connue, mais des programmes informatiques permettent de les énumérer pour un volume donné jusqu'à concurrence de 16 cubes, dont la suite est disponible sur le site de l'OEIS [40].

Bien que substantiellement moins connus et moins étudiés que leur analogue à deux dimensions, certaines catégories de polycubes ont été investiguées dans la littérature. Notamment, L. Alonso et R. Cerf ont compté les polycubes d'aire minimale [1]. Également, à l'aide d'un algorithme, M. Gębala a construit certains polycubes convexes en étudiant leur projection orthogonale [18]. Aussi avec l'idée de projection sur le

plan, A. Goupil et H. Cloutier ont procédé à l'énumération des polycubes de volume minimal en trouvant leur série génératrice [21].

L'approche préconisée ici est celle de [21] qui consiste à inscrire le polycube dans un prisme rectangulaire et à évaluer son volume, équivalent à l'étude selon l'aire et selon le rectangle circonscrit des polyominos telle que considérée dans les premiers chapitres de ce mémoire et proposée dans [22].

Définition 6.1. Un polycube est dit *inscrit* dans un prisme rectangulaire si au moins une cellule touche à chacune des faces de ce prisme et qu'aucune de ses cellules n'est à l'extérieur de celui-ci. Ce prisme est appelé *prisme circonscrit* et il correspond au plus petit prisme tel que le polycube est entièrement à l'intérieur. De plus, la dimension du prisme est notée $b \times k \times h$ lorsqu'il est de largeur b , de profondeur k et de hauteur h .

Par exemple, le polycube de la figure 6.1(a) est inscrit dans un prisme $3 \times 3 \times 4$. Dans le cadre des travaux de ce mémoire, une autre notion doit être définie, soit celle d'être contenu dans un prisme.

Définition 6.2. Un polycube est dit *contenu* dans un prisme si aucune cellule n'est à l'extérieur du prisme. Autrement dit, le prisme doit être de dimension égale ou supérieure au prisme circonscrit.

Ainsi, les polycubes inscrits sont nécessairement contenus dans le prisme circonscrit. Donc, pour obtenir les polycubes inscrits dans un prisme, on doit exclure de l'ensemble des polycubes contenus dans le prisme ceux qui ne sont pas inscrits.

6.2 Contenus ou inscrits dans un prisme $2 \times 2 \times h$

Un premier objectif est de compter les polycubes contenus dans un prisme $2 \times 2 \times h$ à l'aide de la méthode de la matrice de transfert, décrite à la section 2.3.4. Avec cette méthode, la série génératrice en fonction de la hauteur et du volume est obtenue pour

cette catégorie de polyominos 3D. À partir de cette série, le deuxième objectif est de déduire celle des polycubes inscrits dans un prisme $2 \times 2 \times h$. Par exemple, le polycube de la figure 6.1(c) est inscrit dans un $2 \times 2 \times 3$.

6.2.1 La matrice de transfert des polycubes $2 \times 2 \times h$

De manière analogue aux polyominos qui peuvent être construits par l'ajout successif de colonnes, les polycubes inscrits dans un $b \times k \times h$ le sont par la juxtaposition d'étages de dimension $b \times k \times 1$. Chaque étage placé est disposé sous le précédent : la construction se fait du haut vers le bas. De plus, pour chaque étage ajouté, son volume est considéré et la variable formelle « p » y est associée. La hauteur du polycube est quant à elle associée à la variable formelle « y ». Pour les polycubes $2 \times 2 \times h$, il y a 15 configurations d'étages possibles, tel qu'illustré à la figure 6.2, chacune étant identifiée par un nombre.

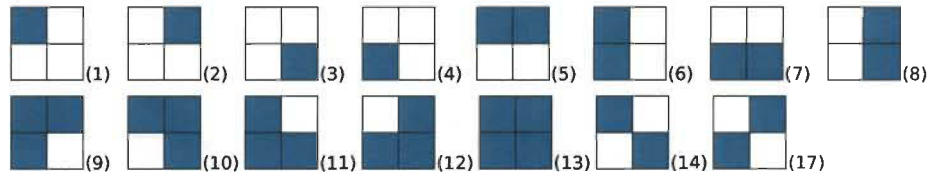


FIGURE 6.2 – Configurations possibles d'un étage d'un polycube $2 \times 2 \times h$ où les cases blanches sont vides et les cases bleues sont reliées avec celles de l'étage précédente

Parmi ces configurations, il y a celles dites *connexes* et celles *non connexes* :

- Les configurations (1) à (13) sont de type *connexe*, c'est-à-dire que toutes les cellules d'un même étage sont connectées entre elles ;
- Les configurations (14) et (17) sont de type *non connexe*, les cellules d'un même étage sont déconnectées, mais elle sont toutes les deux connectées avec l'étage du haut, comme à la figure 6.3(a).

Toutefois, il est nécessaire d'introduire des configurations dites *transitoires*, illustrées à la figure 6.4. Celles-ci interviennent pour décrire la situation suivante : les

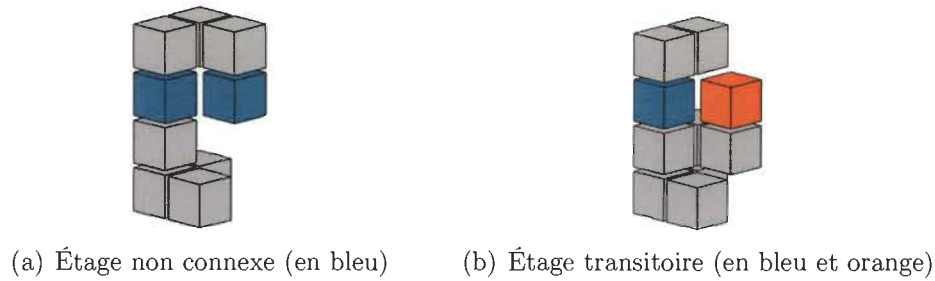


FIGURE 6.3 – Polycubes inscrits dans un $2 \times 2 \times 4$ où les cellules bleues sont connectées avec l'étage du haut et la cellule orange est connectée avec l'étage du bas

cellules de la configuration ne sont pas connectées entre elles et une seule des deux cellules est connectée à l'étage du haut, cette situation est dépeinte à la figure 6.3(b). Dans ce cas, il est nécessaire que la connexité du polycube se fasse par l'ajout des étages suivants. Il n'y a pas cette contrainte lorsqu'on traite les configurations non connexes, comme à la figure 6.3(a), car la connexité est déjà assurée. E. Rassart a traité une situation semblable pour les polyominos à hauteur bornée (voir [33]) et le contournement du problème se fait de manière similaire ici.

