

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	iv
RÉSUMÉ .....	v
TABLE DES MATIÈRES .....	vi
LISTE DES TABLEAUX.....	xiii
LISTE DES FIGURES.....	xv
LISTE DES SYMBOLES ET ABRÉVIATIONS .....	xx
1 CHAPITRE 1 - INTRODUCTION .....	1
1.1 Mise en contexte .....	1
1.2 Définition de la problématique.....	2
1.3 Objectif principal .....	2
1.4 Organisation du mémoire.....	2
2 CHAPITRE 2 - REVUE DE LA LITTÉRATURE ET OBJECTIFS .....	4
2.1 Introduction .....	4
2.2 Étapes d'un calcul par éléments finis.....	4
2.3 Modélisation géométrique.....	5
2.3.1 Concepts de géométrie, topologie et co-topologie.....	6
2.3.2 Modèles de type fil de fer .....	7
2.3.2.1 Équations intrinsèques d'une courbe .....	8
2.3.2.2 Équations explicites et implicites d'une courbe .....	8
2.3.2.3 Équations paramétriques d'une courbe.....	9

## Table des matières

2.3.2.3.1	Courbes splines ou composites .....	9
2.3.3	Modèles surfaciques .....	12
2.3.3.1	Équations paramétriques d'une surface .....	13
2.3.3.1.1	Surfaces composites.....	13
2.3.4	Modèles solides.....	13
2.3.4.1	Équations paramétriques d'un solide.....	14
2.3.4.2	Modélisation par balayage.....	14
2.3.4.3	Modélisation par arbre de construction (CSG).....	15
2.3.4.4	Modélisation basée sur les frontières de l'objet (BREP).....	15
2.4	Méthodes de maillage automatique.....	15
2.4.1	Méthodes de Delaunay-Voronoi.....	16
2.4.2	Méthode frontale.....	16
2.5	Optimisation de structures .....	17
2.5.1	Formulation générale d'un problème d'optimisation de structures .....	17
2.5.1.1	Processus général d'optimisation de structures .....	18
2.5.2	Type de méthodes d'optimisation de structures .....	19
2.5.3	Optimisation paramétrique .....	20
2.5.4	Optimisation géométrique ou de forme .....	20
2.5.5	Optimisation topologique .....	22
2.5.6	Méthode du mouvement normal (MMN) .....	25
2.5.6.1	Principe général .....	25
2.5.6.2	Étapes de la méthode du mouvement normal .....	26
2.5.6.2.1	Forme initiale .....	27
2.5.6.2.2	Conditions aux limites, matériau et zones de non-design.....	27

## Table des matières

2.5.6.2.3	Choix des points de design.....	29
2.5.6.2.4	Calcul des contraintes aux points de design.....	29
2.5.6.2.5	Déplacement des points de design .....	30
2.5.6.2.6	Itération et convergence .....	32
2.5.6.3	Type de modélisation utilisée .....	34
2.5.6.4	Concept de restriction spatiale.....	35
2.5.6.5	Exemples de problèmes d'optimisation.....	38
2.5.6.6	Avantages et inconvénients de la méthode du mouvement normal ...	40
2.5.6.7	Lacunes de la littérature .....	42
2.6	Objectifs spécifiques .....	42
2.7	Hypothèses et limites .....	43
2.8	Méthodologie .....	43
3	CHAPITRE 3 - INTÉGRATION D'ÉLÉMENTS FINIS DE PLAQUES DANS L'ENVIRONNEMENT DE DÉVELOPPEMENT.....	45
3.1	Introduction.....	45
3.2	Présentation de l'environnement de développement.....	45
3.2.1	Modélisation de l'objet dans un logiciel de CAO et importation dans MAGIC .....	46
3.2.2	Définition des conditions aux limites et du matériau .....	47
3.2.3	Génération de la carte de taille .....	47
3.2.4	Génération du maillage géométrique.....	47
3.2.5	Génération du maillage éléments finis.....	48
3.2.6	Calcul par éléments finis.....	48
3.2.7	Visualisation et interprétation des résultats .....	49

## Table des matières

3.3	Étude par éléments finis d'un cadre de vélo .....	49
3.3.1	Forme classique d'un cadre de vélo.....	49
3.3.2	Choix de la modélisation et du type d'éléments finis.....	50
3.3.2.1	Modélisation surfacique en coque .....	50
3.3.2.1.1	Théorie des coques minces .....	50
3.3.2.2	Éléments de plaques triangulaires .....	50
3.4	Adaptation de l'environnement de développement pour l'étude par éléments finis en modélisation surfacique .....	51
3.4.1	Problème d'orientation d'une coque.....	52
3.4.2	Problème d'orientation du repère local d'un élément de plaque .....	53
3.4.3	Vérification de la validité des résultats de calcul .....	54
3.4.3.1	Modélisation dans SolidWorks Simulation .....	54
3.4.3.2	Modélisation dans l'environnement MAGIC .....	56
3.4.3.3	Formulation mathématique du problème.....	57
3.4.3.4	Comparaison des résultats .....	59
3.5	Conclusion .....	61
4	CHAPITRE 4 - IMPLANTATION, APPLICATION ET CONTRÔLE DE LA MÉTHODE DU MOUVEMENT NORMAL.....	62
4.1	Introduction.....	62
4.2	Algorithme de la MMN non contrôlée.....	62
4.3	Application de la MMN non contrôlée à un tube en porte-à-faux .....	65
4.3.1	Forme initiale.....	66
4.3.2	Valeurs des paramètres d'optimisation.....	69
4.3.3	Forme optimisée par la MMN non contrôlée.....	70

## Table des matières

4.3.4	Conclusion .....	74
4.4	Contrôle basé sur la courbure.....	74
4.5	Contrôle par angle minimal entre deux triangles voisins.....	75
4.5.1	Angle minimal entre deux triangles voisins dont l'un possède 3 nœuds fixes.....	75
4.6	Lissage de la surface par barycentrage des nœuds.....	76
4.7	Contrôle par écart maximal de déplacement entre deux nœuds voisins .....	77
4.8	Contrôle par gradient de déplacement d'un triangle – approche locale basée sur la proximité.....	78
4.8.1	Calcul du gradient de déplacement d'un triangle .....	78
4.8.2	Principe général du contrôle local par gradient de déplacement .....	82
4.8.3	Algorithme de la MMN contrôlée localement par le gradient de déplacement .....	82
4.8.4	Problèmes rencontrés.....	83
4.9	Contrôle par gradient de déplacement d'un triangle – approche globale basée sur la résolution d'un système d'équations .....	84
4.10	Contrôle par gradient de déplacement d'un triangle – approche globale basée sur un problème de minimisation .....	85
4.10.1	Principe général du contrôle global par gradient de déplacement.....	85
4.10.2	Algorithme de la MMN contrôlée globalement par le gradient de déplacement .....	86
4.10.3	Algorithme du gradient.....	87
4.10.4	Exemple : plaque maillée par quatre triangles rectangles égaux .....	88
4.10.5	Paramètres de la MMN avec contrôle basé sur le gradient de déplacement d'un triangle.....	93

## Table des matières

4.11	Application de la MMN avec contrôle basé sur le gradient de déplacement d'un triangle à un tube en porte-à-faux .....	94
4.11.1	Valeurs des paramètres d'optimisation.....	94
4.11.2	Forme optimisée .....	95
4.11.2.1	Critère de convergence inadéquat.....	102
4.11.2.2	Critères d'évaluation de la forme optimisée .....	103
4.11.2.3	Étude de l'influence de la norme maximale du gradient de déplacement sur la forme optimisée .....	106
4.12	Application de la MMN contrôlée au triangle avant d'un cadre de vélo .....	107
4.12.1	Forme initiale et conditions aux limites.....	107
4.12.2	Forme optimisée par la MMN contrôlée globalement par le gradient de déplacement .....	110
4.13	Conclusion .....	113
5	CHAPITRE 5 - RÉSULTATS .....	115
5.1	Exemples de problèmes convenant à la MMN contrôlée.....	116
5.1.1	Tube en porte-à-faux avec normales actualisées .....	116
5.1.2	Cadre de vélo avec normales actualisées .....	118
5.1.3	Cadre de vélo en flexion latérale .....	120
5.1.4	Cadre de vélo avec force appliquée sous le tube de direction .....	122
5.1.5	Support en U en flexion.....	124
5.1.6	Tube encastré aux deux extrémités avec chargement central .....	126
5.2	Exemples de problèmes ne convenant pas à la MMN contrôlée .....	128
5.2.1	Tube soumis à des efforts de flexion et de tension .....	128
5.2.2	Demi-cylindre en flexion.....	129

5.2.3	Joint en T en flexion .....	131
6	CHAPITRE 6 - CONCLUSION .....	133
	RÉFÉRENCES.....	135
	ANNEXE A - ÉCRITURE AUTOMATIQUE DES FICHIERS REQUIS PAR CODE_ASTER.....	138
A.1	Fichier de maillage .....	138
A.2	Fichier de commandes .....	139
A.2.1	Affectation de la modélisation au maillage.....	139
A.2.2	Définition de l'épaisseur de la coque .....	139
A.2.3	Affectation du matériau à la coque .....	140
A.2.4	Définition des déplacements imposés .....	140
A.2.5	Calcul mécanique.....	140
A.2.6	Calculs en post-traitement.....	140
A.2.7	Impression des résultats .....	141
	ANNEXE B - CALCUL DE LA MATRICE JACOBIENNE INVERSE D'UN TRIANGLE.....	142
B.1	Coordonnées des nœuds du triangle dans le repère local.....	143
B.2	Calcul de la matrice jacobienne dans le repère local .....	146
B.3	Calcul de la matrice jacobienne inverse dans le repère local.....	146
B.4	Matrice jacobienne inverse exprimée dans le repère global .....	147

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Comparaison des contraintes de Von Mises obtenues avec MAGIC et SolidWorks Simulation aux sommets $S1$ à $S4$ .....	60
Tableau 4.1	Caractéristiques du tube initial .....	66
Tableau 4.2	Contraintes de Von Mises initiales.....	68
Tableau 4.3	Paramètres de la MMN non contrôlée.....	69
Tableau 4.4	Paramètres de la MMN non contrôlée.....	73
Tableau 4.5	Fonctions d'interpolation et dérivées pour un triangle à trois nœuds .....	79
Tableau 4.6	Résultats obtenus par l'algorithme du gradient .....	92
Tableau 4.7	Paramètres de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement.....	93
Tableau 4.8	Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée .....	95
Tableau 4.9	Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN contrôlée .....	102
Tableau 4.10	Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du tube en porte-à-faux.....	105
Tableau 4.11	Caractéristiques du cadre initial .....	109
Tableau 4.12	Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du cadre .....	112
Tableau 4.13	Critères d'évaluation d'une forme optimisée .....	113
Tableau 4.14	Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée .....	114
Tableau 5.1	Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le tube en porte-à-faux avec les normales actualisées .....	116
Tableau 5.2	Comparaison des paramètres pour la forme initiale et pour les formes optimisées obtenues en déplaçant les nœuds selon les normales initiales et selon les normales actualisées à chaque itération pour le tube en porte-à-faux.....	116

## Liste des tableaux

Tableau 5.3	Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le cadre avec les normales actualisées à chaque itération.....	118
Tableau 5.4	Comparaison des paramètres pour la forme initiale du cadre et pour les formes optimisées obtenues en déplaçant les nœuds selon les normales initiales et selon les normales actualisées à chaque itération .....	118
Tableau 5.5	Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le cadre en flexion latérale .....	120
Tableau 5.6	Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du cadre en flexion latérale .....	120
Tableau 5.7	Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le cadre avec force appliquée sous le tube de direction.....	122
Tableau 5.8	Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du cadre avec force appliquée sous le tube de direction .....	122
Tableau 5.9	Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le support en U .....	124
Tableau 5.10	Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du support en U .....	125
Tableau 5.11	Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le tube encastré aux deux extrémités avec chargement central.....	126
Tableau 5.12	Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du tube encastré au deux extrémités avec chargement central .....	126
Tableau 5.13	Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le tube soumis à des efforts de flexion et de tension .....	128
Tableau 5.14	Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le demi-cylindre en flexion.....	129
Tableau 5.15	Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du demi-cylindre.....	129
Tableau 5.16	Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le joint en T .....	131
Tableau 5.17	Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du joint en T.....	131

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Modèle filaire d'un cylindre.....	7
Figure 2.2	Exemple de spline 2D formée de trois courbes de Hermite .....	10
Figure 2.3	Modèle surfacique d'un tube à paroi mince .....	12
Figure 2.4	Modèle solide d'un cylindre plein.....	14
Figure 2.5	Triangulation de Delaunay et polygones de Voronoï (François 1998) ....	16
Figure 2.6	Processus général d'optimisation de structures.....	18
Figure 2.7	Types de méthodes d'optimisation de structures (Khalil 2009).....	19
Figure 2.8	Optimisation par la méthode SIMP a) Géométrie initiale et conditions aux limites b) Maillage c) Résultats bruts de la méthode SIMP d) Forme et topologie finales (Cuillère, François et al. 2011) .....	23
Figure 2.9	Processus d'optimisation par la MMN .....	26
Figure 2.10	Zones de non-design (en bleu) du triangle avant d'un cadre de vélo .....	28
Figure 2.11	Zone de non-design (en bleu) pour un tube en porte-à-faux .....	28
Figure 2.12	Problème de non-uniformité de la taille des éléments volumiques a) Éléments de taille uniforme avant déplacement de la frontière b) Éléments de taille non uniforme après déplacement de la frontière.....	34
Figure 2.13	Poutre de longueur $L$ encastée aux deux extrémités soumise à une charge répartie $w$ .....	35
Figure 2.14	Optimisation par la MMN sans restriction spatiale d'une poutre de longueur $L$ encastée aux deux extrémités soumise à une charge répartie $w$ 1) et 2) Contours initial et final de la section supérieure gauche de la poutre (Umetani et Hirai 1978a).....	36
Figure 2.15	Optimisation par la MMN avec restriction spatiale d'une poutre de longueur $L$ encastée aux deux extrémités soumise à une charge répartie	

## Liste des figures

	w 1) Contour initial 2), 3) et 4) Contours après 2, 6 et 66 itérations (Umetani et Hirai 1978a).....	37
Figure 2.16	Optimisation par la MMN d'une poutre encastree soumise à une charge transversale $w$ appliquée à son extrémité libre 1) Contour initial 2), 3) et 4) Contours après 5, 10 et 23 itérations 5) Contour optimal théorique (Umetani et Hirai 1975).....	38
Figure 2.17	Trou de rayon $r$ dans une plaque sous tension biaxiale optimisé par la MMN a) Forme initiale et conditions aux limites b) Formes finales obtenues par la MMN (en ligne pointillée) et par la méthode du gradient conjugué (en ligne continue) (Parvizian et Fenner 1997) .....	39
Figure 2.18	Congé dans une plaque sous tension uniaxiale optimisé par la MMN a) Forme initiale et conditions aux limites b) Formes finales obtenues par la MMN (en ligne continue) et par la méthode du gradient conjugué (en ligne pointillée) (Parvizian et Fenner 2002) .....	40
Figure 3.1	Géométrie classique d'un cadre de vélo .....	49
Figure 3.2	Triangle avant d'un cadre de vélo modélisé par une coque où la normale à la triangulation en chaque nœud est orientée vers le point d'orientation O .....	52
Figure 3.3	Tube à paroi mince en porte-à-faux modélisé dans SolidWorks.....	54
Figure 3.4	Tube maillé avec des éléments de plaques dans Solidworks Simulation.....	56
Figure 3.5	Tube maillé avec des éléments de plaques dans MAGIC .....	56
Figure 3.6	Contraintes (a) et efforts résultants (b) sur l'élément de plaque (Remacle 2002).....	58
Figure 3.7	Contraintes de Von Mises obtenues pour le tube en porte-à-faux a) Avec SolidWorks Simulation b) Avec l'environnement MAGIC .....	60
Figure 4.1	Algorithme de la MMN non contrôlée implanté dans MAGIC .....	65
Figure 4.2	Tube initial maillé avec zone de non-design (en turquoise).....	66
Figure 4.3	Contraintes de Von Mises initiales aux nœuds a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D.....	67

## Liste des figures

Figure 4.4	Contraintes de Von Mises initiales sous forme vectorielle a) Vue de face b) Vue de profil .....69
Figure 4.5	Forme obtenue par la MMN après 50 itérations a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D et 200 itérations d) Vue de dessus e) Vue de face f) Vue 3D.....70
Figure 4.6	Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 200 itérations de la MMN a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D .....72
Figure 4.7	Forme optimisée par la MMN avec $C = 0.05$ a) Vue de face b) Vue 3D73
Figure 4.8	Phénomène de diminution de section dû au lissage a) Forme obtenue après 10 lissages b) Forme obtenue après 20 lissages .....76
Figure 4.9	Influence de la taille des triangles $T1$ et $T2$ sur la variation relative de l'angle du plan défini par les coordonnées de leurs 3 nœuds respectifs due à un déplacement $d$ de leur nœud mobile.....77
Figure 4.10	Algorithme de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement .....87
Figure 4.11	Plaque maillée par quatre triangles identiques .....88
Figure 4.12	Forme optimisée après 50 itérations de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D .....96
Figure 4.13	Nœuds fixés par le gradient de déplacement, en rouge, après 50 itérations .....96
Figure 4.14	Forme optimisée après 122 itérations de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D .....97
Figure 4.15	Zone du tube contenant les derniers nœuds à être contrôlés (en rouge)...98
Figure 4.16	Forme optimisée après 300 itérations de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement a) Vue de dessus, b) Vue de face, c) Vue 3D.100
Figure 4.17	Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 300 itérations de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement a), b), c) Contraintes de

## Liste des figures

	Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D.....	101
Figure 4.18	Influence de la norme du gradient de déplacement sur la forme optimisée a) $s = 0.1$ , b) $s = 0.2$ , c) $s = 0.3$ .....	107
Figure 4.19	Triangle avant d'un cadre de vélo et conditions aux limites dans SolidWorks Simulation a) Vue de face b) Vue 3D .....	108
Figure 4.20	Triangle avant du cadre de vélo maillé finement dans MAGIC.....	109
Figure 4.21	Cadre optimisé après 300 itérations de la MMN contrôlée a) Vue de face b) Vue 3D .....	111
Figure 4.22	Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 300 itérations de la MMN contrôlée a) et b) Contraintes de Von Mises initiales et finales avec échelle allant de 0 à 100 MPa c) et d) Contraintes de Von Mises initiales et finales avec échelle allant de 0 à 20 MPa .....	112
Figure 5.1	Tube en porte-à-faux avec normales actualisées à chaque itération a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 300 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final.....	117
Figure 5.2	Cadre de vélo avec les normales actualisées à chaque itération a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 140 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final.....	119
Figure 5.3	Cadre de vélo en flexion latérale a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 300 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final.....	121
Figure 5.4	Cadre de vélo avec force appliquée sous le tube de direction a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 300 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final.....	123
Figure 5.5	Support en U en flexion a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée c) État de contrainte initial d) État de contrainte final	125

## Liste des figures

Figure 5.6	Tube encastré aux deux extrémités avec chargement central a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 200 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final.....	127
Figure 5.7	Tube à paroi mince soumis à des efforts de flexion et de traction a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 50 itérations c) État de contrainte initial avec une échelle allant de 150 à 200 MPa d) État de contrainte final avec une échelle allant de 150 à 800 MPa.....	128
Figure 5.8	Demi-cylindre en flexion a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 108 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final .....	130
Figure 5.9	Joint en T en flexion a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 800 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final.....	132
Figure B.6.1	Triangle $T(N1, N2, N3)$ dans le repère global $RG$ .....	143
Figure B.6.2	Triangle $(N1, N2, N3)$ dans le repère local $RL$ .....	144

## LISTE DES SYMBOLES ET ABRÉVIATIONS

### Symboles

#### *Modélisation géométrique*

$[a, b]$	Intervalle de définition d'une courbe ou d'une surface paramétrique
$\mathbf{a}_i$	Vecteur des coefficients algébriques d'une courbe paramétrique
$C$	Courbure d'une courbe
$C^n$	Continuité d'ordre $n$ d'une courbe ou d'une surface
$\mathbf{n}_i$	Normale unitaire orientée à une triangulation en un nœud $i$
$O$	Point servant à orienter la coque
$\mathbf{p}(u)$	Vecteur position d'un point d'une courbe paramétrique
$\mathbf{p}(u, v)$	Vecteur position d'un point d'une surface paramétrique
$\mathbf{p}(u, v, w)$	Vecteur position d'un point d'un solide paramétrique
$r$	Rayon de courbure d'une courbe
$s$	Abscisse curviligne d'une courbe
$T$	Rayon de torsion d'une courbe
$u$	Paramètre indépendant d'une courbe paramétrique
$u, v$	Paramètres indépendants d'une surface paramétrique
$u, v, w$	Paramètres indépendants d'un solide paramétrique

#### *Calcul par éléments finis et optimisation*

$\% NIC_{10\%}$	Pourcentage de nœuds situés dans la zone de design dont la contrainte est comprise dans un intervalle de convergence de plus ou moins 10 % de la contrainte objectif
$\% NNC_{10\%}$	Pourcentage de nœuds situés dans la zone de design dont la contrainte est inférieure à 10 % de la valeur moyenne

## Liste des symboles et abréviations

$A_d$	Aire de la zone de design d'une pièce
$A_{tot}$	Aire totale de la surface d'une pièce
$C$	Coefficient de convergence de la méthode du mouvement normal
$\{d_i\}$	Déplacement des nœuds d'un triangle
$D$	Rigidité flexionnelle de l'élément de plaque
$D_i^j$	Déplacement du nœud $i$ à l'itération $j$
$E$	Module de Young du matériau
$f$	Fonction à minimiser par l'algorithme du gradient
$f(x, \mathbf{u}(x))$	Fonction objectif à minimiser par la méthode d'optimisation
$F$	Force appliquée sur la pièce à optimisée
$\mathbf{F}(x)$	Vecteur des efforts externes appliqués à la structure
$g(x, \mathbf{u}(x))$	Fonction modélisant les contraintes de design et d'état
$\vec{G}_i$	Vecteur gradient de déplacement du triangle $i$
$h$	Épaisseur de l'élément de plaque
$I$	Second moment de section de l'élément de plaque
$[j]$	Matrice jacobienne inverse d'un triangle
$[J]$	Matrice jacobienne d'un triangle
$k_s$	Rigidité spécifique d'une poutre
$\mathbf{K}(x)$	Matrice de rigidité de la structure
$L$	Limite de convergence de la méthode du mouvement normal
$M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}$	Moments de flexion agissant sur l'élément de plaque
$\langle N_i \rangle$	Fonctions d'interpolation sur l'élément de référence
$\langle \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \rangle$	Vecteur des dérivées des fonctions d'interpolation par rapport à $\xi$
$\langle \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \rangle$	Vecteur des dérivées des fonctions d'interpolation par rapport à $\eta$
$[P_{GL}]$	Matrice de passage du repère local au repère global
$R_G(x_g, y_g, z_g)$	Repère global de coordonnées
$R_L(x_l, y_l, z_l)$	Repère local de coordonnées propre à l'élément de plaque

## Liste des symboles et abréviations

$s$	Norme maximale du gradient de déplacement d'un triangle
$T_{xy}, T_{yy}$	Efforts tranchants agissant sur l'élément de plaque
$\mathbf{u}(x)$	Vecteur d'état décrivant la réponse de la structure
$V_i$	Polyèdre de Voronoï associé au point $i$
$w(x, y)$	Champ de déplacement dans la direction normale au feuillet moyen
$x$	Variable indépendante de design
$(x, y, z)$	Coordonnées cartésiennes
$(x_i^j, y_i^j, z_i^j)$	Coordonnées du nœud $i$ à l'itération $j$
$\{X_L\}, \{Y_L\}, \{Z_L\}$	Axes de référence du repère local exprimés dans le repère global
<i>Lettres grecques</i>	
$\alpha$	Pas de l'algorithme du gradient
$\delta_y$	Déplacement relatif maximal d'un nœud situé à l'extrémité libre d'une poutre en flexion dans la direction de l'axe Y
$\varepsilon$	Critère d'arrêt de l'algorithme du gradient
$[\varepsilon_G]$	Tenseur des déformations exprimées dans le repère global
$[\varepsilon_L]$	Tenseur des déformations exprimées dans le repère local
$(\xi, \eta)$	Coordonnées paramétriques propres à l'élément de référence
$\nu$	Coefficient de Poisson du matériau
$[\sigma_G]$	Tenseur des contraintes exprimées dans le repère global
$[\sigma_L]$	Tenseur des contraintes exprimées dans le repère local
$\sigma_{moy}$	Contrainte de Von Mises moyenne aux nœuds situés dans la zone de design d'une pièce
$\sigma_o$	Contrainte de Von Mises objectif de la MMN
$\sigma_s$	Contrainte de Von Mises moyenne spécifique d'une pièce
$\sigma_{VM_i}$	Contrainte de Von Mises au nœud $i$
$\tau(x, y)$	Pression appliquée sur l'élément de plaque

**Abréviations**

BEM	Boundary Element Method ou méthode des éléments finis de frontière
BESO	Bi-directional Evolutionary Structural Optimization
BREP	Boundary Representation
CAD	Computer-Aided Design (Cuillère et François 2014)
CAO	Conception Assistée par Ordinateur
CSG	Constructive Solid Geometry
EDF	Électricité De France
ERICCA	Équipe de Recherche en Intégration CAO-Calcul <sup>2</sup>
ESO	Evolutionary Structural Optimization
FEA	Finite Element Analysis ou analyse par éléments finis (Cuillère et François 2014)
FSD	Fully Stressed Design
MAGIC	Mailleur Automatique de Géométries Issues de la CAO
MEF	Méthode des Éléments Finis
MMN	Méthode du Mouvement Normal
MTU	Modèle de Topologie Unifié (Cuillère et François 2014)
NURBS	Non-Uniform Rational B-Spline
SERA	Sequential Element Rejections and Admissions
SIMP	Solid Isotropic Microstructure with Penalization
STEP	Standard for the Exchange of Product model data
UQTR	Université du Québec à Trois-Rivières

---

<sup>2</sup>Site Web : [www.uqtr.ca/ericca](http://www.uqtr.ca/ericca)

## CHAPITRE 1

-

### INTRODUCTION

#### 1.1 Mise en contexte

Le vélo a beaucoup évolué au cours des deux dernières décennies. Au départ un simple moyen de transport ou de divertissement, le cyclisme est aujourd'hui une discipline pratiquée par de plus en plus d'adeptes de haut niveau, toujours en quête d'amélioration de leurs performances. Le vélo influençant directement ces performances, l'industrie se doit de le perfectionner afin de répondre à la demande. Le cadre étant la composante principale d'un vélo, beaucoup d'efforts lui sont consacrés dans le but de le rendre plus léger, plus rigide, plus aérodynamique, bref plus performant. Ainsi, plusieurs concepteurs de vélo parviennent à augmenter le ratio résistance/masse d'un cadre à la fois en se basant sur leur expérience, mais également par essais et erreurs sous forme de modifications et de validations successives. Cette démarche est typique au processus d'optimisation. En effet, d'un point de vue purement mécanique, l'optimisation d'un cadre de vélo, ou de n'importe quel autre composant mécanique, consiste à répartir la matière idéalement en fonction de l'intensité des contraintes développées. La première étape du processus d'optimisation de forme consiste à modéliser un cadre de géométrie initiale dans un logiciel dédié à la Conception Assistée par Ordinateur (CAO). Les conditions de calcul sont ensuite définies et l'état de contrainte initial est calculé. Plusieurs modifications de la géométrie et plusieurs analyses par éléments finis sont ensuite effectuées pour parvenir à améliorer graduellement la géométrie du cadre, afin qu'elle convienne mieux aux efforts appliqués. Il en résulte un cadre globalement mieux adapté et donc plus optimal sur le plan de la résistance mécanique.

## **1.2 Définition de la problématique**

Malgré le grand nombre de systèmes de CAO actuellement sur le marché, les méthodes d'optimisation y sont encore très peu intégrées. Pour optimiser un composant, le concepteur doit encore modifier la géométrie interactivement et valider les changements effectués en utilisant l'analyse par éléments finis. Il revient également au concepteur de juger, après chaque modification apportée, si la pièce est « suffisamment optimale » en fonction de l'application recherchée. Ce processus d'optimisation est laborieux et demande beaucoup de temps au concepteur.

## **1.3 Objectif principal**

L'objectif principal de cette recherche consiste donc à intégrer une méthode d'optimisation de structures, adaptée aux cadres de vélos, au processus de CAO. À partir d'un cadre de géométrie initiale formée de tubes à paroi mince, des conditions de calcul (chargements, déplacements imposés, matériau et zones de non-design) et d'un critère d'optimisation, l'objectif est d'obtenir une géométrie optimale de la structure sans que le concepteur n'ait à interagir manuellement avec le logiciel lors du processus d'optimisation.

## **1.4 Organisation du mémoire**

Le présent mémoire est divisé en 6 chapitres, soit l'introduction, la revue de la littérature et les objectifs spécifiques, l'intégration d'éléments finis de plaques dans l'environnement de développement, l'implantation, l'application et le contrôle de la méthode du mouvement normal (MMN), les résultats obtenus et la conclusion.

Le premier chapitre permet de situer et de comprendre le contexte, la problématique et l'objectif principal de cette recherche.

Le deuxième chapitre se veut une synthèse de la littérature en ce qui a trait à la modélisation géométrique et à l'optimisation de structures. Dans un premier temps, les

## Chapitre 1 - Introduction

différents types de modèles géométriques et leurs propriétés y sont présentés. On y présente ensuite les différents types de méthodes d'optimisation de structures. La méthode d'optimisation par le mouvement normal de la frontière est ensuite présentée en détails. Certaines lacunes de cette méthode sont identifiées de manière à définir les objectifs spécifiques, les hypothèses et les limites de ce travail de recherche.

Le chapitre trois traite de l'intégration de la modélisation surfacique et des éléments finis de plaques dans l'environnement de développement. On y présente les principes fondamentaux et les différentes étapes d'un calcul par éléments finis dans l'environnement de développement. Celui-ci n'ayant jamais été utilisé pour étudier un modèle surfacique par éléments finis, il a dû être adapté et les résultats obtenus ont dû être validés avec un autre logiciel de calcul par éléments finis.

Le chapitre quatre présente l'intégration de la méthode du mouvement normal dans l'environnement de développement. Dans un premier temps, la méthode est implantée dans l'environnement de développement et appliquée au problème d'optimisation d'un tube à paroi mince en porte-à-faux. Les résultats bruts fournis par la méthode étant inadéquats, différents critères sont étudiés dans le but d'améliorer le contrôle du déplacement des nœuds. Bien que plusieurs de ces critères ne donnent pas les résultats escomptés, l'un d'entre eux, basé sur la norme du gradient de déplacement des nœuds de chaque triangle, est retenu et expliqué en détails. La méthode du mouvement normal contrôlée est ensuite appliquée aux problèmes d'optimisation du tube à paroi mince en porte-à-faux et du triangle avant d'un cadre de vélo soumis à un chargement externe.

Finalement, le chapitre cinq présente quelques exemples de résultats d'optimisation obtenus par la MMN contrôlée.

## CHAPITRE 2

-

### REVUE DE LA LITTÉRATURE ET OBJECTIFS

#### **2.1 Introduction**

Le présent chapitre vise, dans un premier temps, à décrire brièvement les différentes étapes d'un calcul par éléments finis et les deux principales méthodes automatiques de génération de maillage.

La deuxième partie traite des différents concepts entourant la modélisation géométrique ainsi que des différents types de modèles géométriques.

Le troisième volet touche l'optimisation de structures. Les différents types de méthodes d'optimisation y sont abordés et quelques méthodes d'optimisation fréquemment rencontrées dans la littérature y sont décrites. Une attention particulière est accordée aux méthodes de types Fully Stressed Design (FSD) dont la méthode du mouvement normal fait partie. Cette méthode et son contrôle, au cours du processus d'optimisation, sont très peu documentés dans la littérature. C'est en tenant compte de ces lacunes, que les objectifs spécifiques, hypothèses et limites de cette recherche sont définis.

#### **2.2 Étapes d'un calcul par éléments finis**

L'objectif d'un calcul par éléments finis consiste à résoudre numériquement un problème physique pouvant être modélisé par des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites. Un exemple classique de problème consiste à déterminer la résistance ou le comportement élastique d'une structure sous l'application de certains efforts et déplacements imposés. La solution à ce problème ne pouvant pas être déterminée exactement, le domaine de l'objet est divisé en éléments finis simples de

dimension un, deux ou trois, tels que des éléments linéiques, triangulaires ou tétraédriques. Ce processus, appelé maillage, permet d'exprimer la solution recherchée sur le domaine de l'objet en chaque nœud du maillage et d'approximer le calcul des intégrales issues de la formulation intégrale. Pour ce faire, l'utilisation d'un espace de coordonnées de référence  $(\xi, \eta, \zeta)$ , également appelé espace de coordonnées paramétriques, est requis. Cet espace de coordonnées paramétriques est propre à chaque élément.

La Méthode des Éléments Finis (MEF), parmi les méthodes numériques les plus répandues, sera utilisée dans le cadre de ce travail. De façon générale, un calcul par éléments finis peut être divisé en cinq grandes étapes :

1. Modélisation de la géométrie dans un logiciel de CAO;
2. Choix du type et de la taille des éléments et maillage de la géométrie;
3. Définition des constantes physiques (matériau et épaisseur) et des conditions aux limites (déplacements et efforts imposés);
4. Calcul par éléments finis;
5. Analyse des résultats.

### **2.3 Modélisation géométrique**

La modélisation géométrique est à la base de la CAO. Elle vise à représenter le plus fidèlement possible un objet géométrique dans le but de le visualiser, de simuler et d'analyser son comportement face à un phénomène physique, et éventuellement de le modifier en fonction de l'application recherchée. Cette représentation, rendue possible par l'usage de différents concepts mathématiques et informatiques, est généralement plus pratique à étudier que l'objet lui-même. Par contre, pour être le plus complet et le plus fidèle possible à l'objet réel, un modèle géométrique doit posséder certaines propriétés. À titre d'exemple, l'adressabilité spatiale est une propriété selon laquelle chaque point de l'espace doit pouvoir être identifié comme étant à l'intérieur, à

l'extérieur ou sur la frontière de l'objet. De plus, un bon modèle ne doit pas être ambigu, c'est-à-dire qu'un seul objet doit correspondre à une représentation donnée. Il existe trois types de modèles géométriques, soient les modèles de type fil de fer, les modèles surfaciques et les modèles solides.

### 2.3.1 Concepts de géométrie, topologie et co-topologie

Les concepts de géométrie, topologie et co-topologie présentés dans cette section sont ceux sous-jacents à l'environnement de développement présenté au chapitre trois. Ces concepts sont expliqués en détails dans *Integration of CAD, FEA and topology optimization through a unified topological model* (Cuillière et François 2014).

#### *Géométrie*

La géométrie d'un modèle continu désigne l'ensemble des éléments géométriques qui le constituent. Ces éléments peuvent être de dimension zéro (points), de dimension un (droites et courbes) ou de dimension deux (surfaces). Pour un modèle discret telle une triangulation, l'information géométrique correspond à l'ensemble des nœuds du maillage.

#### *Topologie*

La topologie, quant à elle, désigne la façon dont les éléments géométriques sont reliés entre eux. Pour un modèle continu, l'information topologique peut consister en une liste d'arêtes définissant le contour d'une face ou encore en une liste de faces définissant la peau ou la frontière d'un objet solide (voir la section 2.3.4.4 portant sur la modélisation basée sur les frontières de l'objet). Pour un modèle discret, l'information topologique peut consister, par exemple, en une liste de triangles définissant une face de façon discrète. Les éléments topologiques sont appelés sommets, arêtes, contours, faces, poutres, coquilles et solides.

### *Co-topologie*

Finalement, la co-topologie désigne l'ensemble des connexions orientées entre les éléments géométriques définissant un objet. Il s'agit en fait de la topologie orientée, c'est-à-dire attribuée d'un signe positif ou négatif. Cette notion d'orientation est indispensable lors de l'application d'efforts normaux ou pour le déplacement d'un nœud dans la direction normale à une surface, à titre d'exemples. Pour un modèle continu, l'information co-topologique peut consister en une liste d'arêtes orientées (co-arêtes) définissant le contour et l'orientation d'une face. Les éléments co-topologiques sont appelés co-sommet, co-arête, co-face et coque.

### **2.3.2 Modèles de type fil de fer**

Les modèles de type fil de fer consistent à représenter un objet uniquement à partir de ses sommets et de ses arêtes. L'utilisation de ce type de modèle est grandement limitée par l'absence de notions de surface et de volume et est surtout utilisé à des fins de visualisation et de modélisation de structures de type ossature (Cuillière 1993). En effet, ce type de modèle ne permet pas, entre autres, de distinguer l'intérieur et l'extérieur d'un objet, ce qui en fait un modèle ambigu et incomplet. La figure 2.1 montre le modèle filaire d'un cylindre modélisé à l'aide du logiciel SolidWorks.

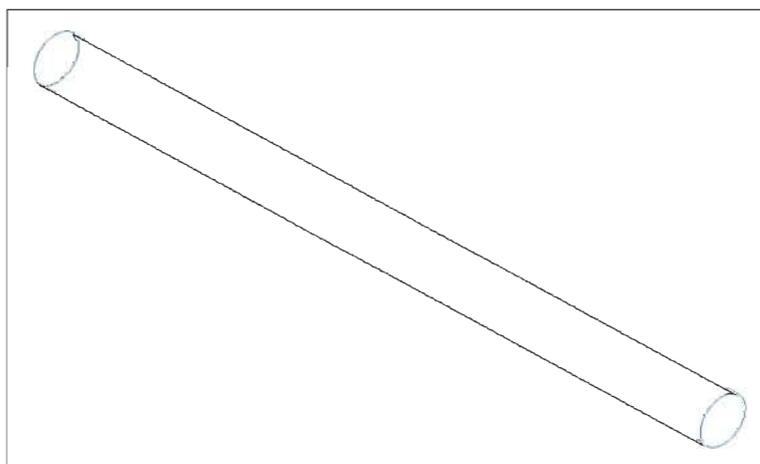


Figure 2.1 Modèle filaire d'un cylindre

Les arrêtes d'un modèle de type fil de fer sont représentées mathématiquement par des courbes. Celles-ci peuvent être décrites par différents types d'équations, soient intrinsèques, explicites, implicites ou paramétriques.

### 2.3.2.1 Équations intrinsèques d'une courbe

Une courbe peut être définie de façon intrinsèque en spécifiant seulement sa forme sans égard à un système de coordonnées. La courbe est ainsi définie comme une relation entre certaines propriétés intrinsèques, telles que l'abscisse curviligne  $s$ , le rayon de courbure  $r$  ou la courbure  $C$  et le rayon de torsion  $T$  pour des courbes de l'espace tridimensionnel. Par exemple, l'équation intrinsèque d'un cercle peut être donnée par;

$$C(s) = \frac{1}{r} \quad (2.1)$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne,  $C$  est la courbure et  $r$  est le rayon de courbure du cercle.

### 2.3.2.2 Équations explicites et implicites d'une courbe

Une équation explicite consiste à définir une variable dépendante  $y$  explicitement en fonction d'une variable indépendante  $x$ . L'équation explicite d'une courbe dans le plan est définie par l'équation suivante;

$$y = f(x). \quad (2.2)$$

Un des principaux inconvénients de la forme explicite est qu'il existe une seule valeur de  $y$  pour chaque valeur de  $x$ . Il est donc impossible, en utilisant cette notation, de représenter une courbe fermée ou une courbe qui possède une même valeur de  $y$  pour plusieurs valeurs de  $x$ . Ce formalisme offre donc peu d'intérêt dans l'esprit de modéliser des objets complexes de formes variées.

La notation implicite permet de palier une partie du problème. Elle consiste à définir une courbe à l'aide d'une fonction de plusieurs variables indépendantes. Dans le plan cartésien, la forme d'une équation implicite est décrite par l'équation (2.3);

$$f(x, y) = 0. \quad (2.3)$$

Bien qu'une notation implicite permette de représenter un nombre élevé de courbes du plan, son contrôle peut s'avérer laborieux pour la modélisation d'un objet complexe.

### 2.3.2.3 Équations paramétriques d'une courbe

Finalement, il est possible de représenter une courbe à l'aide d'équations paramétriques. Ce formalisme se démarque des autres pour sa facilité à modéliser les courbes complexes d'un objet. De façon générale, une courbe d'un espace à trois dimensions peut être définie sur un intervalle  $[a, b]$  par trois fonctions paramétrées de la forme;

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = z(u) \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $u$  est un paramètre indépendant qui varie sur l'intervalle  $[a, b]$ . En utilisant 0 et 1 comme bornes de l'intervalle, un point  $\mathbf{p}(u)$  de la courbe (2.4) s'exprime par l'équation vectorielle (2.5);

$$\mathbf{p}(u) = [x(u) \quad y(u) \quad z(u)], \quad u \in [0,1]. \quad (2.5)$$

#### 2.3.2.3.1 Courbes splines ou composites

Les splines sont des courbes composites définies par morceaux dont chaque morceau est défini par un polynôme (Mortenson E. 1985). La figure 2.2 montre un exemple de spline 2D dont chaque morceau est défini par une courbe de Hermite.

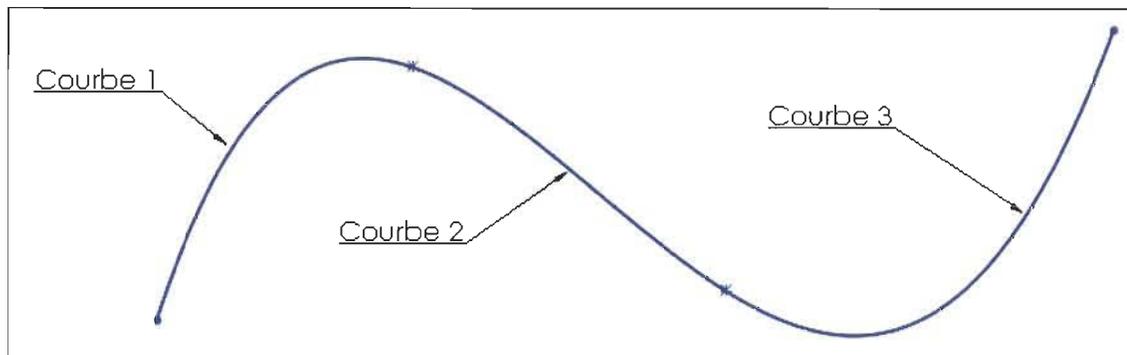


Figure 2.2 Exemple de spline 2D formée de trois courbes de Hermite

Le polynôme de plus faible degré permettant de décrire des courbes non planes est un polynôme de degré trois. C'est pourquoi, en modélisation géométrique, les équations paramétriques utilisées sont généralement des équations du troisième degré dites cubiques. L'équation (2.4) prend donc la forme suivante;

$$\begin{cases} x(u) = a_{3x}u^3 + a_{2x}u^2 + a_{1x}u + a_{0x} \\ y(u) = a_{3y}u^3 + a_{2y}u^2 + a_{1y}u + a_{0y} \\ z(u) = a_{3z}u^3 + a_{2z}u^2 + a_{1z}u + a_{0z} \end{cases} \quad (2.6)$$

où les coefficients  $a_i$  sont appelés « coefficients algébriques » et où le paramètre  $u$  varie sur l'intervalle  $[0,1]$ . Ces coefficients servent à définir sa forme, sa taille et sa position dans l'espace. L'équation (2.6) peut être réécrite sous forme vectorielle;

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{a}_3u^3 + \mathbf{a}_2u^2 + \mathbf{a}_1u + \mathbf{a}_0, \quad u \in [0,1]. \quad (2.7)$$

Sous forme de sommation, l'équation algébrique générale d'une courbe paramétrique cubique devient;

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{a}_i u^i, \quad u \in [0,1] \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{p}(u)$  est le vecteur position d'un point de la courbe tandis que les termes  $\mathbf{a}_i$  sont les vecteurs des coefficients algébriques de l'équation (2.6). Toutefois, il est assez difficile de contrôler la forme d'une courbe à partir de ses coefficients algébriques. De plus, ceux-ci dépendent du repère utilisé et ne sont donc pas définies de façon intrinsèque. Cela limite leur utilisation dans le domaine de la CAO, puisqu'une rotation du repère, par exemple, affecte la forme de la courbe. C'est pourquoi d'autres conditions, tels que des points de définition, sont généralement utilisées pour définir la courbe. Chaque ensemble de conditions conduit à un ensemble de courbes paramétriques différentes, dont les courbes de Hermite, de Bézier, de type B-splines et de type B-splines rationnelles non uniforme (NURBS) qui sont les plus connues (Mortenson E. 1985).

