Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Remerciements

Je remercie du fond du cœur mon directeur de recherche Alejandro S. González-Martín pour sa bienveillance, ses encouragements et son soutient irréprochable qui m'ont offert une source de motivation et de persévérance me permettant de mener à bien ce travail de recherche. J'ai eu le privilège d'être encadré par un professeur qui m'a appuyé tout au long de ce projet de recherche, et ce, tant sur le plan scientifique que sur le plan moral. Sa rigueur scientifique et ses suggestions m'ont été d'une grande aide.

Je remercie aussi les membres du jury, Mme Louise Poirier et M. Fernando Hitt pour avoir lu avec attention mon mémoire. Leurs suggestions et leurs pertinents commentaires m'ont permis d'améliorer la qualité de la rédaction de mon mémoire.

Introduction

Selon une approche didactique, qui représente un des objectifs ciblés par le programme du Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport du Québec (MELS) concernant les études collégiales, l'enseignement des mathématiques ne doit pas se limiter à demeurer dans un contexte restreint qui favorise la technique routinière de résolution d'exercices et l'application d'algorithmes qui se fait, dans la plupart des cas, dans le registre algébrique. Selon cette même approche, l'étudiant doit être en mesure de poser et d'analyser un problème, de repérer les éléments et la relation entre ces éléments, et de construire une représentation (représentations graphiques, algébriques ou autres) (MEES, 2016, p. 7).

Selon Artigue (1999), la recherche en didactique des mathématiques au postsecondaire a demeuré pendant des années relativement écartée. Cependant, le nombre important d'étudiants qui suivent des cours de mathématiques à l'université serait un des facteurs qui ont incité la recherche à relever le défi d'étudier les problèmes de l'enseignement des mathématiques à ce niveau d'étude. Artigue (1999) a souligné que pendant plus de 20 ans, la recherche avait fait ressortir le fait que l'apprentissage des mathématiques au postsecondaire n'est pas un processus continu et il serait donc nécessaire qu'il soit reconstruit et réorganisé. Les résultats de recherche ont sans doute proposé des pistes pouvant aider les enseignants à améliorer l'efficacité de leur stratégie d'enseignement, mais il semble que cela n'a pas encore permis de changer, de manière significative, les différentes approches adoptées par ces praticiens. Par ailleurs, en ce qui a trait au concept de série, notre recension d'écrits nous a permis de prendre conscience qu'il y a peu de recherche dans ce domaine.

Pour favoriser l'apprentissage en mathématique, l'étudiant doit être en mesure de verbaliser avec cohérence, de manipuler des symboles et des expressions mathématiques adéquatement, de convertir des informations pertinentes d'un énoncé d'un problème et de pouvoir passer d'une représentation d'un objet mathématique à une autre, ce que la plupart des étudiants au postsecondaire ne maîtrisent pas encore (CCA, 2005). Selon des travaux de recherche en lien avec des concepts mathématiques avancés réalisés jusqu'à maintenant, l'enseignement traditionnel ne tiendrait pas compte des suggestions faites par la recherche en didactique des mathématiques au postsecondaire. Dans ce cas, qu'en est-il de l'enseignement du concept de série au niveau collégial? Il serait donc important de nous intéresser à l'enseignement de ce concept et à la manière dont ce dernier est présenté aux étudiants.