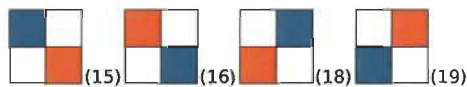


FIGURE 6.4 – Configurations transitoires d'un polycube $2 \times 2 \times h$ où les cases blanches sont vides, les cases bleues sont reliées avec l'étage du haut et celles oranges sont des cellules non connectées avec les cellules de la configuration et avec l'étage du haut

Il faut aussi ajouter une configuration vide pour initialiser le volume, identifiée par (0) dans le tableau de la matrice de transfert, puisqu'autrement le volume du premier étage n'est pas connu et le volume total ne serait pas bien comptabilisé.

Le tableau 6.1 présente la matrice de transfert qui sera notée $M(p)$ et où les indices de lignes et de colonnes varient de 0 à 19. Ces indices correspondent aux numéros de configuration. L'élément $M_{ij}(p)$, soit l'entrée de la i^e ligne et de la j^e colonne de $M(p)$, est défini par p^n si la configuration (j) peut suivre la configuration (i) et où n est le volume de (j), sinon $M_{ij}(p) = 0$.

Plus spécifiquement, pour utiliser la méthode de la matrice de transfert, il faut entre autres établir par quelles configurations le polycube peut débuter et par les-

$\nearrow$	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
(0)	0	p	p	p	p	p^2	p^2	p^2	p^2	p^3	p^3	p^3	p^3	p^4	0	p^2	0	0	p^2	0
(1)	0	p	0	0	0	p^2	p^2	0	0	p^3	p^3	p^3	0	p^4	0	p^2	0	0	0	0
(2)	0	0	p	0	0	p^2	0	0	p^2	p^3	p^3	0	p^3	p^4	0	0	0	0	p^2	0
(3)	0	0	0	p	0	0	p^2	p^2	0	p^3	0	p^3	p^3	p^4	0	0	0	0	0	p^2
(4)	0	0	0	0	p	0	0	p^2	p^2	0	p^3	p^3	p^3	p^4	0	0	p^2	0	0	0
(5)	0	p	p	0	0	p^2	p^2	0	p^2	p^3	p^3	p^3	p^3	p^4	0	p^2	0	0	p^2	0
(6)	0	p	0	p	0	p^2	p^2	p^2	0	p^3	p^3	p^3	p^3	p^4	0	p^2	0	0	0	p^2
(7)	0	0	0	p	p	0	p^2	p^2	p^2	p^3	p^3	p^3	p^3	p^4	0	0	p^2	0	0	p^2
(8)	0	0	p	0	p	p^2	0	p^2	p^2	p^3	p^3	p^3	p^3	p^4	0	0	p^2	0	p^2	0
(9)	0	p	p	p	0	p^2	p^2	p^2	p^2	p^3	p^3	p^3	p^3	p^2	0	p^2	0	p^2	0	0
(10)	0	p	p	0	p	p^2	p^2	p^2	p^2	p^3	p^3	p^3	p^3	p^4	p^2	0	0	0	p^2	0
(11)	0	p	0	p	p	p^2	p^2	p^2	p^2	p^3	p^3	p^3	p^3	p^4	p^2	0	0	0	0	p^2
(12)	0	0	p	p	p	p^2	p^2	p^2	p^2	p^3	p^3	p^3	p^3	p^4	0	0	p^2	p^2	0	0
(13)	0	p	p	p	p	p^2	p^2	p^2	p^2	p^3	p^3	p^3	p^3	p^4	p^2	0	0	p^2	0	0
(14)	0	p	0	0	p	p^2	p^2	p^2	p^2	p^3	p^3	p^3	p^3	p^4	p^2	0	0	0	0	0
(15)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	p^3	p^3	0	p^4	0	p^2	0	0	0	0
(16)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	p^3	p^3	0	p^4	0	0	p^2	0	0	0
(17)	0	0	p	p	0	p^2	p^2	p^2	p^2	p^3	p^3	p^3	p^3	p^4	0	0	0	p^2	0	0
(18)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	p^3	0	0	p^3	p^4	0	0	0	0	p^2	0
(19)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	p^3	0	0	p^3	p^4	0	0	0	0	0	p^2

TABLEAU 6.1 – Matrice de transfert des polycubes $2 \times 2 \times h$

quelles il peut terminer. D'une part, les configurations de début sont celles qui peuvent être placées à la suite de la configuration vide, car c'est à celle-ci qu'on ajoute le premier étage du polycube. Du côté des configurations terminales, elles joueront un rôle important lors du calcul de la série génératrice décrivant les polycubes contenus dans un $2 \times 2 \times h$.

- Configurations de début : (1) à (13), (15) et (18);
- Configurations terminales : (1) à (14) et (17).

En effet, les configurations connexes peuvent autant débiter que terminer un polycube, soit les configurations (1) à (13). Dans le cas des configurations non connexes, elles ne peuvent pas être sur le premier étage puisque, par définition, elles sont connectées par les étages du haut. Cependant, celles-ci, soient les configurations (14) et (17), peuvent être sur le dernier étage puisque le polycube formé sera connexe.

Les configurations transitoires peuvent être sur le premier étage, puisque la connexité du polycube est assurée par les étages ajoutés par la suite. Pour éviter de compter en double, un choix doit être fait entre les deux configurations transitoires associées à

chaque configuration connexe. Les configurations transitoires (15) et (18) ont été choisies pour débiter un polycube. De plus, le polycube ne peut pas avoir de configuration transitoire terminale puisque la connexité du polycube ne serait pas assurée.

Puisque les configurations de début sont celles qui peuvent suivre la configuration vide, on peut vérifier que, à la ligne associée à cette configuration dans $M(P)$, les endroits non nuls sont des configurations de début, soit les configurations (1) à (13) ainsi que les configurations transitoires (15) et (18), tel que discuté dans le paragraphe précédent.

Finalement, une attention particulière est apportée aux lignes (14) et (15), soit celles associées à une configuration non connexe et celles à une transitoire. Sous la configuration non connexe (14), on peut placer n'importe quelle configuration, en autant qu'elle soit reliée d'une quelconque façon aux cellules de (14), soit (1) et (4) à (14). Sous la configuration transitoire (15), on peut soit ajouter la même configuration (15), soit une configuration qui assure la connexité des cellules de (15), c'est-à-dire (10), (11) et (13). Le même traitement s'applique pour les autres configurations non connexes et transitoires.