### *Continuité d'une spline*

La continuité d'une spline dépend de la continuité aux jonctions entre deux morceaux ou segments de courbe. La spline est de continuité  $C^0$  sur un intervalle  $[a, b]$  si elle est définie en tout point de cet intervalle. La continuité est dite  $C^1$  si la dérivée première est égale de part et d'autre de chaque joint entre deux segments de la courbe. De façon générale, une spline est de continuité  $C^n$  si les dérivées  $n^{\text{ième}}$  de chaque segment, situé de part et d'autre d'un point de définition, sont égales en ce point, et ce pour l'ensemble des points de jonction de la courbe. Une spline de continuité  $C^2$  assure une continuité de la courbure aux jonctions entre deux segments de courbe. Sachant qu'une variation brusque de courbure engendre une concentration des contraintes localement, le concepteur cherche généralement à modéliser un objet en utilisant, autant que possible, des courbes et des surfaces possédant une continuité  $C^2$ . Toutefois, la facilité à contrôler la continuité d'une courbe ou d'une surface complexes dépend du formalisme mathématique utilisé pour définir chaque morceau de courbe ou de surface.

### 2.3.3 Modèles surfaciques

Bien qu'ils ne soient pas totalement complets, les modèles surfaciques sont, par l'ajout d'une notion de surface, plus complets et moins ambigus que les modèles de type fil de fer. Ils s'avèrent particulièrement adaptés pour modéliser un objet dont une dimension est faible comparativement aux deux autres, telle une tôle de carrosserie de voiture ou un tube à paroi mince constituant le cadre d'un vélo. Dans de tels cas, une modélisation surfacique diminue considérablement le nombre d'éléments de maillage nécessaires pour une analyse de comportement valide par éléments finis. La figure 2.3 montre le modèle surfacique d'un tube à paroi mince modélisé avec SolidWorks.

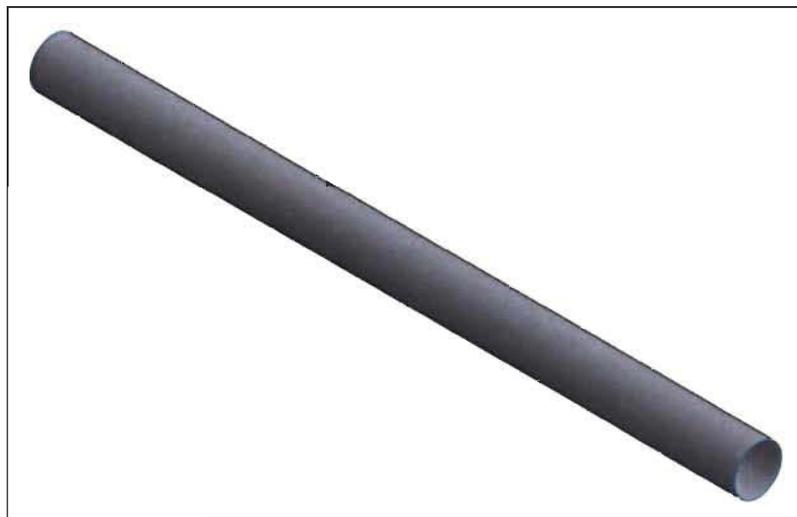


Figure 2.3 Modèle surfacique d'un tube à paroi mince

La modélisation surfacique peut également être utilisée pour modéliser un objet solide. Par contre, comme un solide fait référence à une notion d'intérieur et d'extérieur, de l'information topologique doit donc être ajoutée, d'où le concept de modélisation basée sur les frontières de l'objet ou « boundary representation » (BREP) expliqué à la section 2.3.4.4. Un modèle surfacique est constitué de surfaces qui, comme pour les courbes, peuvent être décrites par différents types d'équations, soient intrinsèques, explicites et implicites ou paramétriques. Une fois de plus les équations paramétriques se démarquent des autres types d'équations.

### 2.3.3.1 Équations paramétriques d'une surface

De façon analogue aux courbes, les équations paramétriques permettent de modéliser facilement les surfaces complexes d'un objet. De façon générale, une surface d'un espace à trois dimensions peut être définie par trois équations paramétriques, tous fonction de deux paramètres indépendants  $u$  et  $v$  variant sur l'intervalle  $[0,1]$ ;

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v). \end{cases} \quad (2.9)$$

Un point  $\mathbf{p}(u, v)$  de la surface s'exprime donc par l'équation vectorielle (2.10);

$$\mathbf{p}(u, v) = [x(u, v) \quad y(u, v) \quad z(u, v)], \quad u, v \in [0,1]. \quad (2.10)$$

#### 2.3.3.1.1 Surfaces composites

Une surface composite est composée de plusieurs morceaux de surface appelés carreaux ou *patch*. Il en existe différents types, parmi lesquels on retrouve les carreaux Bi-cubique de Hermite, les carreaux de Bézier, les carreaux de type B-spline et de type NURBS. Ces carreaux sont généralement de forme triangulaire ou quadrangulaire.

### 2.3.4 Modèles solides

Les modèles solides sont, par l'ajout d'information de nature topologique et d'entités de dimension trois, les modèles actuels les plus complets permettant de représenter un très grand nombre de solides de forme complexe. Le principe de base d'un modèle solide consiste à définir un objet par un volume fermé. Pour ce faire, différentes approches peuvent être utilisées, dont les trois principales utilisées en CAO sont la modélisation par balayage, la modélisation par arbre de construction et la modélisation basée sur les frontières de l'objet. Ces trois approches sont expliquées brièvement dans cette section. La figure 2.4 montre le modèle solide d'un cylindre plein modélisé avec SolidWorks.



Figure 2.4 Modèle solide d'un cylindre plein

#### 2.3.4.1 Équations paramétriques d'un solide

De façon générale, un solide peut être définie par trois équations paramétriques, tous fonction de trois paramètres indépendants  $u$ ,  $v$  et  $w$  variant sur l'intervalle  $[0,1]$ ;

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w). \end{cases} \quad (2.11)$$

Un solide est généralement définit comme le résultat d'une combinaison d'opérations effectuées sur des solides simples ou en utilisant des notions de surfaces.

#### 2.3.4.2 Modélisation par balayage

La modélisation par balayage consiste à créer un solide en déplaçant des courbes ou des surfaces le long d'une trajectoire linéaire ou courbe. Ce type de modélisation permet de construire un nombre limité d'objets géométriques.

### 2.3.4.3 Modélisation par arbre de construction (CSG)

La modélisation par arbre de construction ou Constructive Solid Geometry (CSG) consiste à modéliser un objet solide complexe à partir de combinaisons d'opérations booléennes (union, intersection ou soustraction) de solides simples appelés *primitives* (parallélépipède, cylindre, sphère, tore, etc.). Le processus de construction du solide peut être schématisé sous forme arborescente où les feuilles représentent les primitives et où les nœuds représentent les opérations. Le solide ainsi créé a l'avantage d'avoir des frontières définies de façon exactes. De plus, des modifications à sa géométrie et à sa topologie peuvent être apportées facilement.

### 2.3.4.4 Modélisation basée sur les frontières de l'objet (BREP)

Le principe de la modélisation basée sur les frontières de l'objet ou boundary representation (BREP) consiste à modéliser un objet à partir de la frontière séparant les points de l'espace situés à l'intérieur du solide de ceux situés à l'extérieur du solide. Cette dernière est de nature surfacique mais contient, contrairement aux modèles surfaciques, de l'information topologique. En effet, la frontière de l'objet est modélisée comme un ensemble de faces orientées de manière à pouvoir différencier l'intérieur et l'extérieur du solide. Chaque face est bornée par un ou plusieurs contours fermés et orientés et est définie géométriquement par une surface. Chaque contour est formé d'un ensemble d'arêtes représentées de façon mathématique par des courbes. Finalement, chaque arête est bornée par des sommets définis mathématiquement par des points. Ce principe de modélisation très répandu est utilisé dans la majorité des logiciels de CAO.

## 2.4 Méthodes de maillage automatique

Bien qu'il existe plusieurs méthodes permettant de générer automatiquement un maillage non structuré, les plus connues sont les méthodes de Delaunay-Voronoi et la méthode frontale.

### 2.4.1 Méthodes de Delaunay-Voronoi

Les méthodes de Delaunay-Voronoi sont basées sur la construction de polyèdres de Voronoï. Soit un nuage de points formé de  $n$  points  $P_1$  à  $P_n$ . Le polyèdre de Voronoï  $V_i$ , associé au point  $P_i$ , correspond à la région définie par l'ensemble des points de l'espace qui sont les plus proches du point  $P_i$  que de n'importe quel autre point du nuage de points. Une fois tous les polyèdres de Voronoï construits, la triangulation de Delaunay associée est obtenue en reliant les points des polyèdres adjacents (François 1998). La figure 2.5 montre une triangulation 2D de Delaunay associée aux polygones de Voronoï tracés en lignes pointillées.

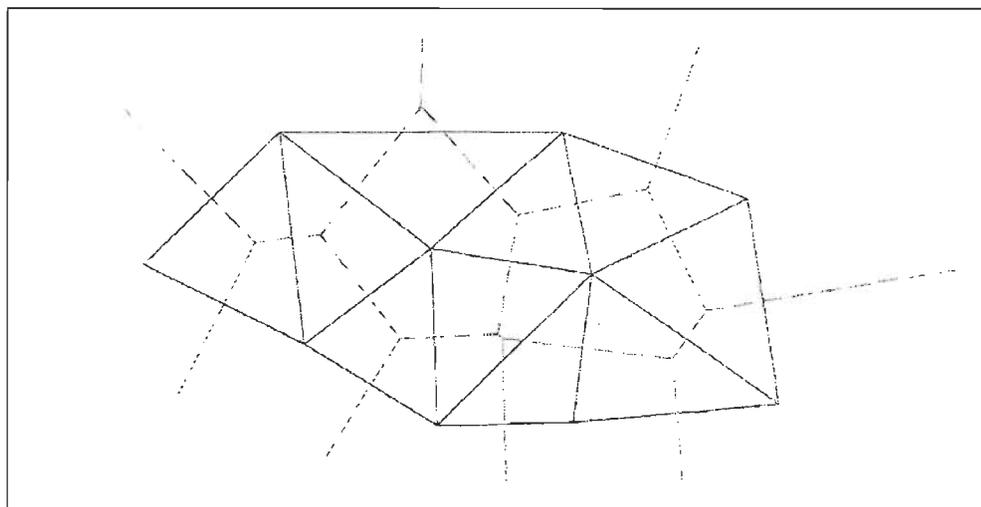


Figure 2.5 Triangulation de Delaunay et polygones de Voronoï (François 1998)

### 2.4.2 Méthode frontale

La méthode frontale consiste à générer automatiquement un maillage non structuré en propageant un front sur le domaine à mailler. Le front est initialisé sur la frontière et se propage vers l'intérieur en générant de nouvelles mailles jusqu'à ce que le domaine soit complètement recouvert. La position des nouveaux nœuds est déterminée de manière à créer des éléments équilatéraux.

## 2.5 Optimisation de structures

### 2.5.1 Formulation générale d'un problème d'optimisation de structures

Gordon (1978) définit une structure comme un assemblage de matériaux servant à soutenir des charges. Le terme « optimisation » quand à lui, signifie « faire une chose de la meilleure façon en respectant un ensemble de critères ». L'optimisation d'une structure vise donc à trouver le meilleur assemblage de matériaux permettant de soutenir une charge donnée et qui respecte certains critères.

Selon Christensen et Klarbring (2008) l'optimisation d'une structure consiste à maximiser ou à minimiser une fonction objectif  $f(x, \mathbf{u}(x))$ , servant de critère d'optimalité et permettant de comparer différents designs entre eux. La masse de la structure, la contrainte moyenne, l'écart entre les contraintes minimale et maximale et l'énergie de déformation sont des exemples de fonctions objectifs à minimiser.

Dans la fonction objectif,  $x$  est la variable indépendante de design qui décrit la géométrie de la pièce à optimiser. Il peut s'agir de l'épaisseur ou de la section de la pièce. La variable  $x$  peut également prendre la forme d'un vecteur décrivant, par exemple, la position de chaque point de design situé sur la frontière de l'objet.

Le vecteur  $\mathbf{u}(x)$  est le vecteur d'état décrivant la réponse de la structure, exprimée sous la forme de déplacements des nœuds issus du calcul par éléments finis. La relation liant le vecteur d'état à la géométrie de la structure s'écrit à l'aide de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}(x)$  de la structure et le vecteur des forces externes  $\mathbf{F}(x)$  appliquées à la structure;

$$\mathbf{K}(x) \mathbf{u}(x) = \mathbf{F}(x). \quad (2.12)$$

Typiquement, un problème d'optimisation de structure peut être formulé comme suit (Christensen et Klarbring 2008);

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x, \mathbf{u}(x)), \\ \text{Sous } g(x, \mathbf{u}(x)) \leq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

où  $g(x, \mathbf{u}(x))$  regroupe les contraintes de design et d'état. L'objectif de la contrainte de design peut être de restreindre la frontière de la pièce à l'intérieur d'un certain domaine d'optimisation. La contrainte d'état, quant à elle, peut servir à limiter la contrainte de Von Mises (Bazergui, Bui-Quoc et al. 2002) pour éviter une déformation plastique.

### 2.5.1.1 Processus général d'optimisation de structures

La première étape du processus d'optimisation consiste à modéliser une première géométrie dans un logiciel de CAO. Les chargements, les déplacements imposés, le matériau et les zones de non-design sont ensuite définis et l'état de contrainte initial est calculé par éléments finis. Plusieurs modifications de la géométrie et plusieurs analyses successives par éléments finis sont effectuées jusqu'à ce que le critère de convergence préalablement défini soit atteint. Il en résulte une structure quasi-optimale en termes de relation variable de design - réponse de la structure. La figure 2.6 illustre ce processus.

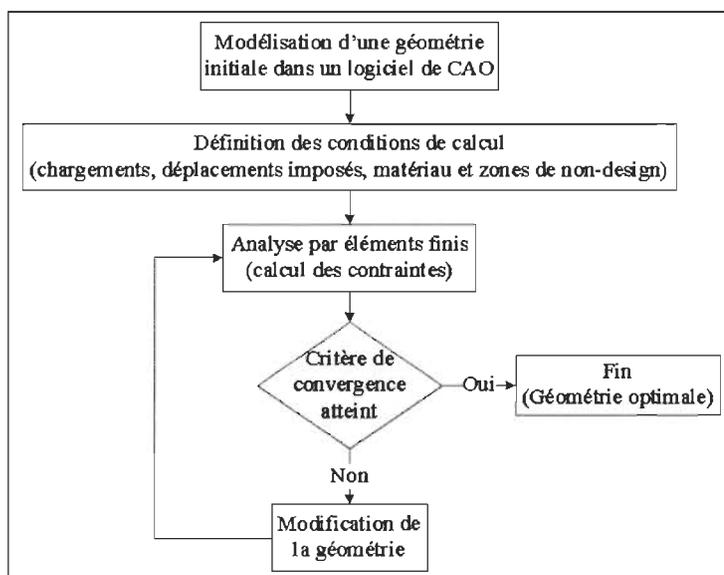


Figure 2.6 Processus général d'optimisation de structures

### 2.5.2 Type de méthodes d'optimisation de structures

Dans la littérature, il existe un grand nombre de méthodes d'optimisation de structures pouvant être classées selon trois catégories : les méthodes d'optimisation paramétrique, les méthodes d'optimisation de forme et les méthodes d'optimisation de topologie (Saitou, Izui et al. 2005; Khalil 2009). La figure 2.7 illustre ces trois approches.

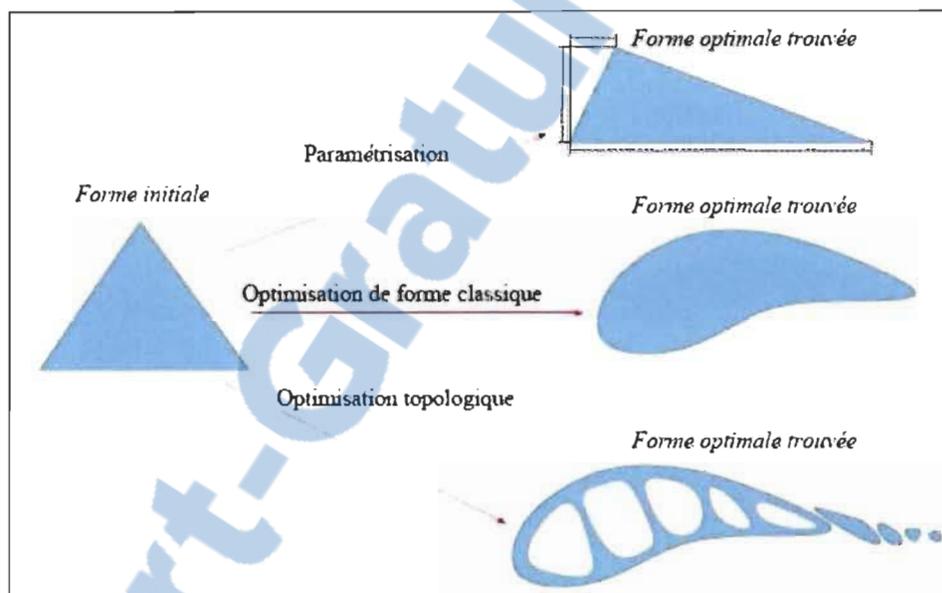


Figure 2.7 Types de méthodes d'optimisation de structures (Khalil 2009)

On trouve, à gauche, la forme initiale et à droite la forme résultante pour chaque méthode d'optimisation. L'optimisation paramétrique permet la modification de certaines dimensions, mais la forme optimisée est de même type que la forme initiale (figure du haut). L'optimisation de forme permet d'obtenir une forme optimisée différente de la forme initiale (figure du centre). Finalement, l'optimisation de topologie permet d'obtenir une forme optimisée présentant à la fois une forme et une topologie différentes (figure du bas).

### 2.5.3 Optimisation paramétrique

Pour ce type d'optimisation, la variable de design  $x$  correspond, par exemple, à l'épaisseur, au diamètre ou à la section d'une pièce. L'optimisation paramétrique consiste donc à faire varier la valeur de ce paramètre en fonction de la variable d'état que l'on notera  $y$ , décrivant la réponse de la structure.

Puisque l'espace des formes demeure le même au cours du processus d'optimisation, cette approche est limitée et le niveau d'optimalité de l'objet final dépend fortement de la forme initiale.

#### *Méthodes par analyse de sensibilité*

Les méthodes dites « par analyse de sensibilité » ou « avec gradient » consistent à dériver la fonction objectif, par rapport aux variables de design, pour étudier l'influence de chaque variable sur celle-ci (Christensen et Klarbring 2008). Une importance particulière est ensuite apportée aux variables possédant la plus grande influence et leurs valeurs sont modifiées itérativement dans le but de minimiser la fonction objectif. Ces méthodes sont particulièrement adaptées pour des problèmes d'optimisation paramétrique possédant un nombre restreint de variables de design. Par contre, lorsque le nombre de variables devient élevé, ces méthodes s'avèrent très coûteuses en temps de calcul. C'est le cas, notamment, pour une optimisation de forme où les variables de design correspondent aux coordonnées des nœuds situés sur la frontière de la pièce.

### 2.5.4 Optimisation géométrique ou de forme

Pour ce type d'optimisation, la variable de design  $x$  correspond à la frontière de la pièce à optimiser. L'optimisation de forme consiste donc à déplacer itérativement la frontière de la pièce, dans une direction donnée, en fonction de la valeur locale de la variable d'état  $y$  décrivant la réponse de la structure. En utilisant la contrainte de Von Mises comme variable d'état, celle-ci peut s'uniformiser graduellement sur toute la frontière de la pièce. Elle peut toutefois varier dans la direction de l'épaisseur.

Ce type d'optimisation est plus général que l'optimisation paramétrique étant donné que la section ou la forme de la pièce optimisée peut différer de celle de la pièce initiale. Dans tous les cas, la topologie n'est pas modifiée. Le principal inconvénient des méthodes d'optimisation de forme est qu'elles nécessitent habituellement un remaillage dû à la déformation des éléments situés sur la frontière de la pièce. De plus, deux parties de la frontière peuvent en venir à se toucher, ce qui nécessite également un remaillage.

#### *Méthodes de type Fully Stressed Design (FSD)*

Les méthodes d'optimisation de type FSD (Fully Stressed Design) visent à obtenir une pièce optimisée possédant une contrainte (contrainte équivalente de Von Mises, contrainte de cisaillement maximale (Tresca), contrainte principale maximale, etc.) uniforme sur son domaine (Drouet 2002). La matière étant distribuée de façon idéale par rapport aux efforts appliqués, la masse de la pièce est réduite. Bien que la notion de masse ne soit pas utilisée explicitement afin de déterminer le design d'une pièce, ces méthodes conduisent généralement à des designs très près des designs théoriquement optimaux possédant une masse minimale (Miura 1990; Hsu, Sheppard et al. 1995; Patnaik et Hopkins 1998).

La méthode du mouvement normal est un exemple de méthode de type FSD. Pour cette méthode, la variable de design  $x$  fait référence à la frontière de la pièce. En fait, on parle plutôt d'un vecteur de design  $x$  contenant la position des nœuds du maillage situés sur la frontière de la pièce. La variable d'état  $y$ , quant à elle, fait habituellement référence à la contrainte de Von Mises en ces nœuds (Mattheck et Burkhardt 1990; Miura 1990; Parvizian et Fenner 1997; Li, Steven et al. 1999; Parvizian et Fenner 2002; Wu 2005). La MMN consiste donc à déplacer itérativement la frontière de la pièce dans la direction normale pour uniformiser la valeur de la contrainte de Von Mises sur cette frontière autour d'une valeur objectif  $\sigma_o$ . Celle-ci peut correspondre, à titre d'exemple, à une valeur fixée a priori ou à la valeur moyenne des contraintes sur la frontière de la pièce.

### 2.5.5 Optimisation topologique

Finalement, l'optimisation de topologie est le cas le plus général d'optimisation de structures. Pour ce type d'optimisation, la variable de design  $x$  correspond, par exemple, à la densité du matériau. En permettant à cette densité de varier entre 0 et 1, certains éléments du maillage peuvent être complètement retirés, ce qui a pour effet de modifier la topologie de la pièce.

En utilisant la contrainte de Von Mises comme variable d'état  $y$  décrivant la réponse de la structure, celle-ci peut s'uniformiser non seulement sur sa frontière, mais également dans tout le solide. Cela conduit généralement à une structure plus optimale que celles obtenues à l'aide des méthodes d'optimisation paramétrique ou de forme. Par contre, le fait de modifier la topologie peut conduire à une pièce difficilement réalisable. C'est le cas, notamment pour un tube à paroi mince troué à différents endroits.

#### *Méthode du gradient topologique*

Cette méthode vise à étudier l'impact d'une légère perturbation de la topologie d'une pièce sur la fonction objectif à minimiser. Elle consiste à créer des trous, appelés nucléations, dans la pièce aux endroits où le gradient topologique, exprimant le lien entre la topologie et la fonction objectif, est négatif. Comme les trous créés sont petits, la fonction objectif devrait diminuer. Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle ne fait qu'enlever de la matière. Elle ne peut donc pas augmenter le volume d'une pièce qui serait initialement trop faible.

#### *Méthode SIMP*

L'objectif de la méthode SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalization) consiste à minimiser la flexibilité (compliance) d'une structure en faisant varier la densité du matériau entre 0 (vide) et 1 (matériau) sur le domaine à optimiser (Cuillière, François et al. 2011). Des zones de non-design doivent être préalablement définies pour assurer une conservation de la fonction décrivant la pièce et permettre, par exemple, un

assemblage avec une autre pièce. La figure 2.8 montre un exemple d'optimisation topologique par la méthode SIMP. Le cas étudié est celui d'un pont suspendu. La figure (a) montre la géométrie initiale et les conditions aux limites et la figure (b) montre le maillage. La figure (c) montre les résultats bruts de la méthode SIMP, tandis que la figure (d) montre la géométrie et la topologie finales obtenues. Il est à noter que la forme finale s'apparente à celle de ponts existants.

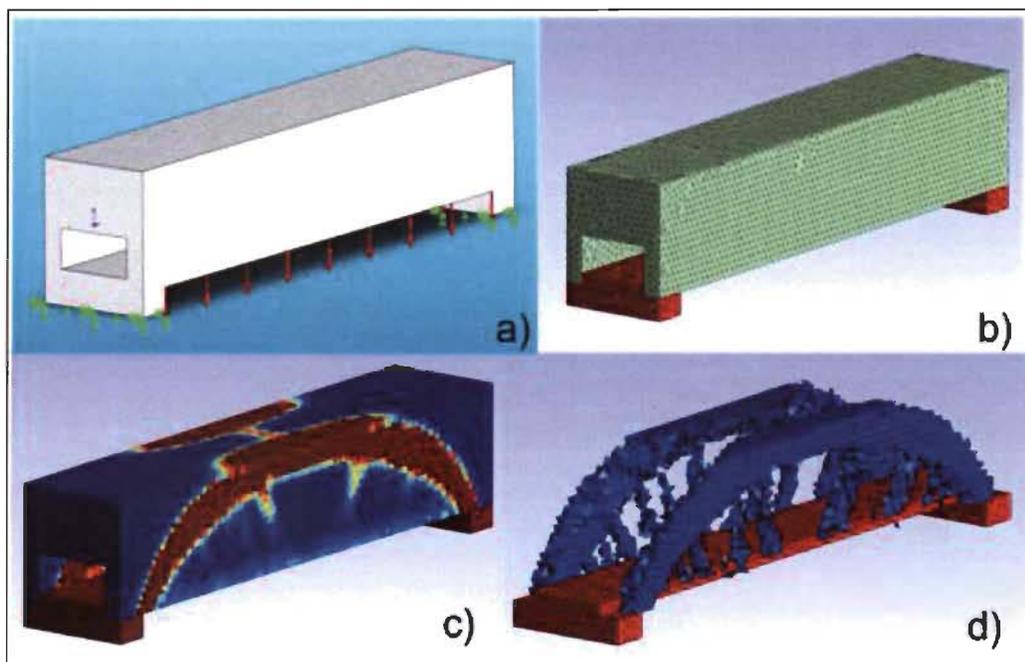


Figure 2.8 Optimisation par la méthode SIMP a) Géométrie initiale et conditions aux limites b) Maillage c) Résultats bruts de la méthode SIMP d) Forme et topologie finales (Cuillière, François et al. 2011)

#### *Méthode ESO/BESO*

La méthode ESO (Evolutionary Structural Optimization), également appelée SERA (Sequential Element Rejections and Admissions) par Rozvany et Querin (2002), fut présentée pour la première fois par Xie et Steven (1992; 1993). Elle consiste à calculer une fonction objectif, telle que la contrainte de Von Mises, ou la densité moyenne d'énergie de déformation (mean compliance), pour chaque élément du maillage. À

## Chapitre 2 – Revue de la littérature et objectifs

chaque itération, les éléments où la fonction objectif est minimale sont retirés de manière à ne conserver que les éléments ayant la plus grande influence sur cette dernière. Dans un même ordre d'idées, il peut être souhaitable d'ajouter de nouveaux éléments voisins à ceux où la fonction objectif est maximale. En ce sens, la méthode BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) est une variante de la méthode ESO qui permet l'insertion de nouveaux éléments aux endroits où la fonction objectif est maximale (Eschenauer et Olhoff 2001; Rozvany 2009; Huang et Xie 2010).

### *Inconvénient des méthodes d'optimisation de topologie*

Les méthodes d'optimisation de topologie sont plus générales et conduisent à des formes plus optimales que celles obtenues par optimisation paramétrique ou de forme. Toutefois, ce type d'optimisation possède un inconvénient majeur. En effet, bien qu'elles soient particulièrement adaptées pour déterminer la forme conceptuelle ou générale d'une structure, ces méthodes d'optimisation ne sont généralement pas conçues pour décrire précisément le design optimal d'un objet (Saitou, Izui et al. 2005). À titre d'exemple, l'optimisation topologique d'un cadre de vélo pourrait permettre de déterminer l'emplacement idéal des tubes constituant le cadre. Dans ce cas-ci, on obtiendrait la forme classique d'un cadre de vélo formé d'un triangle principal à l'avant (tubes vertical, horizontal et diagonal) et d'un triangle secondaire à l'arrière (tube vertical, bases et haubans). Cette forme est connue (voir la figure 3.1).

En poursuivant le processus d'optimisation de topologie, de nombreux trous apparaîtraient dans chaque tube pour conduire à un cadre difficilement fabricable et donc beaucoup plus dispendieux qu'un cadre formé de tubes dont la surface est continue. Dans cette optique, une méthode d'optimisation de forme s'avère plus adaptée pour l'optimisation d'un cadre de vélo. La méthode du mouvement normal s'avère simple à programmer et n'a pas fait l'objet de recherches approfondies en trois dimensions, ce qui justifie son utilisation dans le cadre de ce travail.

## 2.5.6 Méthode du mouvement normal (MMN)

### 2.5.6.1 Principe général

D'après la littérature, Umetani et Hirai (1975) semblent être les précurseurs de la méthode du mouvement normal (MMN) qu'ils dénomment « Growing-Reforming Procedure ». Pour expliquer le principe de la méthode, les auteurs font une analogie avec les os qui ont une forme optimale puisqu'ils s'adaptent aux efforts qu'ils subissent.

La MMN vise à uniformiser la valeur de la contrainte sur la frontière d'un objet en déplaçant, de façon itérative, des points de design situés sur cette frontière, dans une direction normale à celle-ci. La grandeur du déplacement d'un point de design  $P_i$  à l'itération  $j$  est directement proportionnel à l'écart entre la contrainte de Von Mises  $\sigma_{VM_i}$  en ce point et la contrainte objectif  $\sigma_o$ . Cette contrainte objectif correspond à la valeur de contrainte à obtenir sur toute la frontière de la pièce optimisée. La méthode consiste donc à minimiser la fonction objectif décrite par l'équation (2.14) pour chaque nœud  $i$  du maillage situé sur la frontière;

$$f(x_i, \mathbf{u}(x_n)) = \frac{\sigma_{VM_i} - \sigma_o}{\sigma_o}. \quad (2.14)$$

Le processus d'optimisation s'arrête lorsque cet écart est inférieur au critère de convergence, par exemple plus ou moins 10 % de la contrainte objectif. S'il n'y a pas de restriction spatiale, c'est-à-dire que la frontière de la pièce est libre de se déplacer dans n'importe quelle direction, la pièce finale obtenue est totalement contrainte sur sa frontière. Celle-ci est alors qualifiée « d'optimale » en terme de ratio résistance mécanique/masse. La contrainte peut toutefois varier dans l'épaisseur de la pièce.

### 2.5.6.2 Étapes de la méthode du mouvement normal

Les différentes étapes de la MMN illustrée à la figure 2.9 sont les suivantes :

1. Donner une forme initiale arbitraire à la pièce;
2. Appliquer les conditions aux limites et définir le matériau;
3. Choisir les points de design à déplacer;
4. Calculer les contraintes aux points de design;
5. Déplacer les points de design situés sur la frontière de la pièce dans la direction normale en fonction de la valeur de contrainte en ces points;
6. Répéter le processus à partir de l'étape 4 jusqu'à l'atteinte du critère de convergence (critère d'arrêt).

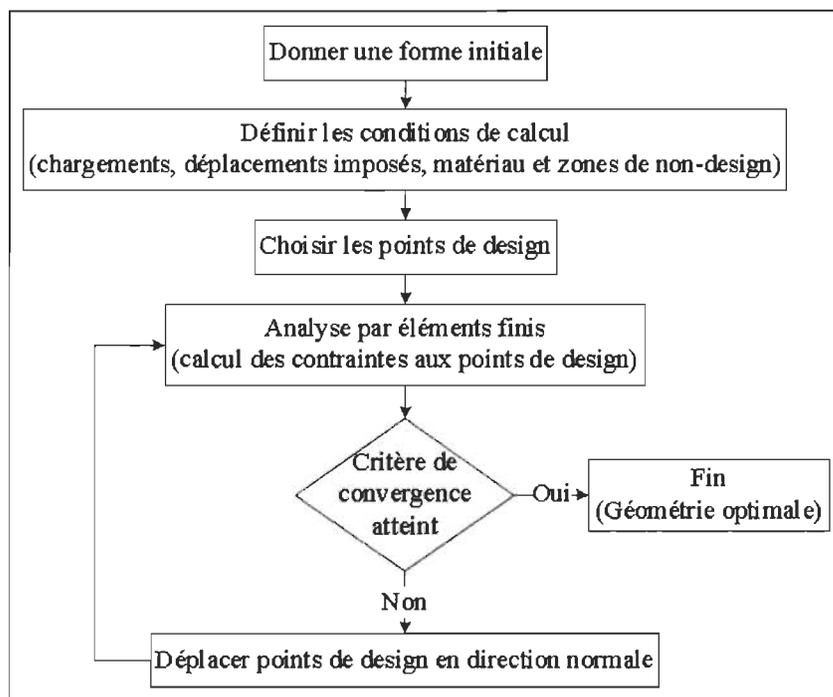


Figure 2.9 Processus d'optimisation par la MMN

### **2.5.6.2.1 Forme initiale**

La première étape de la MMN consiste à donner une forme initiale à la pièce. Celle-ci sera modifiée de façon itérative en fonction de la distribution des contraintes et devrait converger vers une géométrie plus optimale. Toutefois, il n'a pas été démontré que la MMN converge pour n'importe quelle géométrie initiale (Umetani et Hirai 1975). Quoiqu'il en soit, la MMN convergera plus rapidement si la forme initiale est proche de la forme optimale (Wu 2005).

### **2.5.6.2.2 Conditions aux limites, matériau et zones de non-design**

La deuxième étape de la méthode consiste à définir les chargements (ponctuels, linéiques, surfaciques ou volumiques), les déplacements imposés (appui, pivot, encastrement, etc.) et le matériau, à la pièce. Le choix des conditions aux limites est une étape cruciale du processus d'optimisation. Les chargements et déplacements imposés doivent être choisis judicieusement afin de bien modéliser le phénomène physique.

De plus, des zones de non-design doivent être définies. Elles correspondent aux zones du modèle qui ne doivent pas être modifiées pour que l'objet conserve ses fonctions mécaniques. Il peut s'agir, par exemple, d'une partie de la pièce qui est liée à une autre pour créer un assemblage. Pour un cadre de vélo, le tube de pédalier, le tube de direction et la partie supérieure du tube vertical (pour la tige de selle) sont des zones qui ne doivent pas être altérées lors du processus d'optimisation. Ces zones sont définies en utilisant une modélisation de type BREP telle que vue à la section 2.3.4.4. La figure 2.10 illustre les zones de non-design (en bleu) du triangle avant d'un cadre de vélo.

Des zones de non-design peuvent également être requises pour des raisons physiques empêchant la présence de matière à certains endroits. Dans le cas d'un pont, par exemple, la forme d'une poutre ne doit pas nuire au passage des véhicules.



Figure 2.10 Zones de non-design (en bleu) du triangle avant d'un cadre de vélo

Finalement, les zones de non-design peuvent être inhérentes à la méthode d'optimisation utilisée. En effet, puisque la MMN utilise la valeur de contrainte en chaque nœud pour déterminer son amplitude de déplacement, celle-ci doit être valide. Cela n'est pas le cas, par exemple, près de l'encastrement d'une structure en porte-à-faux dû au principe de Saint-Venant qui n'est pas respecté à cet endroit (Bazergui, Bui-Quoc et al. 2002). En effet, les contraintes calculées à l'encastrement sont affectés par la façon dont les déplacements sont imposés. La figure 2.11 montre la zone de non-design définie (en bleu) près de l'encastrement pour un tube en porte-à-faux.

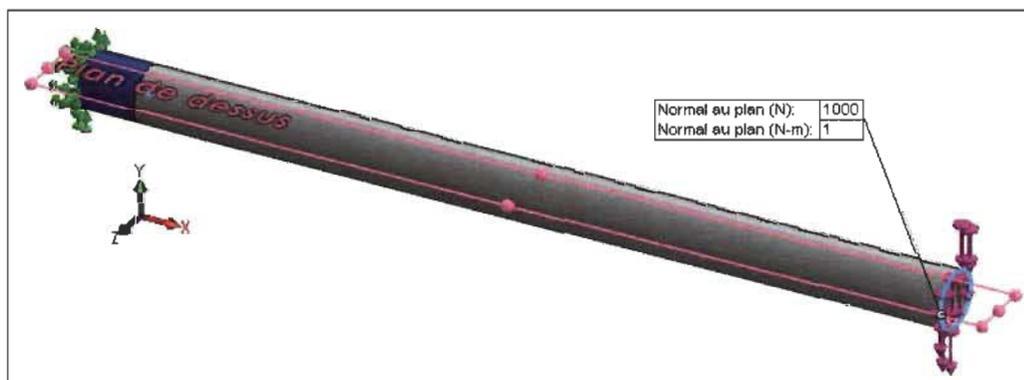


Figure 2.11 Zone de non-design (en bleu) pour un tube en porte-à-faux

### 2.5.6.2.3 Choix des points de design

La troisième étape consiste à choisir les points situés sur la frontière de la pièce qui seront déplacés. Ces points sont appelés « points de design » puisque leur déplacement modifie le design de la pièce. Deux types d'approches peuvent être utilisées.

#### *À partir de la représentation géométrique de la frontière*

La première approche consiste à utiliser les points de contrôle servant à définir géométriquement la frontière. Wu (2005) propose d'utiliser des courbes paramétriques cubiques ou « cubic splines » selon la base de Hermite pour représenter la frontière de la pièce à optimiser. Ces courbes sont définies par les coordonnées des points et les vecteurs tangents aux points situés aux extrémités de la courbe. Puisque ces points et leurs tangentes contrôlent la forme de la courbe et qu'ils en assurent une certaine régularité, il est logique de les utiliser comme points de design. Dans ce cas-ci, les courbes de Hermite sont préférées aux courbes de Bézier, B-splines ou NURBS, puisque la courbe passe directement par les points de contrôle.

#### *À partir des nœuds du maillage*

La deuxième approche consiste à utiliser directement les nœuds du maillage situés sur la frontière comme points de design. Cela permet d'obtenir une forme optimale très précise, mais nécessite un grand nombre de points de design. De plus, un lissage de la frontière après chaque itération peut être requis (Das et Jones 2009). Cela est dû au fait que la contrainte en un nœud est très affectée par la position des nœuds voisins. Dans le présent travail, c'est cette approche qui est utilisée pour déterminer les points de design.

### 2.5.6.2.4 Calcul des contraintes aux points de design

La quatrième étape de la MMN consiste à calculer les contraintes aux points de design. Pour ce faire, la méthode des éléments finis est généralement utilisée (Umetani et Hirai 1975; Umetani et Hirai 1978a; Umetani et Hirai 1978b; Mattheck et Burkhardt 1990;

Wu 2005). En contrepartie, Wessel, Cisilino et al. (2004) et Parvizian et Fenner (2002) proposent d'utiliser la méthode des éléments finis de frontière ou Boundary Element Method (BEM) pour calculer les contraintes uniquement aux points de design situés sur la frontière. En discrétisant seulement la frontière de la pièce plutôt que le solide en entier, cette méthode permet de diminuer considérablement le nombre de degrés de liberté et donc le temps de calcul à chaque itération du processus d'optimisation. De plus, dans certains cas, la méthode converge plus rapidement que la méthode des éléments finis (Wessel, Cisilino et al. 2004). Par contre, la méthode des éléments finis de frontière est généralement plus à risque de diverger. Pour des raisons pratiques, la méthode utilisée dans le présent travail est la méthode des éléments finis, celle-ci étant déjà intégrée à l'environnement de développement décrit au chapitre 3.

La contrainte utilisée correspond généralement à la contrainte équivalente de Von Mises (Mattheck et Burkhardt 1990; Miura 1990; Parvizian et Fenner 1997; Li, Steven et al. 1999; Parvizian et Fenner 2002; Wu 2005). La notation «  $\sigma_{VM_i}$  » est utilisée pour désigner la contrainte de Von Mises au point de design  $i$ .

#### **2.5.6.2.5 Déplacement des points de design**

Après avoir calculé la contrainte de Von Mises en chaque point de design, la prochaine étape consiste à déplacer ces points de manière à ce qu'elle tende vers la valeur objectif sur toute la frontière de la pièce. Ainsi, si la contrainte au point de design est supérieure à la contrainte objectif, celui-ci est déplacé de manière à augmenter l'aire de la section, ce qui a pour effet de diminuer la contrainte. À l'inverse, si la contrainte au point de design est inférieure à la contrainte objectif, celui-ci est déplacé de manière à diminuer l'aire de la section et augmenter la contrainte en ce point. La MMN se base donc sur l'hypothèse selon laquelle le déplacement de la frontière dans la direction normale, orientée vers l'extérieur de la pièce, engendre localement une diminution de contrainte.

*Direction de déplacement*

Selon Parvizian et Fenner (2002), la direction normale est la direction la plus appropriée pour minimiser la masse d'un composant mécanique puisqu'elle assure une variation maximale d'une section. Le déplacement d'un point de design  $P$  s'effectue donc le long d'un vecteur unitaire  $\vec{n}_P$  qui est normal à la frontière en ce point. Ce vecteur est obtenu en faisant la somme des normales des triangles rattachés à ce nœud, pondérée par l'aire respective de ceux-ci (Frey et George 2008);

$$\vec{n}_P = \frac{\sum_{i=1}^k A_i \vec{n}_i}{\|\sum_{i=1}^k A_i \vec{n}_i\|}. \quad (2.15)$$

Dans l'équation (2.15),  $k$  est le nombre de triangles rattachés au nœud  $P$ , tandis que  $A_i$  et  $\vec{n}_i$  sont respectivement l'aire et la normale unitaire du triangle  $i$ . À noter que les normales orientées de la triangulation initiale sont utilisées pour éviter que les éléments ne soient trop déformés au cours du processus d'optimisation.