6.2.2 Séries génératrices des polycubes $2 \times 2 \times h$

Dans cette section, plusieurs résultats concernant les polycubes contenus et ceux inscrits sont obtenus. On obtient d'abord, avec la méthode de la matrice de transfert, la série génératrice des polycubes contenus dans un $2 \times 2 \times h$ en fonction de leur volume et de leur hauteur. De celle-ci, on déduit la série génératrice à deux variables de ceux inscrits dans un tel prisme. Finalement, la série génératrice à une variable en fonction du volume et celle en fonction de la hauteur des polycubes inscrits dans un $2 \times 2 \times h$ sont déduites. Aux tableaux 6.2 et 6.3, on retrouve respectivement le nombre de polycubes contenus et de polycubes inscrits dans un prisme $2 \times 2 \times h$ de volume et de hauteur donnés. On rappelle que les variables formelles y et p sont respectivement associées à la hauteur et au volume du polycube.

Proposition 6.3. Soit $P_{(2,2,h)}^c(y, p)$ la série génératrice des polycubes contenus dans un $2 \times 2 \times h$ alors

$$P_{(2,2,h)}^c(y, p) = -yp \frac{F_1(y, p)}{G_1(y, p)}, \quad (6.1)$$

où

$$\begin{aligned} F_1(y, p) = & -4 - 4p + 4yp^3 - 8y^3p^9 - 7yp^4 + 8yp^2 - 2p^{12}y^4 - 2p^8y^2 \\ & - 4p^{10}y^3 - 3p^5y - 4y^2p^4 - 17p^8y^3 - 4p^2p^3 + 4y^4p^9 + 3p^{11}y^4 \\ & + 9p^{10}y^4 - 8y^3p^7 - 4y^2p^5 - 10p^7y^2 - 13y^2p^6 + 3p^{13}y^5 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_1(y, p) = & p^{14}y^6 - 2p^{13}y^5p^{12}y^5 + 3p^{11}y^5 - 4p^{11}y^4 + y^5p^{10} - 8p^{10}y^4 \\ & - 15y^4p^9 - 2y^3p^9 - 7y^4p^8 - 6p^8y^3 - y^4p^7 - 3y^3p^7 - y^2p^6 \\ & - 5y^2p^5 + y^3p^5 + 2y^2p^4 - yp^4 + y^2p^3 - 4yp^3 - 5yp^2 - yp + 1. \end{aligned}$$

Démonstration. Les polyominos 3D qu'on doit dénombrer sont ceux qui débutent par une configuration vide et qui se terminent par une configuration terminale. Ces objets sont décrits par les entrées $[0, 1]$ à $[0, 14]$ et $[0, 17]$ de la matrice $(I - yM(p))^{-1}$, où $M(p)$ est donnée au tableau 6.1.

Par la méthode de la matrice de transfert, la série génératrice des polycubes contenus dans un $2 \times 2 \times h$ est obtenue en inversant la matrice $I - yM(p)$ et en sommant les entrées de la ligne (0) associées à une configuration terminale :

$$P_{(2,2,h)}^c(y, p) = \sum_{k=1}^{14} (I - yM(p))^{-1}[0, k] + (I - yM(p))^{-1}[0, 17]$$

où $A[i, j]$ est l'élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice A . On obtient alors l'équation (6.1). Note : la matrice inverse de $I - yM(p)$ a été calculée par le logiciel *Maple*. □

$h \backslash v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	4	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	4	16	36	48	28	8	1	0	0	0	0	0
3	0	0	4	32	124	308	456	408	212	66	12	1	0
4	0	0	0	4	48	272	1008	2504	4168	4648	3424	1678	552
5	0	0	0	0	4	64	484	2384	8296	20684	37152	47896	44072
6	0	0	0	0	0	4	80	760	4688	20840	69088	172948	327592
7	0	0	0	0	0	0	4	96	1100	8176	44172	181784	581832

TABLEAU 6.2 – Nombre de polycubes contenus dans un $2 \times 2 \times h$ de volume v

Proposition 6.4. Soit $P_{(2,2,h)}^i(y, p)$ la série génératrice des polycubes inscrits dans un $2 \times 2 \times h$, alors

$$P_{(2,2,h)}^i(y, p) = -yp^3 \frac{F_2(y, p)}{(yp - 1)(y^2p^3 + yp^2 + yp - 1)G_2(y, p)} \quad (6.2)$$

où

$$\begin{aligned} F_2(y, p) = & -4 - 19y^2p^3 - 21yp^2 - 20yp - 28y^2p^4 - 10p^8y^3 \\ & - 37y^4p^9 - p + 2y^7p^{14} + 12y^5p^7 - 6yp^3 + 11y^6p^{11} + 2y^7p^{13} + 8y^3p^3 \\ & - 4y^6p^{12} - 52y^5p^9 - 16y^2p^2 - 8y^6p^9 - 16y^6p^{10} + 3y^8p^{15} + 4y^7p^{11} \\ & - 7y^6p^{13} - 2y^5p^8 + 9y^7p^{12} + 33p^4y^3 - 24y^4p^6 - 26y^3p^7 - 11y^2p^5 \\ & - 2y^2p^6 - 6p^{12}y^5 - 24p^{11}y^5 - 29y^5p^{10} - 68y^4p^8 - 43y^4p^7 \\ & - 10y^3p^5 - 14p^{10}y^4 - 24y^3p^6 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_2(y, p) = & p^{14}y^6 - 2p^{13}y^5 - p^{12}y^5 + 3p^{11}y^5 - 4p^{11}y^4 + y^5p^{10} \\ & - 8p^{10}y^4 - 15y^4p^9 - 2y^3p^9 - 7y^4p^8 - 6p^8y^3 - y^4p^7 - 3y^3p^7 - y^2p^6 \\ & - 5y^2p^5 + y^3p^5 + 2y^2p^4 - yp^4 + y^2p^3 - 4yp^3 - 5yp^2 - yp + 1. \end{aligned}$$

Démonstration. Par définition, les polycubes contenus dans un prisme incluent ceux inscrits dans ce prisme. Ainsi, il suffit d'en exclure les polycubes contenus mais non inscrits dans le prisme pour obtenir les inscrits. Les polycubes à éliminer sont les quatre colonnes simples et les polycubes $2 \times 1 \times h$ ou $1 \times 2 \times h$.

$h \backslash v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	32	48	28	8	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	100	304	456	408	212	66	12	1	0
4	0	0	0	0	0	200	976	2500	4168	4648	3424	1678	552
5	0	0	0	0	0	0	332	2256	8256	20680	37152	47896	44072
6	0	0	0	0	0	0	0	496	4336	20640	69040	172944	327592
7	0	0	0	0	0	0	0	0	692	7408	43492	181496	581776

TABLEAU 6.3 – Nombre de polycubes inscrits dans un $2 \times 2 \times h$ de volume v

La série génératrice des colonnes simples, dénotée $F^c(y, p)$, est obtenue en réalisant qu'il y a quatre colonnes simples uniquement lorsque la hauteur du prisme est égale au volume du polycube :

$$F^c(y, p) = 4 \sum_{v \geq 1} (yp)^v = \frac{4yp}{1 - yp}.$$

De plus, les polycubes $2 \times 1 \times h$ ou $1 \times 2 \times h$ sont exactement des polyominos inscrits dans un $2 \times h$, en considérant les cubes comme des carrés et vice versa. La série génératrice des polyominos inscrits dans un $2 \times h$ d'aire donnée est $F_2(p, y)$ (équation (2.10)). Puisque ces polyominos peuvent être placés de quatre manières dans un prisme $2 \times 2 \times h$, la série $F_{(2,h)}(y, p)$ des polycubes $2 \times 1 \times h$ ou $1 \times 2 \times h$ est

$$F_{(2,h)}(y, p) = 4F_2(p, y).$$

Ainsi,

$$P_{(2,2,h)}^i(y, p) = P_{(2,2,h)}^c(y, p) - F^c(y, p) - F_{(2,h)}(y, p).$$

En simplifiant cette dernière expression, on obtient (6.2). □

Le tableau 6.3 présente le nombre de polycubes inscrits dans un $2 \times 2 \times h$ de volume v . Ces valeurs n'ont pas été validées informatiquement, mais concordent avec celles obtenues en les comptant d'une autre manière, complètement indépendante de la méthode de la matrice de transfert. En fonction du premier niveau du polycube,

le nombre de polycubes pouvant se positionner en-dessous était compté : plusieurs récurrences et plusieurs cas particuliers ont mené aux mêmes résultats qu'avec la méthode de la matrice de transfert. Cette dernière est beaucoup plus efficace : les séries génératrices sont obtenus presque instantanément, mais comporte quand même certaines limites telles qu'abordées à la section 6.2.3.

On peut également obtenir les séries génératrices selon une seule des deux variables. En posant $p = 1$ dans (6.2), on obtient la série génératrice des polycubes inscrits dans un $2 \times 2 \times h$, tous volumes confondus.

Proposition 6.5. Soit $P_h^i(y)$ la série génératrice des polycubes inscrits dans un $2 \times 2 \times h$ en fonction de la hauteur, alors

$$P_h^i(y) = P_{(2,2,h)}^i(y, 1) = -y \frac{-29y^3 + 17y^7 - 76y^2 - 47y - 186y^4 - 101y^5 - 24y^6 - 5 + 3y^8}{(y^6 + y^5 - 35y^4 - 10y^3 - 3y^2 - 11y + 1)(y - 1)(-1 + 2y + y^2)}.$$

Le développement en série de $P_h^i(y)$ est

$$\begin{aligned} &5y + 117y^2 + 1559y^3 + 18283y^4 + 209201y^5 \\ &+ 2381049y^6 + 27069567y^7 + 307670687y^8 + 3496776669y^9 + \dots \end{aligned}$$

Entre autres, on conclut qu'il y a 1559 polycubes inscrits dans un prisme de dimensions $2 \times 2 \times 3$.

De même, en posant $y = 1$ dans $P_{(2,2,h)}^i(y, p)$, on a la série génératrice des polycubes inscrits dans un $2 \times 2 \times h$ selon le volume, indépendamment de la hauteur.

Proposition 6.6. Soit $P_v^i(p)$ la série génératrice des polycubes inscrits dans un $2 \times 2 \times h$ en fonction du volume, alors

$$P_v^i(p) = P_{(2,2,h)}^i(1, p) = -p^3 \frac{F_3(p)}{G_3(p)(p - 1)(-1 + p + p^2 + p^3)}$$

où

$$F_3(p) = -37p^2 - 57p^7 - p^{12} - 21p^5 - 4 - 21p - 59p^{10} - 97p^9 - 50p^6$$

$$+ 3p^{15} - 9p^{11} + 5p^4 - 17p^3 + 2p^{14} - 5p^{13} - 80p^8$$

et

$$\begin{aligned} G_3(p) = & p^{14} - 2p^{13} - p^{12} - p^{11} - 7p^{10} - 17p^9 - 13p^8 \\ & - 4p^7 - p^6 - 4p^5 + p^4 - 3p^3 - 5p^2 - p + 1. \end{aligned}$$

En développant $F_v^i(p)$ en série de MacLaurin, les premiers termes sont

$$4p^3 + 33p^4 + 148p^5 + 532p^6 + 1772p^7 + 5661p^8 + 17664p^9 + \dots \quad (6.3)$$

Par exemple, on déduit qu'il y a 148 polycubes de volume 5 inscrits dans un $2 \times 2 \times h$, $h \geq 1$.

6.2.3 Généraliser pour les polycubes $b \times k \times h$?

Le contexte d'utilisation de la matrice de transfert étant très similaire à [33], les problèmes entourant la généralisation pour de plus grands prismes sont les mêmes. Théoriquement, la méthode de la matrice de transfert peut être adaptée pour l'énumération de polycubes $b \times k \times h$, lorsque b et k sont des valeurs fixées et que h est variable. Toutefois, en pratique, elle est difficile à concrétiser : en augmentant les dimensions b et k du prisme, le nombre de configurations à traiter augmente exponentiellement. En conséquence, la matrice de transfert, notée $M_{bk}(p)$, étant de grande dimension, l'inversion des matrices $(I - yM_{bk}(p))$ devient calculatoirement difficile, même pour un ordinateur puissant. Finalement, un défi se pose pour la construction des matrices. En effet, pour le cas $b = k = 2$, celle-ci a été élaborée manuellement. En continuant ainsi pour de plus grands prismes, plusieurs erreurs peuvent être introduites, sans parler du temps à consacrer pour construire cette matrice. De manière à optimiser la construction, un moyen pour l'automatiser serait nécessaire.

Chapitre 7

Conclusion

Ce que nous connaissons est peu de chose ; ce que nous ignorons est immense. – P.-S. de Laplace [16, p. 19]

La géométrie combinatoire est parsemée de problèmes qui ne sont pas encore résolus, que ce soit concernant les chemins auto-évitant, les polygones, les polyominos ou encore les polycubes. Dans ce mémoire, les problèmes de dénombrement des polyominos en fonction de leur aire et des polycubes en fonction de leur volume ont été explorés. Bien qu'on en connaisse plus sur eux par l'étude de sous-classes, ces deux problèmes demeurent ouverts. Les sous-classes étudiées dans cet ouvrage concernent les polyominos d'index 0 à 2, soit d'aire minimale à aire minimale plus deux, comptés à translations près et à symétries près ainsi que les polycubes inscrits dans un prisme de dimensions $2 \times 2 \times h$. Pour ce faire, des méthodes connues ont été exploitées : les principes d'addition et du produit diagonal, le lemme de Burnside et la méthode de la matrice de transfert.