*Grandeur du déplacement*

Tel que formulé à l'équation (2.14), la grandeur du déplacement  $D_i$  d'un point de design  $P_i$  est directement proportionnelle à la différence entre la contrainte de Von Mises  $\sigma_{VM}$  en ce point et la contrainte objectif  $\sigma_o$ . Pour éviter qu'un déplacement trop brusque rende la méthode instable, un coefficient de convergence  $C$  est ajouté. Ce coefficient doit être déterminé expérimentalement. Pour donner un ordre de grandeur, Parvizian et Fenner (2002) utilisent une valeur de 0.02 pour l'optimisation d'un congé d'une pièce. La grandeur du déplacement  $D$  du point de design  $i$  à l'itération  $j$  est donc donnée par l'équation (2.16);

$$D_i^j = C \frac{\sigma_{VM_i}^j - \sigma_o}{\sigma_o}. \quad (2.16)$$

Puisque le coefficient  $C$  n'est pas connu a priori, il peut être préférable d'utiliser la contrainte moyenne aux points de design, actualisée à chaque itération, plutôt qu'une valeur fixe. Finalement, advenant un déplacement trop important de certains nœuds, un lissage peut être effectué pour améliorer la forme du maillage (Das et Jones 2009).

Connaissant la direction et la grandeur du déplacement, le point de design  $P_i$  peut être déplacé. En trois dimensions, les nouvelles coordonnées de ce point, à l'itération  $j + 1$ , sont données par;

$$\begin{cases} x_i^{j+1} = x_i^j + D_i^j \cdot \overrightarrow{n_{x_i}} \\ y_i^{j+1} = y_i^j + D_i^j \cdot \overrightarrow{n_{y_i}} \\ z_i^{j+1} = z_i^j + D_i^j \cdot \overrightarrow{n_{z_i}} \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $x_i^j$ ,  $y_i^j$  et  $z_i^j$  sont respectivement les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  du point  $i$  à l'itération  $j$  et  $\overrightarrow{n_{x_i}}$ ,  $\overrightarrow{n_{y_i}}$  et  $\overrightarrow{n_{z_i}}$  sont respectivement les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  de la normale unitaire orientée de la triangulation initiale au point  $i$ .

#### 2.5.6.2.6 Itération et convergence

Une fois que tous les points de design ont été déplacés après une itération, les étapes 4 et 5, soient le calcul des contraintes aux points de design et le déplacement de ces points, sont répétées itérativement. Chaque nœud de la zone de design est déplacé jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint. Ce critère peut être défini en fonction de la contrainte objectif (Umetani et Hirai 1975) ou en fonction de l'erreur relative définie à partir des contraintes de Von Mises maximale et minimale aux points de design (Wu 2005).

##### *Limite de convergence sur la contrainte objectif*

La limite de convergence correspond à un pourcentage de la contrainte objectif. La méthode s'arrête si la contrainte de Von Mises, en chacun des  $n_d$  points de design, se situe dans l'intervalle de convergence défini par l'inégalité ci-dessous.

Pour  $i$  allant de 1 à  $n_d$ ;

$$(1 - L) \cdot \sigma_o \leq \sigma_{VM_i} \leq (1 + L) \cdot \sigma_o \quad (2.18)$$

où  $L$  est le critère d'arrêt de la méthode fixé à l'avance. L'inégalité (2.18) peut également s'écrire sous la forme suivante;

pour  $i$  allant de 1 à  $n_d$ ;

$$\frac{|\sigma_{VM_i} - \sigma_o|}{\sigma_o} \leq L. \quad (2.19)$$

#### *Limite de convergence sur l'erreur relative*

Plutôt que de calculer la différence entre la contrainte de Von Mises au point de design et la contrainte objectif, Wu (2005) définit une erreur relative pour évaluer la qualité des résultats d'optimisation. L'erreur relative  $RE$  est calculée à partir de l'équation suivante;

$$RE = \left| \frac{\sigma_{VM_{max}} - \sigma_{VM_{min}}}{\sigma_{VM_{max}} + \sigma_{VM_{min}}} \right| \quad (2.20)$$

où  $\sigma_{VM_{max}}$  et  $\sigma_{VM_{min}}$  correspondent aux contraintes de Von Mises maximale et minimale sur la frontière à déplacer. La méthode s'arrête lorsque la limite de convergence  $L$  sur l'erreur relative est atteinte;

$$RE \leq L. \quad (2.21)$$

La MMN vise à uniformiser la valeur de la contrainte sur la frontière de la pièce autour d'une valeur objectif. Il semble donc logique de définir la limite de convergence à partir de la contrainte objectif. C'est pourquoi cette dernière est utilisée dans le présent travail.

### 2.5.6.3 Type de modélisation utilisée

L'optimisation, par la MMN, d'une pièce modélisée sous forme volumique peut s'avérer problématique. En effet, le déplacement des nœuds du maillage situés sur la frontière de la pièce (points de design) affecte la taille et la forme des éléments constituant la couche la plus près de la frontière. Un remaillage à chaque itération peut pallier ce problème de non-uniformité de la taille des mailles, mais cela est très coûteux en temps de calcul. La figure 2.12 a) illustre dix éléments d'un maillage initial vu en coupe. Les nœuds n1, n2 et n3 correspondent à des points de design à déplacer. La figure 2.12 b) illustre ce même maillage après quelques itérations. Le déplacement des nœuds n1, n2 et n3 a pour effet d'étirer les éléments 1 à 5, ce qui risque d'affecter la précision des résultats du calcul.

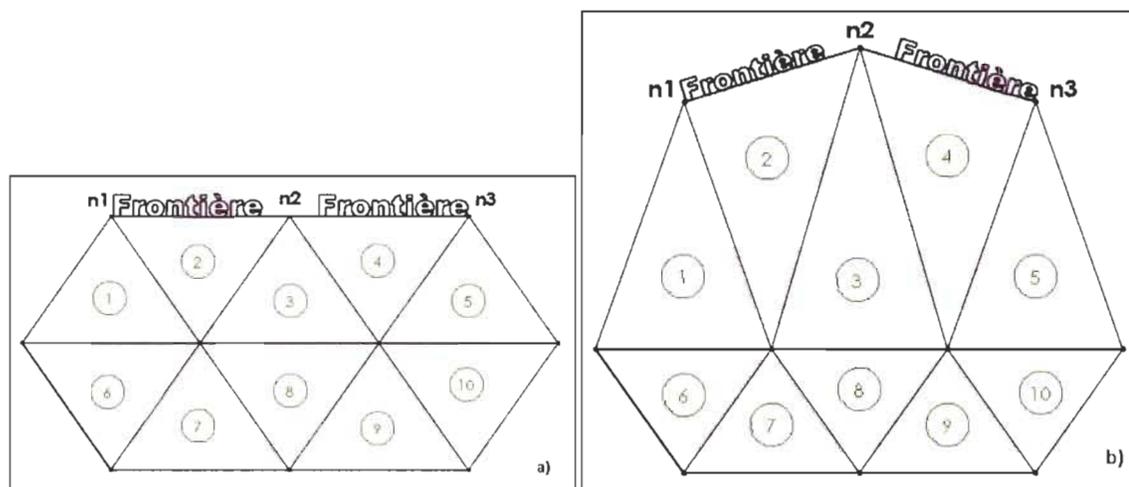


Figure 2.12 Problème de non-uniformité de la taille des éléments volumiques a) Éléments de taille uniforme avant déplacement de la frontière b) Éléments de taille non uniforme après déplacement de la frontière

La modélisation surfacique, quant à elle, est particulièrement adaptée à la MMN puisque tous les nœuds du maillage peuvent être considérés comme des points de design. Tel que discuté à la section 3.3.2, la modélisation surfacique est également mieux adaptée pour modéliser adéquatement un cadre de vélo. C'est pourquoi ce type de modélisation est utilisé dans le cadre de ce travail. De plus, tel qu'expliqué à la section 3.3.2.2, des éléments de plaques à trois nœuds sont utilisés pour des raisons de simplification.

#### 2.5.6.4 Concept de restriction spatiale

Umetani et Hirai (1975; 1978a; 1978b) abordent la notion de restriction spatiale au niveau du déplacement possible de la frontière de la pièce à optimiser. La MMN conduit à un design très près d'un design de masse minimale dit « optimal » lorsque toute la frontière de la pièce est libre de se déplacer. Par contre, lorsque le déplacement de la frontière est restreint à certains endroits, la géométrie obtenue est moins optimale.

##### *Cas pratique : poutre encastrée aux deux extrémités soumise à une charge répartie $w$*

Afin de démontrer l'influence de la restriction spatiale sur la géométrie finale obtenue, le cas d'une poutre de longueur  $L$  encastrée aux deux extrémités et soumise à une charge répartie  $w$  est présenté à la figure 2.13. Les contraintes principales sur les faces supérieure et inférieure de la poutre sont utilisées pour déterminer le déplacement de la frontière. L'aire initiale de la poutre est utilisée comme valeur de référence.

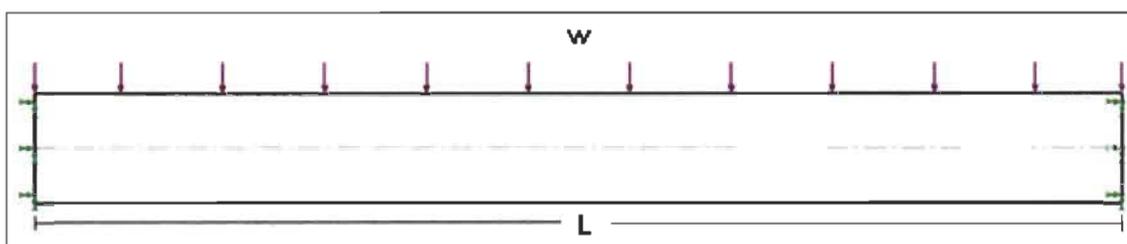


Figure 2.13 Poutre de longueur  $L$  encastrée aux deux extrémités soumise à une charge répartie  $w$

##### *Sans restriction spatiale*

La figure 2.14 montre la forme obtenue lorsque toute la frontière est libre de se déplacer. Seule la partie supérieure gauche de la poutre est modélisée puisque les efforts exercés sont symétriques par rapport à l'axe neutre et par rapport à son centre.

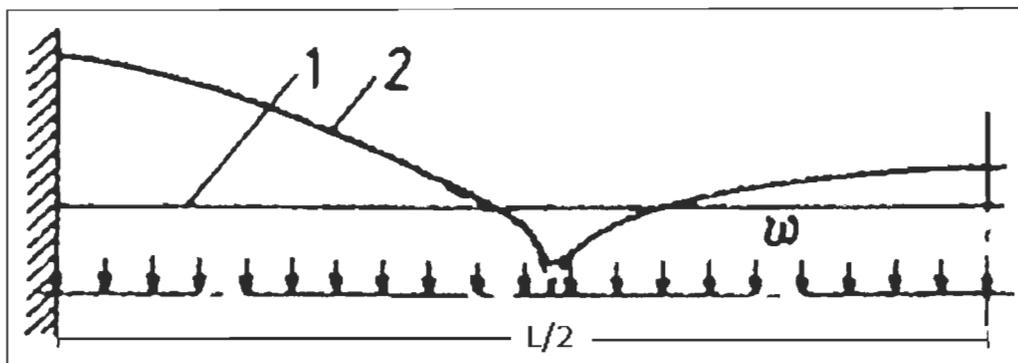


Figure 2.14 Optimisation par la MMN sans restriction spatiale d'une poutre de longueur  $L$  encastrée aux deux extrémités soumise à une charge répartie  $w$  1) et 2) Contours initial et final de la section supérieure gauche de la poutre (Umetani et Hirai 1978a)

Les contours 1 et 2 correspondent à la forme initiale et à la forme optimisée. Pour des fins de visualisation, le déplacement a été amplifié. En pratique, pour un niveau de contrainte équivalent, l'aire définie par le contour 2 est 43 % inférieure à l'aire de la poutre initiale. Sur la figure 2.14, la section de la poutre tend vers zéro à la position  $L/4$  dû au fait que les contraintes de tension/compression et de cisaillement sont nulles sur les faces supérieure et inférieure en ce point. Toutefois, le cisaillement est maximal à la fibre neutre. Afin d'éviter que la section ne tende vers zéro, les auteurs utilisent la valeur maximale de contrainte, soit en surface ou à la fibre neutre, pour ce cas particulier.

#### *Avec restriction spatiale*

Si, pour une raison fonctionnelle, la surface supérieure de la poutre ne peut pas être déplacée, la forme finale s'apparente à celle illustrée à la figure 2.15. Encore une fois, seule la partie gauche est représentée due à la symétrie du chargement par rapport au centre de la poutre. Par contre, la poutre n'est plus symétrique par rapport à l'axe neutre.

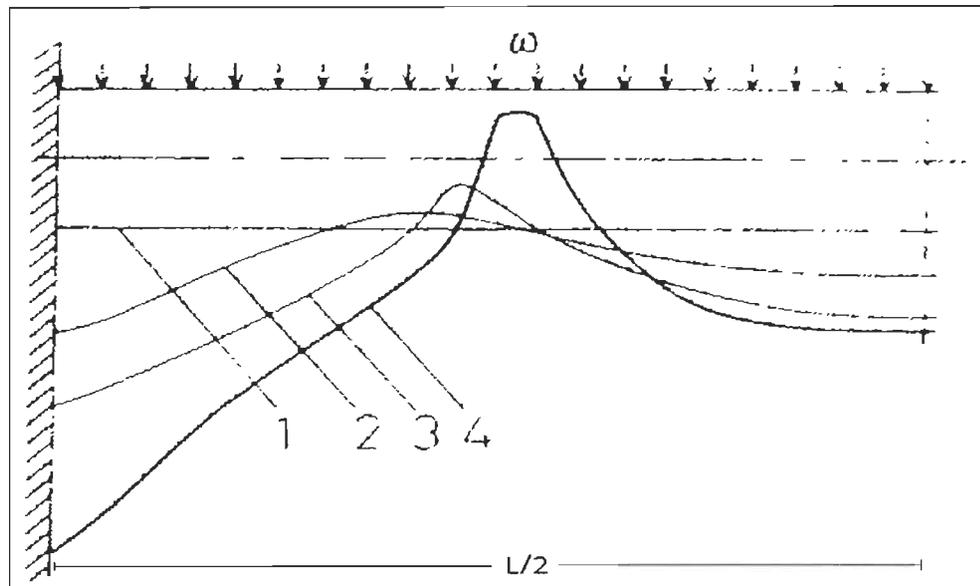


Figure 2.15 Optimisation par la MMN avec restriction spatiale d'une poutre de longueur  $L$  encastree aux deux extremités soumise à une charge répartie  $w$  1) Contour initial 2), 3) et 4) Contours après 2, 6 et 66 itérations (Umetani et Hirai 1978a)

Sur la figure 2.15, le contour 1 correspond à la forme initiale de la poutre, tandis que les contours 2 et 3 correspondent à la forme obtenue après 2 et 6 itérations respectivement. Finalement, le contour 4 correspond à la forme optimale obtenue après 66 itérations. Encore une fois, le déplacement a été amplifié pour des fins de visualisation. L'aire définie par le contour 4 est 38 % inférieure à l'aire de la poutre initiale ce qui correspond à une augmentation de section de près de 9 % par rapport à la poutre optimisée sans restriction spatiale. Ceci est dû au fait que la matière ne parvient pas à reprendre efficacement les contraintes de la région restreinte de mouvement.

En conclusion, une pièce dont toute la frontière est libre de se déplacer conduit à une forme plus optimale qu'une pièce possédant certaines restrictions spatiales. De plus, bien que la contrainte soit généralement maximale à la frontière d'une pièce, ce n'est pas toujours le cas. Finalement, la notion de restriction spatiale peut être utilisée afin de restreindre le déplacement des nœuds à l'intérieur d'un certain domaine d'optimisation.

### 2.5.6.5 Exemples de problèmes d'optimisation

Cette section porte sur trois problèmes d'optimisation par la MMN, soient l'optimisation de la forme d'une poutre encadrée soumise à un effort de flexion, d'un trou dans une plaque sous tension biaxiale et d'un segment dans une plaque sous tension uniaxiale.

#### *Poutre encadrée soumise à un effort de flexion*

Umetani et Hirai (1975) proposent d'optimiser la forme d'une poutre en porte-à-faux. Sur la figure 2.16, le contour 1 correspond à la forme initiale de la poutre encadrée à l'extrémité gauche et soumise à un chargement transversal  $w$  à l'extrémité droite. Due à la symétrie par rapport à l'axe neutre, seule la moitié supérieure de la poutre est étudiée. Les contours 2 et 3 correspondent à la forme optimisée après 5 et 10 itérations. Le contour 4 correspond à la forme obtenue après 23 itérations avec une limite de convergence de 5 % sur la contrainte objectif de 70 MPa. Finalement, le contour 5 correspond à la forme optimale théorique.

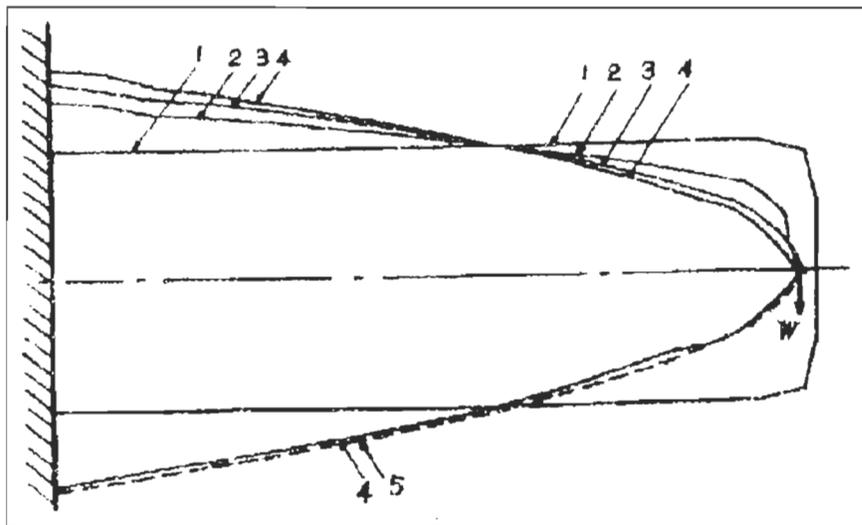


Figure 2.16 Optimisation par la MMN d'une poutre encadrée soumise à une charge transversale  $w$  appliquée à son extrémité libre 1) Contour initial 2), 3) et 4) Contours après 5, 10 et 23 itérations 5) Contour optimal théorique (Umetani et Hirai 1975)

Dans ce cas, la MMN conduit à une forme très similaire à la forme optimale. Ce problème d'optimisation est toutefois assez simple puisque la forme est étudiée en deux dimensions, sans notion d'épaisseur. De plus, aucune restriction sur le déplacement de la frontière n'est imposée à l'encastrement.

### *Trou dans une plaque sous tension biaxiale*

Parvizian et Fenner (1997) proposent d'optimiser la forme d'un trou dans une plaque sous tension biaxiale. La figure 2.17 a) montre la forme initiale du trou, tandis que la figure 2.17 b) montre en pointillé la forme optimisée par la MMN. Il s'agit en fait d'une ellipse dont la longueur du grand axe est environ deux fois celle du petit axe, étant donné que le ratio des contraintes est égal à deux. Cette forme est similaire à celle définie par le tracé en ligne continue, obtenu suite à une analyse de sensibilité.

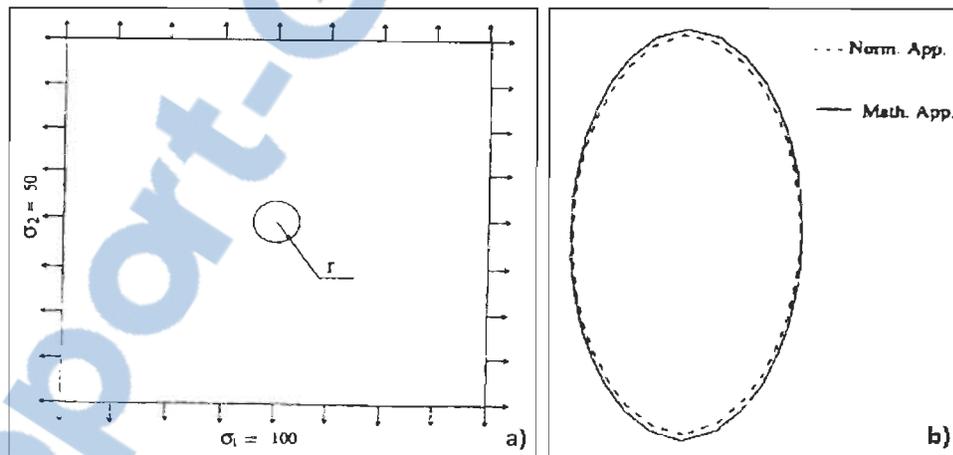


Figure 2.17 Trou de rayon  $r$  dans une plaque sous tension biaxiale optimisé par la MMN a) Forme initiale et conditions aux limites b) Formes finales obtenues par la MMN (en ligne pointillée) et par la méthode du gradient conjugué (en ligne continue) (Parvizian et Fenner 1997)

### *Congé dans une plaque sous tension uniaxiale*

Parvizian et Fenner (2002) proposent d'optimiser un segment entre deux sections dans une plaque sous tension uniaxiale. La figure 2.18 a) montre, en ligne continue, le segment AB initial reliant les deux sections, tandis que la figure 2.18 b) montre le congé obtenu par la MMN. Seule la moitié supérieure de la plaque est modélisée due à la symétrie par rapport à l'axe X. Sur la figure 2.18 b), le tracé en pointillé est obtenu suite à une analyse de sensibilité sur la fonction objectif. Les formes obtenues sont similaires, mais la MMN est plus simple à programmer et moins coûteuse en temps de calcul.

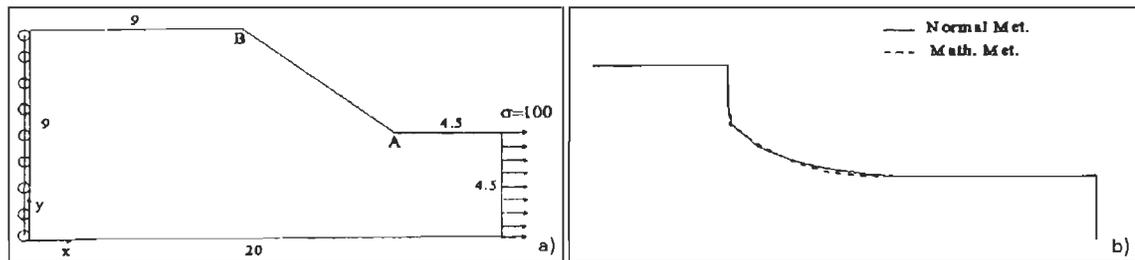


Figure 2.18 Congé dans une plaque sous tension uniaxiale optimisé par la MMN a) Forme initiale et conditions aux limites b) Formes finales obtenues par la MMN (en ligne continue) et par la méthode du gradient conjugué (en ligne pointillée) (Parvizian et Fenner 2002)

#### **2.5.6.6 Avantages et inconvénients de la méthode du mouvement normal**

##### *Avantages*

Contrairement aux méthodes d'optimisation avec gradient ou par analyse de sensibilité, la MMN est une méthode d'optimisation sans gradient ou d'ordre zéro. Elle ne requiert donc pas de dérivation de la fonction objectif (équation (2.14)) par rapport aux variables de design qui s'avère coûteux en temps. Cela est d'autant plus vrai lorsque le nombre de variables est élevé. L'optimisation, par la MMN, permet donc l'utilisation d'un grand nombre de points de design avec une bonne précision de la forme optimisée. De plus, la MMN est relativement simple à programmer.

Un autre avantage de la MMN est qu'elle conduit généralement à une géométrie optimisée facilement fabricable par hydroformage, ce qui n'est pas le cas avec une méthode d'optimisation de topologie. L'hydroformage est un procédé de fabrication par déformation qui consiste à déformer plastiquement des pièces minces. La pièce est placée dans une matrice, puis un liquide sous haute pression est injecté afin de déformer la pièce. Ce procédé est utilisé pour la fabrication de cadres de vélos hauts de gamme.

### *Inconvénients*

La MMN conduit à un design optimal où la contrainte est uniforme en surface seulement. La contrainte pouvant varier dans l'épaisseur de la pièce optimisée, celle-ci est généralement moins optimale qu'une pièce obtenue par une méthode d'optimisation topologique. Toutefois, cet inconvénient est négligeable dans le cas d'une pièce mince étant donné que la variation de la contrainte est faible dans l'épaisseur.

Tel que mentionné à la section 2.5.6.3, l'utilisation d'éléments volumiques peut s'avérer problématique et nécessite généralement un remaillage à chaque itération dû à la déformation de la couche d'éléments situés sur la frontière de la pièce à optimiser. Comme ce remaillage est très coûteux en temps, cet inconvénient s'avère être particulièrement important dans le cas d'une modélisation de type volumique. Toutefois, le problème ne se pose pas pour une modélisation surfacique, puisqu'il n'y a qu'une seule couche d'éléments. De plus, l'utilisation des normales de la triangulation initiale permet de limiter la déformation des éléments au cours du processus d'optimisation.

Un autre inconvénient de la MMN est qu'il est possible de créer une concentration au niveau des contraintes. Ceci est d'autant plus vrai si les points de design sélectionnés correspondent directement aux nœuds du maillage plutôt qu'aux points de contrôle issus de la représentation géométrique de la frontière. Selon Hsu, Sheppard et al. (1995), le simple fait d'ajouter de la matière n'assure en rien une diminution de la contrainte. En effet, si celle-ci est ajoutée sans tenir compte de la courbure de la pièce, il peut en

résulter un effet de concentration de contraintes. Pour éviter un tel phénomène, les auteurs proposent d'utiliser la courbure en différents points situés sur la frontière comme variables de design. La méthode vise à trouver la direction selon laquelle chaque point de la surface doit être déplacé pour minimiser le facteur de concentration de contraintes.

#### **2.5.6.7 Lacunes de la littérature**

La MMN a été appliquée, dans la littérature, à des problèmes d'optimisation bidimensionnels simples. Son application, à des problèmes en trois dimensions, fait intervenir certaines restrictions spatiales, ce qui nécessite un contrôle du déplacement des nœuds pour éviter une divergence de la méthode ou une forme indésirable. Dans le cas d'une pièce encastrée soumise à un effort transversal, par exemple, la contrainte tend vers l'infini à l'encastrement. Un contrôle du déplacement est donc requis pour éviter un déplacement brusque de la frontière. La notion de contrôle du déplacement est très peu abordée dans la littérature.

### **2.6 Objectifs spécifiques**

Tel que mentionné précédemment, l'objectif principal de cette recherche est d'intégrer une méthode d'optimisation de structures, adaptée aux cadres de vélos, au processus de CAO. Les objectifs spécifiques de cette recherche sont les suivants :

- Adapter l'environnement de développement pour l'étude par éléments finis de modèles surfaciques et valider les résultats avec un autre logiciel;
- Intégrer la MMN à l'environnement de développement et l'appliquer à un problème d'optimisation faisant intervenir un tube à paroi mince;
- Développer un critère adéquat pour le contrôle du déplacement des nœuds;
- Appliquer la MMN contrôlée à un problème d'optimisation faisant intervenir un tube à paroi mince;
- Appliquer la MMN contrôlée au problème d'optimisation du triangle avant d'un cadre de vélo modélisé par une coque.

## 2.7 Hypothèses et limites

Pour des fins de simplifications et afin de bien définir le cadre de ce travail, les hypothèses suivantes sont formulées :

- Le tube à paroi mince est représenté par un modèle surfacique;
- Le tube est maillé avec des éléments de plaques (triangles à 3 nœuds);
- L'épaisseur du tube demeure constante durant le processus d'optimisation;
- Le matériau utilisé est isotrope;
- La MEF est utilisée pour calculer les contraintes aux nœuds;
- La contrainte considérée est la contrainte équivalente de Von Mises maximale entre les plans inférieur, moyen et supérieur;
- La contrainte objectif  $\sigma_o$  correspond à la contrainte de Von Mises moyenne aux nœuds du maillage, actualisée à chaque itération de la MMN;
- Afin de limiter le temps de calcul, aucun remaillage n'est effectué durant la phase itérative du processus d'optimisation par la MMN.

## 2.8 Méthodologie

La méthodologie utilisée lors de ce travail de recherche est la suivante :

1. Un problème d'optimisation est choisi puisqu'il influence directement le choix de la modélisation et de la méthode d'optimisation utilisée. Dans le cas présent, on s'intéresse au problème d'optimisation d'un cadre de vélo;
2. Une revue de la littérature est effectuée en ce qui a trait à la modélisation géométrique et à l'optimisation de structures. Celle-ci permet de choisir la modélisation géométrique et le type d'éléments adéquat pour l'étude par éléments finis d'un cadre de vélo ainsi qu'une méthode d'optimisation adaptée. La méthode d'optimisation de forme par le mouvement normal en modélisation surfacique par éléments de plaques triangulaires est retenue;

## Chapitre 2 – Revue de la littérature et objectifs

3. Étant donné que l'étude d'une méthode d'optimisation sans environnement de développement est plutôt limitée, la troisième étape consiste à choisir et à se familiariser avec l'environnement dans lequel la MMN sera intégrée;
4. L'environnement de développement est adapté pour permettre l'étude par éléments finis d'un cadre de vélo en modélisation surfacique;
5. La MMN est implantée dans l'environnement de développement;
6. La MMN, telle que décrite dans la littérature, est appliquée au problème d'optimisation d'un tube à paroi mince en porte-à-faux. Cela permet de mettre en évidence certaines lacunes au niveau du contrôle de la méthode;
7. Différents critères sont étudiés dans le but d'améliorer le contrôle du déplacement des nœuds durant le processus d'optimisation. Un critère basé sur la norme du gradient de déplacement de chaque triangle est retenu;
8. Le critère de contrôle retenu est intégré à la MMN pour créer la MMN contrôlée;
9. La MMN contrôlée est appliquée au problème d'optimisation étudié précédemment et une comparaison est effectuée entre les résultats obtenus avec et sans contrôle au niveau du déplacement des nœuds;
10. La MMN contrôlée est appliquée au problème d'optimisation de la forme d'un cadre de vélo soumis à des chargements et déplacements externes. L'uniformisation des contraintes autour de la valeur objectif est discutée;
11. Finalement, la MMN contrôlée est appliquée à différents problèmes d'optimisation et les résultats obtenus sont analysés.

## CHAPITRE 3

-

### INTÉGRATION D'ÉLÉMENTS FINIS DE PLAQUES DANS L'ENVIRONNEMENT DE DÉVELOPPEMENT

#### 3.1 Introduction

Ce chapitre vise à présenter l'environnement de développement utilisé. Le choix de la modélisation et du type d'éléments finis utilisé pour l'étude d'un cadre de vélo, est ensuite effectué; l'environnement de développement est adapté à cette modélisation et à ce choix d'éléments finis. Finalement, le cas du tube à paroi mince en porte-à-faux est étudié et les résultats obtenus dans l'environnement de développement sont validés et comparés avec un autre logiciel de calcul par éléments finis.

#### 3.2 Présentation de l'environnement de développement

L'environnement utilisé dans le cadre de ce travail a été développé par l'Équipe de Recherche en Intégration CAO-Calcul (ERICCA)<sup>3</sup> dont font partie les professeurs Jean-Christophe Cuillière et Vincent François du département de génie mécanique de l'Université du Québec à Trois-Rivières (UQTR)<sup>4</sup>. Cet environnement est basé sur un Modèle de Topologie Unifié (MTU) (Cuillière et François 2014) faisant intervenir des concepts de programmation de type orientée-objet. Ce modèle est constitué d'informations géométriques, topologiques et co-topologiques. L'environnement de développement contient un « Mailleur Automatique de Géométries Issues de la CAO (MAGIC) » permettant de générer automatiquement un maillage non structuré par la méthode frontale. L'acronyme « MAGIC » est utilisé dans la suite de ce travail pour désigner l'environnement de développement en question.

---

<sup>3</sup>Site Web : [www.uqtr.ca/ericca](http://www.uqtr.ca/ericca)

<sup>4</sup>Site Web : [www.uqtr.ca/geniemecanique](http://www.uqtr.ca/geniemecanique)

Les principaux calculs effectués dans l'environnement MAGIC visent à solutionner des problèmes d'élasticité linéaire en statique par l'utilisation d'une modélisation volumique et d'éléments tétraédriques linéaires. Toutefois, cet environnement est modulable et l'utilisateur peut facilement intégrer un nouveau type d'éléments, une nouvelle modélisation ou une nouvelle méthode d'optimisation en fonction de ses objectifs de recherche. Ces caractéristiques en font un environnement évolutif et polyvalent auquel chaque utilisateur contribue à son développement. À titre d'exemple, une adaptation pour l'analyse par éléments finis de plaques a été effectuée dans le cadre de ce mémoire.

Les différentes étapes d'un calcul par éléments finis effectué dans l'environnement MAGIC sont les suivantes :

1. Modélisation de l'objet dans un logiciel de CAO et importation dans MAGIC;
2. Définition des conditions aux limites et du matériau;
3. Génération de la carte de taille;
4. Génération du maillage géométrique;
5. Génération du maillage éléments finis;
6. Résolution par éléments finis;
7. Visualisation et interprétation des résultats.

### **3.2.1 Modélisation de l'objet dans un logiciel de CAO et importation dans MAGIC**

La première étape d'un calcul par éléments finis consiste à modéliser l'objet à étudier dans un logiciel de CAO (SolidWorks). L'objet est ensuite sauvegardé en format STEP (Standard for the Exchange of Product model data) puis importé dans MAGIC en utilisant les bibliothèques de Open CASCADE Technology<sup>5</sup> qui est une plateforme libre de développement en CAO et en modélisation 3D.

---

<sup>5</sup>Site Web : [www.opencascade.org/](http://www.opencascade.org/)

### 3.2.2 Définition des conditions aux limites et du matériau

Les conditions aux limites correspondent à des déplacements imposés et des chargements externes qui doivent être appliqués à certains endroits de la pièce étudiée. Ces conditions sont spécifiées par l'utilisateur et appliquées sur certaines entités topologiques de la pièce. Il en va de même pour le matériau qui est défini par l'utilisateur en spécifiant le module de Young et le coefficient de Poisson.

### 3.2.3 Génération de la carte de taille

Une carte de taille est une fonction permettant de déterminer localement la taille des éléments finis à utiliser en fonction d'un paramètre donné, ce qui correspond à une pré-optimisation de la densité nodale en fonction de la géométrie de la pièce à mailler. Cette pré-optimisation est importante puisqu'il est souhaitable que les mailles soient plus fines dans les zones critiques où les contraintes sont généralement plus élevées.

### 3.2.4 Génération du maillage géométrique

Tel que mentionné précédemment, l'environnement MAGIC contient un mailleur qui utilise la méthode frontale pour générer automatiquement un maillage géométrique non structuré appelé « mg\_maillage ». Avec des éléments tétraédriques, un maillage géométrique contient les éléments suivants :

- Les tétraèdres situés à l'intérieur du volume défini par la frontière de l'objet (BREP);
- Les triangles situés sur les faces du BREP et sur les faces des tétraèdres;
- Les segments situés sur les arêtes du BREP, les arêtes des triangles et les arêtes des tétraèdres;
- Les nœuds situés sur les sommets du BREP, les arêtes du BREP, les faces du BREP et dans le volume défini par le BREP.

### 3.2.5 Génération du maillage éléments finis

Le maillage éléments finis, appelé « fem\_maillage », correspond au maillage géométrique duquel les doublons, au niveau de certains éléments géométriques, ont été retirés. À titre d'exemple, dans le maillage géométrique, un tétraèdre dont une face est située sur une face du BREP contient deux fois le même triangle. L'un est associé à la face du BREP tandis que l'autre est associé à la face du tétraèdre. Dans le maillage éléments finis, le même triangle est associé aux deux faces sans se retrouver en double dans le maillage. Il en va de même pour les nœuds et les arêtes associés aux deux faces.

### 3.2.6 Calcul par éléments finis

La phase de calcul est réalisée en utilisant les bibliothèques de Code\_Aster<sup>6</sup>. Code\_Aster est un logiciel libre de calcul par éléments finis développé en 1989 par Électricité de France (EDF) et qui est en constante évolution depuis. Contrairement à d'autres logiciels commerciaux de simulation munis d'une interface graphique, tels que SolidWorks Simulation ou COSMOSM, l'utilisation de ces bibliothèques offrent plus de possibilités. À titre d'exemple, elles permettent le lancement de plusieurs calculs par éléments finis et le passage d'informations entre ces calculs sans l'interaction de l'utilisateur.

Cette phase de calcul est réalisée en trois étapes, soient l'exportation de MAGIC vers Code\_Aster, le calcul effectué par Code\_Aster et l'importation des résultats de Code\_Aster vers MAGIC. L'exportation consiste à générer les fichiers d'exportation, de commandes et de maillage requis par Code\_Aster.

À noter que la version 10 de Code\_Aster a été utilisée lors de ce travail et que la documentation du logiciel est disponible dans la section « Documentation » du site Internet de Code\_Aster à l'adresse : [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org). Chaque document de référence est identifié par une clé documentaire du type « U0.00.00 ».

---

<sup>6</sup> Site Web : [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)

### 3.2.7 Visualisation et interprétation des résultats

Finalement, les résultats d'un calcul par éléments finis peuvent être visualisés avec Gmsh<sup>7</sup> qui est un logiciel libre de maillage par éléments finis offrant plusieurs options en pré et post traitement (Geuzaine et Remacle 2009). Pour ce faire, un fichier de type « msh » doit être généré dans l'environnement MAGIC.

## 3.3 Étude par éléments finis d'un cadre de vélo

### 3.3.1 Forme classique d'un cadre de vélo

La figure 3.1 montre la géométrie classique d'un cadre de vélo formé de deux triangles adjacents. Le triangle avant, ou triangle principal, est formé des tubes vertical, horizontal et diagonal. Le triangle arrière, ou triangle secondaire, est formé du tube vertical, des bases et des haubans.

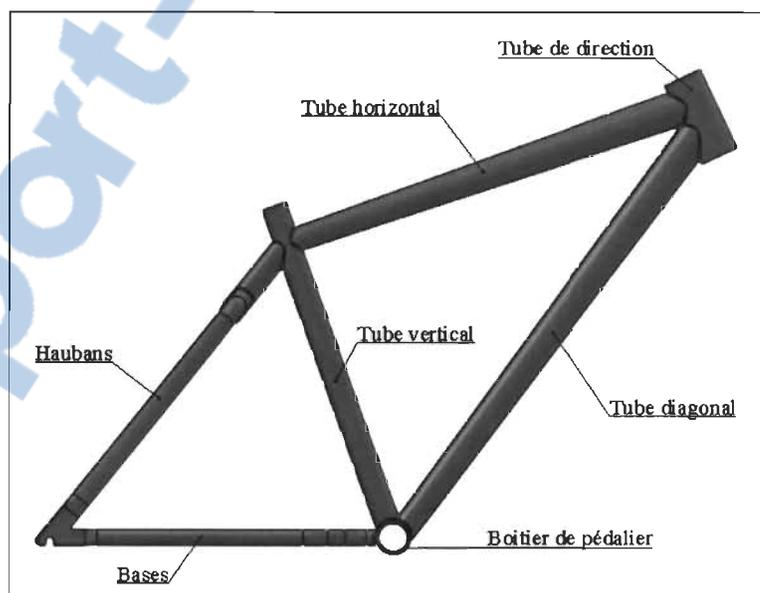


Figure 3.1 Géométrie classique d'un cadre de vélo

<sup>7</sup> Site Web : [geuz.org/gmsh/](http://geuz.org/gmsh/)

### **3.3.2 Choix de la modélisation et du type d'éléments finis**

Un cadre de vélo peut être modélisé avec des éléments de poutre, mais cette modélisation n'est pas assez précise aux jonctions des tubes. Puisque ces jonctions représentent des zones d'intérêt, ce type de modélisation n'est pas adéquat.

Les parois des tubes du cadre sont minces et quelques couches d'éléments sont requises pour assurer une bonne précision des résultats. L'utilisation d'éléments volumiques implique une taille fine et donc un nombre élevé d'éléments ce qui induit un temps de calcul beaucoup trop long. De plus, l'utilisation d'une méthode d'optimisation itérative, basée sur les valeurs de contraintes aux nœuds, requiert le calcul de ces contraintes à chaque itération. Il importe donc que le temps de calcul soit le plus court possible.

#### **3.3.2.1 Modélisation surfacique en coque**

Le choix d'une modélisation surfacique en coque s'avère particulièrement adapté à l'étude par éléments finis d'un cadre de vélo constitué de tubes à parois minces. En effet, ce type de modélisation comporte une seule couche d'éléments et la taille de ceux-ci est indépendante de l'épaisseur de la pièce modélisée. À noter que le terme « coque » désigne un élément topologique indiquant la façon dont les faces d'une géométrie sont reliées entre-elles. Son analogue, en modélisation volumique, est le « volume ».

##### **3.3.2.1.1 Théorie des coques minces**

L'application de la théorie des coques minces requiert que l'épaisseur de la pièce soit faible (moins de 5 %) comparativement aux autres dimensions (longueur et largeur), ce qui permet de négliger les contraintes normales transverses à la coque.

##### **3.3.2.2 Éléments de plaques triangulaires**

Les éléments de coques triangulaires à six nœuds sont particulièrement adaptés pour modéliser adéquatement les tubes d'un cadre de vélo de géométrie classique. Toutefois,

le logiciel Code\_Aster utilise deux types d'éléments de coques : des éléments triangulaires à sept nœuds ou des éléments quadrangulaires à neuf nœuds<sup>8</sup>. En effet, un nœud est ajouté au centre d'un élément triangulaire classique à six nœuds pour former un élément triangulaire à sept nœuds. Il en va de même pour l'élément quadrangulaire classique à huit nœuds auquel un nœud central est ajouté pour former un élément quadrangulaire à neuf nœuds. Or, lorsque le choix des éléments fut effectué, il n'existait pas de logiciel libre connu permettant de visualiser des éléments triangulaires à sept nœuds. Conséquemment, pour être en mesure de visualiser les solutions de déplacements générées au cours du processus d'optimisation, les coordonnées des nœuds doivent être interpolées et projetées sur un triangle à six nœuds.

Afin de simplifier la visualisation, des éléments de plaques triangulaires sont utilisés dans le cadre de ce travail. À noter que le fait d'utiliser des éléments linéaires engendre une erreur au niveau de la modélisation d'un cylindre étant donné que la courbure est relativement élevée. Cette approximation peut affecter les valeurs de contraintes calculées pour déterminer le déplacement de chaque nœud du maillage. Pour que l'erreur soit acceptable, la taille des éléments linéaires doit donc être faible comparativement au diamètre des tubes du cadre.

### **3.4 Adaptation de l'environnement de développement pour l'étude par éléments finis en modélisation surfacique**

Au début de ce travail de recherche, seul un calcul par éléments finis utilisant des tétraèdres était possible dans l'environnement de développement. Bien que l'utilisation d'une modélisation surfacique ait été prévue, l'écriture automatique des fichiers requis par Code\_Aster pour effectuer un calcul par éléments finis en modélisation coque restait à faire. Le lecteur est invité à se référer à l'annexe A pour plus de détails à ce sujet. De plus, une coque ne possède pas de notions « d'intérieur » et « d'extérieur » comme un solide, donc il faut définir son orientation.