En ce qui concerne les polyominos d'index donné, une identité fondamentale a été démontrée, soit que la somme du nombre de trous linéaires et de faces est égale à l'index. Chronologiquement, ce résultat caractérisant les polyominos d'index r a été obtenu après l'étude des polyominos d'index 0 à 2 et l'obtention des séries génératrices de ces derniers. Avant la connaissance de celui-ci, peu d'espoir était fondé dans

la généralisation pour n'importe quel index, dû à la quantité de cas à analyser et à la difficulté de savoir qu'ils ont tous été considérés. Par exemple, uniquement pour les polyominos d'index 2, leur étude se divise en cinq classes, elles-mêmes subdivisées en sous-classes. Ainsi, plus l'index augmente, plus il y a de cas à examiner : ce que l'identité confirme. De plus, cette identité ouvre la porte à une généralisation de la construction des polyominos d'index r . En effet, bien que cela demeure long et fastidieux, l'énoncé permet une construction systématique plutôt qu'intuitive des polyominos d'index r en combinant toutes les manières de sommer le nombre de trous linéaires et de faces pour obtenir r . On peut donc envisager obtenir, avec ce raisonnement, les séries génératrices des polyominos d'index 3, 4, etc. Par contre, pour généraliser les résultats, il faudrait être en mesure d'obtenir la série génératrice des polyominos d'index r pour n'importe quel r , plutôt que de regarder pour chaque valeur de r possible.

On retrouve la même difficulté pour généraliser les séries génératrices des polyominos d'index 0 à 2 à symétries près et ce type d'énumération apporte d'autres questionnements. En effet, le lemme de Burnside a été utilisé pour obtenir ces séries et repose sur l'obtention de la cardinalité (ou de la série génératrice) des ensembles de polyominos invariants sous chaque symétrie. Par conséquent, il est nécessaire de connaître les polyominos énumérés à translations près, puisque ce sont ceux qui sont invariants sous la rotation de 0° . On ne peut donc pas espérer déduire les polyominos à translations près à partir de ceux à symétries près lorsqu'on utilise le lemme de Burnside. De plus, pour avoir la série génératrice des polyominos inscrits à symétries près, la connaissance de ceux inscrits dans un carré est nécessaire, puisque celui-ci possède plus de symétries qu'un rectangle. Celle-ci n'est pas triviale puisqu'une formule exacte en fonction de la largeur et de la hauteur des polyominos doit être connue.

Cette contrainte concernant les polyominos inscrits dans un carré ne s'applique pas pour utiliser le lemme de Burnside sur les polyominos d'index r non-inscrits d'aire fixée. En effet, un des principes de base de l'action d'un groupe sur un ensemble, sur lequel s'appuie ce lemme, est que l'image de cette action doit rester dans l'ensemble,

c'est-à-dire que l'ensemble doit être fermé sous l'action du groupe. Or, par la définition des polyominos d'index r non-inscrits, l'image d'un de ces objets sous n'importe quelle symétrie demeure dans l'ensemble de départ puisque l'aire reste inchangée. Ainsi, sans avoir d'information sur les polyominos inscrits dans un carré, on peut tout de même atteindre l'objectif de compter les polyominos d'un index donné à symétries près en fonction de leur aire avec le lemme de Burnside.

Aussi, ces nouveaux résultats ouvrent la voie vers d'autres perspectives de recherche. En effet, pour faire suite à cette étude, on pourrait tenter de déduire à partir des séries génératrices obtenues des formules explicites exactes. De plus, les polyominos asymétriques, ceux ne possédant aucune symétrie, pourraient être comptés à l'aide du principe d'inclusion-exclusion.

Quant aux polycubes, étant donné qu'ils sont la version en trois dimensions des polyominos, il n'est pas surprenant qu'ils soient encore plus difficiles à compter. Un petit pas a tout de même été franchi par l'obtention de la série génératrice des polycubes inscrits dans un prisme $2 \times 2 \times h$ à l'aide de la méthode de la matrice de transfert. Toutefois, tel que mentionné dans le chapitre associé à ces résultats, la généralisation de cette méthode pour d'autres prismes devient monstrueuse. En effet, l'augmentation de la taille de la matrice est constatée en remarquant que plus le prisme est grand, plus le nombre de situations à considérer augmente.

Bref, ce mémoire se veut une excursion dans le problème de dénombrement des polyominos et de celui des polycubes. Ces problèmes sont loin d'être résolus, cependant le monde scientifique se dirige lentement mais sûrement vers une meilleure compréhension de ces objets et conséquemment, réussit tant bien que mal à extraire de l'ordre du désordre.

Bibliographie

- [1] ALONSO, L., & CERF, R. (1996). « The three dimensional polyominoes of minimal area ». *The Electronic Journal of Combinatorics*, 3(1). Consulté électroniquement le 24 juillet 2014 à l'adresse <http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v3i1r27>
- [2] BENARDE, M. A. (1973). *Our Precarious Habitat*, Norton.
- [3] BENDER, E. A., & GILL WILLIAMSON, S. (2006). *Foundations of Combinatorics with Applications*, Dover Publications.
- [4] BENJAMIN, A. T., & QUINN, J. J. (2003). *Proofs that Really Count : The Art of Combinatorial Proof*, Dolciani Mathematical Expositions, Mathematical Association of America.
- [5] BOGART, K. P. (2004). *Combinatorics Through Guided Discovery*.
- [6] BÓNA, M. (2006). *A Walk Through Combinatorics - An Introduction to Enumeration and Graph Theory*, 2e édition, World Scientific Co.
- [7] BOUSQUET-MÉLOU, M. (1996). « A method for the enumeration of various classes of column-convex polygons ». *Discrete Mathematics*, 154, p. 1-25.
- [8] BOUSQUET-MÉLOU, M. (1996). *Rapport scientifique d'habilitation*, Rapport, LABRI, Université de Bordeaux 1.
- [9] BOUSQUET-MÉLOU, M., & RECHNITZER, A. (2003). « The site perimeter of bargraphs ». *Advances in Applied Mathematics*, 31(1), p. 86-112.
- [10] DELAHAYE, J.-P. (2006). « Le miraculeux « lemme de Burnside » ». *Pour la science*, 350, p. 90-95.