---

<sup>8</sup> U3.12.03

### 3.4.1 Problème d'orientation d'une coque

Le principe de base d'un modèle solide consiste à définir un objet par un volume fermé. Ceci permet de distinguer l'intérieur et l'extérieur de l'objet, rendant triviale l'orientation des faces du solide. Le problème d'orientation d'une coque est dû à l'absence de cette notion d'intérieur et d'extérieur pour un modèle surfacique. Or, l'orientation des faces du modèle est indispensable pour déplacer des nœuds dans la direction normale à la triangulation ou pour l'application d'une pression normale.

Notre solution à ce problème est de permettre à l'utilisateur de définir un « point d'orientation  $O$  » servant à indiquer de quel côté de la coque le vecteur normal doit pointer. La figure 3.2 montre le triangle avant d'un cadre de vélo modélisé par une coque où la normale à la triangulation en chaque nœud est orientée vers « l'extérieur » du cadre suite à la définition du point d'orientation  $O$ .

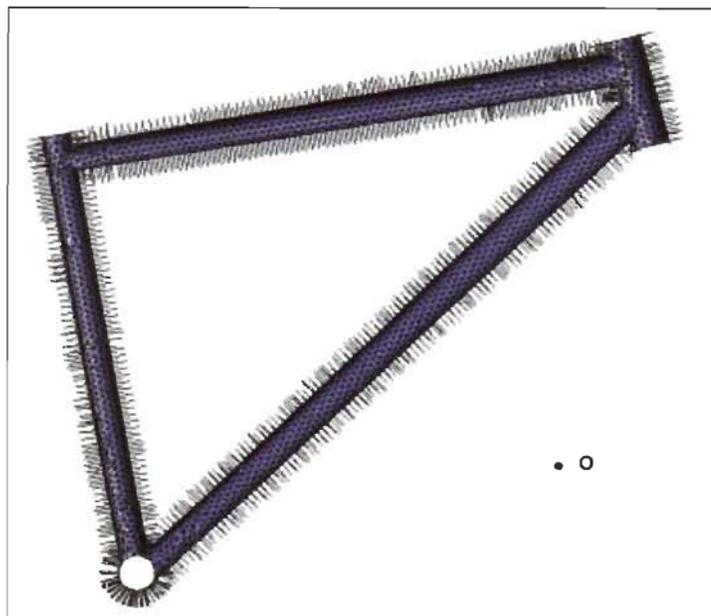


Figure 3.2 Triangle avant d'un cadre de vélo modélisé par une coque où la normale à la triangulation en chaque nœud est orientée vers le point d'orientation  $O$

### 3.4.2 Problème d'orientation du repère local d'un élément de plaque

Code\_Aster retourne le message d'erreur suivant si l'axe de référence  $X_G$  du repère global de l'objet est normal à un élément : « *L'axe de référence pour le calcul du repère local est normal à au moins un élément de plaque. Il faut modifier l'axe de référence (axe X par défaut) en utilisant ANGL\_REP ou VECTEUR.* ». Par défaut, le repère local servant à définir chaque élément de plaque est défini à partir de l'axe  $X_G$  du repère global  $R_G(x_G, y_G, z_G)$  et de la normale à l'élément. Si ces deux vecteurs sont parallèles, le repère ne peut être défini. Pour pallier ce problème, un repère local  $R_L(x_L, y_L, z_L)$  est défini pour chaque triangle dont la normale est orientée selon l'axe  $X_G$ . Le repère est construit de façon à ce que la normale de chaque élément soit orientée selon son axe  $Z_L$ .

Puisque les contraintes et les déformations calculées en post-traitement sont exprimées dans ce repère local, l'opérateur « MODI\_REPERE<sup>9</sup> » devrait être utilisé pour exprimer les résultats de chaque calcul effectué en post-traitement dans le repère global. Pour simplifier l'écriture du fichier de commandes, le passage du repère local  $R_L$  au repère global  $R_G$  est effectué lors de l'importation des tenseurs de contraintes et de déformations dans MAGIC. Les résultats affichés dans le fichier de résultats de Code\_Aster doivent donc être interprétés avec précaution, puisqu'ils ne sont pas nécessairement tous exprimés dans le même repère. Les contraintes et les déformations exprimées dans le repère global sont calculées à l'aide des équations (3.1) et (3.2) où  $[P_{GL}]$  est la matrice de passage du repère local au repère global. Cette matrice de passage s'écrit à partir des vecteurs colonnes  $\{X_L\}$ ,  $\{Y_L\}$  et  $\{Z_L\}$  correspondant aux axes de référence du repère local exprimés dans le repère global;

$$[\sigma_G] = [P_{GL}][\sigma_L][P_{GL}]^{-1} \quad (3.1)$$

$$[\varepsilon_G] = [P_{GL}][\varepsilon_L][P_{GL}]^{-1}. \quad (3.2)$$

---

<sup>9</sup> U4.74.01

Une solution alternative existe pour le calcul des contraintes dans le repère global, à partir des contraintes exprimées dans le repère local. Ceci s'effectue en utilisant le nom de champ « SICA\_ELNO<sup>10</sup>. Toutefois, comme il ne semble pas y avoir d'équivalent pour le calcul des déformations, un changement de repère demeure inévitable.

### 3.4.3 Vérification de la validité des résultats de calcul

Une fois l'environnement adapté pour l'analyse par éléments finis de plaques, des calculs doivent être effectués et les résultats doivent être validés avec un autre logiciel de CAO. Dans le cadre de ce travail, la version 2011 de SolidWorks Simulation est utilisée comme référence pour valider les résultats obtenus dans l'environnement. Cette section présente une comparaison des résultats de calcul obtenus avec MAGIC et SolidWorks Simulation pour un tube à paroi mince soumis à des efforts de flexion.

#### 3.4.3.1 Modélisation dans SolidWorks Simulation

La figure 3.3 a) montre un tube à paroi mince d'axe X modélisé par une coque mince dans SolidWorks. Le tube a une longueur de 75 cm, un diamètre de 5 cm et une épaisseur constante de 2 mm. Son arête circulaire gauche est encastree tandis qu'une force transversale de 1 000 N est appliquée sur son arête circulaire droite.

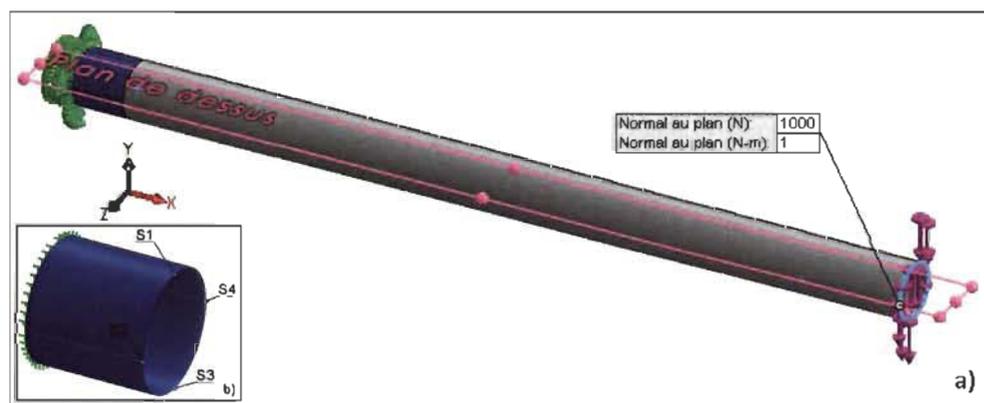


Figure 3.3 Tube à paroi mince en porte-à-faux modélisé dans SolidWorks

<sup>10</sup> U2.01.05

La contrainte équivalente de Von Mises est utilisée pour comparer les résultats issus de MAGIC à ceux de SolidWorks. À noter que celle-ci n'est pas significative près de l'arête encastrée puisque le principe de Saint-Venant n'est pas respecté. En effet, les valeurs calculées à cet endroit sont affectées par les déplacements imposés aux nœuds de l'arête. Les valeurs des contraintes servant à la comparaison sont donc mesurées à une distance de 5 cm de l'arête encastrée. La figure 3.3 b) montre les sommets S1, S2, S3 et S4 générés pour s'assurer qu'un nœud du maillage se situe à ces endroits.

La coque servant à modéliser le tube est donc modélisée comme suit :

1. Un quart de cercle de 5 cm de diamètre est tracé dans le plan YZ;
2. Le quart de cercle est extrudé sur une distance de 5 cm dans la direction opposée à l'axe X pour générer une première surface modélisant un quart de cylindre;
3. Les étapes 2 et 3 sont répétées pour générer trois autres surfaces de manière à créer une surface cylindre de 5 cm de diamètre;
4. Un cercle de 5 cm de diamètre, dont le centre se situe sur l'axe du cylindre, est tracé dans le plan YZ;
5. Le cercle est extrudé sur une distance de 70 cm le long de l'axe X pour générer une cinquième surface;
6. Une seule coque est générée à partir des cinq surfaces en utilisant la fonction « surface cousue » et en ne fusionnant pas les entités géométriques.

Ainsi, la coque générée contient quatre sommets également répartis sur la surface et situés à 5 cm de l'arête encastrée. Cela permet également d'appliquer une sonde par entité dans Solidworks pour obtenir les valeurs de contraintes de Von Mises en ces quatre sommets. Finalement, le fait que la coque soit constituée de plusieurs faces le long de l'axe X s'avère également utile, pour la définition d'une zone de non-design, lors de l'optimisation du tube par la méthode du mouvement normal.

Lors de la création du maillage dans SolidWorks, l'option « Maillage de qualité moyenne » est sélectionné pour utiliser des triangles à trois nœuds et la taille des éléments est fixée à 7 mm de côté. La figure 3.4 montre le tube maillé par éléments de plaques triangulaires avec SolidWorks Simulation 2011.

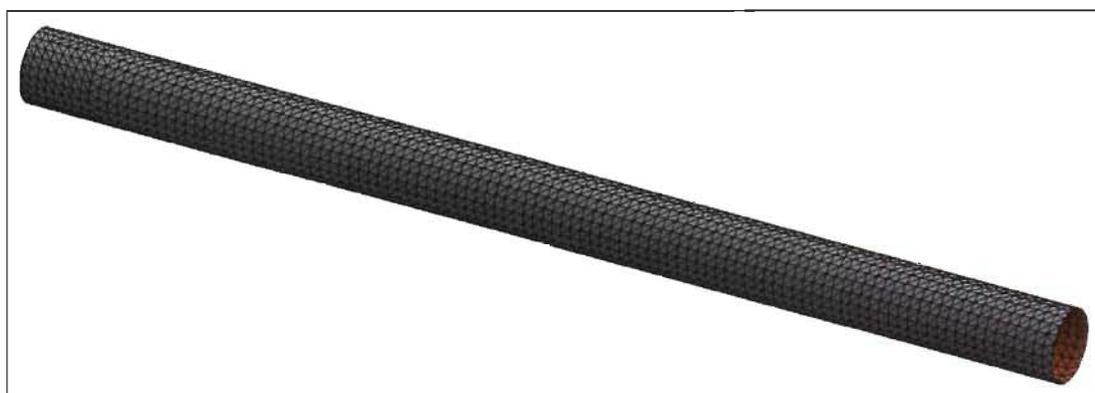


Figure 3.4 Tube maillé avec des éléments de plaques dans Solidworks Simulation

#### 3.4.3.2 Modélisation dans l'environnement MAGIC

Le modèle créé dans SolidWorks est sauvegardé au format STEP puis importé dans l'environnement de développement. La figure 3.5 montre le tube maillé avec des éléments de plaque triangulaires d'environ 7 mm de côté dans l'environnement de développement.

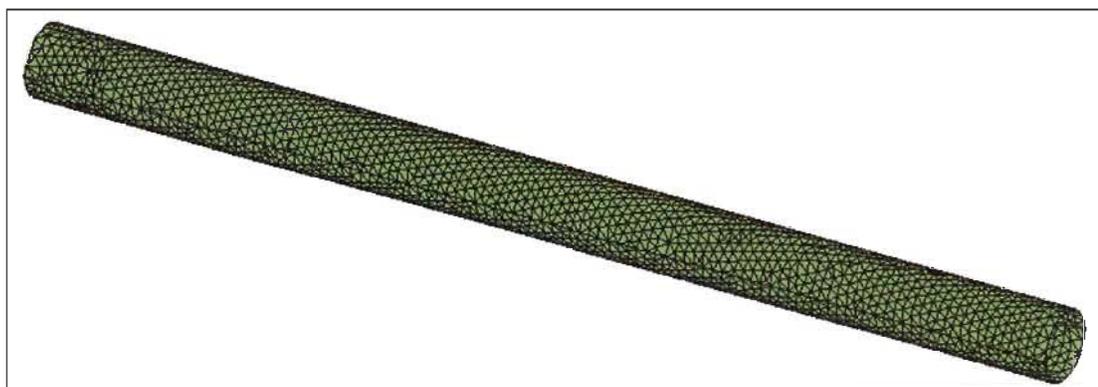


Figure 3.5 Tube maillé avec des éléments de plaques dans MAGIC

### 3.4.3.3 Formulation mathématique du problème

Soit une plaque mince d'épaisseur  $h$  située dans le plan  $XY$  équidistant des faces inférieure et supérieure, appelé feuillet moyen, et définie entre  $x_1$  et  $x_2$  et entre  $y_1$  et  $y_2$ . La plaque est soumise à une pression  $\tau$  induisant des efforts tranchants et des moments fléchissant. Le modèle de Kirchhoff utilisé se base sur les hypothèses suivantes :

- Le feuillet moyen de la plaque non chargée est plan;
- Le feuillet moyen ne subit pas de déformation longitudinale (les points du feuillet moyen se déplacent uniquement dans la direction transversale  $w$ );
- Les sections normales au feuillet moyen demeurent normales après la déformation (contraintes de cisaillement  $\tau_{zx}$  et  $\tau_{zy}$  négligeables);
- L'épaisseur de la plaque est faible (contraintes normales  $\sigma_z$  négligeables);
- Les déformations sont petites par rapport à l'épaisseur de la plaque.

La figure 3.6 montre les efforts résultants agissant sur l'élément de plaque, soient les moments de flexion  $M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}$  associés aux contraintes  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  et les efforts tranchants  $T_{xx}$  et  $T_{yy}$  décrit par les équations (3.3) et (3.4) (Remacle 2002);

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 M_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 T_{xx} &= \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 T_{yy} &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

où le facteur  $D$  est appelé *rigidité flexionnelle de la plaque* et est fonction du module de Young  $E$ , du coefficient de Poisson  $\nu$  et du second moment de section  $I$ ;

$$D = \frac{EI}{1 - \nu^2} \quad (3.5)$$

avec le second moment de section  $I$  donné par :

$$I = \frac{h^3}{12} \quad (3.6)$$

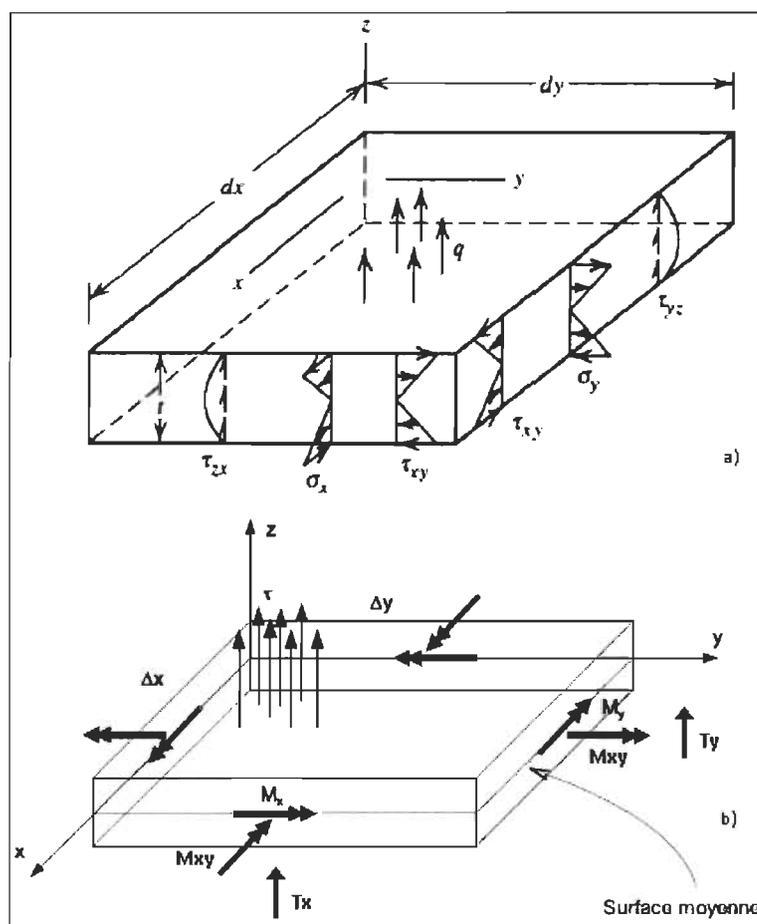


Figure 3.6 Contraintes (a) et efforts résultants (b) sur l'élément de plaque (Remacle 2002)

La solution recherchée est  $w(x, y)$  (pour  $x$  compris dans l'intervalle  $[x_1, x_2]$  et pour  $y$  compris dans l'intervalle  $[y_1, y_2]$ ) le champ de déplacement dans la direction de l'axe  $Z$  qui est perpendiculaire au feuillet moyen.

Le problème physique est décrit par l'équation différentielle suivante (pour  $x$  compris dans l'intervalle  $[x_1, x_2]$  et pour  $y$  compris dans l'intervalle  $[y_1, y_2]$ ) (Remacle 2002);

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\tau(x, y)}{D} = 0 \quad (3.7)$$

où  $\tau(x, y)$  correspond à la pression appliquée sur l'élément de plaque.

La résolution de ce problème consiste donc à trouver la fonction  $w(x, y)$  qui vérifie l'équation différentielle (3.7) et qui satisfait aux conditions aux limites modélisées par les équations (3.3) et (3.4). La solution à ce problème ne pouvant pas être déterminée exactement, celle-ci est approximée par la méthode des éléments finis.

#### 3.4.3.4 Comparaison des résultats

La figure 3.7 a) montre les résultats obtenus avec SolidWorks Simulation. Les contraintes de Von Mises, à 5 cm de l'encastrement, valent environ 11 MPa aux sommets  $S2$  et  $S4$  et environ 185 MPa aux sommets  $S1$  et  $S3$ . Ces valeurs sont utilisées à titre de références pour vérifier la validité des résultats obtenus avec l'environnement MAGIC. Les contraintes de Von Mises maximales, entre les trois plans de calcul, obtenues avec MAGIC sont illustrés à la figure 3.7 b). Celles-ci valent environ 23 MPa aux sommets  $S2$  et  $S4$  et environ 201 MPa aux sommets  $S1$  et  $S3$ . Ces valeurs sont affichées au tableau 3.1.

## Chapitre 3 – Intégration d'éléments finis de plaques dans l'environnement

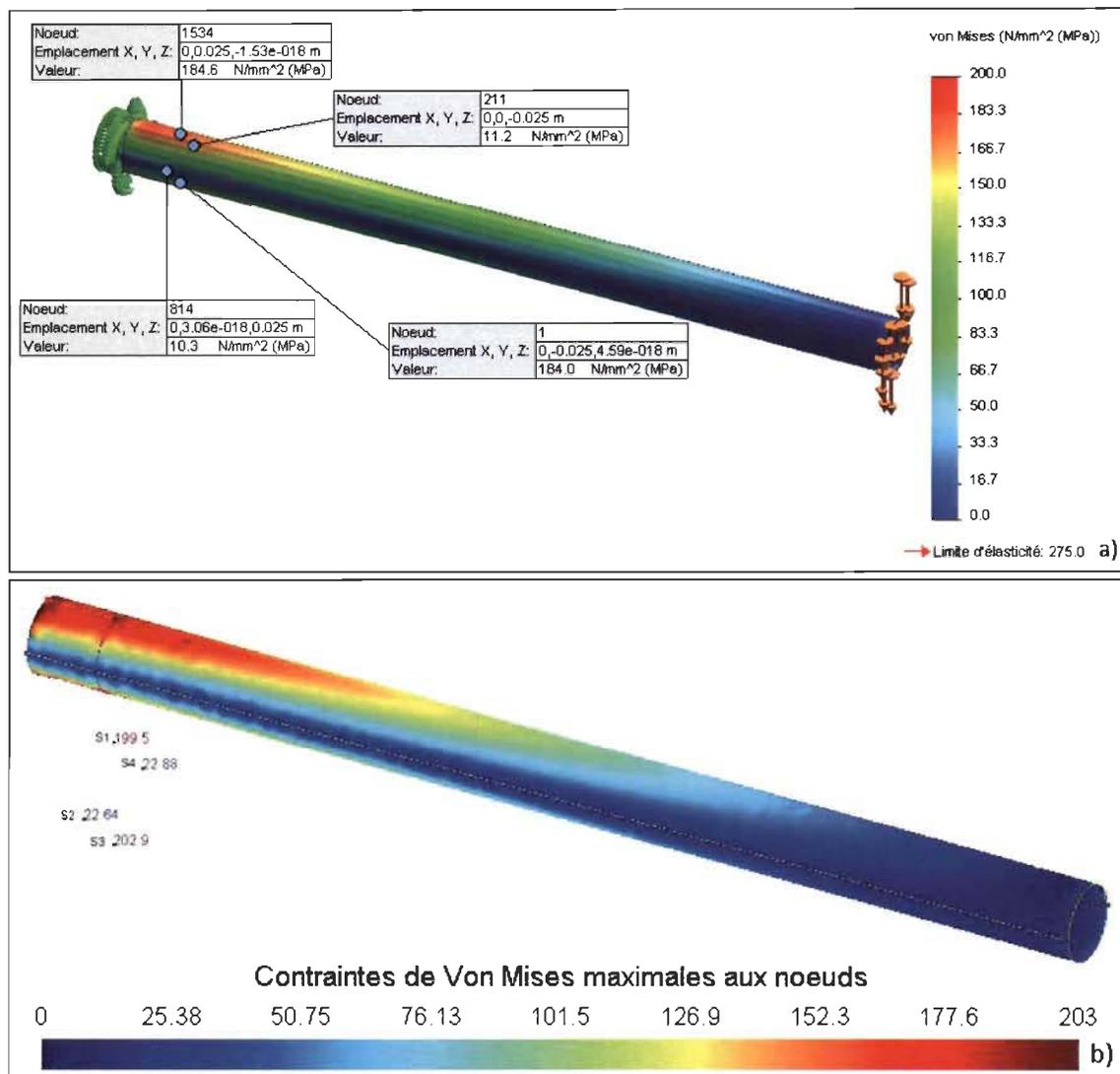


Figure 3.7 Contraintes de Von Mises obtenues pour le tube en porte-à-faux a) Avec SolidWorks Simulation b) Avec l'environnement MAGIC

Tableau 3.1  
Comparaison des contraintes de Von Mises obtenues avec MAGIC et SolidWorks Simulation aux sommets S1 à S4

Sommets	$\sigma_{VM}$ obtenues avec MAGIC	$\sigma_{VM}$ obtenues avec SolidWorks Simulation (référence)
S1	199.5	184.6
S2	22.6	10.3
S3	202.9	184
S4	22.9	11.2

Les contraintes de Von Mises obtenues avec MAGIC diffèrent en moyenne d'environ 14 MPa des valeurs de référence. Cet écart est attribuable aux maillages qui sont différents et à la forme des éléments qui est influencée localement par la présence des arêtes servant à définir les sommets S1 à S4. Néanmoins, les résultats obtenus avec l'environnement de développement sont similaires à ceux obtenus avec SolidWorks Simulation. Cela permet d'affirmer que les calculs par éléments finis effectués avec MAGIC en modélisation surfacique sont valides.

### 3.5 Conclusion

Pour conclure, les différentes étapes d'un calcul par éléments finis dans l'environnement de développement ont été présentées. L'étude d'un cadre de vélo par éléments de plaques a nécessité une adaptation au niveau de l'écriture automatique des fichiers requis par Code\_Aster. Le problème d'orientation d'une coque a ensuite été abordé. Finalement, un exemple de calcul par éléments finis de plaques a été effectué et les résultats ont été validés à l'aide du logiciel SolidWorks Simulation. Le chapitre suivant traite de l'intégration de la MMN dans MAGIC, de son application à deux problèmes d'optimisation et de quelques méthodes de contrôle du déplacement des nœuds.

## CHAPITRE 4

-

# IMPLANTATION, APPLICATION ET CONTRÔLE DE LA MÉTHODE DU MOUVEMENT NORMAL

### 4.1 Introduction

La MMN nécessite un contrôle adéquat au niveau du déplacement des nœuds pour l'obtention d'une forme optimisée où la contrainte de Von Mises est plus uniforme. Afin de démontrer l'importance du contrôle de la méthode, celle-ci est programmée dans l'environnement de développement puis appliquée au problème d'optimisation d'un tube à paroi mince en porte-à-faux. La MMN, telle que présentée dans la littérature, conduit généralement à une forme optimisée où la frontière n'est pas lisse. Pour pallier ce problème, différents types de contrôle du déplacement des nœuds sont proposés.

Une méthode de contrôle, basée sur le gradient de déplacement de chaque triangle, se démarque des autres. La méthode de contrôle proposée est expliquée dans ce chapitre. La MMN contrôlée est appliquée au problème d'optimisation d'un tube à paroi mince en porte-à-faux et au triangle avant d'un cadre de vélo soumis à des chargements et déplacements externes. Dans les deux cas, l'uniformisation des contraintes autour de la valeur objectif est mesurée à l'aide de l'écart type.

### 4.2 Algorithme de la MMN non contrôlée

La MMN non contrôlée, telle que décrite dans la littérature, est relativement simple à implanter dans l'environnement de développement. Il s'agit en fait d'une boucle itérative de calcul des contraintes aux nœuds et des déplacements associés, obtenus en appliquant l'équation (2.16) pour chaque nœud. Quelques étapes préalables doivent toutefois être effectuées avant l'optimisation.

Ces étapes sont les suivantes :

1. Modélisation de l'objet à optimiser dans un logiciel de CAO;
2. Importation du modèle dans l'environnement MAGIC sous forme de fichier STEP;
3. Orientation de la coque;
4. Définition des conditions de calcul telles que les déplacements imposés, les efforts externes appliqués, le matériau, l'épaisseur de la coque et les zones de non-design. Ces conditions sont spécifiées par l'utilisateur sous la forme de commandes dans l'environnement MAGIC;
5. Génération du maillage éléments finis;
6. Calcul des contraintes de Von Mises par Code\_Aster;
7. Calcul de la normale en chaque nœud comme la somme de la normale à chaque triangle appartenant au nœud pondérée par son aire respective (équation (2.15));

$$\vec{n}_p = \frac{\sum_{i=1}^k A_i \vec{n}_i}{\|\sum_{i=1}^k A_i \vec{n}_i\|}$$

Il est à noter que les normales sont calculées à partir de la triangulation initiale, et qu'elles demeurent les mêmes tout au long du processus d'optimisation. Cela permet de limiter la déformation indésirable des éléments au cours du processus d'optimisation.

Une fois ces sept étapes effectuées, la boucle itérative d'optimisation débute. D'abord, le déplacement  $D_i^j$  de chaque nœud  $i$ , à l'itération  $j$ , le long de sa normale respective est calculé à partir de l'équation (2.16);

$$D_i^j = C \frac{\sigma_{VM_i}^j - \sigma_o}{\sigma_o}$$

où la contrainte objectif  $\sigma_o$  correspond à la contrainte de Von Mises moyenne aux nœuds du maillage, actualisée à chaque itération de la méthode.

Les nœuds sont déplacés le long de leur normale respective. Les contraintes aux nœuds et les déplacements associés sont ensuite recalculés et les nœuds sont déplacés à nouveau jusqu'à ce que la contrainte en chaque nœud tende vers la valeur objectif. La méthode s'arrête lorsque l'écart pondéré, entre les deux valeurs de contraintes, devient inférieur à la limite de convergence donnée par l'équation (2.19);

$$\frac{|\sigma_{VM_i} - \sigma_o|}{\sigma_o} \leq L.$$

En pratique, un nombre maximal d'itérations doit être prévu dans l'éventualité où la méthode ne converge pas.

La forme optimisée par la MMN peut finalement être visualisée avec le logiciel Gmsh. Le déplacement des nœuds, par rapport à leur position d'origine, ainsi que la distribution des contraintes aux nœuds du maillage, pour la forme initiale et finale, sont également des exemples de résultats intéressants pouvant être visualisés à l'aide de ce logiciel.

À la figure 4.1, on retrouve l'algorithme de la MMN non contrôlée, telle qu'implantée dans l'environnement de développement.

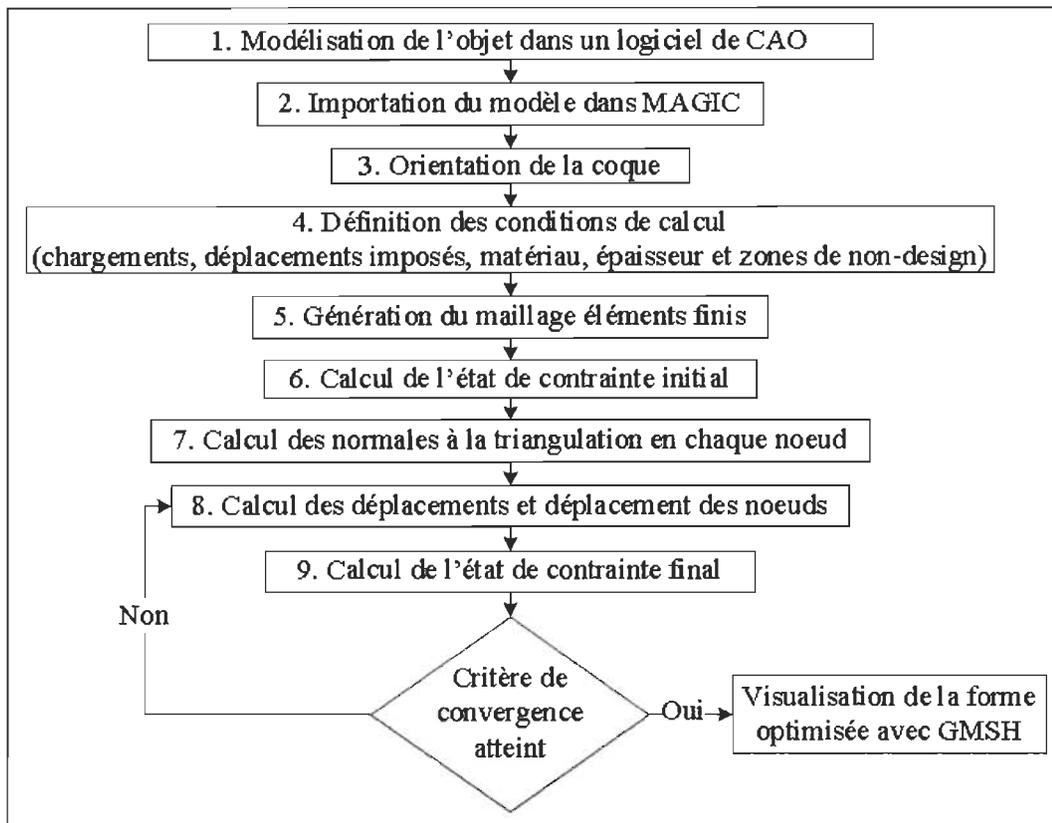


Figure 4.1 Algorithme de la MMN non contrôlée implanté dans MAGIC

La section suivante traite de l'optimisation, par la MMN, du tube à paroi mince en porte-à-faux décrit à la section 3.4.3.

### 4.3 Application de la MMN non contrôlée à un tube en porte-à-faux

Cette section a pour but d'appliquer la MMN, sans contrôle au niveau du déplacement des nœuds, au problème d'optimisation de la forme d'un tube à paroi mince d'épaisseur constante soumis à des efforts de flexion. L'absence de contrôle du déplacement des nœuds permet de visualiser les problèmes inhérents à l'utilisation de la MMN non contrôlée, telle qu'elle est présentée dans la littérature.

### 4.3.1 Forme initiale

La géométrie initiale du tube et les conditions de calcul sont les mêmes que celles décrites à la section 3.4.3. Une zone de non-design est définie près de l'encastrement puisque les valeurs des contraintes ne sont pas valides à cet endroit. L'arête circulaire située à l'extrémité libre du tube est également définie comme une zone de non-design. La figure 4.2 montre le tube initial maillé ainsi que la zone de non-design (en turquoise).

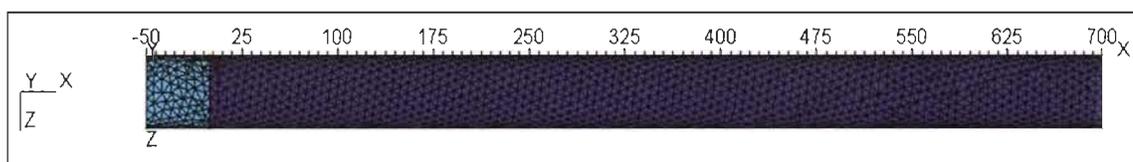


Figure 4.2 Tube initial maillé avec zone de non-design (en turquoise)

Le tableau 4.1 regroupe les informations relatives à la géométrie, aux conditions aux limites, au matériau et au maillage du tube initial. Le matériau utilisé est de l'aluminium 6061-T6 fréquemment utilisé dans l'industrie du vélo. Le tube est maillé avec des éléments triangulaires d'environ 7 mm de côté. Le maillage compte 5 580 éléments.

Tableau 4.1  
Caractéristiques du tube initial

Catégories	Informations	Valeurs
Géométrie	Longueur totale	75 cm
	Longueur zone de design	70 cm
	Diamètre	5 cm
	Épaisseur de la coque	2 mm
Conditions aux limites	Déplacements imposés	Arrête circulaire gauche encastree
	Chargements externes	Force transversale de 1 000 N extrémité droite
Matériau	Module de Young	69 GPa
	Coefficient de Poisson	0.33
Maillage	Taille d'éléments	7 mm de côté
	Nombre de nœuds	2 812 (2 574 situés dans la zone de design)
	Nombre d'éléments	5 580 (5 192 situés dans la zone de design)

La figure 4.3 montre l'état de contrainte initial calculé par Code\_Aster et affiché en vues de dessus (a), de face (b) et 3D (c). La valeur maximale, entre les trois plans de calcul, de la contrainte de Von Mises  $\sigma$  est affichée. La contrainte de Von Mises vaut environ 200 MPa près de l'arête servant à définir la zone de non-design, environ 100 MPa au milieu de la zone de design et tend vers zéro près de l'extrémité libre du tube.

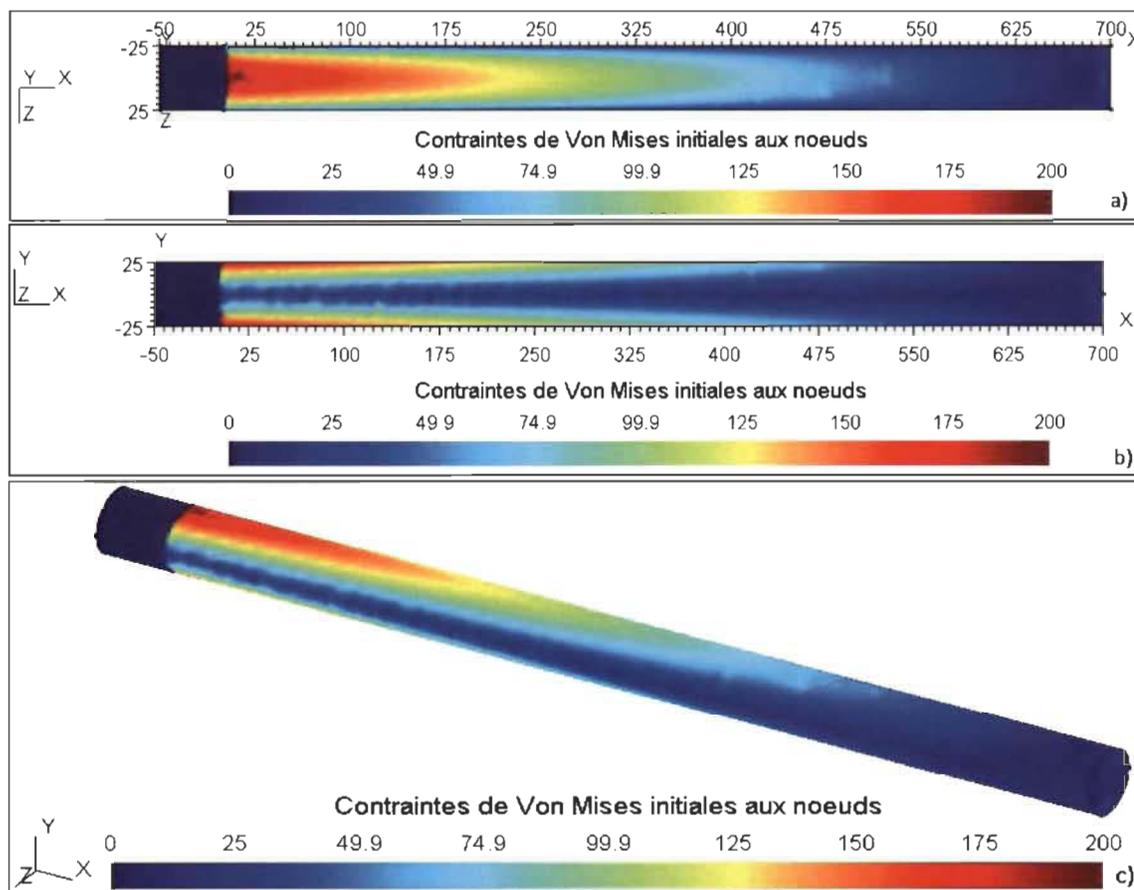


Figure 4.3 Contraintes de Von Mises initiales aux nœuds a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D

Le tableau 4.2 regroupe les valeurs minimale, maximale et moyenne ainsi que l'écart type des contraintes de Von Mises aux nœuds pour la zone de design, avant optimisation par la MMN. À noter que la contrainte de Von Mises moyenne vaut initialement environ 62 MPa. Cette valeur correspond à la contrainte aux nœuds pour ceux situés à une distance d'environ 475 mm de la zone de non-design située près de l'encastrement.

Tableau 4.2  
Contraintes de Von Mises initiales

<b>Contraintes de Von Mises (MPa)</b>	<b>Valeurs</b>
Minimale	4,84
Maximale	199,79
Moyenne	61,74
Écart type	45,46

L'écart type est utilisé pour mesurer la dispersion des contraintes de Von Mises autour de la valeur moyenne. À titre d'exemple, un écart type de 45 peut être obtenu, avec une valeur moyenne de 62 MPa, si la contrainte vaut 17 MPa pour la moitié des nœuds et 107 MPa pour l'autre moitié. Idéalement, l'écart type devrait diminuer à chaque itération pour tendre vers zéro pour la forme finale optimisée.

La figure 4.4 illustre l'état de contrainte initial sous forme de normales à la triangulation, en vues de face (a) et de profil (b). Cela permet d'estimer la forme finale du tube après optimisation par la MMN. La forme optimisée du tube devrait être conique dans la direction de l'axe X. En effet, les nœuds près de l'encastrement devraient être fortement déplacés vers « l'extérieur » du tube étant donné que la contrainte en ces nœuds est supérieure à la valeur moyenne utilisée comme contrainte objectif. À l'opposé, les nœuds situés près de l'extrémité libre, devraient être fortement déplacés vers « l'intérieur » du tube puisque la valeur de contrainte en ces nœuds est inférieure à la valeur objectif. Finalement, les nœuds situés le long de l'axe X devraient également être déplacés vers « l'intérieur » du tube, sachant que la contrainte de Von Mises est nulle le long de cet axe. Le tube, vu de profil, devrait donc avoir une forme en « 8 » tel qu'illustré à la figure 4.4 b).

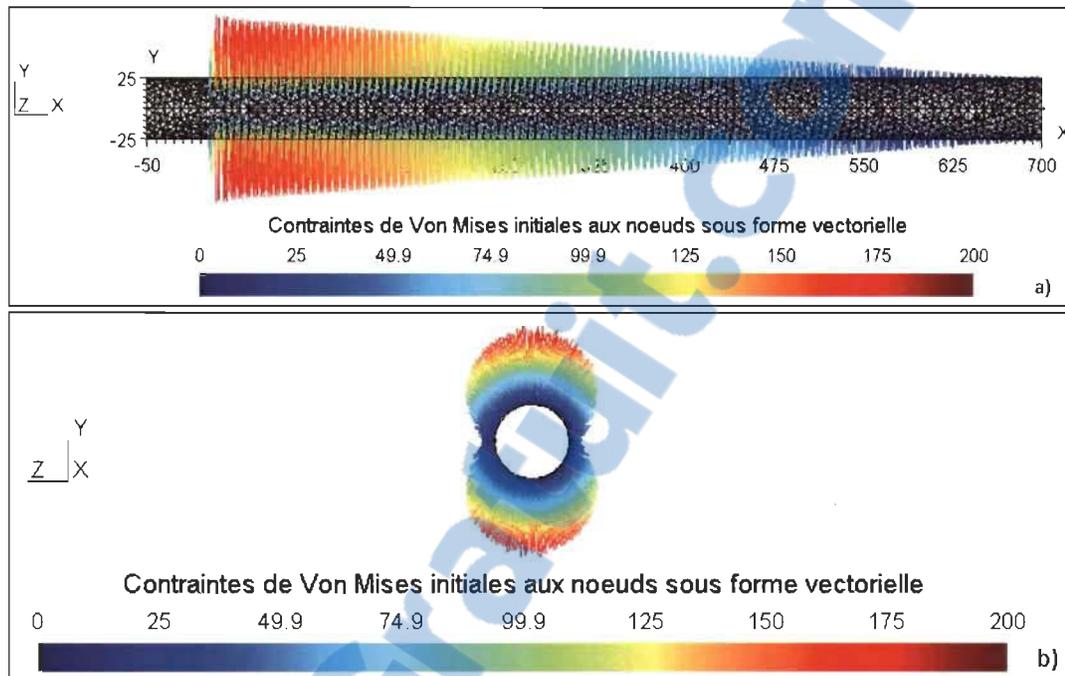


Figure 4.4 Contraintes de Von Mises initiales sous forme vectorielle a) Vue de face b) Vue de profil

### 4.3.2 Valeurs des paramètres d'optimisation

Le tableau 4.3 présente les valeurs utilisées pour les différents paramètres de la MMN non contrôlée. La contrainte objectif correspond à la contrainte de Von Mises moyenne aux nœuds, actualisée à chaque itération. Bien qu'un seuil de convergence variable puisse être utilisé afin de réduire le nombre d'itérations, une valeur fixe de 0.2 est utilisée. De plus, la limite de convergence est fixée à plus ou moins 10 % de la contrainte objectif. Finalement, le nombre maximal d'itérations est fixé à 200.

Tableau 4.3  
Paramètres de la MMN non contrôlée

Paramètres	Valeurs utilisées
Contrainte objectif $\sigma_o$	$\sigma_{VM}$ moy actualisée
Coefficient de convergence $C$	0.2
Limite de convergence $L$	0.1
Nombre maximal d'itérations	200

### 4.3.3 Forme optimisée par la MMN non contrôlée

Avec ces valeurs des paramètres, la méthode d'optimisation ne converge pas. Le processus itératif s'arrête après 200 itérations. La figure 4.5 montre le déplacement des nœuds après 50 et 200 itérations. Les figures a), b) et c) montrent la forme obtenue après 50 itérations en vues de dessus, de face et 3D respectivement, tandis que les figures d), e) et f) montrent la forme obtenue après 200 itérations en ces trois mêmes vues.

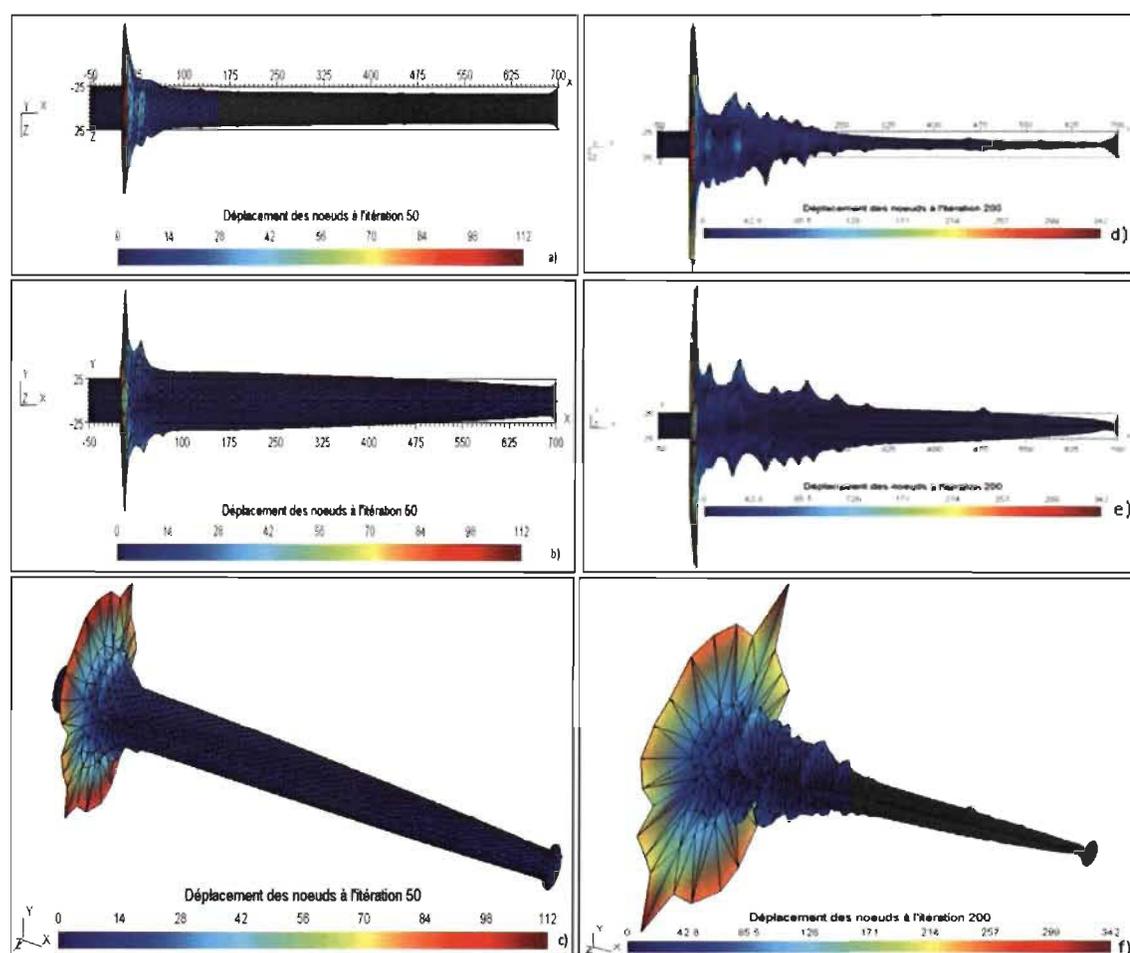


Figure 4.5 Forme obtenue par la MMN après 50 itérations a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D et 200 itérations d) Vue de dessus e) Vue de face f) Vue 3D

Les figures a), b) et c) montrent que les déplacements obtenus à l'itération 50 sont adéquats, en général, sauf au niveau de la jonction entre les zones de non-design et de design où ils sont beaucoup trop élevés sur une distance d'environ 75 mm. La figure a) montre le tube légèrement aplati dans la direction de l'axe Z. La forme obtenue après 200 itérations possède de nombreux pics créant une augmentation locale des contraintes sur plus du tiers de la longueur de la zone de design. Le diamètre du tube est réduit environ au tiers dans la direction de l'axe Z, ce que montre la figure d). Finalement, la figure e) montre certains éléments du maillage qui s'entrecroisent près de l'extrémité libre suite à un déplacement trop important vers l'intérieur du tube.

À la figure 4.6, on trouve la comparaison entre l'état de contrainte initial et celui obtenu après 200 itérations de l'application de la MMN sans contrôle du déplacement des nœuds. À noter que les contraintes aux nœuds situés dans la zone de non-design ne sont pas calculées. Les figures a), b) et c) montrent l'état de contrainte initial en vues de dessus, de face et 3D respectivement tandis que les figures d), e) et f) montrent l'état de contrainte final en ces trois mêmes vues. Les figures a), b) et c) montrent les contraintes de Von Mises qui varient graduellement sur toute la longueur du tube. La valeur maximale est d'environ 200 MPa près de la zone de non-design localisée près de l'encastrement. Les images d), e) et f) montrent qu'après 200 itérations, les contraintes varient brusquement sur la longueur du tube, comme pour les déplacements associés. Sur la figure a), les contraintes sont maximales près de l'arête servant à définir la zone de non-design et sont relativement élevées sur environ 300 mm, ce qui est cohérent avec les déplacements affichés à la figure 4.5. Suite à l'optimisation par la MMN non contrôlée, la valeur maximale de contrainte de Von Mises passe de 200 à 540 MPa. Cette valeur doit toutefois être interprétée avec soin étant donné que la validité du maillage est remise en question suite aux déplacements excessifs de plusieurs nœuds.

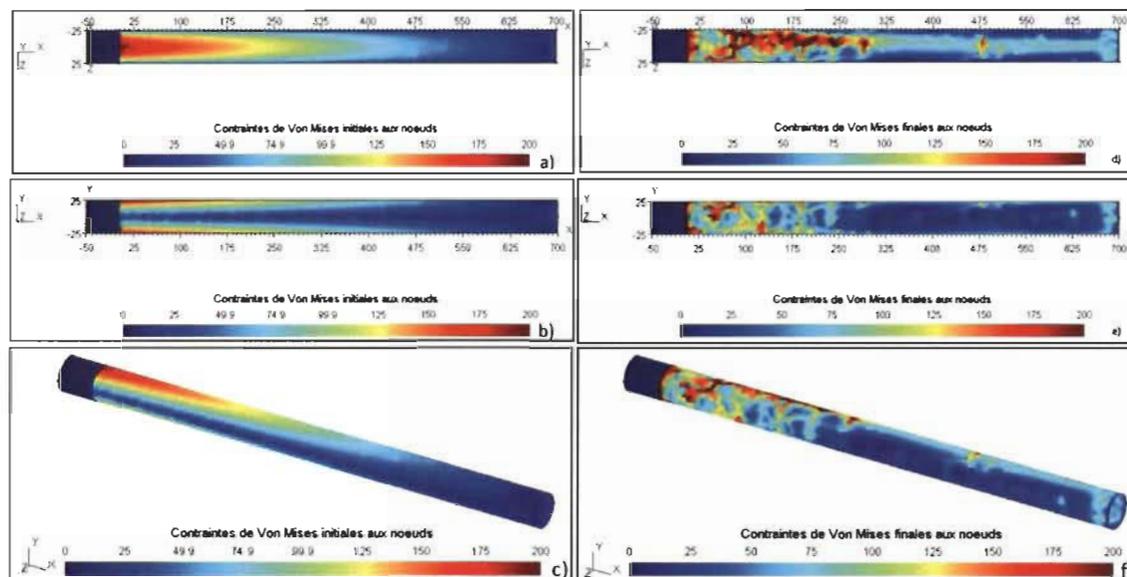


Figure 4.6 Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 200 itérations de la MMN a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D

#### *Déplacements brusques et augmentation des contraintes*

La figure 4.5 illustre bien un problème commun de la MMN, soit celui du déplacement trop important de certains nœuds. En effet, les nœuds situés à la jonction entre les zones de non-design et de design sont trop déplacés étant donné que la contrainte initiale en ces nœuds est élevée. Les déplacements calculés à partir de ces contraintes sont également élevés, ce qui engendre une augmentation des contraintes et ainsi de suite. Afin de limiter l'impact d'une contrainte élevée sur un nombre restreint d'itérations, le déplacement de chaque nœud doit être contrôlé à chaque itération de la méthode. Pour ce faire, différentes méthodes de contrôles sont envisageables. Ces méthodes sont présentées aux sections 4.4 à 4.10. Elles consistent à vérifier, pour chaque nœud de la zone de design, si le critère de contrôle est dépassé. Si c'est le cas, le nœud est remplacé de manière à le respecter, puis fixé pour les itérations suivantes. Bien qu'il soit plus simple de fixer le nœud sans le remplacer, son remplacement permet d'utiliser un coefficient de convergence plus élevé sans craindre un dépassement important du critère de contrôle, ce qui permet de réduire le nombre d'itérations.

*Forme optimisée avec un coefficient de convergence plus faible*

Afin de démontrer la nécessité de contrôler le déplacement des nœuds au cours du processus d'optimisation, une deuxième optimisation est effectuée en utilisant un coefficient de convergence quatre fois plus faible. Le nombre maximal d'itérations est également quatre fois plus élevé. Le tableau 4.4 regroupe les valeurs des paramètres d'optimisation utilisées.

Tableau 4.4  
Paramètres de la MMN non contrôlée

Paramètres	Valeurs utilisées
Contrainte objectif $\sigma_o$	$\sigma_{VM}$ moy actualisée
Coefficient de convergence $C$	0.05
Limite de convergence $L$	0.1
Nombre maximal d'itérations	800

La figure 4.7 montre, en vues de face (a) et 3D (b), les déplacements obtenus après 200 itérations de la MMN. Les résultats sont similaires à ceux obtenus précédemment.

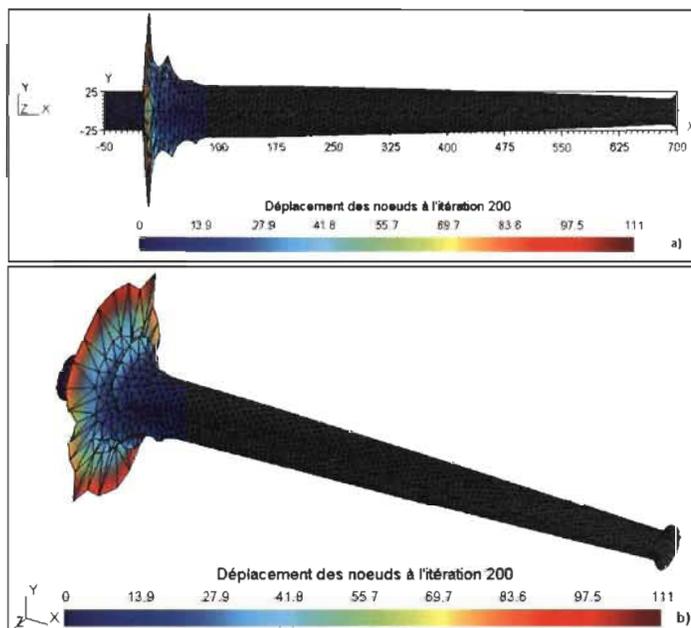


Figure 4.7 Forme optimisée par la MMN avec  $C = 0.05$  a) Vue de face b) Vue 3D

#### 4.3.4 Conclusion

Nous avons mis en évidence la présence de déplacements brusques inhérents à l'utilisation de la MMN sans contrôle du déplacement des nœuds. Un contrôle adéquat doit être apporté à la méthode pour éviter la concentration de contraintes à la jonction entre les zones de non-design et de design. La section suivante propose différents types de contrôles basés sur la courbure maximale et la variation maximale de courbure, l'angle minimal entre deux triangles voisins, le lissage de la surface par barycentrage des nœuds, l'écart maximal de déplacement entre deux nœuds voisins et la norme maximale du gradient de déplacement d'un triangle basée sur une approche locale ou globale.

#### 4.4 Contrôle basé sur la courbure

Cette approche vise à imposer une valeur maximale de courbure à respecter au niveau de la surface de la pièce à optimiser. Ainsi, le déplacement de chaque nœud est limité de manière à respecter cette valeur seuil. Cette approche s'avère particulièrement intéressante lorsque le lien entre le maillage et la géométrie est maintenu. Or, ce lien est rompu dès la première itération du processus d'optimisation puisque le maillage est déformé suite au déplacement des nœuds. La surface doit donc être modifiée ou recréée à chaque itération, en tenant compte de la nouvelle position des nœuds du maillage, ce qui s'avère un processus relativement complexe.

Une alternative au calcul de la courbure d'une surface consiste à calculer la courbure à partir de la triangulation de cette surface. Toutefois, cette méthode de calcul est beaucoup moins précise, et cela même avec une taille d'éléments faible. Elle n'est donc pas adaptée aux surfaces où la courbure est élevée, comme dans le cas d'un tube. La précision au niveau du calcul de la courbure est importante pour éviter un contrôle inadéquat du déplacement de certains nœuds. En effet, si l'erreur sur la courbure en un nœud est trop élevée, le déplacement de ce nœud peut être limité alors que la courbure réelle est inférieure à la valeur seuil imposée. Celle-ci peut donc être dépassée dans le maillage initial.

#### 4.5 Contrôle par angle minimal entre deux triangles voisins

Une deuxième approche de contrôle consiste à imposer une valeur minimale d'angle matière entre deux triangles voisins partageant une arête commune. Dans le cas d'un tube, par exemple, cet angle devrait valoir environ  $180^\circ$  initialement. En imposant une valeur minimale de  $170^\circ$ , par exemple, le déplacement d'un nœud est limité lorsque l'angle devient inférieur à cette valeur. Cette méthode permet d'obtenir une surface lisse à condition que l'angle soit similaire pour tous les triangles du maillage.

Or, ce n'est généralement pas le cas. En effet, un angle aussi élevé est rarement respecté pour tous les triangles constituant le maillage initial. Afin que tous les triangles respectent initialement la valeur minimale d'angle, celle-ci doit être relativement faible, par exemple  $140^\circ$ . Or, une valeur d'angle aussi faible n'empêche pas un déplacement brusque de certains nœuds situés à la jonction entre les zones de non-design et de design. Pour pallier ce problème, un contrôle de la qualité du maillage pourrait être effectué à chaque itération du processus d'optimisation en allant, par exemple, inverser la diagonale de certains triangles en fonction de la courbure locale de l'objet à optimiser.

##### 4.5.1 Angle minimal entre deux triangles voisins dont l'un possède 3 nœuds fixes

Une alternative, consiste à considérer uniquement l'angle entre deux triangles voisins dont l'un possède 3 nœuds fixes. Initialement, les triangles situés dans la zone de non-design remplissent cette condition. L'angle est donc vérifié uniquement pour les triangles situés à la jonction entre la zone de non-design et de design, ce qui réduit les chances d'obtenir deux triangles possédant un angle initial faible. Une valeur plus élevée d'angle minimal peut donc être utilisée. Advenant un dépassement de cette valeur seuil, le déplacement du nœud est limité et celui-ci est fixé pour éviter qu'il ne soit redéplacé à une itération ultérieure. Cela a pour effet de contrôler le déplacement des nœuds par couche d'éléments en commençant par ceux situés à la jonction entre la zone de non-design et de design puis en s'éloignant de celle-ci. Ce critère de contrôle dépend fortement de la qualité du maillage initial.

#### 4.6 Lissage de la surface par barycentrage des nœuds

Un lissage de la surface par barycentrage des nœuds consiste à replacer chaque nœud à la position moyenne calculée à partir de sa propre position et de celles de ses voisins avant le début du processus de lissage. Un lissage effectué à chaque itération du processus d'optimisation permet de maintenir une surface lisse en utilisant un coefficient de convergence relativement élevé. Toutefois, cela tend à diminuer la section de la pièce. Pour démontrer ce phénomène, 20 lissages successifs, sans optimisation par la MMN, sont effectués sur la forme initiale du tube étudié à la section 3.4.3. La figure 4.8 montre le déplacement des nœuds après 10 lissages (a) et 20 lissages (b). Le diamètre initial de 50 mm diminue de 21 % et 32 % après 10 et 20 lissages.

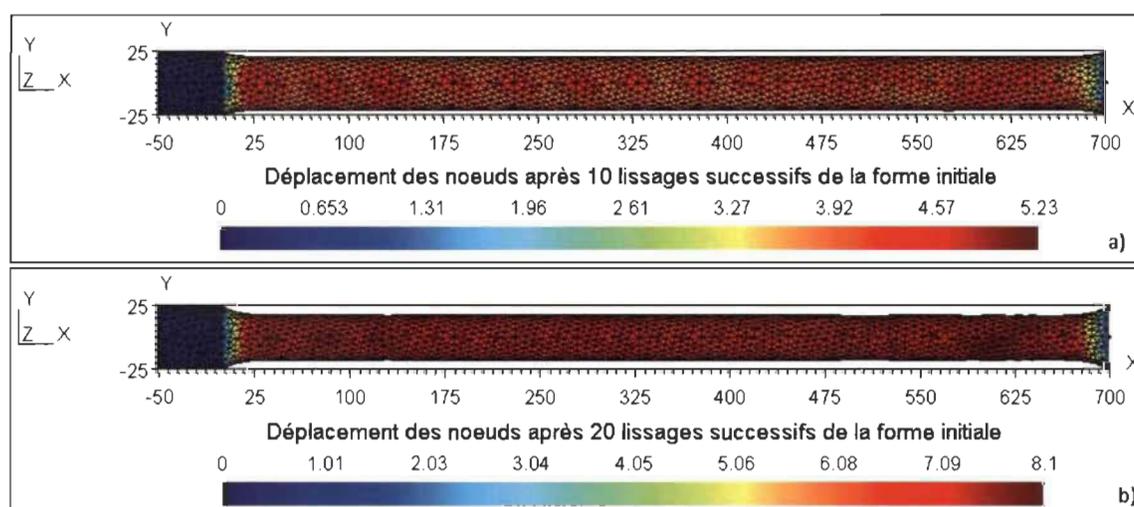


Figure 4.8 Phénomène de diminution de section dû au lissage a) Forme obtenue après 10 lissages b) Forme obtenue après 20 lissages

L'utilisation d'un lissage requiert un déplacement des nœuds suffisamment élevée, entre deux itérations, pour minimiser l'impact du phénomène de diminution de section. Toutefois, si le déplacement de certains nœuds est trop élevé, le lissage ne suffit pas à maintenir une forme lisse au cours du processus d'optimisation. Pour éviter l'utilisation d'un coefficient de convergence trop élevé, un lissage peut être effectué à toutes les 10 ou 20 itérations du processus d'optimisation, à titre d'exemple. Finalement, si les lissages sont trop espacés, la forme optimisée tend vers la forme obtenue par la MMN

non contrôlée. Afin de limiter la diminution de section, un lissage partiel pourrait être effectué en remplaçant uniquement les nœuds ayant été les plus déplacés. De plus, le lissage pourrait être utilisé de concert avec un autre type de contrôle.

#### 4.7 Contrôle par écart maximal de déplacement entre deux nœuds voisins

Cette approche consiste à imposer une valeur maximale de déplacement entre deux nœuds voisins, dont l'un est fixe, pour limiter le déplacement des nœuds à la jonction entre la zone de non-design et de design. Ce critère de contrôle ne tient pas compte de la longueur des triangles et donc de la distance entre ces nœuds. La figure 4.9 montre deux triangles équilatéraux dans le plan XY. Le triangle 1 mesure 8 mm de côté, tandis que le triangle 2 mesure 4 mm de côté. Deux nœuds de chaque triangle sont fixes tandis que le troisième est mobile. Celui-ci est déplacé d'une valeur  $d$  dans la direction normale au plan XY de manière à ce que l'écart admissible de déplacement soit atteint pour chaque triangle. La distance entre les nœuds fixes et le nœud mobile étant deux fois plus faible pour le triangle 2, l'angle qu'il forme avec le plan XY est deux fois plus prononcé que l'angle que forme le triangle 1 avec ce même plan.

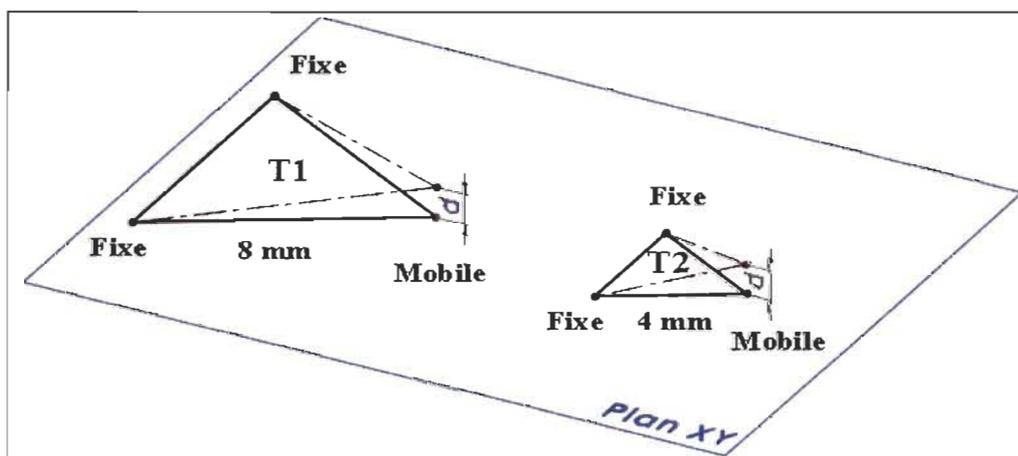


Figure 4.9 Influence de la taille des triangles  $T1$  et  $T2$  sur la variation relative de l'angle du plan défini par les coordonnées de leurs 3 nœuds respectifs due à un déplacement  $d$  de leur nœud mobile

#### 4.8 Contrôle par gradient de déplacement d'un triangle – approche locale basée sur la proximité

Cette approche consiste à imposer une valeur seuil sur la norme du vecteur gradient de déplacement de chaque triangle de la zone de design. Le calcul détaillé de ce vecteur gradient est présenté à la section 4.8.1. L'intérêt de l'utilisation du gradient de déplacement d'un triangle réside dans le fait que ce critère est adimensionnel. Soit une pièce maillée par des triangles à trois nœuds et soit une zone de cette pièce pour laquelle le gradient de déplacement est le même pour chaque triangle. Pour un gradient de déplacement donné, la forme globale de cette zone n'est pas affectée par la taille des triangles. De plus, l'utilisation de la norme cartésienne du vecteur gradient de déplacement permet de quantifier l'ampleur du déplacement des nœuds d'un triangle sans tenir compte de leur direction de déplacement respective.

##### 4.8.1 Calcul du gradient de déplacement d'un triangle

Dans l'environnement de développement, les coordonnées des nœuds d'un triangle sont exprimées dans un repère cartésien de dimensions trois. Soit un triangle  $T(N_1, N_2, N_3)$  formé des nœuds  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$ . Les coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$  de chaque nœud  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont celles obtenues après un déplacement  $d_i$  par rapport à la position initiale. Notons  $\vec{D}_T$ , le vecteur de coordonnées,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ , lesquelles correspondent respectivement au déplacement des nœuds  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  par rapport à leur position initiale;

$$\vec{D}_T = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}. \quad (4.1)$$

Soit un espace de coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta)$  propre à chaque élément de plaque. La relation entre les deux espaces de coordonnées est donnée par la transformation suivante;

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \\ z = z(\xi, \eta). \end{cases} \quad (4.2)$$

Soit une fonction  $d(x, y, z)$  exprimant le déplacement des nœuds d'un triangle, par rapport à leur position initiale, dans l'espace de coordonnées cartésiennes. Notons,

$$d'(\xi, \eta) = d(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) \quad (4.3)$$

la fonction exprimant le déplacement du triangle, obtenu par interpolation des déplacements aux nœuds sur l'élément de référence. Ce déplacement est donné par l'équation suivante;

$$d'(\xi, \eta) = \langle N_i \rangle \{d_i\} \quad (4.4)$$

où les  $N_i$  sont les fonctions d'interpolation de base de l'élément de référence et les  $d_i$  correspondent aux déplacements des nœuds de l'élément par rapport à leurs positions initiales. Ces fonctions et leurs dérivées sont données au tableau 4.5 pour un triangle.

Tableau 4.5  
Fonctions d'interpolation et dérivées pour un triangle à trois nœuds

Nœuds	$\{N\}$	$\left\{\frac{\partial N}{\partial \xi}\right\}$	$\left\{\frac{\partial N}{\partial \eta}\right\}$
1	$1 - \xi - \eta$	-1	-1
2	$\xi$	1	0
3	$\eta$	0	1

Le vecteur gradient de  $d(x, y, z)$  est donné par l'équation suivante;

$$\overrightarrow{\text{grad}} d(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial d}{\partial x} \\ \frac{\partial d}{\partial y} \\ \frac{\partial d}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Ce gradient, exprimé dans l'espace de coordonnées paramétriques, fait intervenir la matrice jacobienne inverse, notée  $[j]$ ;

$$\overrightarrow{\text{grad}} d(x, y, z) = [j] \begin{pmatrix} \frac{\partial d'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial d'}{\partial \eta} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Cette matrice inverse est propre à chaque triangle et elle est égale à  $[J]^{-1}$  où;

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Le lecteur est invité à se référer à l'annexe B pour le calcul détaillé de la matrice jacobienne inverse d'un triangle. Le terme de droite de l'équation (4.6), quant à lui, se calcule en utilisant les dérivées des fonctions d'interpolation de l'élément de référence;

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial d'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial d'}{\partial \eta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \rangle \\ \langle \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \rangle \\ 0 \end{bmatrix} \{d_i\}. \quad (4.8)$$

En remplaçant (4.8) dans (4.6), on a;

$$\overrightarrow{\text{grad}} d(x, y, z) = [j] \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right\rangle \\ 0 \end{bmatrix} \{d_i\}. \quad (4.9)$$

En remplaçant les valeurs du tableau 4.5 dans l'équation (4.9), on a;

$$\overrightarrow{\text{grad}} d_T(x, y, z) = [j] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}. \quad (4.10)$$

Finalement, en posant  $\overrightarrow{G}_T = \overrightarrow{\text{grad}} d_T(x, y, z)$ , on a;

$$\vec{G}_T = [j] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}. \quad (4.11)$$

L'équation (4.11) exprime le vecteur gradient de déplacement  $\vec{G}$  d'un triangle  $T$  obtenu par interpolation, sur l'élément de référence, des déplacements aux nœuds. Sous forme simplifiée, cette équation peut s'écrire comme suit;

$$\vec{G}_T = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

où  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$  sont les coordonnées du vecteur gradient de déplacement du triangle  $T$ .

La norme de ce vecteur est donnée par;

$$\|\vec{G}_T\| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}. \quad (4.13)$$

### **4.8.2 Principe général du contrôle local par gradient de déplacement**

Le principe général de cette approche consiste à vérifier, à chaque itération du processus d'optimisation, si la norme maximale du vecteur gradient de déplacement des nœuds de chaque triangle de la zone de design est dépassée. Si c'est le cas, les nœuds sont replacés de manière à respecter la valeur du seuil d'arrêt.

Toutefois, l'utilisation de la norme du gradient de déplacement requiert un seul degré de liberté lors du remplacement des nœuds pour ne pas avoir une infinité de solutions. Cela revient à considérer uniquement les triangles possédant un nœud mobile et deux nœuds fixes. Les nœuds mobiles sont situés dans les zones de design tandis que les nœuds fixes sont situés dans les zones de non-design. Initialement, ces triangles sont situés aux jonctions des deux types de zones.

Après déplacement des nœuds mobiles par la MMN, une vérification est effectuée, à savoir si la norme maximale du gradient de déplacement est dépassée pour chaque triangle possédant un nœud mobile et deux nœuds fixes. En supposant qu'un nombre  $n$  de ces triangles dépassent la valeur seuil, le nœud mobile de chacun de ces  $n$  triangles est remplacé itérativement dans la direction inverse à la normale jusqu'à ce que la norme du gradient de déplacement soit respectée.

### **4.8.3 Algorithme de la MMN contrôlée localement par le gradient de déplacement**

L'algorithme de la MMN avec contrôle basé sur le gradient de déplacement faisant intervenir une approche locale est le suivant :

1. Modélisation de l'objet dans un logiciel de CAO;
2. Importation du modèle dans l'environnement MAGIC;
3. Orientation de la coque;
4. Définition des conditions de calcul (chargements, déplacements imposés, matériau, épaisseur de la coque et zones de non-design);

5. Génération du maillage éléments finis;
6. Calcul de l'état de contrainte initial;
7. Calcul du vecteur normal à la triangulation initiale en chaque nœud;
8. Calcul des déplacements des nœuds mobiles situés dans la zone de design et déplacement le long de leur normale respective;
9. Calcul de la matrice jacobienne inverse de chaque triangle de la zone de design;
10. Calcul de la norme du gradient de déplacement des triangles ayant 2 nœuds fixes;
11. Pour chaque triangle ayant 2 nœuds fixes, vérification si la norme maximale du gradient de déplacement est dépassée. Si oui, remplacement incrémental du nœud mobile dans la direction inverse à la normale jusqu'à ce que la valeur seuil soit respectée. Si non, le nœud n'est pas remplacé;
12. Les nœuds mobiles remplacés sont fixés pour les itérations suivantes;
13. Calcul de l'état de contrainte final;
14. Si le critère de convergence n'est pas atteint, retour à l'étape 8, sinon fin de l'algorithme.

Cette approche est dite « locale » étant donné qu'elle ne considère pas l'ensemble des triangles lors du remplacement d'un nœud. En effet, seuls les triangles appartenant à ce nœud sont considérés, ce qui engendre deux types de problèmes.

#### **4.8.4 Problèmes rencontrés**

Le premier problème réside dans le fait que, pour un triangle à deux nœuds fixes, il peut être impossible d'abaisser la norme du gradient de déplacement sous la valeur seuil en déplaçant uniquement le nœud mobile restant. Pour pallier ce problème, cette condition devrait être vérifiée pour l'ensemble des triangles possédant un ou deux nœuds fixes. Tel que mentionné précédemment, l'utilisation de la norme du vecteur gradient de déplacement requiert un seul degré de liberté lors du remplacement des nœuds, pour éviter qu'il n'y ait une infinité de solutions. Or, le remplacement des nœuds d'un triangle possédant un nœud fixe et deux nœuds mobiles ne respecte pas cette condition.

Le deuxième problème, avec une approche basée sur la proximité ou dite « locale », est qu'un nœud n'est pas remplacé en prenant en considération la norme du gradient de déplacement de tous les triangles de la zone de design. Ainsi, le remplacement d'un nœud  $i$  peut permettre de diminuer le gradient de tous les triangles appartenant à ce nœud sous la valeur seuil. Par contre, le remplacement subséquent d'un nœud voisin  $j$  peut avoir pour effet de faire augmenter le gradient de déplacement d'un triangle, appartenant également au nœud  $i$ , ayant préalablement été remplacé. En d'autres termes, le problème réside dans le fait que les nœuds sont remplacés un à un et que le gradient de déplacement d'un triangle donné peut varier au cours du processus de remplacement des nœuds.

Puisqu'une approche locale ne permet pas un respect de la valeur seuil de la norme du gradient de déplacement pour l'ensemble des triangles de la zone de design, une solution globale est envisagée. L'objectif est de considérer le gradient de déplacement de tous les triangles pour déterminer le remplacement adéquat de chaque nœud.

#### **4.9 Contrôle par gradient de déplacement d'un triangle – approche globale basée sur la résolution d'un système d'équations**

Une première approche globale consiste à modéliser le problème sous forme d'un système d'équations à résoudre. Le nombre d'inconnues correspond au nombre de nœuds mobiles appartenant à un triangle possédant deux nœuds fixes, tandis que le nombre d'équations correspond au nombre de triangles possédant deux nœuds fixes. La résolution du système d'équations, à chaque itération du processus d'optimisation, permet de déterminer le remplacement de chaque nœud assurant le respect de la valeur seuil pour l'ensemble des triangles de la zone de design. Toutefois, comme le nombre d'équations et d'inconnues est généralement différent, le système d'équations ne possède pas de solution exacte.

#### 4.10 Contrôle par gradient de déplacement d'un triangle – approche globale basée sur un problème de minimisation

Une deuxième approche consiste à appréhender le problème de détermination de la localisation des nœuds comme un problème de minimisation de l'écart entre la norme du gradient de déplacement de chaque triangle et la valeur seuil imposée.

##### 4.10.1 Principe général du contrôle global par gradient de déplacement

Soit  $s$  une valeur seuil pour la norme du gradient de déplacement et soient les  $n$  triangles de la zone de design, possédant un nœud mobile et deux nœuds fixes, dont la norme du gradient de déplacement est supérieure à  $s$ . Cette approche consiste à écrire, à chaque itération du processus d'optimisation, une fonction  $f$  égale à la somme de la différence au carré entre la norme du gradient de déplacement de chacun de ces  $n$  triangles et la valeur seuil  $s$  et donnée par l'équation suivante;

$$f = \sum_{i=1}^n (\|\vec{G}_i\| - s)^2 \quad (4.14)$$

L'objectif consiste à minimiser cette fonction par l'algorithme du gradient pour déterminer le remplacement des  $m$  nœuds mobiles des  $n$  triangles qui minimise l'écart au carré entre leur norme du gradient de déplacement respective et la valeur seuil imposée. Une fois le remplacement de chaque nœud déterminé, ceux-ci sont remplacés et fixés pour les itérations suivantes. Finalement, si tous les nœuds voisins d'un nœud mobile sont fixes, la position moyenne du nœud et de ses voisins est calculée. Le nœud est déplacé à cette position et fixé. Le processus s'arrête lorsque le critère de convergence est atteint pour l'ensemble des nœuds mobiles ou lorsqu'il n'y a plus de nœuds à déplacer. À noter que le contrôle du déplacement des nœuds est effectué initialement pour les triangles situés à la jonction entre les zones de non-design et de design. Les nœuds remplacés étant ensuite fixés, la zone de contrôle s'éloigne de cette jonction à chaque itération.

#### 4.10.2 Algorithme de la MMN contrôlée globalement par le gradient de déplacement

L'algorithme de la MMN, avec contrôle du déplacement des nœuds par imposition d'une norme maximale sur le gradient de déplacement d'un triangle, formulé sous la forme d'un problème de minimisation, est le suivant :

1. Modélisation de l'objet dans un logiciel de CAO;
2. Importation du modèle dans l'environnement MAGIC;
3. Orientation de la coque;
4. Définition des conditions de calcul (chargements, déplacements imposés, matériau, épaisseur de la coque et zones de non-design);
5. Génération du maillage éléments finis;
6. Calcul de l'état de contrainte initial;
7. Calcul du vecteur normal à la triangulation initiale en chaque nœud;
8. Calcul des déplacements des nœuds mobiles situés dans la zone de design et déplacement le long de leur normale respective;
9. Calcul de la matrice jacobienne inverse de chaque triangle de la zone de design;
10. Calcul de la norme du gradient de déplacement des triangles ayant 2 nœuds fixes;
11. Si des triangles ayant 2 nœuds fixes dépassent la valeur seuil  $s$  du gradient de déplacement, écriture de la fonction  $f$  à minimiser. Sinon, passe à l'étape 15;
12. Minimisation de la fonction  $f$  par l'algorithme du gradient pour déterminer le déplacement des nœuds jusqu'à ce que  $\|\nabla f\| < \varepsilon$ ;
13. Remplacement des nœuds et fixation pour les itérations suivantes;
14. Pour chaque nœud mobile, vérification si tous ses nœuds voisins sont fixes. Si oui, la position moyenne du nœud et de ses voisins est calculée. Le nœud est déplacé à cette position et fixé pour les itérations suivantes;
15. Calcul de l'état de contrainte final;
16. Si le critère de convergence n'est pas atteint et qu'il reste des nœuds mobiles à déplacer, retour à l'étape 8, sinon fin de l'algorithme.

La figure 4.10 illustre l'algorithme de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement, telle qu'implantée dans l'environnement de développement.

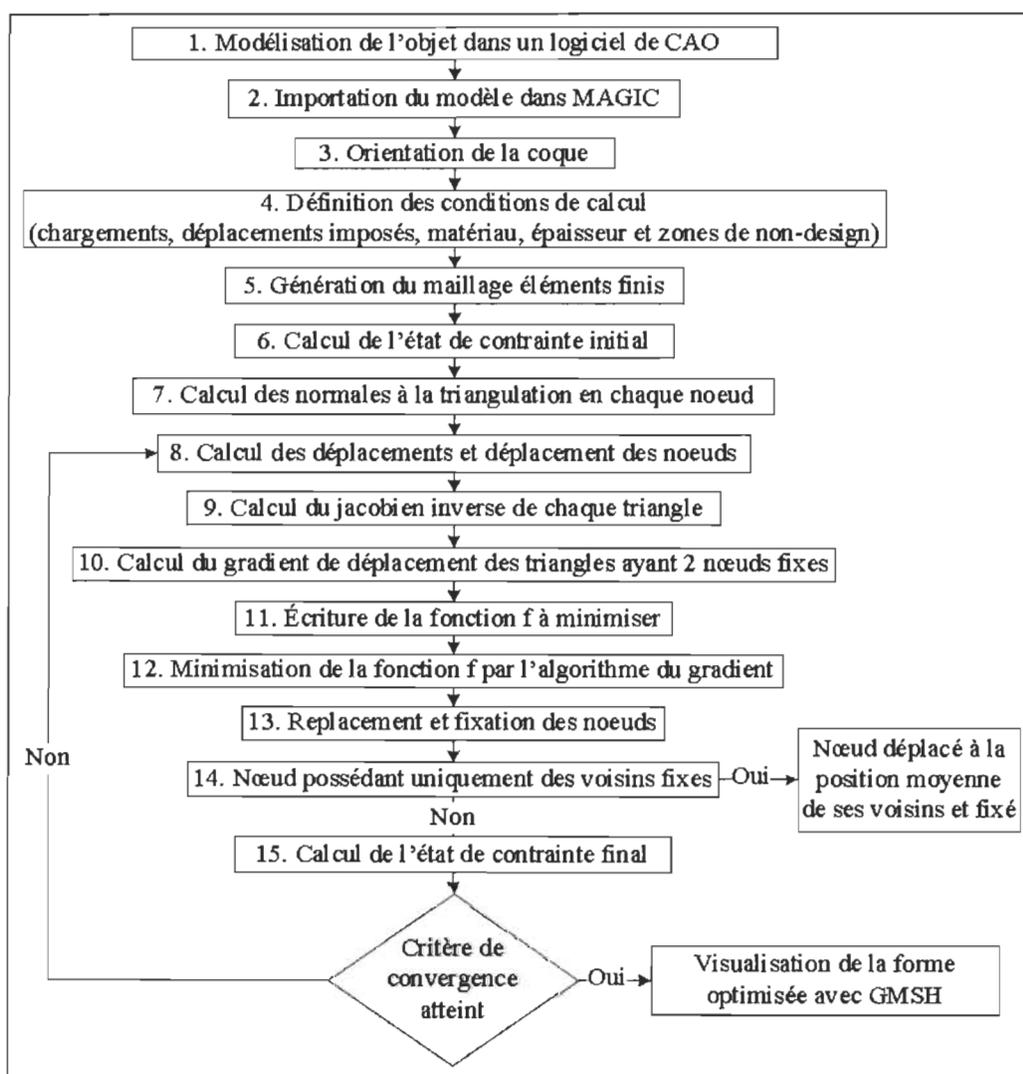


Figure 4.10 Algorithme de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement

#### 4.10.3 Algorithme du gradient

L'algorithme du gradient est un algorithme d'optimisation itératif visant à minimiser une fonction. Il est basé sur le fait qu'un déplacement dans la direction opposée au gradient de la fonction à minimiser est la direction de décroissance maximale de la fonction. Soit

$\vec{D}_{m_i} = [d_1, \dots, d_m]^T$  le vecteur contenant le déplacement des  $m$  nœuds mobiles appartenant aux  $n$  triangles ayant un nœud mobile et deux nœuds fixes à l'itération  $i$ . L'algorithme du gradient avec un pas  $\alpha$  constant consiste, à l'itération  $i$ , à :

1. Calculer le gradient  $\nabla f$  de la fonction  $f$  à minimiser avec les valeurs de  $\vec{D}_{m_i}$ ;
2. Calculer  $\|\nabla f\|$ ;
3. Si  $\|\nabla f\| > \varepsilon$ , calculer un nouveau vecteur  $\vec{D}_{m_{i+1}} = \vec{D}_{m_i} - \alpha \nabla f(\vec{D}_{m_i})$ ;
4. Retour à l'étape 1 en utilisant les nouvelles valeurs de  $\vec{D}_{m_{i+1}}$  calculées.

#### 4.10.4 Exemple : plaque maillée par quatre triangles rectangles égaux

Soit une plaque de 10 mm par 10 mm maillée par quatre triangles rectangles identiques représentée à la figure 4.11. Un nombre restreint d'éléments est utilisé uniquement à des fins de simplification et de présentation.

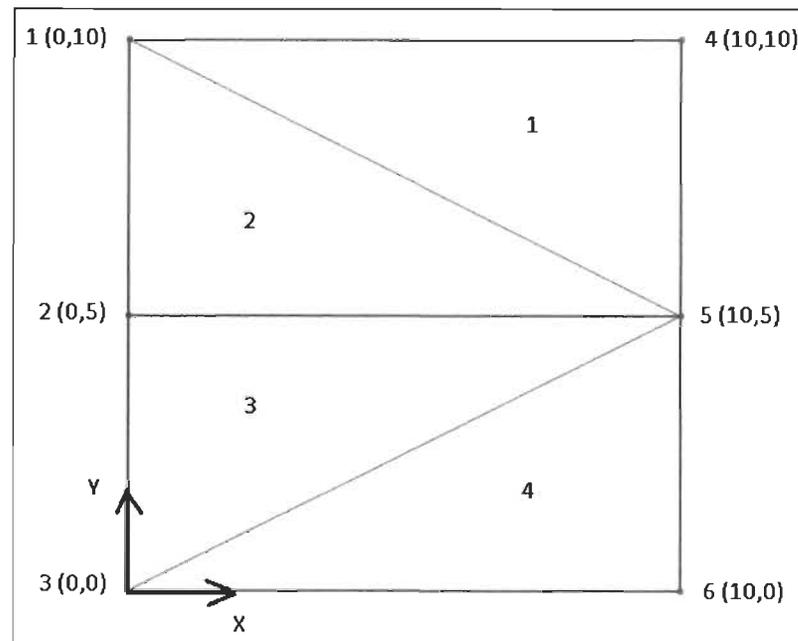


Figure 4.11 Plaque maillée par quatre triangles identiques

Les triangles 1 à 4 sont respectivement formés des nœuds suivants :

$$\begin{aligned} T_1(1,5,4) \\ T_2(1,2,5) \\ T_3(2,3,5) \\ T_4(3,6,5) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Soient des déplacements initiaux connus de 10 mm, selon la direction normale de l'axe Z, pour les nœuds 1, 2 et 3 ayant préalablement été déplacés et fixés. Soient des déplacements inconnus pour les nœuds mobiles 4, 5 et 6. Les triangles 2 et 3 ont donc 1 nœud mobile et 2 nœuds fixes. Les déplacements des six nœuds sont;

$$\begin{aligned} d_1 &= 10 \\ d_2 &= 10 \\ d_3 &= 10 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Le problème consiste à déterminer le déplacement maximal du nœud 5, en respectant la valeur seuil de 0.2 sur la norme du gradient de déplacement des triangles 2 et 3, qui ont deux nœuds fixes. Pour résoudre ce problème, les étapes suivantes sont effectuées :

1. Calcul de la matrice jacobienne inverse des triangles ayant 2 nœuds fixes;
2. Calcul de la norme du gradient de déplacement des triangles ayant 2 nœuds fixes;
3. Écriture et minimisation de la fonction  $f$  par l'algorithme du gradient en posant  $d_5 = 15 \text{ mm}$ ,  $s = 0.2$ ,  $\alpha = 10$  et  $\varepsilon = 0.001$ .