- [11] DELEST, R. (1991). « Polyominoes and animals : Some recent results ». *Journal of Mathematical Chemistry*, 8(1), p. 3-18.
- [12] DEL LUNGO, A., NIVAT, M., PINZANI, R., & RINALDI, S. (2004). « A bijection for the total area of parallelogram polyominoes ». *Discrete Applied Mathematics*, 144 (3), p. 291-302.
- [13] DUDENEY, H. E. (1908). *The Canterbury Puzzles*, E. P. Dutton and company.
- [14] DUKES, M., & LE BERGE, Y. (2013). « The sandpile model on a bipartite graph, parallelogram polyominoes, and a q, t -Narayana polynomial ». *Journal of Combinatorial Theory Series A*, 120(4) , p. 816-842.
- [15] EWALD, W. B. (1996). *From Kant to Hilbert : A Source Book in the Foundations of Mathematics, Volume 2*, Oxford University Press.
- [16] FOURIER, J.-B. J. (1829). *Éloge historique de M. le Marquis de Laplace*, Didot.
- [17] FUKUDA, H., KANOMATA, C., MUTOH, N., NAKAMURA, G., & SCHATTSCHEIDER, D. (2011). « Polyominoes and Polyiamonds as Fundamental Domains of Isohedral Tilings with Rotational Symmetry ». *Symmetry*, 3, p. 828-851
- [18] GĘBALA, M. (2002). « The reconstruction of some 3D convex polyominoes from orthogonal projections ». *SOFSEM 2002 : Theory and Practice of Informatics* (W. Grosz et F. Plášil, eds), 2540, Springer Berlin / Heidelb, p. 262-272.
- [19] GOLOMB, S.W. (1954). « Checker boards and Polyominoes ». *The American Mathematical Monthly*, 61(10).
- [20] GOLOMB. S. W. (1996). *Polyominoes : Puzzles, Patterns, Problems, and Packings*, 2e edition, Princeton University Press.
- [21] GOUPIL, A., & CLOUTIER, H. (2011). « Enumeration of minimal 3D polyominoes inscribed in a rectangular prism ». *Proceedings of the Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, p. 423-434.
- [22] GOUPIL, A, CLOUTIER, H., & NOUBOUD, F. (2010). « Enumeration of polyominoes inscribed in a rectangle ». *Discrete Applied Mathematics*, 158(8), p. 2014-2023.
- [23] GOUPIL, A., CLOUTIER, H., & PELLERIN, M.-E. (2013). *Generating functions for inscribed polyominoes*. *Discrete Applied Mathematics*, 161(1-2), p.151-166.

- [24] GOUYOU-BEAUCHAMPS, D., & LEROUX, P. (2005). « Enumeration of symmetry classes of convex polyominoes on the honeycomb lattice ». *Theoretical Computer Science*, 346, p. 307-334.
- [25] GUTTMANN, A. J.(ED.) (2009). *Polygons, Polyominoes and Polycubes*. Lecture Notes in Physics, Springer.
- [26] LEROUX, P., RASSART, E., & ROBITAILLE, A. (1998). « Enumeration of Symmetry Classes of Convex Polyominoes in the Square Lattice ». *Advances in Applied Mathematics*, 6(3), p. 323-380.
- [27] LIPSCHUTZ, S., & LIPSON, M. (2003). *Algèbre linéaire*, 3e édition, McGraw-Hill (Schaum's).
- [28] LLERENA, L. J. (2012). *Énumération des polyominos d'aire $MIN + 1$* , Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières.
- [29] PÓLYA, P. (1969). « On the Number of Certain Lattice Polygons ». *Journal of Combinatorial Theory*, 6, p. 102-195.
- [30] PÓLYA, G. (2004). *How to Solve It : A New Aspect of Mathematical Method*, 2e édition revisitée, Princeton University Press.
- [31] PÓLYA, G., & READ, R.C. (1987). *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds*, Springer-Verlag.
- [32] PÓLYA, G., & SZEBŐ, G. (1978). *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer Science & Business Media.
- [33] RASSART, E. (1999). *Énumération de certaines classes de polyominos et de chemins autoévitants*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal.
- [34] READ, R.C. (1962). « Contributions to the cell growth problem », *Canadian Journal of Mathematics*, 14, p.1-20.
- [35] ROBERT, F. S., & TESMAN, B. (2005). *Applied Combinatorics*, 2e édition, Pearson.
- [36] ROUSSEAU, C. (2014). « Passera, passera pas ? ». *Accromath*, 9.1, p. 8-13.
- [37] RUCKER, R. (2007). *Infinity and the Mind : The Science and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press.

- [38] STANLEY, R. P. (1997). *Enumerative Combinatorics Volume 1*, 2e édition, Cambridge University Press.
- [39] THE ONLINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES, <http://oeis.org>.
- [40] THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES. *Number of 3-dimensional polyominoes (or polycubes) with n cells*. Consulté électroniquement le 4 juin 2014 au www.oeis.org/A000162
- [41] THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES. *Number of fixed polyominoes with n cells*. Consulté électroniquement le 8 juillet 2014 au www.oeis.org/A001168
- [42] TURING, A. (1939). « Systems of logic based on ordinals ». *Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2*, 45, p. 162-228.
- [43] WILF, H. S. (1994). *generatingfunctionology*. internet edition, Academic Press Inc, <http://www.math.upenn.edu/~wilf/gfologyLinked2.pdf>
- [44] WHITTINGTON, S. G., & SOTEROS, C.E. (1990). « Lattice Animals : Rigorous Results and Wild Guesses » *Disorder in Physical Systems*, p. 323-335, Clarendon Press.
- [45] ZEILBERGER, D. (1996). « Self-avoiding walks, the language of science, and Fibonacci numbers ». *Journal of Statistical Planning and Inference*, 54, p.135-138.

A Séries génératrices des polyominos d'index 1

Dans cette annexe, les séries génératrices à deux variables des polyominos d'index 1 à rotations près et les séries à symétries près sont présentées. Pour plus de détails concernant l'obtention de celles-ci, le lecteur est référé à la section 5.4.

A.1 Polyominos d'index 1 à translations près

Soit $P_1(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 1 inscrits, alors

$$\begin{aligned} P_1(x, y) = & \frac{2x^3y^2}{1-x} \left(\sigma_1(x, y) \sigma_2(x, y) - \frac{(1+x)^2(1+y)}{(1-x)^2(1-y)} \left(1 + \frac{(3-2x)y}{(1-x)(1-y)} \right) \right) \\ & + \frac{2x^2y^3}{1-y} \left(\sigma_1(x, y) \sigma_2(y, x) - \frac{(1+y)^2(1+x)}{(1-y)^2(1-x)} \left(1 + \frac{(3-2y)x}{(1-x)(1-y)} \right) \right) \\ & + 2x^2y^2 \left(\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right)^2 \\ & - \frac{x^2y^2(1+x)^2(1+y)^2}{(1-x)^2(1-y)^2} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_1(x, y) &= \frac{2(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} + \frac{4}{1-x-y} - \frac{4}{(1-x)(1-y)}, \\ \sigma_2(x, y) &= \frac{1+x}{1-x} \left(1 + \frac{(3-2x)y}{(1-x)(1-y)} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)}. \end{aligned}$$

A.2 Polyominos d'index 1 à rotations près

Soit $R_1(x, y)$ les polyominos d'index 1 inscrits à rotations près, alors

$$\begin{aligned}
 R_1(x, y) = & \frac{-8x^3y^3(5 - 16yx + \sqrt{1 - 4yx})}{(1 + \sqrt{1 - 4yx})(1 - 4yx)^{3/2}} + \frac{176x^3y^3}{\sqrt{1 - 4yx}(1 + \sqrt{1 - 4yx})} + \frac{y^2x^2}{2(1 - y^2x^2)} \\
 & + \frac{y^2x^2}{1 - x^2 - y^2} \left(1 + \frac{y^2x^2}{(1 - x^2)(1 - y^2)} \right) + \frac{-416y^5x^5 + 1144y^4x^4 - 936x^3y^3}{4(1 - yx)^3} \\
 & - \frac{64x^3y^3 \left((1 - 4yx)^{3/2}(30xy - 9) - 264y^2x^2 + 86yx + 256x^3y^3 - 9 \right)}{(1 + \sqrt{1 - 4yx})^3(4yx - 1)(1 - 4yx)^{3/2}} \\
 & + \frac{192x^3y^3(3\sqrt{1 - 4yx} + 3 - 8yx)}{\sqrt{1 - 4yx}(1 + \sqrt{1 - 4yx})^3} - \frac{208x^3y^3}{(1 + \sqrt{1 - 4yx})^2} - \frac{y^2x^2}{\sqrt{1 - 4y^2x^2}} \\
 & + \frac{24xy(-8y^2x^2 + 4yx + (1 - 4yx)^{5/2}(yx + 1/2) - 1/2)}{(1 - 4yx)^{5/2}} + \frac{30x^3y^3}{yx - 1} \\
 & - \frac{640x^6y^6 - 2480y^5x^5 + 3520y^4x^4 - 2160x^3y^3}{12(1 - yx)^4} - \frac{y^4x^4}{2(y^2x^2 - 1)} \\
 & + \frac{y^4x^4}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} - \frac{x^3y^2\gamma_1(x, y)}{(-1 + x + y)^2(x - 1)^4(y - 1)^2} \\
 & + \frac{x^2y^2\gamma_3(x, y)}{2(-1 + x + y)^2(x - 1)^2(y - 1)^2} - \frac{133x^3y^3(2yx - 3)}{3(1 - yx)^2} \\
 & - \frac{y^3x^2\gamma_2(x, y)}{(-1 + x + y)^2(x - 1)^2(y - 1)^4}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(x, y) = & y^2x^5 + 2y^3x^4 + y^4x^3 + 2x^5y - 6y^2x^4 - 8x^3y^3 + x^5 - 9x^4y + 9x^3y^2 \\
 & - x^2y^3 - 3xy^4 - x^4 + 4yx^3 - 5y^2x^2 + 10xy^3 - 2y^4 - 2x^3 \\
 & + 10yx^2 - 2y^2x + y^3 + 2x^2 - 6yx + 3y^2 + x - y - 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_2(x, y) = & y^3x^4 + 2y^4x^3 + x^2y^5 - 8x^3y^3 - 6y^4x^{A.2.02} + 2xy^5 - 3x^4y - x^3y^2 + 9x^2y^3 \\
 & - 9xy^4 + y^5 - 2x^4 + 10yx^3 - 5y^2x^2 + 4xy^3 - y^4 + x^3 - 2yx^2 \\
 & + 10y^2x - 2y^3 + 3x^2 - 6yx + 2y^2 - x + y - 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_3(x, y) = & y^2x^4 + 2x^3y^3 + y^4x^2 + 2x^4y - 4x^3y^2 - 4x^2y^3 + 2xy^4 + x^4 - 6yx^3 \\
 & + 3y^2x^2 - 6xy^3 + y^4 - 2yx^2 - 2y^2x - 2x^2 + 6yx - 2y^2 + 1.
 \end{aligned}$$

A.3 Polyominos d'index 1 à symétries près

Soit $S_1(x, y)$ la série génératrice des polyominos d'index 1 à symétries près, alors

$$\begin{aligned}
S_1(x, y) = & \frac{y^4 x^2 (y^2 + 1)}{2(1 - y^2)^2} + \frac{y^4 x^4}{2(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + \frac{y^2 x^2}{2(1 - x^2)} + \frac{y^4 x^4}{4(1 - y^2 x^2)} - \frac{y^2 x^2}{2} \\
& + \frac{32x^3 y^3 \left((1 - 4yx)^{3/2} (30xy - 9) - 264y^2 x^2 + 86yx + 256x^3 y^3 - 9 \right)}{(1 + \sqrt{1 - 4yx})^3 (1 - 4yx) (1 - 4yx)^{3/2}} \\
& + \frac{x^3 y^2}{2(1 - x)} (\delta_1(x, y) \delta_2(x, y) - \delta_3(x, y)) + \frac{x^2 y^3}{2(1 - y)} (\delta_1(x, y) \delta_2(y, x) - \delta_3(y, x)) \\
& + \frac{y^2 x^2}{2(1 - x^2 - y^2)} \left(1 + \frac{y^2 x^2}{(1 - x^2)(1 - y^2)} \right) + \frac{y^2 x^4 (x^2 + 1)}{2(1 - x^2)^2} + \frac{2y^4 x^4}{1 - 2yx} \\
& - \frac{640x^6 y^6 - 2480y^5 x^5 + 3520y^4 x^4 - 2160x^3 y^3}{24(1 - yx)^4} - \frac{y^4 x^4 (3yx - 4)}{2(1 - yx)^2} \\
& + \frac{-416y^5 x^5 + 1144y^4 x^4 - 936x^3 y^3}{8(1 - yx)^3} - \frac{4x^3 y^3 (5 - 16yx + \sqrt{1 - 4yx})}{(1 + \sqrt{1 - 4yx}) (1 - 4yx)^{3/2}} \\
& + \frac{x^3 y^3}{2(y^2 x^2 - 1)} + 96 \frac{x^3 y^3 (3\sqrt{1 - 4yx} + 3 - 8yx)}{\sqrt{1 - 4yx} (1 + \sqrt{-4yx + 1})^3} - \frac{y^5 x^5}{1 - y^2 x^2} - \frac{x^7 y^7}{(1 - y^2 x^2)^2} \\
& + x^3 y^3 + \frac{x^2 y^2}{4} \left(2\delta_4(x, y)^2 - \frac{(1 + x)^2 (1 + y)^2}{(1 - x)^2 (1 - y)^2} \right) + \frac{y^2 x^2}{4(1 - y^2 x^2)} + \frac{15x^3 y^3}{yx - 1} \\
& - \frac{x^2 y^3 (y^2 + 1)}{2(y^2 - 1)^2 (x - 1)} + \frac{88x^3 y^3}{\sqrt{1 - 4yx} (1 + \sqrt{1 - 4yx})} + \frac{y^2 x^2}{2(1 - y^2)} \\
& + \frac{12xy \left(-8y^2 x^2 + 4xy - 1/2 + (1 - 4yx)^{5/2} (xy + 1/2) \right)}{(1 - 4yx)^{5/2}} - \frac{y^2 x^2}{\sqrt{1 - 4y^2 x^2}} \\
& - \frac{133x^3 y^3 (2yx - 3)}{6(yx - 1)^2} - \frac{x^3 y^2 (x^2 + 1)}{2(x^2 - 1)^2 (y - 1)} + \frac{3y^4 x^4}{2(yx - 1)} - \frac{104x^3 y^3}{(1 + \sqrt{1 - 4yx})^2}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\delta_1(x, y) &= \frac{2(1 + x)(1 + y)}{(1 - x)(1 - y)} + \frac{4}{1 - x - y} - \frac{4}{(1 - x)(1 - y)}, \\
\delta_2(x, y) &= \frac{1 + x}{1 - x} \left(1 + \frac{(3 - 2x)y}{(1 - x)(1 - y)} \right) + \frac{2}{1 - x - y} - \frac{2}{(1 - x)(1 - y)}, \\
\delta_3(x, y) &= \frac{(1 + x)^2 (1 + y)}{(1 - x)^2 (1 - y)} \left(1 + \frac{(3 - 2x)y}{(1 - x)(1 - y)} \right), \\
\delta_4(x, y) &= \frac{(1 + x)(1 + y)}{(1 - x)(1 - y)} + \frac{2}{1 - x - y} - 2 \frac{1}{(1 - x)(1 - y)}.
\end{aligned}$$