*Matrice jacobienne inverse des triangles ayant deux nœuds fixes*

Tel que mentionné à la section 4.8.1, le calcul du gradient de déplacement d'un triangle requiert le calcul de la matrice jacobienne inverse de ce triangle qui est donnée par;

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \rangle \\ \langle \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \rangle \end{bmatrix} [\{x_i\} \quad \{y_i\}]. \quad (4.17)$$

Pour le triangle 2, on obtient;

$$[J_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 5 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

La matrice jacobienne inverse est;

$$[J_2]^{-1} = \frac{1}{0 \cdot -5 - (-5 \cdot 10)} \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

*Norme du gradient de déplacement des triangles ayant deux nœuds fixes*

Le gradient de déplacement du triangle 2, composé des nœuds 1, 2 et 5 s'écrit;

$$\vec{G}_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \\ d_5 \end{Bmatrix}. \quad (4.20)$$

En effectuant le produit matriciel, on obtient;

$$\vec{G}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{d_5}{10} - 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.21)$$

La norme du gradient de déplacement du triangle 2 est;

$$\|\vec{G}_2\| = \frac{d_5}{10} - 1. \quad (4.22)$$

Pour cet exemple, les gradients de déplacement des triangles 2 et 3 sont identiques. Puisque la coordonnée  $y$  du vecteur gradient est nulle, alors le déplacement du nœud 5, dans la direction de l'axe  $Z$ , n'a pas d'impact sur le gradient de déplacement des triangles 2 et 3 dans la direction de l'axe  $Y$ , ce qui est cohérent avec la figure 4.11. De plus, un déplacement de 10 mm du nœud 5 engendre un gradient de déplacement nul pour les deux triangles, étant donné que les nœuds 1, 2 et 3 ont été déplacés de 10 mm.

#### *Écriture et minimisation de la fonction $f$*

Pour cet exemple, la fonction  $f$  modélise la somme de la différence au carré entre la norme du gradient de déplacement des triangles 2 et 3 et la valeur seuil de 0.2. En remplaçant l'équation (4.22) dans (4.14) pour les triangles 2 et 3, la fonction  $f$  à minimiser par l'algorithme du gradient s'écrit;

$$f = \left( \left( \frac{d_5}{10} - 1 \right) - 0.2 \right)^2 + \left( \left( \frac{d_5}{10} - 1 \right) - 0.2 \right)^2. \quad (4.23)$$

Soit le vecteur  $\vec{D}_m$  contenant le déplacement des  $m$  nœuds mobiles appartenant aux  $n$  triangles ayant un nœud mobile et deux nœuds fixes. Dans cet exemple,  $m$  vaut 1 et  $n$  vaut 2.  $\vec{D}_m$  contient uniquement le déplacement du nœud 5. En dérivant l'équation (4.23) par rapport à  $d_5$ , on obtient;

$$\nabla f(d_5) = \frac{d_5}{25} - 0.48. \quad (4.24)$$

Avec  $d_5 = 15$  mm, la norme du gradient de la fonction  $f$  vaut donc 0.12. Avec un pas constant  $\alpha = 10$ , le déplacement du nœud 5 à l'itération 1 de l'algorithme du gradient est calculé et  $d_{5_1} = 15 - 10 \cdot 0.12 = 13.8$  mm. À noter qu'un pas aussi élevé est utilisé uniquement dans le but de limiter le nombre d'itérations de l'algorithme du gradient pour cet exemple.

Avec un critère d'arrêt  $\varepsilon = 0.001$ , l'algorithme de minimisation converge en 10 itérations. Le tableau 4.6 contient les valeurs de déplacement du nœud 5 et la norme du gradient de la fonction  $f$  obtenus à chaque itération.

Tableau 4.6  
Résultats obtenus par l'algorithme du gradient

Itération $i$	$d_{5_i}$ (mm)	$\ \nabla f(d_{5_i})\ $
$i = 0$	15	0.12
$i = 1$	13.8	0.072
$i = 2$	13.08	0.0432
$i = 3$	12.648	0.02592
$i = 4$	12,3888	0,015552
$i = 5$	12,23328	0,0093312
$i = 6$	12,139968	0,00559872
$i = 7$	12,0839808	0,00335923
$i = 8$	12,0503885	0,00201554
$i = 9$	12,0302331	0,00120932
$i = 10$	12,0181399	0,00072559

Ces résultats montrent que le déplacement du nœud 5 tend vers 12 mm au fil du processus de minimisation de la fonction  $f$  par l'algorithme du gradient. Cela est tout à fait logique, sachant que la norme maximale du gradient de déplacement vaut 0.2. En effet, le déplacement du nœud 5 affecte uniquement les coordonnées  $x$  des triangles 2 et 3 et ceux-ci ont une longueur de 10 mm selon cette direction. Une valeur seuil de 0.2 permet donc une variation de déplacement de  $10 \times 0.2 = 2$  mm par rapport aux déplacements des nœuds 1, 2 et 3. Si les triangles 2 et 3 avaient des côtés de 5 mm de long selon l'axe X, le déplacement admissible serait de 1 mm. L'inclinaison des triangles par rapport à leur position initiale est donc indépendante de leur taille. Cela démontre bien le caractère adimensionnel de ce critère de contrôle du déplacement des nœuds, basé sur le gradient de déplacement d'un triangle.

#### 4.10.5 Paramètres de la MMN avec contrôle basé sur le gradient de déplacement d'un triangle

Le tableau 4.7 regroupe l'ensemble des paramètres requis par la MMN contrôlée par le gradient de déplacement d'un triangle. Le tableau est divisé en deux sections, soient les paramètres propres à la MMN telle que décrite dans la littérature et les nouveaux paramètres pour le contrôle mis en œuvre.

Tableau 4.7  
Paramètres de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement

	Paramètres	Définition
Méthode du mouvement normal	Contrainte objectif $\sigma_o$	Valeur cible de contrainte en chaque nœud du maillage
	Coefficient de convergence $C$	Coefficient servant à calculer le déplacement de chaque nœud
	Limite de convergence $L$	Écart de contrainte maximal et pondéré par rapport à la contrainte objectif requis en chaque nœud pour l'arrêt de la MMN
	Nombre maximal d'itérations	Nombre maximal d'itérations auquel la MMN s'arrête si elle n'a pas convergée
Contrôle basé sur le gradient de déplacement d'un triangle	Norme maximale $s$ du gradient de déplacement d'un triangle	Critère pour limiter le déplacement des nœuds par rapport à leur position initiale
	Pas $\alpha$ de l'algorithme du gradient	Facteur servant à calculer le remplacement du nœud par l'algorithme du gradient
	Critère d'arrêt $\varepsilon$ de l'algorithme du gradient	Valeur cible de la norme du gradient de la fonction $f$ à minimiser pour l'arrêt de l'algorithme du gradient
	Variation minimale de la norme du gradient de la fonction $f$ à minimiser	Variation seuil minimale de la norme du gradient de la fonction $f$ à minimiser, entre 2 itérations de l'algorithme du gradient, pour l'arrêt de l'algorithme
	Nombre maximal d'itération de l'algorithme du gradient	Nombre maximal d'itérations auquel l'algorithme s'arrête s'il n'a pas convergé

Le contrôle basé sur le gradient de déplacement d'un triangle requiert cinq paramètres. Le premier est la norme maximale du gradient de déplacement d'un triangle servant à limiter le déplacement des nœuds par rapport à leur position initiale.

Le deuxième paramètre est le pas servant à calculer le remplacement du nœud par l'algorithme du gradient.

Le troisième paramètre est le critère d'arrêt de l'algorithme du gradient. Il s'agit de la valeur à laquelle la norme du gradient de la fonction  $f$  à minimiser doit être inférieure ou égale pour que l'algorithme du gradient s'arrête. Dans le cas où le critère d'arrêt ne peut être atteint, trois autres conditions d'arrêt sont requises pour éviter que l'algorithme ne diverge. Celui-ci prend fin si :

1. La variation absolue de la norme du gradient de la fonction à minimiser tend vers zéro (inférieure à 0.0000001) entre deux itérations de remplacement des nœuds.
2. La norme du gradient de la fonction à minimiser est plus élevée qu'à l'itération précédente.
3. Un nombre maximal de 1 000 itérations sont effectuées.

#### **4.11 Application de la MMN avec contrôle basé sur le gradient de déplacement d'un triangle à un tube en porte-à-faux**

Cette section a pour but d'appliquer la MMN, avec contrôle basé sur le respect d'une norme maximale du gradient de déplacement d'un triangle, au problème d'optimisation de la forme d'un tube à paroi mince d'épaisseur constante soumis à un effort de flexion décrit aux sections 3.4.3 et 4.3.1. L'objectif est de montrer le type de formes optimisées pouvant être obtenues par la MMN avec un contrôle adéquat du déplacement des nœuds.

##### **4.11.1 Valeurs des paramètres d'optimisation**

Le tableau 4.8 contient les valeurs utilisées pour les différents paramètres de la MMN contrôlée. Les valeurs des paramètres propres à la méthode sont les mêmes que celles présentées à la section 4.3.2, soit une contrainte objectif moyenne actualisée à chaque itération, un coefficient de convergence de 0.2, un critère de convergence de 0.1 et un nombre maximal de 200 itérations.

Les valeurs choisies pour les paramètres propres au contrôle du déplacement sont les suivantes. La norme maximale du gradient de déplacement d'un triangle est fixée à 0.2. Le pas de l'algorithme du gradient utilisé est 1 multiplié par le déplacement du nœud au début du processus de remplacement des nœuds. Contrairement à l'utilisation d'une valeur fixe, ceci permet de réduire le nombre d'itérations et de prendre en compte le sens du déplacement. Le critère d'arrêt de l'algorithme est fixé à 0.001 et le nombre maximal d'itérations est fixé à 1 000. La variation absolue minimale de la norme du gradient de la fonction  $f$ , entre 2 itérations de l'algorithme, est fixée à 0.0000001.

Tableau 4.8  
Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée

	<b>Paramètres</b>	<b>Valeurs utilisées</b>
Méthode du mouvement normal	Contrainte objectif $\sigma_o$	$\sigma_{VM}$ moy actualisée
	Coefficient de convergence $C$	0.2
	Limite de convergence $L$	0.1
	Nombre maximal d'itérations	200
Contrôle basé sur le gradient de déplacement d'un triangle	Norme maximale $s$ du gradient de déplacement d'un triangle	0.2
	Pas $\alpha$ de l'algorithme du gradient	1*déplacement du nœud au début de l'algorithme
	Critère d'arrêt $\varepsilon$ de l'algorithme du gradient	0.001
	Variation minimale de la norme du gradient de la fonction à minimiser	0.0000001
	Nombre maximal d'itération de l'algorithme du gradient	1 000

#### 4.11.2 Forme optimisée

Avec ces valeurs des paramètres, la méthode converge en 122 itérations puisque tous les nœuds sont fixes. La figure 4.12 montre le déplacement des nœuds après 50 itérations en vues de dessus (a), de face (b) et 3D (c). Le déplacement des nœuds étant maximal près de 175 mm, les nœuds situés à gauche de cette valeur ont été remplacés au besoin et fixés.

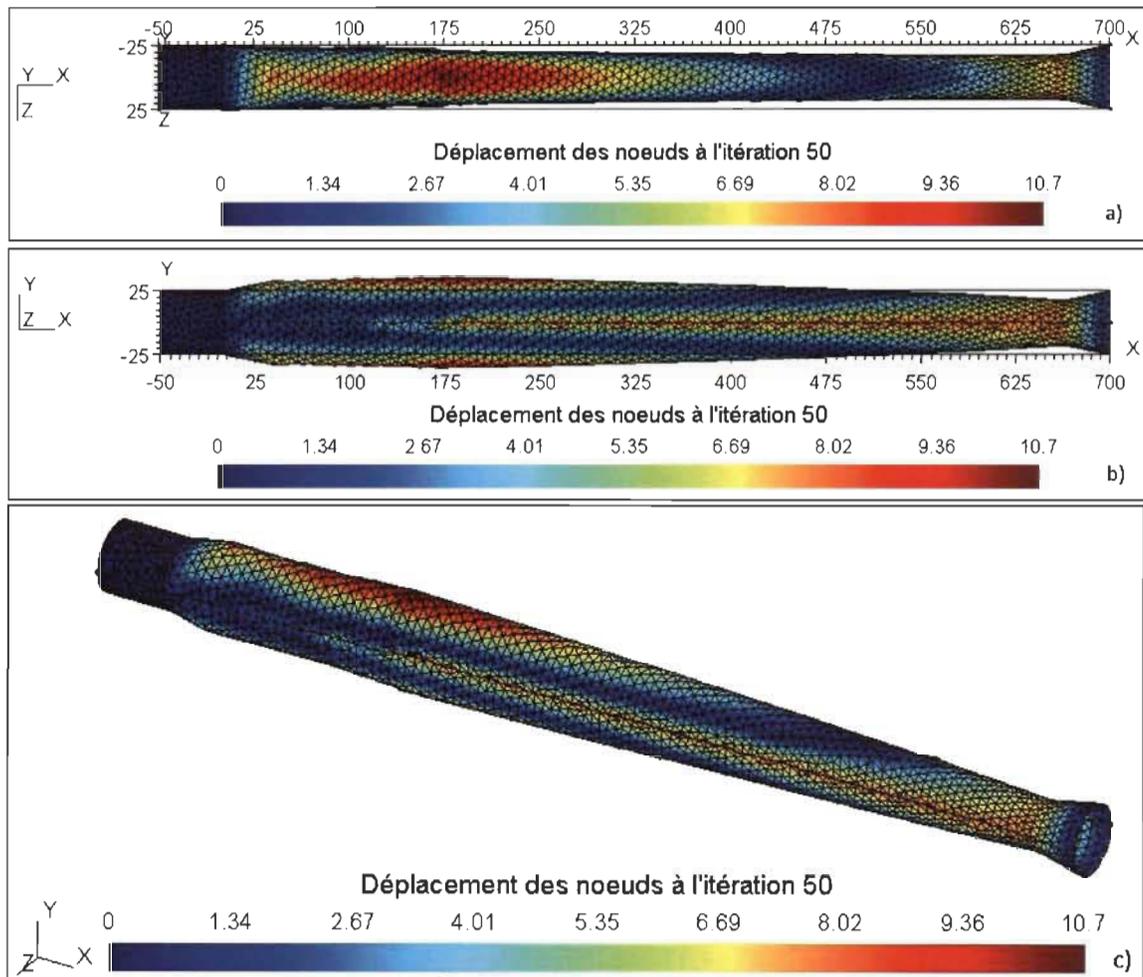


Figure 4.12 Forme optimisée après 50 itérations de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D

La figure 4.13 montre les nœuds qui ont été fixés par le gradient de déplacement, en rouge, après 50 itérations de la MMN. Le déplacement des nœuds a été contrôlé et ceux-ci ont été fixés de 0 à 175 mm et aux environs de la zone de 675 mm.

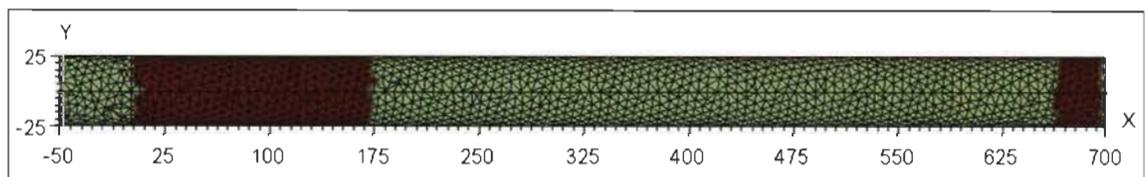


Figure 4.13 Nœuds fixés par le gradient de déplacement, en rouge, après 50 itérations

La figure 4.14 montre le déplacement des nœuds après 122 itérations, en vues de dessus (a), de face (b) et 3D (c). La section varie graduellement dans les zones de transitions design/non-design. Toutefois, certains nœuds de la zone située entre 475 et 600 mm ne sont pas remplacés convenablement par l'algorithme du gradient.

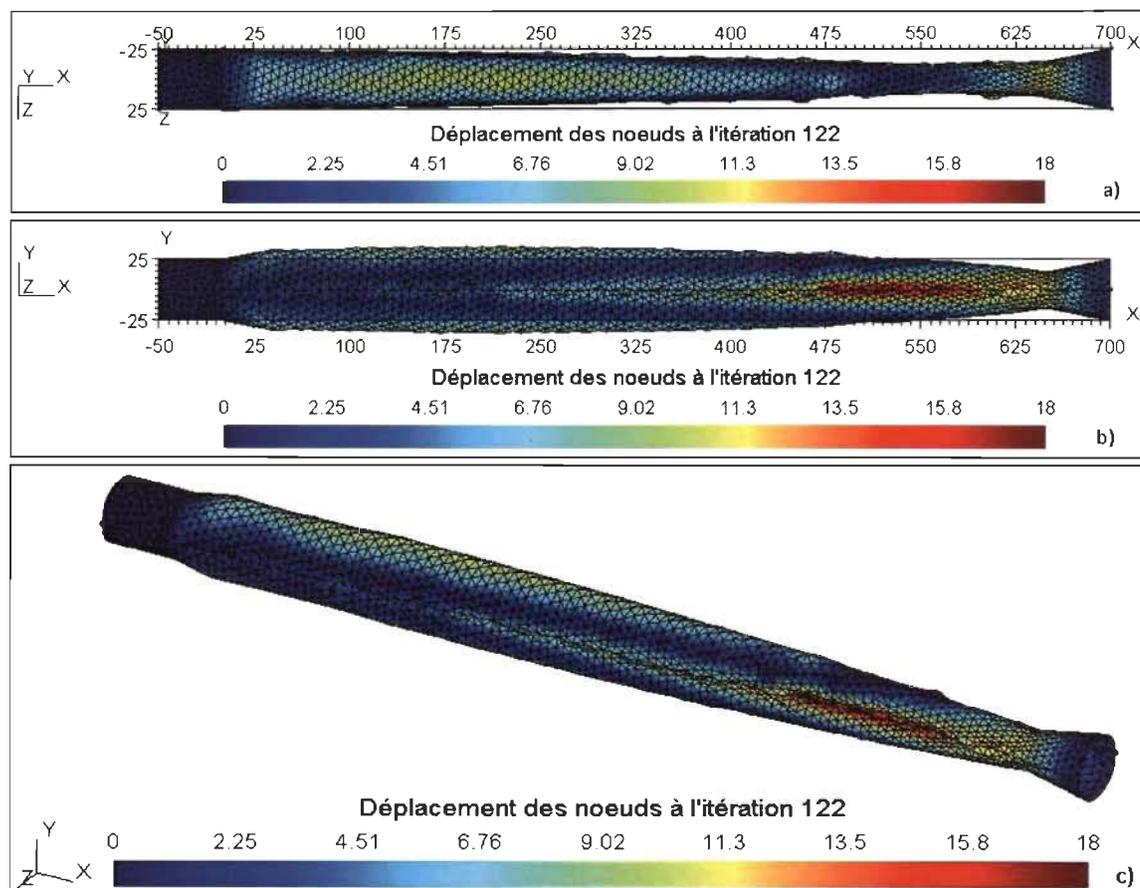


Figure 4.14 Forme optimisée après 122 itérations de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement a) Vue de dessus b) Vue de face c) Vue 3D

#### *Problème de remplacement des derniers nœuds contrôlés*

La figure 4.15 montre un grossissement de la zone contenant les derniers nœuds à être contrôlés. On constate que certains nœuds, en rouge, ne sont pas remplacés adéquatement vers l'extérieur du tube. La valeur seuil du gradient de déplacement n'est donc pas respectée pour certains triangles et la qualité du maillage final s'en trouve affectée.

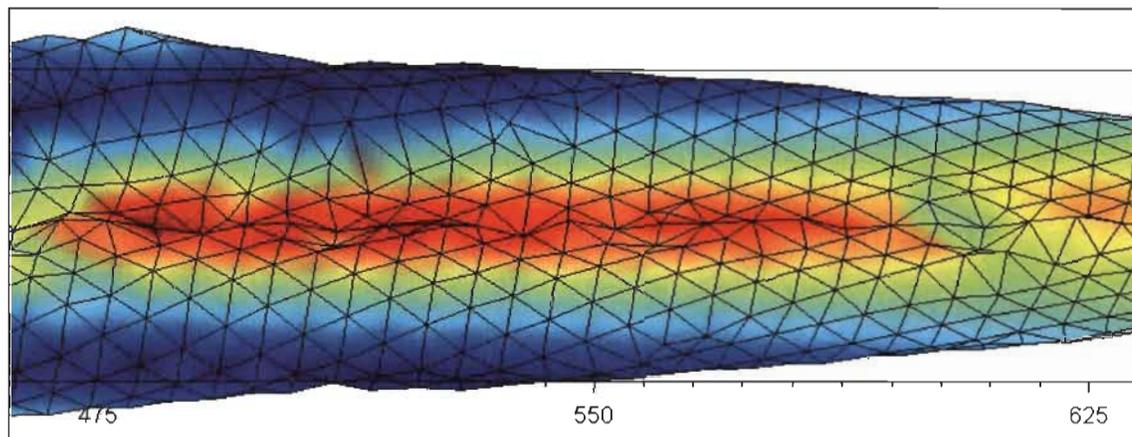


Figure 4.15 Zone du tube contenant les derniers nœuds à être contrôlés (en rouge)

Trois hypothèses sont émises afin d'expliquer le problème de remplacement des derniers nœuds contrôlés. Premièrement, ces nœuds ont été trop déplacés et l'algorithme du gradient ne parvient pas à les replacer convenablement. Ceci est dû au fait que le remplacement s'effectue un nœud à la fois et que le remplacement d'un nœud peut engendrer une augmentation de la norme du gradient de la fonction  $f$  à minimiser. Dans ce cas, le nœud n'est pas remplacé pour cette itération de l'algorithme du gradient. La norme maximale du gradient de déplacement de certains triangles rattachés à ce nœud n'est alors pas respectée et le nœud est fixé pour les prochaines itérations de la MMN.

Deuxièmement, certains triangles peuvent avoir plusieurs nœuds qui sont fixés au cours d'une même itération de la MMN. Soit un triangle possédant un nœud fixe et deux nœuds mobiles. Étant donné que le triangle n'a pas deux nœuds fixes, celui-ci n'est donc pas considéré lors de l'évaluation de la fonction  $f$ . Les deux nœuds mobiles de ce triangle peuvent, dû au dépassement de la norme maximale du gradient des triangles voisins, être remplacés et fixés. Le triangle possède désormais trois nœuds fixes sans que son gradient de déplacement n'ait été vérifié. Pour pallier une partie du problème, les étapes suivantes peuvent être effectuées à chaque itération de la MMN :

1. Les triangles possédant deux nœuds fixes et dont la norme du gradient de déplacement dépasse la valeur seuil sont identifiés.

2. Une fonction  $f_1$  est définie comme la somme de la différence au carré entre la norme du gradient de déplacement de chaque triangle identifié à l'étape 1 et la valeur seuil;
3. La fonction  $f_1$  est minimisée en remplaçant certains nœuds du maillage et les triangles dont plusieurs nœuds sont remplacés sont identifiés;
4. Les nœuds sont déplacés de manière à annuler le remplacement de l'étape 3;
5. Une deuxième fonction  $f_2$  est définie comme la somme de la différence au carré entre la norme du gradient de déplacement de chaque triangle identifié aux étapes 1 et 3.
6. La fonction  $f_2$  est minimisée en remplaçant certains nœuds du maillage;
7. Les nœuds remplacés sont fixés pour la prochaine itération de la MMN.

Cela permet de prendre en compte, lors du remplacement des nœuds, la majorité des triangles susceptibles d'avoir plusieurs nœuds remplacés et fixés au cours d'une même itération. Toutefois, rien n'assure que la prise en compte de ces triangles n'affecte pas d'autres triangles qui verront plusieurs de leurs nœuds être fixés au cours d'une même itération. Une alternative consiste à utiliser un coefficient de convergence  $C$  faible lors du calcul du déplacement des nœuds. Cela assure qu'advenant un dépassement non pris en compte de la valeur seuil pour quelques triangles du maillage, ce dépassement devrait être suffisamment faible pour ne pas affecter la forme finale de la pièce optimisée.

Troisièmement, tel qu'expliqué à la section 4.8.4, il peut être impossible d'abaisser sous la valeur seuil la norme du gradient de déplacement d'un triangle possédant deux nœuds fixes en déplaçant uniquement le nœud mobile.

En résumé, l'approche globale de remplacement des nœuds, basée sur le gradient de déplacement d'un triangle, permet d'obtenir une forme optimisée adéquate à condition que le déplacement des nœuds se fasse graduellement. Cette condition consiste à utiliser un coefficient de convergence faible et un nombre maximal d'itérations élevé.

*Forme optimisée avec un coefficient de convergence plus faible*

Dans cette section, nous proposons d'optimiser à nouveau le tube à paroi mince en porte-à-faux en diminuant le coefficient de convergence de 0.2 à 0.05 et en augmentant le nombre d'itérations maximal de 200 à 800. Les autres valeurs des paramètres sont les mêmes que celles présentées au tableau 4.8. La méthode d'optimisation ne converge pas et s'arrête après 800 itérations. En pratique, la forme n'évolue plus de manière significative après 300 itérations. La méthode devrait donc s'arrêter automatiquement, ce qui signifie que le critère de convergence n'est pas adéquat. La figure 4.16 montre la forme obtenue, en vues de dessus (a), de face (b) et 3D (c), après 300 itérations avec un coefficient de convergence  $C = 0.05$ . La surface de la forme optimisée est lisse.

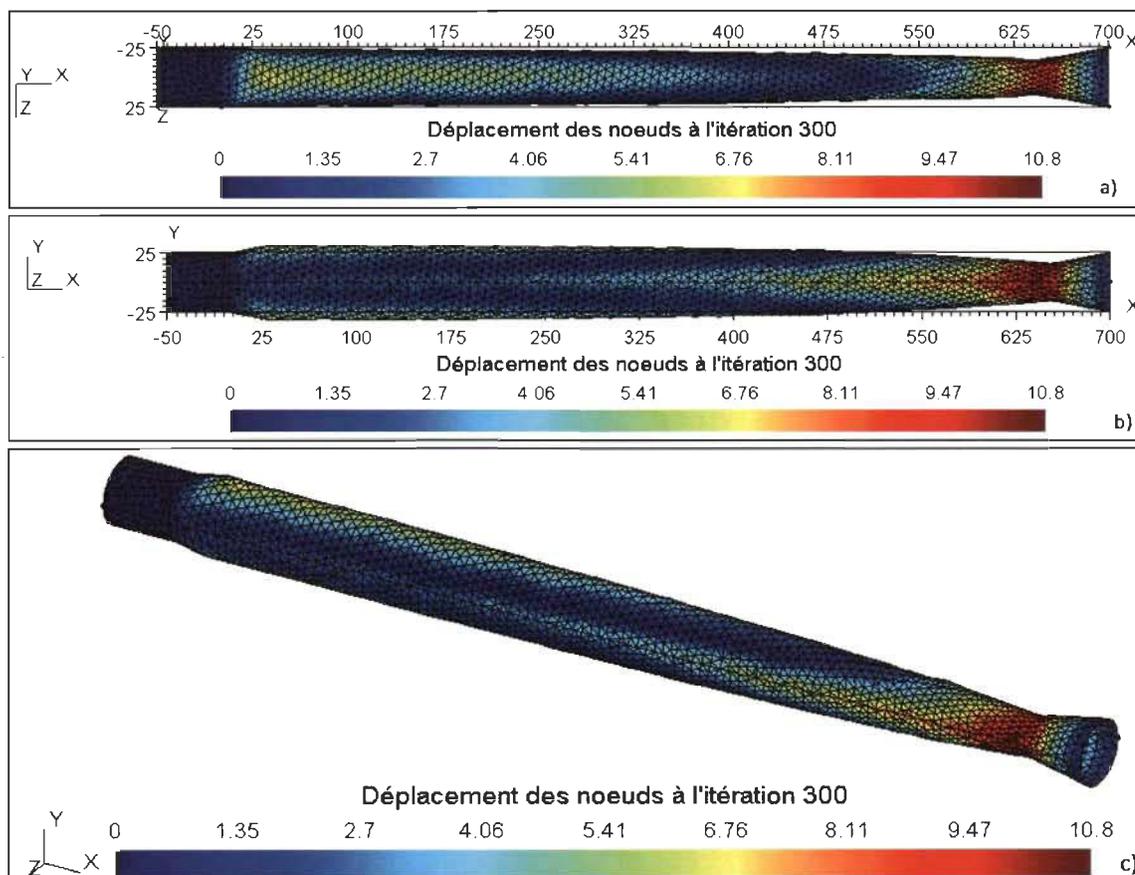


Figure 4.16 Forme optimisée après 300 itérations de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement a) Vue de dessus, b) Vue de face, c) Vue 3D

La figure 4.17 montre l'état de contrainte obtenu, dans les zones de design, avant et après optimisation. Les images de gauche montrent les contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus (a), de face (b) et 3D (c), tandis que les images de droite montrent l'état de contrainte obtenu après optimisation en vues de dessus (d), de face (e) et 3D (f). Le dégradé de couleur étant beaucoup moins prononcé après optimisation, les contraintes tendent à s'uniformiser. La figure d) permet de distinguer deux endroits, près de 150 mm et 250 mm, où la valeur de contrainte est légèrement plus élevée due à certains nœuds qui sont légèrement moins déplacés à ces endroits. Ce léger écart de déplacement peut être corrigé, au besoin, par un barycentrage des nœuds.

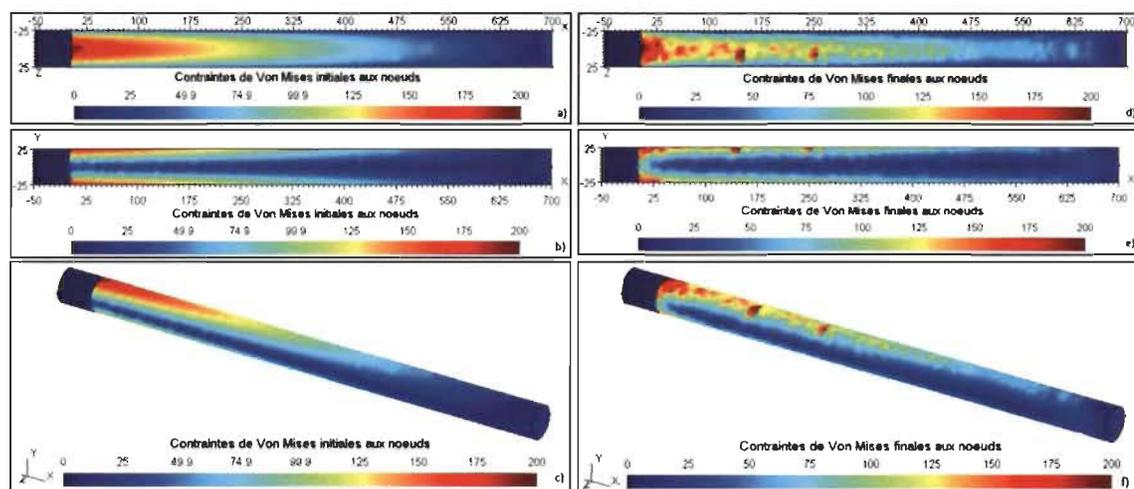


Figure 4.17 Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 300 itérations de la MMN contrôlée par le gradient de déplacement a), b), c) Contraintes de Von Mises initiales en vues de dessus, de face et 3D d), e), f) Contraintes de Von Mises finales en vues de dessus, de face et 3D

Le tableau 4.9 regroupe les valeurs de contraintes de Von Mises obtenues avant optimisation et après 300 itérations de la méthode. Les contraintes minimale et maximale obtenues après optimisation sont légèrement plus élevées, tandis que la valeur moyenne est légèrement plus faible. L'écart type diminue d'environ 10 % ce qui montre la tendance de rapprochement des contraintes autour de la valeur moyenne.

Tableau 4.9  
Contraintes de Von Mises obtenues par la MMN contrôlée

Itération	Contraintes de Von Mises	Valeurs (MPa)
0	Minimale	4,84
	Maximale	199,79
	Moyenne	61,74
	Écart type	45,46
300	Minimale	6,39
	Maximale	217,29
	Moyenne	59,61
	Écart type	40,70

#### 4.11.2.1 Critère de convergence inadéquat

Le critère de convergence de la MMN, basé sur l'écart admissible entre la valeur de contrainte en chaque nœud et la valeur objectif, n'est pas adéquat puisque le processus d'optimisation ne converge pas malgré l'amélioration de la forme. Quelques pistes de réflexion sont proposées ici pour la définition d'un nouveau critère de convergence.

Premièrement, ce critère devrait être indépendant des valeurs extrêmes qui ne sont pas représentatives de l'état de contrainte global. De plus, la valeur moyenne des contraintes aux nœuds ne varie pas forcément de façon significative. En effet, la contrainte en chaque nœud peut être très dispersée initialement et très rapprochée autour de la valeur objectif pour la forme finale, et ce pour une valeur moyenne similaire.

Deuxièmement, une valeur minimale de déplacement relatif de chaque nœud, par rapport à l'itération précédente, pourrait être utilisée comme critère de convergence. Le déplacement de chaque nœud à l'avant-dernière itération devrait également être considéré pour détecter une oscillation possible de certains nœuds, entre deux positions. Toutefois, le déplacement d'un seul nœud peut empêcher la convergence de la méthode.

Idéalement, un critère d'arrêt global devrait être utilisé pour minimiser le risque d'oscillation de la méthode. Par exemple, celle-ci pourrait s'arrêter si le déplacement absolu moyen de l'ensemble des nœuds à déplacer est inférieur à une valeur donnée.

Finalement, une valeur seuil minimale pour l'écart type des contraintes aux nœuds pourraient être utilisée. Toutefois, cela requiert d'avoir un aperçu, à priori, du potentiel d'uniformisation de la contrainte. De plus, cela n'assure en rien que la pièce obtenue est optimale. Ainsi, une variation minimale de l'écart type, entre deux itérations du processus d'optimisation, pourrait s'avérer un critère d'arrêt plus adéquat.

#### **4.11.2.2 Critères d'évaluation de la forme optimisée**

Il est difficile de définir un critère global permettant de déterminer si la forme d'une pièce optimisée est « meilleure », au sens mécanique, que celle de la pièce initiale. En effet, l'objectif d'uniformiser la contrainte sur toute la frontière d'une pièce, en déplaçant cette frontière dans la direction normale, est très ambitieux dans un espace à trois dimensions. Cette uniformisation peut généralement être améliorée dans certaines zones de la pièce. Toutefois, la géométrie initiale, l'état de contrainte initial, la présence de zones de non-design, le contrôle du déplacement des nœuds et l'épaisseur de la pièce considérée constante sont autant d'obstacles qui limitent la possibilité d'uniformisation de la contrainte dans certaines zones de la pièce. Ainsi, un critère global, tel que l'écart type moyen des contraintes calculé sur l'ensemble de la zone de design, peut ne pas démontrer adéquatement l'amélioration de la forme en une zone précise de la pièce. L'écart type peut diminuer, par exemple, dans une zone et augmenter dans une autre pour maintenir une valeur globale similaire. De plus, ce critère ne s'avère pas toujours un bon indicateur d'optimalité. À titre d'exemple, une pièce optimisée possédant un écart type similaire à la pièce initiale, mais une masse réduite est meilleure. De plus, à masse égale et pour des écarts types de contrainte similaires, une pièce possédant une contrainte moyenne inférieure est également considérée comme étant meilleure.

Dans le cas d'une poutre en flexion, le rapport rigidité/masse peut s'avérer un bon critère d'évaluation de la forme optimisée. Nommons ce critère « rigidité spécifique ». Puisque la poutre possède une épaisseur constante, seule l'aire totale  $A_{tot}$  de la surface est considérée. La rigidité de la poutre est obtenue en divisant la force appliquée  $F$  par le déplacement relatif maximal dans la direction de l'axe  $Y$   $\delta_y$  d'un nœud situé à l'extrémité libre. La rigidité spécifique, notée  $k_s$  est donnée par l'équation (4.25);

$$k_s = \left| \frac{F}{\delta_y \cdot A_{tot}} \right| \quad (4.25)$$

D'un point de vue plus général, notons  $\sigma_{moy}$  la contrainte moyenne aux nœuds situés dans la zone de design et  $A_d$  l'aire de la zone de design. Pour une pièce d'épaisseur constante, sa masse peut être déterminée simplement en multipliant l'aire de la surface par l'épaisseur et la masse volumique du matériau. Ainsi, le produit entre la contrainte moyenne et l'aire peut s'avérer un critère d'évaluation intéressant. Nommons ce critère « contrainte moyenne spécifique », noté  $\sigma_s$ . Une structure possédant une contrainte moyenne spécifique inférieure à une autre est considérée comme étant meilleure.

Le pourcentage de nœuds situés dans la zone de design dont la contrainte est comprise dans l'intervalle de convergence (% NIC), par exemple plus ou moins 10 % de la contrainte objectif, peut également s'avérer un indicateur intéressant.

Finalement, la comparaison du pourcentage de nœuds non contraints (% NNC) situés dans la zone de design avant et après optimisation est également intéressante à effectuer. À titre d'exemple, un nœud peut être considéré comme non contraint s'il appartient à la zone de design et si la contrainte en ce nœud est inférieure à 10 % de la valeur moyenne. Bien que ce ne soit pas nécessairement le cas, une pièce présentant un pourcentage de nœuds non contraints plus faible peut signifier que la matière est mieux répartie dans cette dernière et que les efforts sont repris plus efficacement.

Le tableau 4.10 présente une comparaison des valeurs de paramètres obtenues avant et après optimisation pour le tube en porte-à-faux. Ces paramètres regroupent la contrainte de Von Mises moyenne aux nœuds de la zone de design, l'écart type des contraintes, le déplacement relatif maximal d'un nœud, l'aire totale de la surface, l'aire de la zone de design, la rigidité spécifique, la contrainte moyenne spécifique, le pourcentage de nœuds dont la contrainte est comprise dans l'intervalle de convergence et le pourcentage de nœuds non contraints avec une valeur seuil de 10 % de la valeur moyenne.

Tableau 4.10  
Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du tube en porte-à-faux

Paramètres	Forme initiale	Forme optimisée (itération 300)	Variation (%)	Valeur préférable (faible ou élevée)
$\sigma_{moy}$ (MPa)	61,74	59,61	- 3,4	Faible
Écart type (MPa)	45,46	40,70	- 10,4	Faible
$\delta_y$ (m)	-0,0211	-0,0173	- 18,0	Faible
$A_{tot}$ (m <sup>2</sup> )	0,1175	0,1149	- 2,2	Faible
$A_d$ (m <sup>2</sup> )	0,1097	0,1070	- 2,4	Faible
$k_s$ (N/m <sup>3</sup> )	403 348	503 076	24,7	Élevée
$\sigma_s$ (MPa*m <sup>2</sup> )	6,77	6,38	- 5,8	Faible
% $NIC_{10\%}$	7,50	9,44	1,9	Élevée
% $NNC_{10\%}$	0,31	0	- 0,3	Faible

Pour la forme optimisée, la contrainte de Von Mises moyenne diminue de plus de 3 % et l'écart type diminue de plus de 10 %. Le déplacement relatif maximal diminue de 18 % et l'aire totale de la surface diminue de 2,2 %. La diminution de l'aire de la zone de design est légèrement plus élevée avec 2,4 %. Sachant que la force appliquée est de 1 000 N, la rigidité spécifique du tube augmente de près de 25 %. La contrainte moyenne spécifique diminue de près de 6 %. Le pourcentage de nœuds dont la contrainte est comprise dans l'intervalle de convergence passe de 7,5 à 9,4 environ. Finalement, la contrainte en chaque nœud est supérieure à 10 % de la valeur moyenne. Globalement, l'ensemble des critères d'évaluation indiquent une amélioration de la forme optimisée du tube par rapport à sa forme initiale.

#### **4.11.2.3 Étude de l'influence de la norme maximale du gradient de déplacement sur la forme optimisée**

Cette section a pour but de montrer l'influence de la norme maximale du gradient de déplacement sur la forme optimisée. Pour ce faire, trois tests d'optimisation sont effectués sur le tube à paroi mince en porte-à-faux en faisant varier uniquement la valeur seuil de la norme du gradient de déplacement. Des valeurs de 0.1, 0.2 et 0.3 ont été utilisées. Le coefficient de convergence vaut 0.05 et le nombre maximal d'itérations est de 800. Les valeurs des autres paramètres sont identiques à celles du tableau 4.8.

La figure 4.18 montre la forme finale obtenue avec une norme maximale du gradient de déplacement de 0.1 (a), 0.2 (b) et 0.3 (c). Pour une valeur seuil de 0.1, la variation de section se fait très graduellement entre deux couches de triangles. Toutefois, le déplacement global des nœuds risque d'être insuffisant pour influencer significativement les valeurs de contraintes. L'utilisation d'une valeur seuil de 0.2, résulte en un déplacement global des nœuds plus important, tout en assurant une variation de section raisonnable entre deux couches de triangles. Finalement, une valeur seuil de 0.3, permet un déplacement global des nœuds plus important. Toutefois, la variation de section entre les zones de non-design et de design se fait plus brusquement.

Pour conclure, l'utilisation d'une valeur trop faible pour la norme maximale du gradient de déplacement ne permet pas une variation de section significative. D'autre part, une valeur seuil trop élevée permet une variation de section plus élevée, entre deux couches de triangles, pouvant occasionner une augmentation locale des contraintes.