B Vérification informatique de l'invariance d'un polyomino sous une symétrie donnée

Les séries génératrices $F_i^g(x, y)$ et $F_i^{g, \square}(x, y)$ des sections 5.3 à 5.5 ont été vérifiées informatiquement de manière indépendante pour des rectangles de dimensions inférieures ou égales à 5×5 . Pour ce faire, un programme existant développé par F. Nouboud qui génère l'ensemble des polyominos inscrits de dimensions et d'aire données a été adapté afin d'énumérer les polyominos c -symétriques pour $c \in \{r, r^2, d_1, v\}$. Dans ce programme, un polyomino est représenté par une matrice de 0 et de 1, où un 0 signifie une case vide tandis qu'un 1 est une cellule occupée.

Soit M et M_c des matrices représentant un polyomino où M_c est l'image de M sous la symétrie c . Par définition, le polyomino décrit par M est c -symétrique si et seulement si $M = M_c$.

Pour vérifier cette condition, M_c est obtenue en fonction de M pour $c \in \{r, r^2, v, d_1\}$. Ensuite, à titre d'exemple, un code *Maple* ayant pour objectif de savoir si un polyomino M est c -invariant est développé.

B.1 Rotation de 90°

Pour exprimer M_r en fonction de M , on doit remarquer que la dernière colonne de M_r est la première ligne de M , que l'avant-dernière colonne est la deuxième ligne, etc. Plus généralement, la colonne j de M_r est la ligne $n - j + 1$ de M et ce peu importe le nombre n de lignes de la matrice, comme en témoigne le cas pour une matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{22} & a_{23} & a_{13} \end{pmatrix}.$$

De cet exemple, on voit que la ligne i de M_r est la colonne i de M , valide également pour toute matrice carrée. De ces deux remarques sur les lignes et les colonnes combinées, on conclut que

$$M_r(i, j) = M(n - j + 1, i) \quad (\text{B.1})$$

où n est le nombre de lignes de M .

Ainsi, pour savoir combien il y a de polyominos r -symétriques, il faut compter combien il y en a qui satisfaisaient cette condition.

B.2 Rotation de 180°

En ce qui concerne la rotation de 180° , on peut se contenter d'appliquer deux fois la rotation de 90° pour avoir

$$M_{r^2}(i, j) = M_r(n - j + 1, i) = M(n - i + 1, m - j + 1) \quad (\text{B.2})$$

où n et m sont respectivement le nombre de lignes et de colonnes de M . On peut s'en convaincre avec l'exemple suivant

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{r^2} \begin{pmatrix} a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

B.3 Symétrie diagonale

Le résultat d'une symétrie diagonale sur un polyomino est équivalent à la transposée de la matrice associée, tel que mis en évidence dans l'exemple suivant

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$M_{d_1}(i, j) = M(j, i). \quad (\text{B.3})$$

B.4 Symétrie verticale

On peut vérifier, par l'exemple qui suit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{v} \begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix},$$

que

$$M_v(i, j) = M(i, m - j + 1) \quad \text{où } m \text{ est le nombre de colonnes de } M. \quad (\text{B.4})$$

B.5 Programme

Description des variables

- M : Polyomino;
- $nbLignes$, $nbColonnes$: Dimensions du rectangle circonscrit à M ;
- c : Une symétrie, $c \in \{r, r^2, v, d_1\}$;
- i, j : Variables de boucle parcourant toutes les cellules de M ;
- $CondiSymc[i, j]$: Condition à respecter pour que M soit c -symétrique Des équations (B.1) à (B.4), on a
 - si $c = r$, alors $CondiSymc[i, j]$ est $M[i, j] = M[nbLignes - j + 1, i]$;
 - si $c = r^2$, alors $CondiSymc[i, j]$ est

$$M[i, j] = M[nbLignes - i + 1, nbColonnes - j + 1];$$
 - si $c = v$, alors $CondiSymc[i, j]$ est $M[i, j] = M[i, nbColonnes - j + 1]$;
 - si $c = d_1$, alors $CondiSymc[i, j]$ est $M[i, j] = M[j, i]$;
- $compteur$: Nombre de cellules de M satisfaisant la condition $CondiSymc[i, j]$.

Programme Maple « Symc » Son objectif est de vérifier que M est c -symétrique.

```
Symc := proc (nbLignes, nbColonnes, M, c)
  compteur := 0:
  for i from 1 to nbLignes do
    for j from 1 to nbColonnes do
      if CondiSymc[i, j] then
        compteur:=compteur+1:
      end if:
    end do:
  end do:
  if compteur = nbLignes*nbColonnes then
    return("Le polyomino M est c-invariant."):
  end if:
end proc:
```