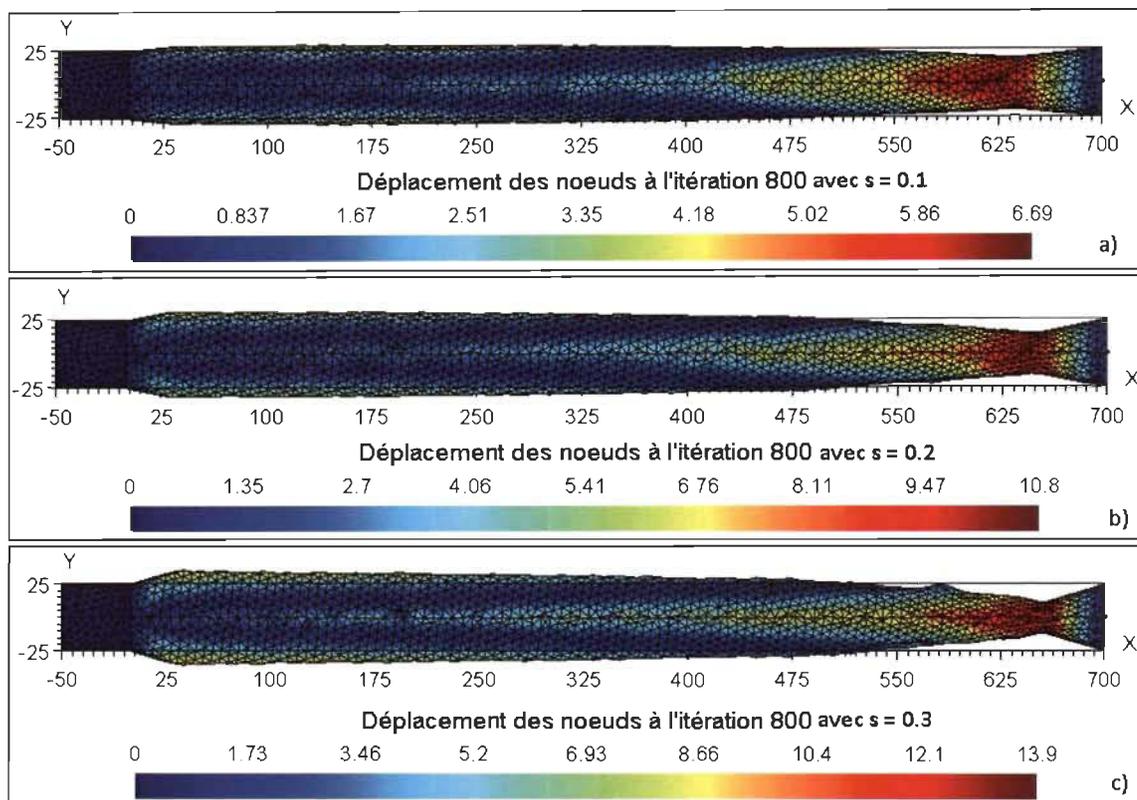


Figure 4.18 Influence de la norme du gradient de déplacement sur la forme optimisée  
 a)  $s = 0.1$ , b)  $s = 0.2$ , c)  $s = 0.3$

## 4.12 Application de la MMN contrôlée au triangle avant d'un cadre de vélo

### 4.12.1 Forme initiale et conditions aux limites

Cette section présente un exemple d'optimisation du triangle avant d'un cadre de vélo par la MMN contrôlée par le gradient de déplacement. Pour simplifier la modélisation surfacique du cadre et afin de réduire le temps de calcul, seul le triangle avant est modélisé. De plus, des zones de non-design sont définies au niveau du boîtier de pédalier, du tube de direction et pour la partie supérieure du tube vertical. La figure 4.19 montre la géométrie initiale et les conditions aux limites modélisées avec SolidWorks Simulation en vues de face (a) et 3D (b). Le tube de direction est encasté et une force de 750 N est appliquée sur l'arête supérieure du tube vertical, parallèlement à celui-ci.

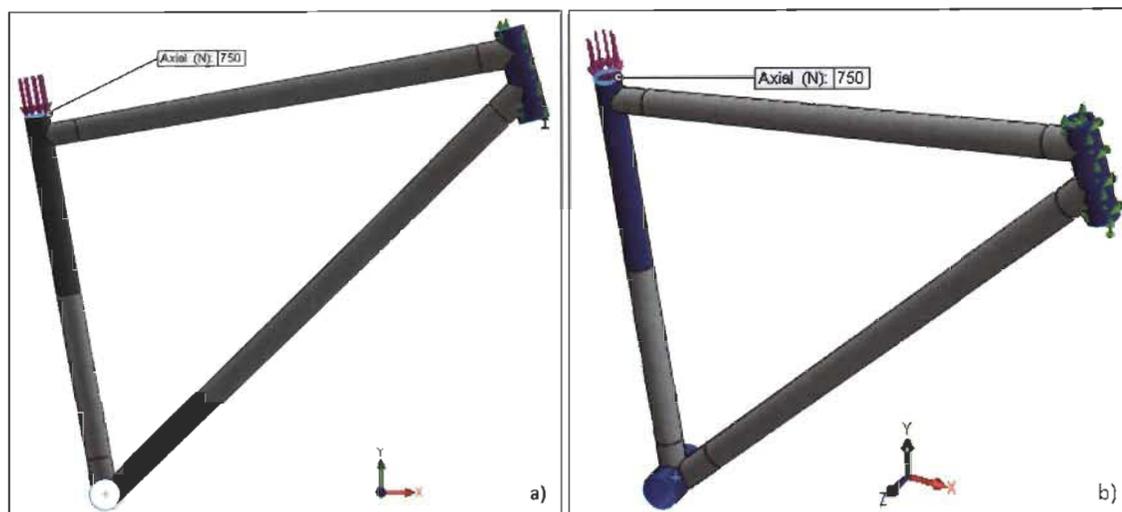


Figure 4.19 Triangle avant d'un cadre de vélo et conditions aux limites dans SolidWorks Simulation a) Vue de face b) Vue 3D

À noter que l'objectif n'est pas de modéliser le plus fidèlement possible les efforts externes s'exerçant sur un cadre de vélo. Celui-ci n'étant pas entièrement modélisé, les conditions réelles d'utilisation sont difficilement modélisables. De plus, les chargements réels varient au cours du temps et selon le type de conduite. En pratique, le chargement le plus défavorable doit être utilisé pour optimiser le cadre. L'objectif de cette étude consiste plutôt à étudier le comportement de la MMN contrôlée au cours du processus d'optimisation d'une structure plus complexe formée de tubes à paroi mince.

La figure 4.20 montre le triangle avant du cadre de vélo maillé finement avec des éléments triangulaires d'environ 5 mm de côté dans l'environnement MAGIC.

Le tableau 4.11 regroupe les informations relatives à la géométrie, aux conditions aux limites, au matériau et au maillage du cadre initial.



Figure 4.20 Triangle avant du cadre de vélo maillé finement dans MAGIC

Tableau 4.11  
Caractéristiques du cadre initial

Catégories	Informations	Valeurs
Géométrie	Épaisseur de la coque	2 mm
Conditions aux limites	Déplacements imposés	Tube de direction encastéré
	Chargements externes	Force de 750 N appliquée sur l'arête supérieure du tube vertical, parallèlement au tube
Matériau	Module de Young	69 GPa
	Coefficient de Poisson	0.33
Maillage	Taille d'éléments	5 mm de côté
	Nombre de nœuds	10 696 (8 384 pour la zone de design)
	Nombre d'éléments	21 274 (16 906 pour la zone de design)

#### 4.12.2 Forme optimisée par la MMN contrôlée globalement par le gradient de déplacement

Les valeurs des paramètres d'optimisation sont les mêmes que celles présentées au tableau 4.8, à l'exception du coefficient de convergence et du nombre maximal d'itérations qui sont respectivement de 0.05 et 300. La figure 4.21 montre, en vues de face (a) et 3D (b), la forme optimisée après 300 itérations. La section des tubes horizontal et diagonal augmente graduellement près du tube de direction et diminue en s'éloignant de celui-ci. La section du tube vertical diminue en s'approchant du boîtier de pédalier. À noter que la méthode ne considère pas le phénomène de flambement d'une poutre pouvant survenir lorsque le rapport section/longueur devient trop faible. Pour prévenir ce phénomène, un déplacement maximal pourrait être spécifié par l'utilisateur.

La figure 4.22 montre l'état de contrainte initial et final. Les figures a) et b) montrent les contraintes de Von Mises initiales et finales avec une échelle allant de 0 à 100 MPa. Les figures c) et d) montrent ces mêmes contraintes avec une échelle allant de 0 à 20 MPa afin de mieux visualiser la distribution des contraintes aux endroits moins contraints. Pour faciliter la comparaison, les contraintes finales sont exprimées sur la géométrie initiale et sont calculées uniquement dans les zones de design. Les dégradés de couleur étant moins prononcés sur les figures b) et d) que sur les figures a) et c), les contraintes aux nœuds tendent à s'uniformiser autour de la valeur objectif.

Le tableau 4.12 contient les valeurs des critères d'évaluation pour les formes initiale et optimisée. Pour la forme optimisée, la contrainte de Von Mises moyenne diminue de plus de 9 % tandis que l'écart type diminue de près de 17 %. L'aire de la zone de design diminue de 6 % et la contrainte moyenne spécifique diminue de plus de 14 %. Le pourcentage de nœuds dont la contrainte est comprise dans l'intervalle de convergence passe de 7 à 8,4. Finalement, le pourcentage de nœuds où la contrainte est supérieure à 10 % de la valeur moyenne passe de 3 % à 0,1. L'ensemble des critères d'évaluation indiquent une amélioration de la forme optimisée par rapport à la forme initiale.

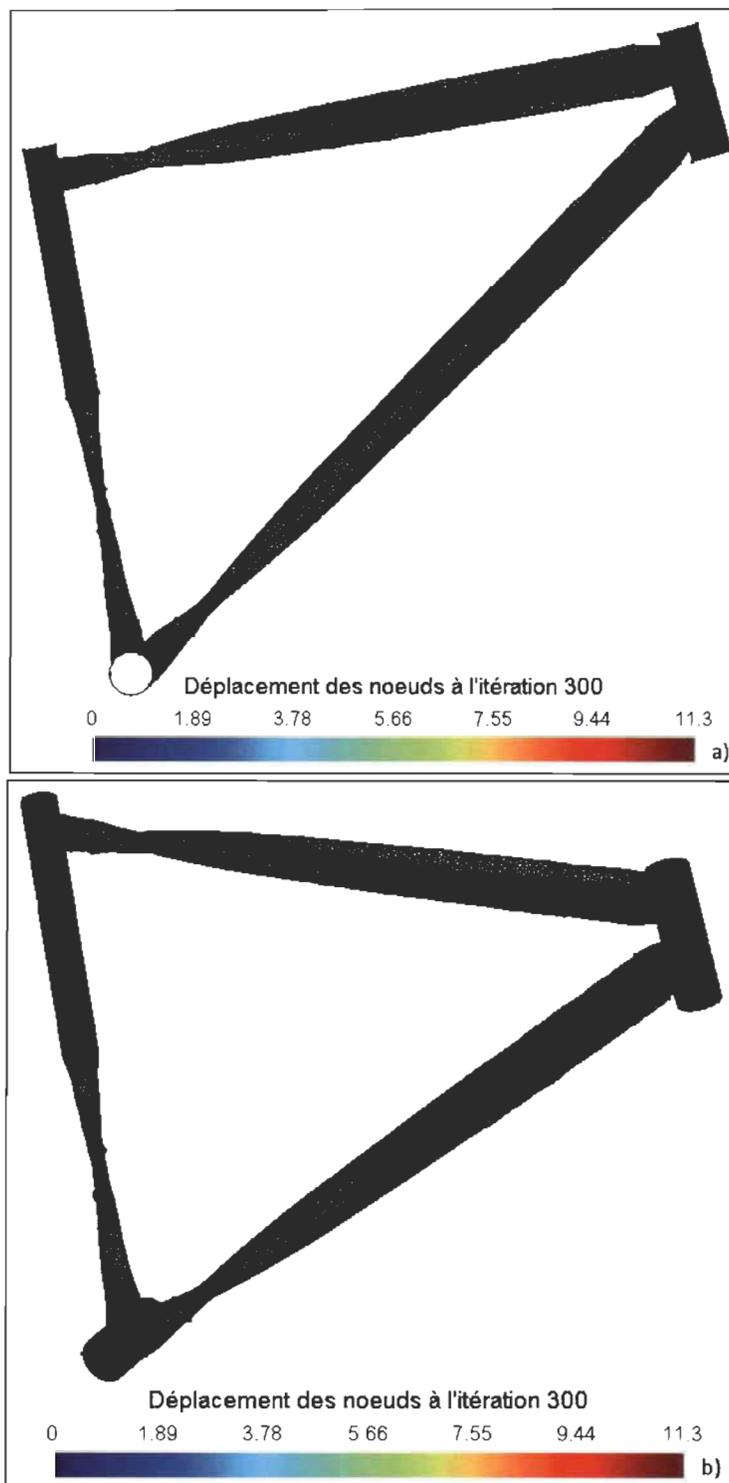


Figure 4.21 Cadre optimisé après 300 itérations de la MMN contrôlée a) Vue de face b) Vue 3D

Tableau 4.12  
 Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du cadre

Paramètres	Forme initiale	Forme optimisée (itération 300)	Variation (%)	Valeur préférable (faible ou élevée)
$\sigma_{moy}$ (MPa)	31,82	28,87	- 9,3	Faible
Écart type (MPa)	26,39	21,99	- 16,7	Faible
$A_d$ (m <sup>2</sup> )	0,1808	0,1700	- 6,0	Faible
$\sigma_s$ (MPa*m <sup>2</sup> )	5,75	4,91	- 14,6	Faible
% $NIC_{10\%}$	7,06	8,44	1,4	Élevée
% $NNC_{10\%}$	3,05	0,13	- 2,9	Faible

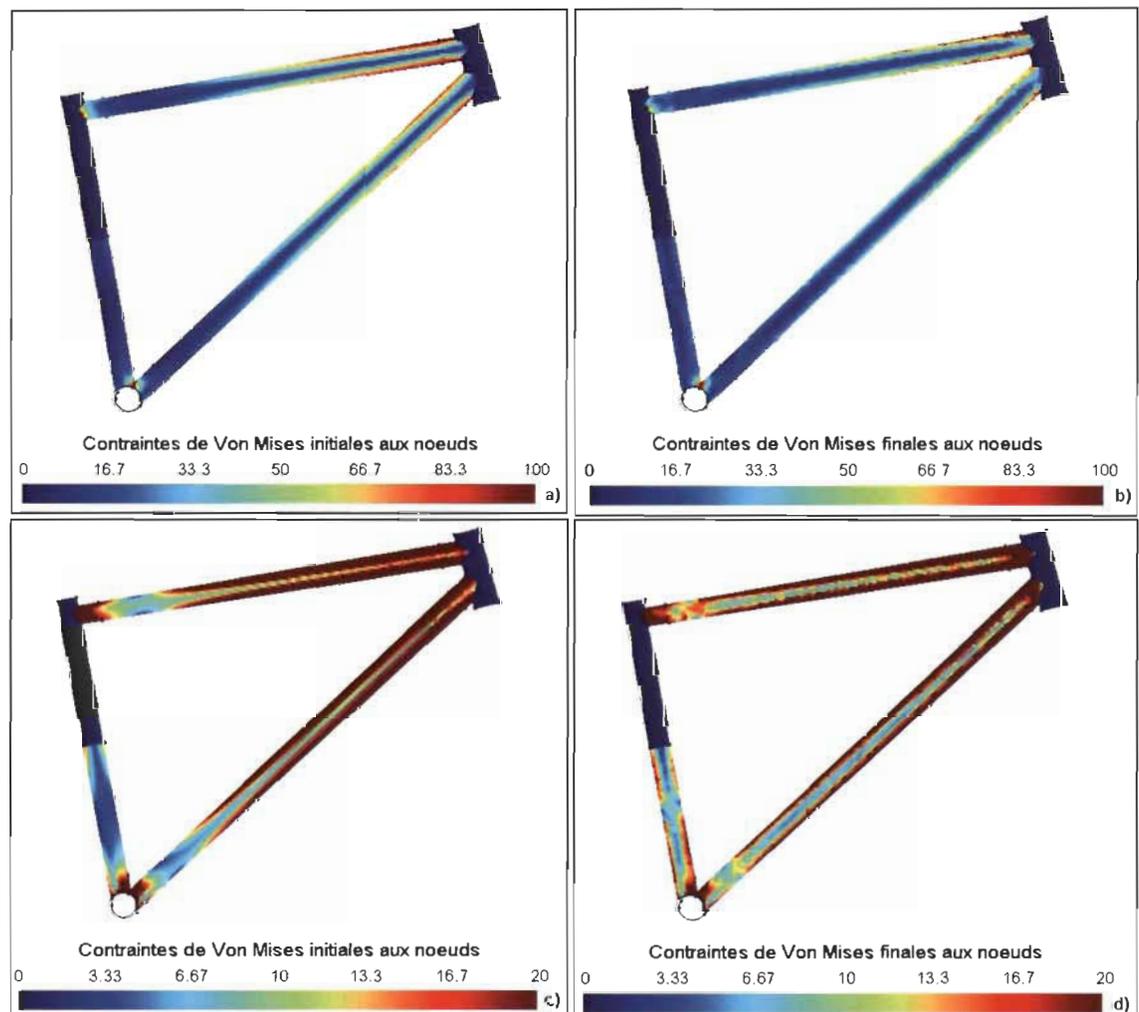


Figure 4.22 Comparaison de l'état de contrainte initial et final après 300 itérations de la MMN contrôlée a) et b) Contraintes de Von Mises initiales et finales avec échelle allant de 0 à 100 MPa c) et d) Contraintes de Von Mises initiales et finales avec échelle allant de 0 à 20 MPa

### 4.13 Conclusion

Dans un premier temps, la MMN classique a été intégrée à l'environnement de développement. Afin de démontrer la nécessité de contrôler le déplacement des nœuds, celle-ci a été appliquée au problème d'optimisation d'un tube à paroi mince en porte-à-faux. Quelques méthodes de contrôle du déplacement des nœuds ont ensuite été présentées. La méthode de contrôle fournissant les meilleurs résultats, se basant sur la norme du gradient de déplacement d'un triangle, a été intégré à la MMN classique pour créer la MMN contrôlée. Il a été démontré que ce critère de contrôle du déplacement des nœuds est indépendant de la taille des éléments. Celle-ci affecte toutefois le calcul des contraintes et donc le calcul du déplacement des nœuds à chaque itération de la MMN.

Quelques critères permettant d'évaluer la forme optimisée d'une pièce ont été définis. Le tableau 4.13 regroupe ces critères basés sur la valeur moyenne de la contrainte de Von Mises aux nœuds situés dans la zone de design, l'écart type des contraintes, le déplacement relatif maximal d'un nœud, l'aire totale de la surface, l'aire de la zone de design, la rigidité spécifique, la contrainte moyenne spécifique, le pourcentage de nœuds dont la contrainte est comprise dans l'intervalle de convergence et le pourcentage de nœud non contraints avec une valeur seuil de 10 % de la valeur moyenne.

Tableau 4.13  
Critères d'évaluation d'une forme optimisée

Paramètres	Valeur préférable (faible ou élevée)
$\sigma_{moy}$ (MPa)	Faible
Écart type (MPa)	Faible
$\delta_y$ (m)	Faible
$A_{tot}$ (m <sup>2</sup> )	Faible
$A_d$ (m <sup>2</sup> )	Faible
$k_s$ (N/m <sup>3</sup> )	Élevée
$\sigma_s$ (MPa*m <sup>2</sup> )	Faible
% $NIC_{10\%}$	Élevée
% $NNC_{10\%}$	Faible

Le tableau 4.14 contient les valeurs de paramètres de la MMN contrôlée ayant fournies de bons résultats jusqu'à présent. Le choix de la valeur du coefficient de convergence dépend de l'état de contrainte initial. Le critère de convergence devrait être étudié plus en détails. En attendant, un nombre maximal d'itérations est spécifié. Une valeur seuil de 0.2 pour la norme du gradient de déplacement assure habituellement un déplacement graduel de la surface. Le pas de l'algorithme du gradient est 1 multiplié par le déplacement du nœud avant remplacement et le critère d'arrêt est 0.001. La variation absolue minimale de la norme du gradient de la fonction  $f$ , entre 2 itérations de l'algorithme, est 0.0000001 et le nombre maximal d'itérations est de 1 000.

Tableau 4.14  
Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée

	<b>Paramètres</b>	<b>Valeurs utilisées</b>
Méthode du mouvement normal	Contrainte objectif $\sigma_o$	$\sigma_{VM}$ moy actualisée
	Coefficient de convergence $C$	0.05
	Critère de convergence à revoir	-
	Nombre maximal d'itérations	300
Contrôle basé sur le gradient de déplacement d'un triangle	Norme maximale $s$ du gradient de déplacement d'un triangle	0.2
	Pas $\alpha$ de l'algorithme du gradient	1*déplacement du nœud au début de l'algorithme
	Critère d'arrêt $\varepsilon$ de l'algorithme du gradient	0.001
	Variation minimale de la norme du gradient de la fonction à minimiser	0.0000001
	Nombre maximal d'itération de l'algorithme du gradient	1 000

La MMN contrôlée a été appliquée aux problèmes d'optimisation du tube à paroi mince en porte-à-faux et du triangle avant d'un cadre de vélo avec les valeurs de paramètres présentées au tableau 4.14. Dans les deux cas, l'ensemble des critères d'évaluation indiquent une amélioration de la forme optimisée par rapport à la forme initiale.

## CHAPITRE 5

-

## RÉSULTATS

Ce chapitre présente quelques exemples de résultats pour des problèmes d'optimisation solutionnés par la MMN contrôlée par le gradient de déplacement. Il est divisé en deux sections. La première section présente des exemples de problèmes d'optimisation où la méthode développée conduit à de bons résultats. La deuxième section présente des exemples de problèmes ne convenant pas à la MMN contrôlée.

Pour chaque exemple, les résultats sont présentés sous la forme de deux tableaux et de quatre figures a), b), c) et d). Le premier tableau contient les valeurs des paramètres de la méthode d'optimisation. Le deuxième tableau contient les critères d'évaluation de la forme optimisée si la méthode converge. La figure a) montre la forme initiale de l'objet et les conditions aux limites, tandis que la figure b) montre la forme optimisée. Les figures c) et d) montrent l'état de contrainte avant et après optimisation respectivement.

Les contraintes de Von Mises aux nœuds sont calculées sur l'ensemble du domaine de l'objet et non seulement dans les zones de design. Les valeurs des paramètres servant au contrôle sont identiques pour tous les cas tests et sont présentées au tableau 4.14. Dans certains cas, un lissage de la surface par barycentrage des nœuds est effectué, à un intervalle donné d'itérations, afin d'améliorer la forme optimisée.

## 5.1 Exemples de problèmes convenant à la MMN contrôlée

### 5.1.1 Tube en porte-à-faux avec normales actualisées

Les exemples d'optimisation effectués jusqu'à présent considéraient les normales de la triangulation initiale. Cette section présente les résultats d'optimisation obtenus pour le tube en porte-à-faux en actualisant les normales à chaque itération du processus d'optimisation. Le tableau 5.2 présente une comparaison des valeurs des critères d'évaluation pour la forme initiale et pour les formes optimisées obtenues en déplaçant les nœuds selon les normales initiales et selon les normales actualisées à chaque itération pour le tube en porte-à-faux. De façon générale, l'actualisation des normales a tendance à ralentir l'évolution de la forme.

Tableau 5.1

Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le tube en porte-à-faux avec les normales actualisées

Paramètres	Valeurs utilisées
Coefficient de convergence $C$	0.05
Nombre maximal d'itérations	300

Tableau 5.2

Comparaison des paramètres pour la forme initiale et pour les formes optimisées obtenues en déplaçant les nœuds selon les normales initiales et selon les normales actualisées à chaque itération pour le tube en porte-à-faux

Paramètres	Forme initiale	Forme optimisée (normales initiales)	Forme optimisée (normales act.)	Valeur préférable (faible ou élevée)
$\sigma_{moy}$ (MPa)	61,74	59,61	61,32	Faible
Écart type (MPa)	45,46	40,70	42,15	Faible
$\delta_y$ (m)	-0,0211	- 0,0173	- 0,0175	Faible
$A_{tot}$ (m <sup>2</sup> )	0,1175	0,1149	0,1147	Faible
$A_d$ (m <sup>2</sup> )	0,1097	0,1070	0,1069	Faible
$k_s$ (N/m <sup>3</sup> )	403 348	503 076	498 194	Élevée
$\sigma_s$ (MPa*m <sup>2</sup> )	6,77	6,38	6,55	Faible
% $NIC_{10\%}$	7,50	9,44	9,79	Élevée
% $NNC_{10\%}$	0,31	0	0	Faible

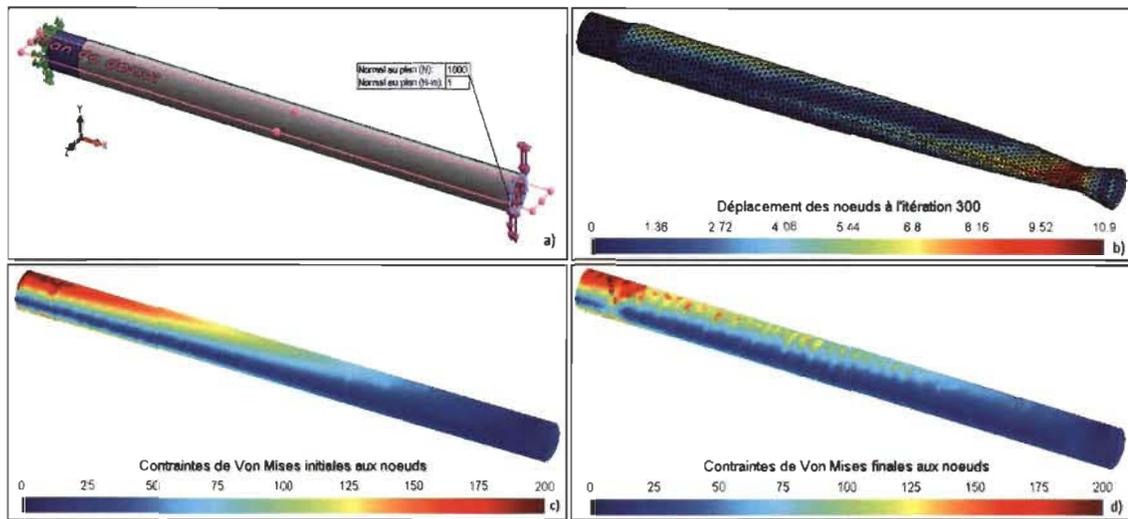


Figure 5.1 Tube en porte-à-faux avec normales actualisées à chaque itération a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 300 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final

### 5.1.2 Cadre de vélo avec normales actualisées

Cette section présente les résultats d'optimisation obtenus pour le triangle avant d'un cadre de vélo en actualisant les normales à chaque itération. Le tableau 5.13 présente une comparaison des valeurs des critères d'évaluation pour la forme initiale et pour les formes optimisées obtenues en déplaçant les nœuds selon les normales initiales et selon les normales actualisées à chaque itération pour le tube en porte-à-faux. Encore une fois, l'actualisation des normales a tendance à ralentir l'évolution de la forme.

Tableau 5.3

Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le cadre avec les normales actualisées à chaque itération

Paramètres	Valeurs utilisées
Coefficient de convergence $C$	0.05
Nombre maximal d'itérations	140

Tableau 5.4

Comparaison des paramètres pour la forme initiale du cadre et pour les formes optimisées obtenues en déplaçant les nœuds selon les normales initiales et selon les normales actualisées à chaque itération

Paramètres	Forme initiale	Forme optimisée (normales non-act.)	Forme optimisée (normales act.)	Valeur préférable (faible ou élevée)
$\sigma_{moy}$ (MPa)	31,82	28,87	29,03	Faible
Écart type (MPa)	26,39	21,99	23,92	Faible
$A_d$ (m <sup>2</sup> )	0,1808	0,1700	0,1739	Faible
$\sigma_s$ (MPa*m <sup>2</sup> )	5,75	4,91	5,05	Faible
% $NIC_{10\%}$	7,06	8,44	7,93	Élevée
% $NNC_{10\%}$	3,05	0,13	0,61	Faible



Figure 5.2 Cadre de vélo avec les normales actualisées à chaque itération a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 140 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final

### 5.1.3 Cadre de vélo en flexion latérale

Cette section présente les résultats d'optimisation obtenus pour le triangle avant d'un cadre de vélo avec le tube de direction encastré et une force transversale de 250 N appliquée au niveau du boîtier de pédalier. Pour la forme optimisée, la contrainte moyenne, l'écart type et la contrainte moyenne spécifique diminuent respectivement d'environ 15 %, 6 % et 21 % ce qui indique une amélioration de la forme de la pièce.

Tableau 5.5  
Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le cadre en flexion latérale

Paramètres	Valeurs utilisées
Coefficient de convergence $C$	0.05
Nombre maximal d'itérations	300

Tableau 5.6  
Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du cadre en flexion latérale

Paramètres	Forme initiale	Forme optimisée (itération 300)	Variation (%)	Valeur préférable (faible ou élevée)
$\sigma_{moy}$ (MPa)	18,97	16,04	- 15,4	Faible
Écart type (MPa)	12,14	11,38	- 6,3	Faible
$A_d$ (m <sup>2</sup> )	0,1808	0,1689	- 6,6	Faible
$\sigma_s$ (MPa*m <sup>2</sup> )	3,43	2,71	- 21,0	Faible
% $NIC_{10\%}$	19,22	7,08	- 12,1	Élevée
% $NNC_{10\%}$	0	0	0	Faible

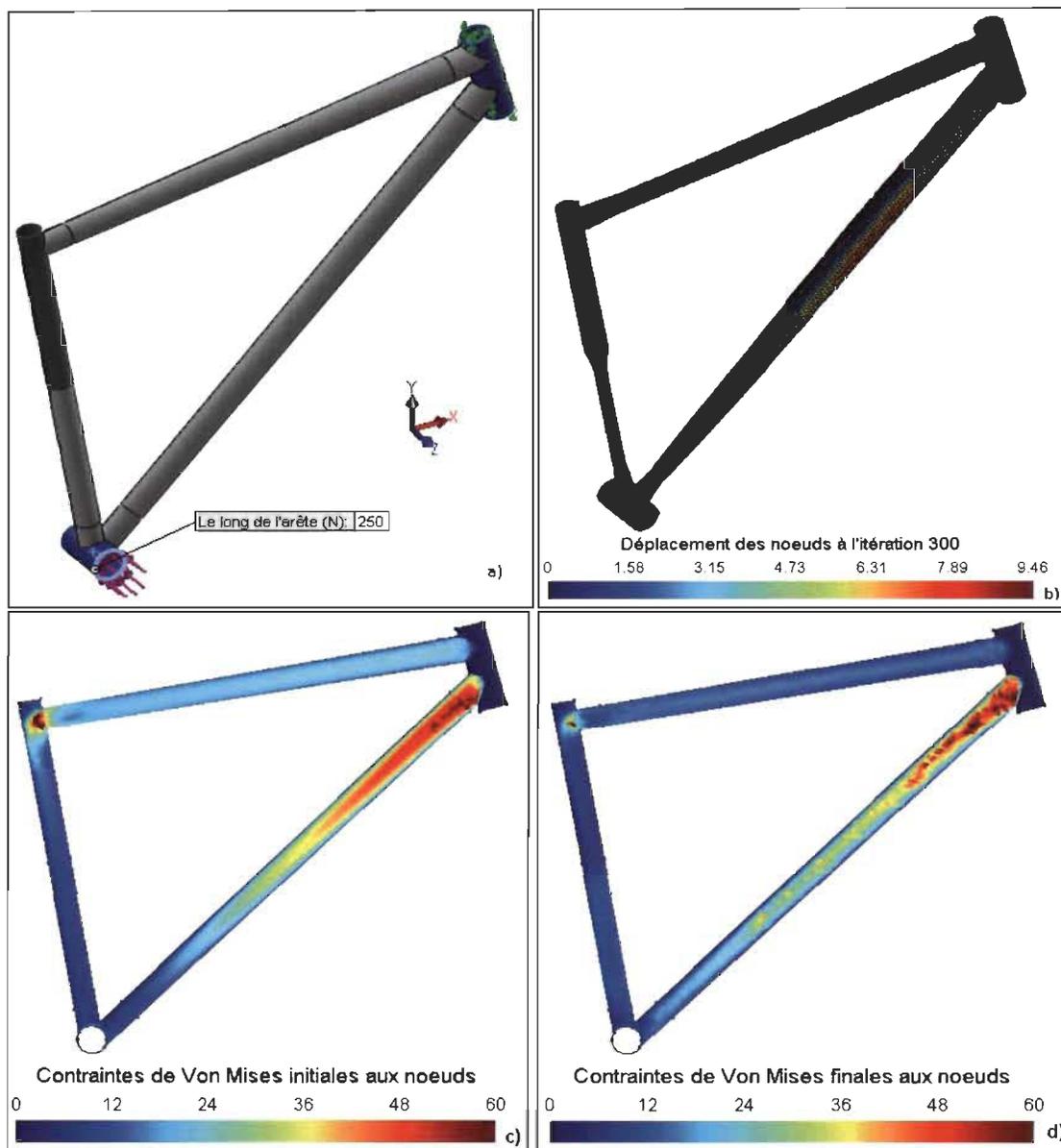


Figure 5.3 Cadre de vélo en flexion latérale a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 300 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final

### 5.1.4 Cadre de vélo avec force appliquée sous le tube de direction

Cette section présente les résultats d'optimisation obtenus pour le triangle avant d'un cadre de vélo avec le boîtier de pédalier et le haut du tube vertical encastres et une force de 5 000 N appliquée sous le tube de direction. Pour la forme optimisée, la contrainte moyenne, l'écart type et la contrainte moyenne spécifique diminuent respectivement d'environ 4 %, 8 % et 9 % ce qui indique une amélioration de la forme de la pièce.

Tableau 5.7  
Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le cadre avec force appliquée sous le tube de direction

Paramètres	Valeurs utilisées
Coefficient de convergence $C$	0.03
Nombre maximal d'itérations	200
Lissage par barycentrage des nœuds effectué à toutes les 100 itérations	

Tableau 5.8  
Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du cadre avec force appliquée sous le tube de direction

Paramètres	Forme initiale	Forme optimisée (itération 200 avec lissage)	Variation (%)	Valeur préférable (faible ou élevée)
$\sigma_{moy}$ (MPa)	33,88	32,62	- 3,7	Faible
Écart type (MPa)	25,90	23,80	- 8,1	Faible
$A_d$ (m <sup>2</sup> )	0,1808	0,1714	- 5,2	Faible
$\sigma_s$ (MPa*m <sup>2</sup> )	6,12	5,59	- 8,7	Faible
% $NIC_{10\%}$	13,05	17,71	4,7	Élevée
% $NNC_{10\%}$	14,38	14,03	- 0,4	Faible

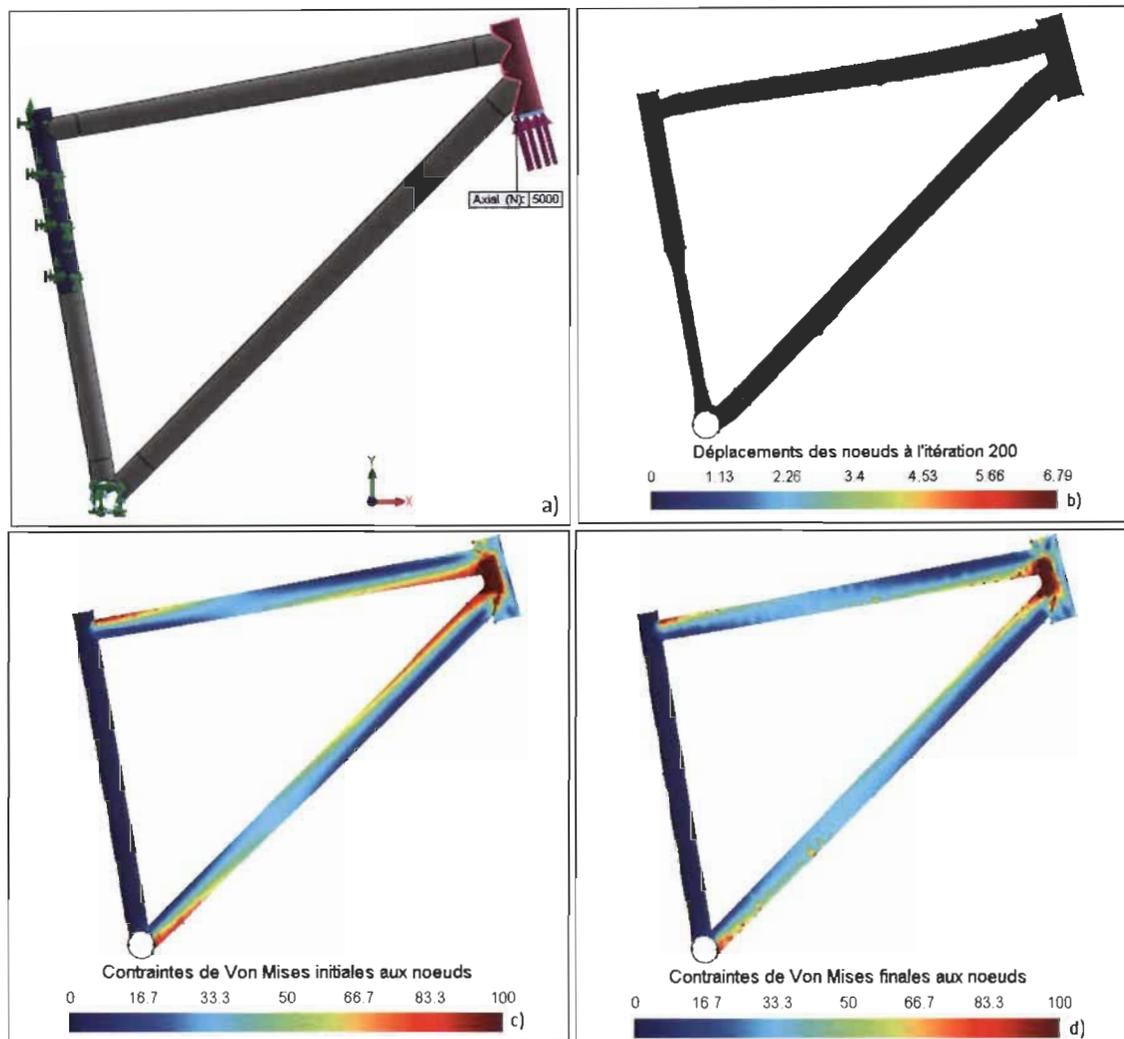


Figure 5.4 Cadre de vélo avec force appliquée sous le tube de direction a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 300 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final

### 5.1.5 Support en U en flexion

Les problèmes d'optimisation des sections 5.1.5, 5.2.2 et 5.2.3 sont tirés de Shimoda et Liu (2014). Le premier consiste en un support en forme de U, le second est un demi-cylindre et le troisième est un joint en forme de T. Dans chaque cas, les contraintes induites sont dues à la flexion de la pièce. Les trois pièces sont modélisées par une coque et sont maillées à l'aide d'éléments de plaques à trois nœuds. La méthode d'optimisation proposée par les auteurs vise à minimiser la « compliance » ou la souplesse d'une pièce en déplaçant les nœuds dans la direction normale à la surface.

La figure 5.5 a) montre la forme initiale du support et les conditions aux limites. Une force de 1 N est appliquée sur les arêtes verticales situées de part et d'autre de l'ouverture de manière à refermer le support sur lui-même. L'arête tracée en orange est bloquée en translation dans la direction de l'axe Z et en rotation autour des axes X et Y. Finalement, les translations selon les axes X et Y sont bloquées pour le sommet identifié. Les nœuds situés sur les arêtes définissant le contour sont fixes (non-design). La méthode converge en 418 itérations étant donné que tous les nœuds sont remplacés par l'algorithme du gradient puis fixés. La figure 5.5 b) montre la forme obtenue.

La contrainte moyenne pour la forme optimisée est environ 9 % plus faible que pour la forme initiale. L'aire de la zone de non-design, quant à elle, augmente de près de 8 %, ce qui n'est pas souhaitable. La contrainte moyenne spécifique est tout de même environ 2 % plus faible pour la forme optimisée. Finalement, le pourcentage de nœuds non contraints est légèrement plus faible pour la forme optimisée.

Tableau 5.9  
Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le support en U

Paramètres	Valeurs utilisées
Coefficient de convergence $C$	0.04
Nombre maximal d'itérations	500

Tableau 5.10  
 Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du support en U

Paramètres	Forme initiale	Forme optimisée (itération 418)	Variation (%)	Valeur préférable (faible ou élevée)
$\sigma_{moy}$ (MPa)	3,12	2,84	- 9,0	Faible
Écart type (MPa)	1,60	1,81	13,1	Faible
$\delta_z$ (m)	$7,42 \times 10^{-4}$	$7,31 \times 10^{-4}$	- 1,5	Faible
$A_{tot}$ (m <sup>2</sup> )	0,0229	0,0246	7,4	Faible
$A_d$ (m <sup>2</sup> )	0,0228	0,0246	7,9	Faible
$k_s$ (N/m <sup>3</sup> )	58 852	55 609	- 5,5	Élevée
$\sigma_s$ (MPa*m <sup>2</sup> )	0,0713	0,0698	- 2,2	Faible
% $NIC_{10\%}$	10,58	4,38	- 6,2	Élevée
% $NNC_{10\%}$	0,43	0,21	- 0,2	Faible

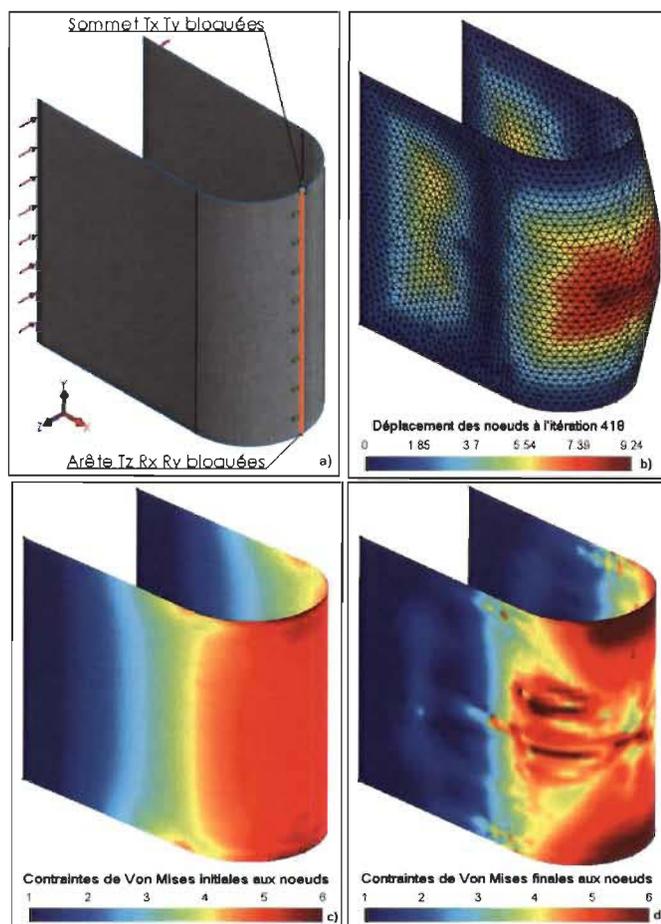


Figure 5.5 Support en U en flexion a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée c) État de contrainte initial d) État de contrainte final

### 5.1.6 Tube encastré aux deux extrémités avec chargement central

La figure 5.6 a) montre la forme initiale et les conditions aux limites pour un tube encastré aux deux extrémités et chargé en son centre. Une zone de non-design est définie près de chaque encastrement et au centre du tube. Une force de 5 000 N est appliquée sur l'arête circulaire située au centre du tube.

Pour la forme optimisée, l'écart type des contraintes augmente de plus de 13 % ce qui indique une dispersion des contraintes autour de la valeur objectif. Toutefois, le pourcentage de nœuds dont la contrainte est comprise dans l'intervalle de convergence augmente d'environ 3,4 % ce qui signifie que les contraintes tendent à s'uniformiser dans certaines zones de la surface. De plus, l'aire de la zone de design diminue d'environ 11 %.

Tableau 5.11

Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le tube encastré aux deux extrémités avec chargement central

Paramètres	Valeurs utilisées
Coefficient de convergence $C$	0.08
Nombre maximal d'itérations	200
Lissage par barycentrage des nœuds effectué à toutes les 20 itérations	

Tableau 5.12

Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du tube encastré au deux extrémités avec chargement central

Paramètres	Forme initiale	Forme optimisée (itération 200)	Variation (%)	Valeur préférable (faible ou élevée)
$\sigma_{moy}$ (MPa)	55,57	68,61	23,5	Faible
Écart type (MPa)	33,78	38,42	13,7	Faible
$A_d$ (m <sup>2</sup> )	0,5632	0,5003	- 11,2	Faible
$\sigma_s$ (MPa*m <sup>2</sup> )	31,29	34,33	9,7	Faible
% $NIC_{10\%}$	8,98	12,38	3,4	Élevée
% $NNC_{10\%}$	0,22	0	- 0,22	Faible

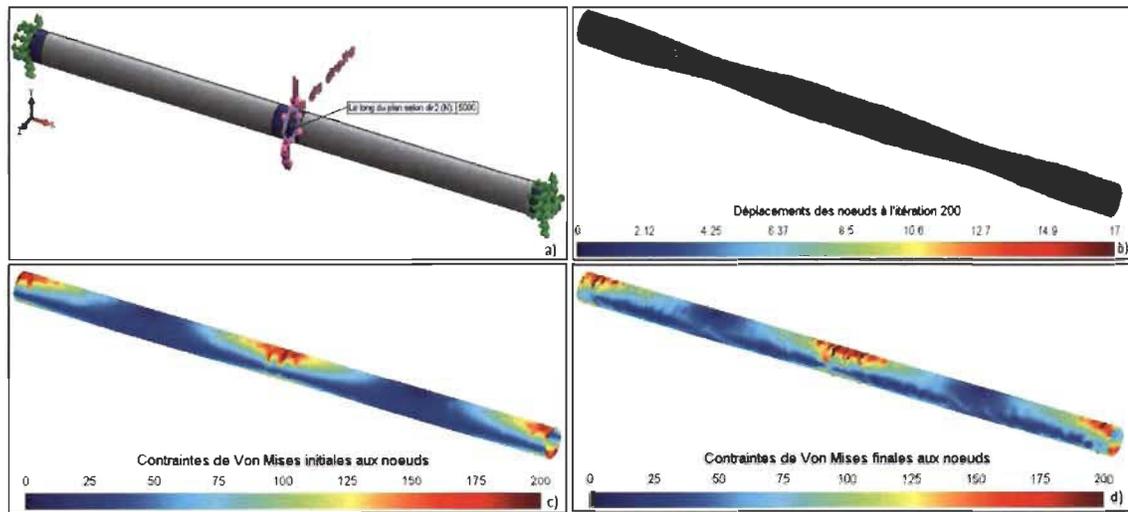


Figure 5.6 Tube encastré aux deux extrémités avec chargement central a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 200 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final

## 5.2 Exemples de problèmes ne convenant pas à la MMN contrôlée

### 5.2.1 Tube soumis à des efforts de flexion et de tension

Les contraintes initiales qui tendent vers zéro près de la fibre neutre et à l'extrémité libre du tube en flexion nuit à leur uniformisation. Pour pallier ce problème, un effort de traction de 50 000 N est ajouté et la force transversale est réduite à 250 N. La figure 5.7 b) montre la forme obtenue après 50 itérations. La méthode diverge dus aux défauts du maillage qui affectent significativement les contraintes induites par la traction.

Tableau 5.13  
Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le tube soumis à des efforts de flexion et de tension

Paramètres	Valeurs utilisées
Coefficient de convergence $C$	0.3
Nombre maximal d'itérations	50

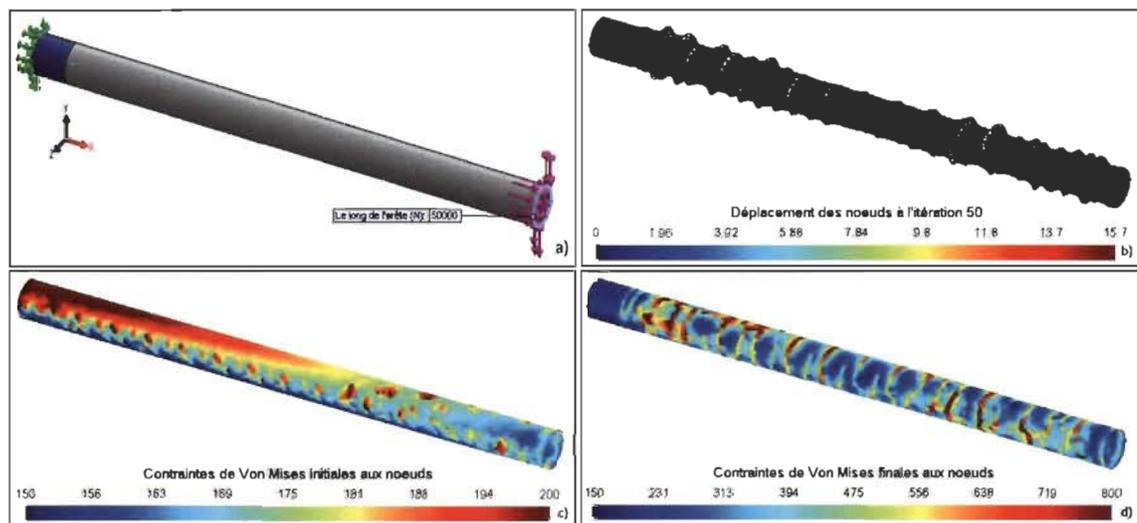


Figure 5.7 Tube à paroi mince soumis à des efforts de flexion et de traction a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 50 itérations c) État de contrainte initial avec une échelle allant de 150 à 200 MPa d) État de contrainte final avec une échelle allant de 150 à 800 MPa

### 5.2.2 Demi-cylindre en flexion

La figure 5.8 a) montre la forme initiale et les conditions aux limites pour un demi-cylindre en flexion. Les deux arêtes identifiées sur cette figure sont bloquées en translation, tandis qu'une force de 200 N est appliquée sur l'arête milieu dans la direction  $-Y$ . Les nœuds situés sur les arêtes définissant le contour du cylindre sont fixes au départ (non-design). La méthode converge en 108 itérations étant donné que tous les nœuds sont remplacés par l'algorithme du gradient puis fixés.

La figure 5.8 d) montre que les contraintes ont tendance à tendre vers les valeurs minimales et maximales plutôt que vers la valeur objectif. De plus, les valeurs de tous les critères d'évaluation sont meilleures pour la forme initiale que pour la forme finale, ce qui signifie que la MMN n'est pas adéquate pour ce type de problème d'optimisation.

Tableau 5.14

Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le demi-cylindre en flexion

Paramètres	Valeurs utilisées
Coefficient de convergence $C$	0.1
Nombre maximal d'itérations	200

Tableau 5.15

Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du demi-cylindre

Paramètres	Forme initiale	Forme optimisée (itération 108)	Variation (%)	Valeur préférable (faible ou élevée)
$\sigma_{moy}$ (MPa)	19,31	19,75	2,3	Faible
Écart type (MPa)	7,61	10,05	32,0	Faible
$\delta_y$ (m)	$-7,49 \times 10^{-4}$	$-8,94 \times 10^{-4}$	19,4	Faible
$A_{tot}$ (m <sup>2</sup> )	0,0628	0,0649	3,3	Faible
$k_s$ (N/m <sup>3</sup> )	$2,13 \times 10^6$	$1,72 \times 10^6$	- 19,2	Élevée
$\sigma_s$ (MPa*m <sup>2</sup> )	1,21	1,28	5,8	Faible
% $NIC_{10\%}$	13,13	10,25	- 2,9	Élevée
% $NNC_{10\%}$	0,12	0,39	0,3	Faible

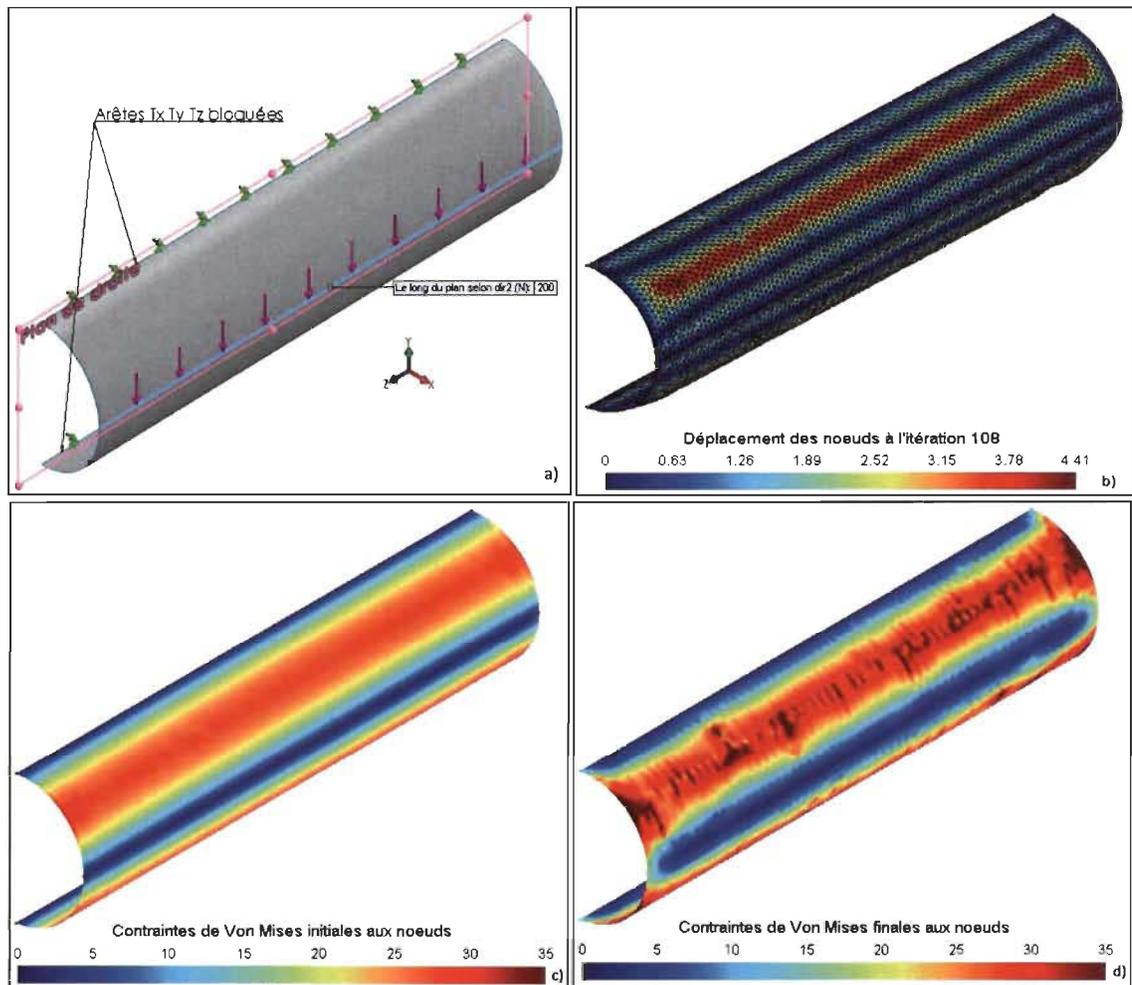


Figure 5.8 Demi-cylindre en flexion a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 108 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final

### 5.2.3 Joint en T en flexion

La figure 5.9 a) montre la forme initiale et les conditions aux limites pour un joint en T en flexion. Les deux contours situés de part et d'autre du tube vertical sont encastres. Une force de 1 000 N est appliquée dans la direction X le long des deux arêtes situées de part et d'autre du tube vertical. Les trois contours carrés sont des zones de non-design.

À l'exception du pourcentage de nœuds dont la contrainte est comprise dans l'intervalle de convergence qui subit une augmentation négligeable d'environ 0,1 % et de l'aire de la surface qui subit une diminution négligeable de 0,4 %, les valeurs de tous les critères d'évaluation sont meilleures pour la forme initiale que pour la forme finale. La MMN n'est donc pas adéquate pour ce type de problème.

Tableau 5.16  
Valeurs des paramètres de la MMN contrôlée pour le joint en T

Paramètres	Valeurs utilisées
Coefficient de convergence $C$	0.03
Nombre maximal d'itérations	100
Lissage par barycentrage des nœuds effectué à toutes les 20 itérations.	

Tableau 5.17  
Comparaison des paramètres pour la forme initiale et optimisée du joint en T

Paramètres	Forme initiale	Forme optimisée (itération 100)	Variation (%)	Valeur préférable (faible ou élevée)
$\sigma_{moy}$ (MPa)	87,59	107,84	23,1	Faible
Écart type (MPa)	46,26	77,46	67,4	Faible
$\delta_x$ (m)	$-3,89 \times 10^{-3}$	$-4,88 \times 10^{-3}$	25,4	Faible
$A_{tot}$ (m <sup>2</sup> )	0,0708	0,0705	- 0,4	Faible
$k_s$ (N/m <sup>3</sup> )	$3,63 \times 10^6$	$2,91 \times 10^6$	- 19,8	Élevée
$\sigma_s$ (MPa*m <sup>2</sup> )	6,20	7,60	22,6	Faible
% $NIC_{10\%}$	8,85	8,93	0,1	Élevée
% $NNC_{10\%}$	0	0,07	0,1	Faible

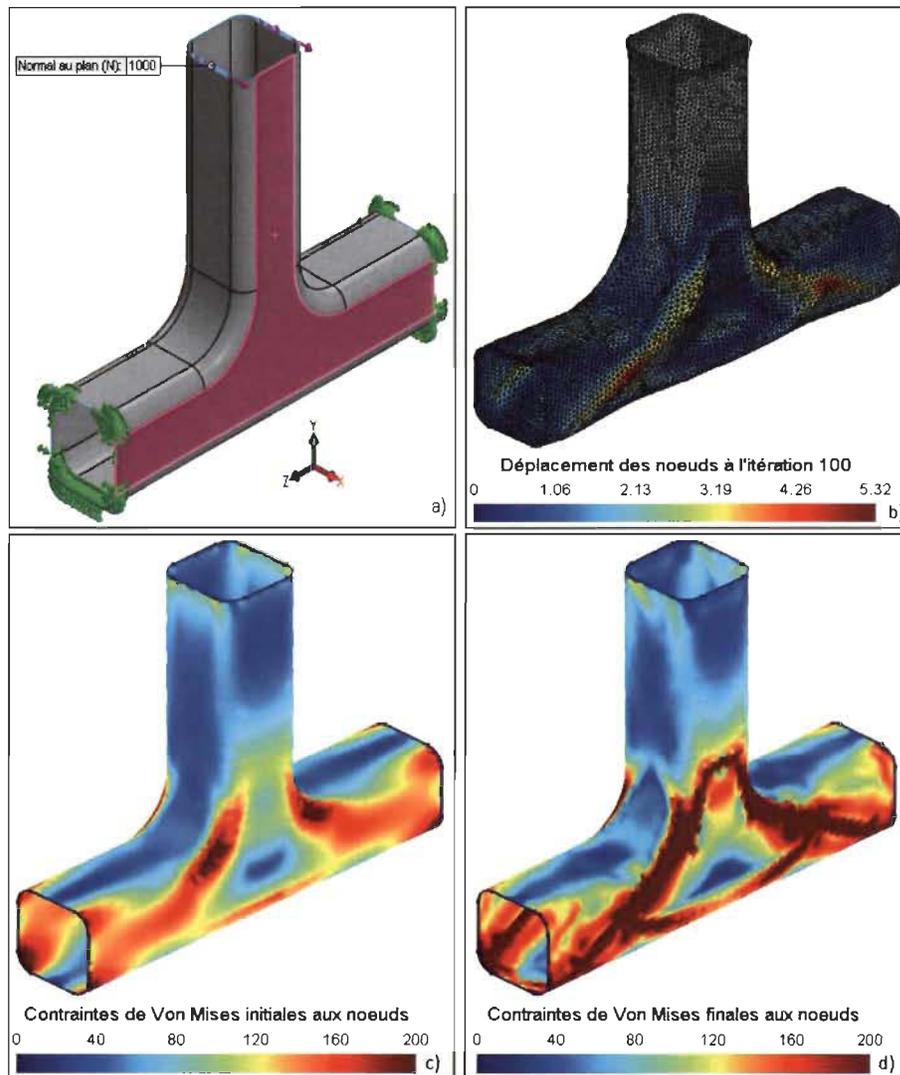


Figure 5.9 Joint en T en flexion a) Forme initiale et conditions aux limites b) Forme optimisée après 800 itérations c) État de contrainte initial d) État de contrainte final

## CHAPITRE 6

-

## CONCLUSION

Malgré le grand nombre de systèmes de conception assistée par ordinateur actuellement sur le marché, les méthodes d'optimisation y sont encore très peu intégrées. Cette recherche visait donc à intégrer une méthode d'optimisation de structures, adaptée aux cadres de vélos, au processus de CAO. Ainsi, la méthode du mouvement normal fut implantée avec succès dans un environnement de développement permettant d'effectuer des calculs par éléments finis sur des modèles surfaciques.

La MMN a ensuite été appliquée à un problème d'optimisation faisant intervenir un tube à paroi mince. Cela a permis de démontrer une importante lacune de la méthode au niveau du contrôle du déplacement des nœuds pour des problèmes d'optimisation en trois dimensions. Afin de palier ce problème, différents types de contrôles ont été étudiés. Le contrôle fournissant les meilleurs résultats consiste à respecter une valeur seuil sur la norme du vecteur gradient de déplacement de chaque triangle situé dans la zone de design possédant deux nœuds fixes. Pour les triangles dépassant cette valeur limite, le remplacement des nœuds mobiles est appréhendé sous la forme d'un problème de minimisation de la somme de l'erreur au carré entre la norme du gradient de déplacement de chaque triangle et la valeur maximale imposée.

La MMN contrôlée a ensuite été appliquée à un tube à paroi mince en porte-à-faux et au triangle avant d'un cadre de vélo soumis à un chargement externe et à des déplacements imposés. Dans les deux cas, la méthode assure une variation graduelle de la surface. De plus, les valeurs de contraintes aux nœuds sont plus uniformes pour les pièces optimisées que pour les pièces initiales.

## Chapitre 6 - Conclusion

Finalement, la MMN contrôlée a été appliquée à quelques problèmes d'optimisation faisant intervenir une modélisation surfacique. Dans certains cas, la méthode permet non seulement d'uniformiser les valeurs de contraintes aux nœuds, mais également d'augmenter la rigidité de la pièce et de diminuer la contrainte moyenne spécifique. Dans d'autres cas, le déplacement de la frontière d'une pièce dans la direction normale ne permet pas d'uniformiser les contraintes aux nœuds.

Au cours de ce travail, il a été démontré que le critère de convergence de la MMN, basé sur l'écart admissible entre la valeur de contrainte en chaque nœud et la valeur objectif, n'est pas adéquat. Ceci est dû au fait qu'une valeur de contrainte trop élevée ou trop faible en un seul nœud du maillage peut empêcher la convergence de la méthode. Il serait donc pertinent de définir un critère de convergence plus global.

De plus, la méthode d'optimisation peut conduire à une forme optimisée de section très faible. Ainsi, advenant un rapport section/longueur trop faible, la pièce risque de flamber. Pour éviter ce phénomène, un déplacement maximal pourrait être spécifié afin de maintenir une section minimale.

L'utilisation d'un coefficient de convergence variable pourrait réduire le nombre d'itérations de la méthode. Dans un même ordre d'idées, l'utilisation d'un pas variable pour l'algorithme du gradient permettrait de replacer les nœuds en moins d'itérations.

Finalement, il serait intéressant d'appliquer la MMN contrôlée à un cadre de vélo entier faisant intervenir des chargements et déplacements imposés plus réalistes.

## RÉFÉRENCES

- Bazergui, A., T. Bui-Quoc, et al. (2002). "Résistance des matériaux (3e édition)." Presses Internationales Polytechnique.
- Christensen, P. W. et A. Klarbring (2008). "An introduction to structural optimization."
- Cuillière, J.-C., V. François, et al. (2011). From CAD to Topology Optimization Applied to Parts and Structures. Design and Modelling of Mechanical Systems international conference, May. Sousse, Tunisia.
- Cuillière, J. C. (1993). "Pré-optimisation de maillages automatiques tridimensionnels pour les méthodes numériques - Application à l'ingénierie simultanée, *Thèse de doctorat*."
- Cuillière, J. C. (1997). "A direct method for the automatic discretization of 3D parametric curves." CAD Computer Aided Design **29**(9): 639-647.
- Cuillière, J. C. et V. François (2014). "Integration of CAD, FEA and topology optimization through a unified topological model." Computer-aided design and applications.
- Das, R. et R. Jones (2009). "Development of a 3D Biological method for fatigue life based optimisation and its application to structural shape design." International Journal of Fatigue **31**: 309-321.
- Drouet, J. M. (2002). "Méthode de création de forme optimale en élastostatique bidimensionnelle, *Thèse de doctorat*."
- Eschenauer, H. A. et N. Olhoff (2001). "Topology optimization of continuum structures: A review." Applied Mechanics Reviews **54**(4): 331-389.
- François, V. (1998). "Méthodes de maillage et de remaillage automatiques appliquées à la modification de modèle dans le contexte de l'ingénierie simultanée, *Thèse de doctorat*."
- Frey, J. P. et P. L. George (2008). "Mesh generation *Application to finite elements 2nd edition*." John Wiley & Sons.

## Références

- Geuzaine, C. et J. F. Remacle (2009). "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post- processing facilities." International Journal for Numerical Methods in Engineering **79**(11): 1309-1331.
- Gordon, J. G. (1978). "Structures or Why Things Don't Fall Down." Penguin.
- Hsu, Y. L., S. D. Sheppard, et al. (1995). "The curvature function method for two-dimensional shape optimization under stress constraints." Computers and Structures **55**(4): 647-657.
- Huang, X. et Y. M. Xie (2010). "A further review of ESO type methods for topology optimization." Structural and Multidisciplinary Optimization **41**(5): 671-683.
- Khalil, H. (2009). "Développement des techniques d'optimisation de forme pour la conception de composants hyperfréquences, *Thèse de doctorat*."
- Li, Q., G. P. Steven, et al. (1999). "On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization." Structural Optimization **18**(1): 67-73.
- Mattheck, C. et S. Burkhardt (1990). "A new method of structural shape optimization based on biological growth." International Journal of Fatigue **12**(3): 185-190.
- Miura, H. (1990). "An improved fully stressed design algorithm for plate/shell structures." Structural Optimization **2**(4): 233-237.
- Mortenson E., M. (1985). "Geometric Modeling." John Wiley & Sons.
- Parvizian, J. et R. T. Fenner (1997). "Shape optimisation by the boundary element method: A comparison between mathematical programming and normal movement approaches." Engineering Analysis with Boundary Elements **19**(2): 137-145.
- Parvizian, J. et R. T. Fenner (2002). "Shape optimization of fillets by the boundary element method." Journal of Strain Analysis for Engineering Design **37**(2): 93-100.
- Patnaik, S. N. et D. A. Hopkins (1998). "Optimality of a fully stressed design." Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **165**(1-4): 215-221.
- Remacle, J. F. (2002). "Mécanique des structures."
- Rozvany, G. I. N. (2009). "A critical review of established methods of structural topology optimization." Structural and Multidisciplinary Optimization **37**(3): 217-237.

## Références

- Rozvany, G. I. N. et O. M. Querin (2002). "Combining ESO with rigorous optimality criteria." International Journal of Vehicle Design **28**(4): 294-299.
- Saitou, K., K. Izui, et al. (2005). "A survey of structural optimization in mechanical product development." Journal of Computing and Information Science in Engineering **5**(3): 214-226.
- Shimoda, M. et Y. Liu (2014). "A non-parametric free-form optimization method for shell structures." Structural and Multidisciplinary Optimization **50**: 409-423.
- Umetani, Y. et S. Hirai (1975). "Adaptive shape optimization method for structural material using the growing-reforming procedure." Joint JSME-ASME Applied Mechanics Western Conference: 359-365.
- Umetani, Y. et S. Hirai (1978a). "Adaptive optimal shapes of beam and arch structures." Bull JSME **21**(153): 398-404.
- Umetani, Y. et S. Hirai (1978b). "Shape optimization for beams subject to displacement restrictions on the basis of the growing-reforming procedure." Bull JSME **21**(157): 1113-1119.
- Wessel, C., A. Cisilino, et al. (2004). "Structural shape optimisation using boundary elements and the biological growth method." Structural and Multidisciplinary Optimization **28**(2-3): 221-227.
- Wu, Z. (2005). "An efficient approach for shape optimization of components." International Journal of Mechanical Sciences **47**(10): 1595-1610.
- Xie, Y. M. et G. P. Steven (1992). "Shape and layout optimization via an evolutionary procedure." Proceedings of the International Conference Comput. Eng.
- Xie, Y. M. et G. P. Steven (1993). "A simple evolutionary procedure for structural optimization." Computers and Structures **49**(5): 885-896.

*Sites Web :*

[www.code-aster.org](http://www.code-aster.org) (Clés documentaires : U1.03.00, U2.01.05, U3.01.00, U3.12.01, U3.12.03, U3.14.01, U4.41.01, U4.42.01, U4.43.01, U4.43.03, U4.44.01, U4.51.01, U4.74.01, U4.81.01, U4.91.01 et U7.05.32)

[www.geuz.org/gmsh/](http://www.geuz.org/gmsh/)

[www.opencascade.org/](http://www.opencascade.org/)

[www.uqtr.ca/ericca](http://www.uqtr.ca/ericca)

[www.uqtr.ca/geniemecanique](http://www.uqtr.ca/geniemecanique)

## ANNEXE A

-

### ÉCRITURE AUTOMATIQUE DES FICHIERS REQUIS PAR CODE\_ASTER

Tel que mentionné à la section 3.2.6, trois fichiers sont requis par le logiciel Code\_Aster pour effectuer un calcul par éléments finis : le fichier d'exportation, le fichier de maillage et le fichier de commandes. Cette section présente les différences inhérentes entre une modélisation volumique ou surfacique. Comme le fichier d'exportation sert principalement à indiquer l'emplacement des autres fichiers, celui-ci est indépendant de la modélisation utilisée. Le lecteur est invité à se référer à la clé documentaire « U1.03.00 » pour un survol des grands principes de fonctionnement de Code\_Aster.

#### **A.1 Fichier de maillage**

Le fichier de maillage<sup>11</sup> contient les nœuds et les mailles du maillage. Une maille est un élément topologique plan ou volumique (point, segment, triangle, tétraèdre, etc.) servant à définir les éléments finis, les conditions aux limites et le matériau, nécessaires au calcul. Afin de faciliter la modélisation et l'analyse des résultats, l'utilisateur peut définir des groupes d'éléments regroupant des nœuds ou des mailles qui possèdent une propriété commune. Ces groupes facilitent l'application des conditions aux limites à certaines parties du maillage ainsi que la génération des résultats.

En modélisation coque, les tétraèdres à quatre nœuds, appelés « TETRA4 » sont remplacés par des triangles à trois nœuds appelés « TRIA3 ». De plus, le groupe de mailles « GMV0 », où « 0 » correspond au numéro du volume, est remplacé par le groupe « GMC0 », où « 0 » correspond au numéro de la coque.

---

<sup>11</sup> U3.01.00

## A.2 Fichier de commandes

### A.2.1 Affectation de la modélisation au maillage

La première différence, en ce qui a trait au fichier de commandes, entre une modélisation volumique et une modélisation coque se situe au niveau de l'opérateur « AFFE\_MODELE<sup>12</sup> ». Il sert à définir le phénomène physique étudié et à affecter une modélisation à une partie ou à l'ensemble du maillage.

En modélisation volumique, une modélisation « 3D<sup>13</sup> » permet, entre autres, l'étude de phénomènes mécaniques avec des tétraèdres à quatre ou dix nœuds dont chacun possède trois degrés de liberté en translation.

Les modélisations adéquates pour l'étude de phénomènes mécaniques avec des éléments de plaques triangulaires sont des modélisations « DST » ou « DKT »<sup>14</sup>. Toutefois, la modélisation « DKT » est plus générale puisqu'elle permet l'étude de phénomènes mécaniques non linéaires. Cette modélisation est basée sur le modèle de Love-Kirchhoff qui suppose que la section de la plaque demeure plane sous l'effet de la flexion. Pour ces deux modélisations, chaque nœud possède six degrés de liberté, soient trois translations et trois rotations. Finalement, ces modélisations requièrent un rapport épaisseur/longueur inférieur à 1/20.

### A.2.2 Définition de l'épaisseur de la coque

La définition de l'épaisseur de la coque est effectuée à l'aide de l'opérateur « AFFE\_CARA\_ELEM<sup>15</sup> » et du mot clé « EPAIS ». Si la coque a une épaisseur constante, le groupe de mailles « GMC0 » regroupant tous les triangles constituant la coque de numéro 0, est utilisé pour spécifier son épaisseur.

---

<sup>12</sup> U4.41.01

<sup>13</sup> U3.14.01

<sup>14</sup> U3.12.01

<sup>15</sup> U4.42.01

### A.2.3 Affectation du matériau à la coque

Dans un même ordre d'idées, si la coque est constituée d'un seul matériau, celui-ci est affecté à tous les éléments du groupe de mailles « GMC » via l'opérateur « AFFE\_MATERIAU<sup>16</sup> ». Les propriétés mécaniques du matériau ayant préalablement été définies à l'aide de la commande « DEFI\_MATERIAU<sup>17</sup> ».

### A.2.4 Définition des déplacements imposés

Une autre différence entre les deux modélisations se situe au niveau de la définition des déplacements imposés à l'aide de l'opérateur « AFFE\_CHAR\_MECA<sup>18</sup> ». Comme une modélisation surfacique fait intervenir trois degrés de liberté supplémentaires, les trois rotations doivent être bloquées pour modéliser un encastrement, à titre d'exemple.

### A.2.5 Calcul mécanique

En modélisation coque, les caractéristiques de la coque, ayant préalablement été définies à l'aide de l'opérateur « AFFE\_CARA\_ELEM », doivent être incluses lors du calcul mécanique lancé via la commande « MECA\_STATIQUE<sup>19</sup> ». Les résultats bruts du calcul mécanique correspondent aux déplacements des nœuds dans le repère global.

### A.2.6 Calculs en post-traitement

Les calculs effectués en post-traitement à l'aide de l'opérateur « CALC\_ELEM<sup>20</sup> » permettent, entre-autres, de déterminer les déformations, les contraintes et le critère d'écoulement de Von Mises en chaque nœud du maillage. En modélisation coque, les résultats sont calculés sur les plans inférieur, moyen et supérieur afin de prendre en compte son épaisseur et les efforts de tension/compression induits par la flexion. Le calcul en post-traitement requiert donc la création d'un fichier de résultats par plan.

---

<sup>16</sup> U4.43.03

<sup>17</sup> U4.43.01

<sup>18</sup> U4.44.01

<sup>19</sup> U4.51.01

<sup>20</sup> U4.81.01

### A.2.7 Impression des résultats

L'impression des résultats au format « RESULTAT » et « GMSH » s'effectue à l'aide de la commande « IMPR\_RESU<sup>21</sup> ». Les préfixes « EPSI\_ELNO\_DEPL » et « SIGM\_ELNO\_DEPL » permettent de calculer respectivement les déformations et les contraintes aux nœuds à partir des déplacements aux nœuds<sup>22</sup>. À noter que l'état de contrainte peut également être calculé aux nœuds, en interpolant les valeurs aux points de Gauss, à l'aide du préfixe « SIEF\_ELNO<sup>23</sup> ». Finalement, le préfixe « EQUI\_ELNO\_SIGM », permet de calculer les critères d'écoulement tel que le critère d'écoulement de Von Mises.

---

<sup>21</sup> U4.91.01 et U7.05.32

<sup>22</sup> U2.01.05

<sup>23</sup> U2.01.05

## ANNEXE B

-

### CALCUL DE LA MATRICE JACOBIEENNE INVERSE D'UN TRIANGLE

Tel que mentionné à la section 4.8.1, le calcul de la matrice jacobienne inverse  $[j]$  d'un triangle requiert d'abord le calcul de sa matrice jacobienne  $[J]$ . Tel que décrit par l'équation (B.1), celle-ci fait intervenir les dérivées des fonctions d'interpolation  $N_i$  de l'élément de référence, ainsi que les coordonnées  $(x, y, z)$  de ses nœuds notées sous forme de vecteurs colonnes  $\{x_i\}$ ,  $\{y_i\}$ ,  $\{z_i\}$ .

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \rangle \\ \langle \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \rangle \\ 0 \end{bmatrix} [\{x_i\} \quad \{y_i\} \quad \{z_i\}] \quad (\text{B.1})$$

Comme la troisième ligne de la matrice jacobienne est nulle, son déterminant l'est également ce qui la rend singulière. Pour palier ce problème, les coordonnées des nœuds du triangle sont exprimées dans un repère local 2D, défini dans le plan du triangle, et où les coordonnées normales à ce plan sont nulles. Cela permet de réduire la matrice jacobienne de dimension trois en une matrice carrée de dimension deux en éliminant sa troisième ligne et sa troisième colonne.

Le changement de repère consiste donc à exprimer les coordonnées  $(x, y, z)$  d'un repère global  $R_G$  dans un repère local  $R_L(u, v, w)$  où les coordonnées en  $w$  sont nulles. La matrice jacobienne  $[J_L]$  d'un triangle, exprimée dans ce repère local, est donnée par l'expression;

$$[J_L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \rangle \\ \langle \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \rangle \end{bmatrix} [\{u_i\} \quad \{v_i\}] \quad (\text{B.2})$$

La matrice jacobienne de l'équation (B.2) est ensuite inversée et exprimée dans le repère global initial. Le calcul de la matrice jacobienne inverse d'un triangle consiste donc en quatre grandes étapes, soient :

1. Exprimer les coordonnées des nœuds du triangle dans le repère local  $R_L(u, v, w)$ ;
2. Calculer la matrice jacobienne  $[J_L]$  dans le repère local  $R_L(u, v, w)$ ;
3. Calculer la matrice jacobienne inverse  $[j_L]$  dans le repère local  $R_L(u, v, w)$ ;
4. Exprimer la matrice jacobienne inverse  $[j_G]$  dans le repère global  $R_G(x, y, z)$ .

### B.1 Coordonnées des nœuds du triangle dans le repère local

La figure b.6.1 montre un triangle  $T(N_1, N_2, N_3)$  dont les coordonnées des nœuds sont exprimées dans le repère global  $R_G(x, y, z)$ .

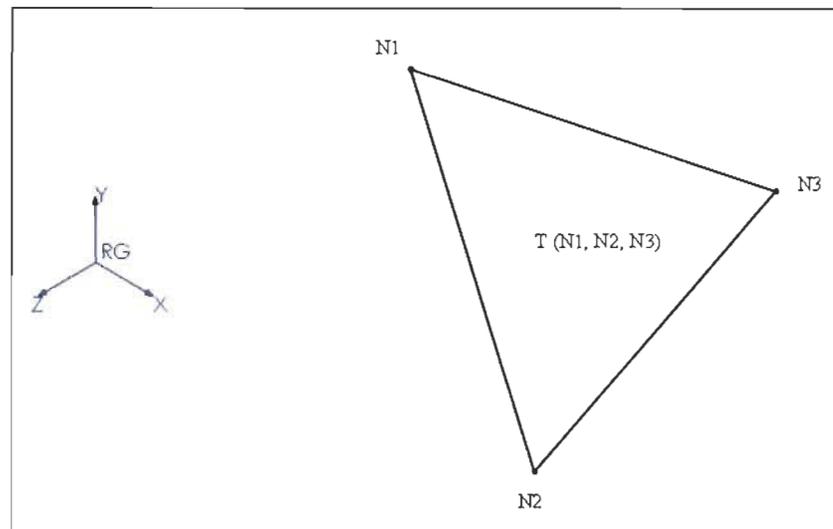


Figure B.6.1 Triangle  $T(N_1, N_2, N_3)$  dans le repère global  $R_G$

Soient les vecteurs  $\vec{vec}_1$ ,  $\vec{vec}_3$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{vec}_2$  définis comme suit;

## Annexe B – Calcul de la matrice jacobienne inverse d'un triangle

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{vec}_1 &= N_2 - N_1 \\
 \overrightarrow{vec}_3 &= N_3 - N_1 \\
 \vec{n} &= \overrightarrow{vec}_1 \times \overrightarrow{vec}_3 \\
 \overrightarrow{vec}_2 &= \vec{n} \times \overrightarrow{vec}_1
 \end{aligned}
 \tag{B.3}$$

et les vecteurs unitaires  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  suivants;

$$\begin{aligned}
 \vec{u} &= \frac{\overrightarrow{vec}_1}{\|\overrightarrow{vec}_1\|} \\
 \vec{v} &= \frac{\overrightarrow{vec}_2}{\|\overrightarrow{vec}_2\|} \\
 \vec{w} &= \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}
 \end{aligned}
 \tag{B.4}$$

Un repère local  $R_L(u, v, w)$ , tel qu'illustré à la figure b.6.2, est défini à partir des vecteurs unitaires d'écrits en (B.4).

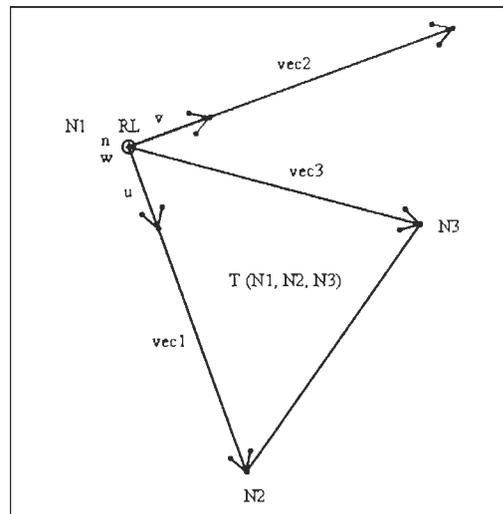


Figure B.6.2 Triangle  $(N_1, N_2, N_3)$  dans le repère local  $R_L$

Soit la matrice  $[R_G]$  contenant les coordonnées des nœuds du triangle  $T(N_1, N_2, N_3)$  exprimées dans le repère global  $R_G$ ;

## Annexe B – Calcul de la matrice jacobienne inverse d'un triangle

$$[R_G] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Soit la matrice  $[R_L]$  contenant les coordonnées des nœuds du triangle  $T(N_1, N_2, N_3)$  exprimées dans le repère local  $R_L$ . Le passage du repère global  $R_G$  au repère local  $R_L$  s'effectue comme suit;

$$[R_L] = [P_{GL}]^{-1}[R_G] \quad (\text{B.6})$$

où  $[P_{GL}]$  est appelée *matrice de passage* du repère local  $R_L$  au repère global  $R_G$  et est donnée par l'équation suivante;

$$[P_{GL}] = [\{\vec{u}\} \quad \{\vec{v}\} \quad \{\vec{w}\}]. \quad (\text{B.7})$$

En remplaçant (B.7) dans (B.6) et en effectuant le produit matriciel, les coordonnées des nœuds du triangle dans le repère local s'expriment comme suit;

$$[R_L] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Tel que mentionné précédemment, les coordonnées en  $w$  sont nulles puisque le repère local est dans le plan du triangle. De plus, comme le nœud  $N_1$  est à l'origine de ce repère, ses coordonnées doivent être soustraites de celles des nœuds  $N_2$  et  $N_3$ . Ce qui conduit à l'équation (B.9);

$$[R_L] = \begin{bmatrix} 0 & u_2 - u_1 & u_3 - u_1 \\ 0 & v_2 - v_1 & v_3 - v_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

La transposée de la matrice  $[R_L]$  est;

$$[R_L]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & 0 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Chaque ligne  $i$  de la matrice  $[R_L]^T$  contient les coordonnées  $(u_i, v_i)$  du nœud  $i$  du triangle exprimées dans le repère local  $R_L$ .

### B.2 Calcul de la matrice jacobienne dans le repère local

En remplaçant les deux premières colonnes de l'équation (B.10) dans (B.2) et en remplaçant les dérivées des fonctions d'interpolation par leurs valeurs respectives, on obtient;

$$[J_L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u_2 - u_1 & v_2 - v_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

La matrice jacobienne d'un triangle, dont les coordonnées de ses nœuds sont exprimées dans le repère local  $R_L$ , s'écrit donc;

$$[J_L] = \begin{bmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

### B.3 Calcul de la matrice jacobienne inverse dans le repère local

La matrice jacobienne inverse d'un triangle, exprimée dans le repère local, est donnée par l'équation suivante;

$$[j_L] = \frac{1}{\det[J_L]} [J_L] \quad (\text{B.13})$$

En remplaçant (B.12) dans (B.13) et en calculant le déterminant de la matrice jacobienne, on obtient;

$$[j_L] = \frac{1}{(u_2 - u_1)(v_3 - v_1) - (u_3 - u_1)(v_2 - v_1)} \begin{bmatrix} v_3 - v_1 & v_1 - v_2 \\ u_1 - u_3 & u_2 - u_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Sous forme simplifiée, la matrice jacobienne inverse d'un triangle, dont les coordonnées de ses nœuds sont exprimées dans le repère local  $R_L$ , s'écrit;

$$[j_L] = \begin{bmatrix} j_{L11} & j_{L12} \\ j_{L21} & j_{L22} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

#### B.4 Matrice jacobienne inverse exprimée dans le repère global

Afin d'exprimer cette matrice dans le repère global  $R_G(x, y, z)$ , la première étape consiste à l'étendre en trois dimensions en ajoutant une ligne et une colonne nulles;

$$[j_{L3D}] = \begin{bmatrix} j_{L11} & j_{L12} & 0 \\ j_{L21} & j_{L22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

La matrice jacobienne inverse  $[j_G]$  exprimée dans le repère global  $R_G$  est donnée par;

$$[j_G] = [P_{GL}][j_{L3D}]. \quad (\text{B.17})$$

En remplaçant les équations (B.7) et (B.16) dans (B.17) et en effectuant le produit matriciel, la matrice jacobienne inverse d'un triangle, dont les coordonnées de ses nœuds sont exprimées dans le repère global, s'écrit;

$$[j_G] = \begin{bmatrix} j_{G11} & j_{G12} & 0 \\ j_{G21} & j_{G22} & 0 \\ j_{G31} & j_{G32} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.18})$$