Afin de développer notre sujet de recherche, nous avons structuré notre mémoire comme suit. Le chapitre 1 est consacré à la problématique dans laquelle nous abordons les difficultés avec le concept de série recensées par la recherche, la place de ce concept dans l'enseignement traditionnel et les différentes recommandations de la recherche; le chapitre finit par établir notre question de recherche, et ce, en nous appuyant sur certains résultas de recherche issus de notre recension d'écrits. Le chapitre 2 est consacré au cadre conceptuel dans lequel nous développons la théorie des registres de représentation de Duval sur laquelle nous nous appuyons pour trouver des éléments de réponse à notre question de recherche et établir notre méthodologie. Le chapitre 3 est consacré à la méthodologie et nous y illustrons toutes les étapes et les procédures entreprises, ainsi que les outils de recherche que nous avons utilisés dans nos analyses de données. Le chapitre 4 est consacré à l'analyse et l'interprétation des données. Afin de répondre à nos objectifs de recherche nous avons dressé une grille d'analyse comportant des données quantitatives et qualitatives. Les principaux éléments de réponse auxquels nous prêtons une attention particulière sont les suivants : le nombre, type et fonction des représentations visuelles (graphes, dessins, etc.) ainsi que le ratio de ces dernières par page, nombre et domaines d'application du concept de série (domaine mathématique et scientifique). Dans le but de vérifier s'il y a une évolution dans leur contenu depuis le plus ancien manuel au plus récent, nous illustrons dans ce chapitre une analyse cluster hiérarchique réalisée avec le logiciel SPSS. Enfin, dans le chapitre 5 nous élaborons nos conclusions et y retrouvons des réponses à notre question de recherche et à nos objectifs, et ce, en intégrant des éléments fondamentaux provenant des différents chapitres de ce mémoire.

1. Problématique.

1.1. Le concept de somme infinie.

Une somme infinie est une addition d'une infinitude de termes. Elle est appelée aussi « série » dans le langage mathématique. Dans cet écrit, nous utiliserons parfois le terme « somme infinie» et parfois le terme « série » étant donné que les deux font référence au même concept. Tout au long de notre étude, nous allons nous intéresser aux séries numériques. Ces dernières sont des séries dont les termes sont des nombres réels ou des nombres complexes. Cependant, notre recherche s'intéresse uniquement à l'enseignement des séries numériques dont les termes sont des nombres réels. Notre objectif est d'effectuer une analyse didactique de l'enseignement de ce concept au niveau postsecondaire à travers les manuels, et ce, en prenant comme cas particulier celui du Québec. Dans le contexte québécois, les étudiants rencontrent le concept de somme infinie, pour la première fois de façon formelle, dans le cours *Calcul Intégral* qui se donne à la deuxième session de la première année des études collégiales (préparation à l'université). Celui-ci est la continuité du cours *Calcul différentiel* qui se donne à la première session de la première année. Il s'agit de deux cours obligatoires pour les étudiants inscrits en première année dans des branches scientifiques et sont optionnels pour ceux qui sont inscrits dans d'autres branches telles que sciences humaines.

Il y a plusieurs exemples de séries numériques dont nous présentons les deux suivantes :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ... + \frac{1}{2^i} + ...$

Dans une série, la somme des n premiers termes s'appelle une somme partielle de la série, et on la note par s_n comme par exemple, pour la suite $\{a_n\}$:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

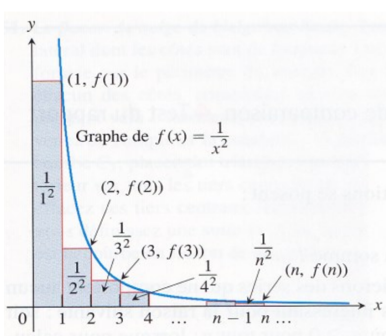
$$\ldots\ldots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

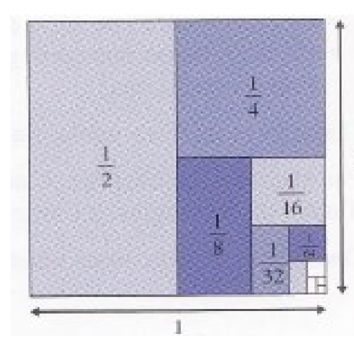
Les sommes partielles d'une série forment une suite $\{s_n\}$. Si $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe, on l'appelle la somme de la série et on dira que la série converge. Si cette limite n'existe pas, on dira que la série diverge ou qu'elle n'a pas de somme. Ainsi, les deux séries présentées à la page 3 seraient convergentes. En général, dans les manuels, la notion de convergence d'une série est centrale dans l'étude des séries.

Les séries peuvent être représentées à l'aide d'une image visuelle ou un graphique. En particulier, les deux séries décrites ci-dessus peuvent être représentées respectivement par le graphique de la Figure 1 et par l'image de la Figure 2.

- Figure 1 : Thomas, Finney, Weir & Giordano (2002, p. 282)



- Figure 2 : Charron & Parent (2004, p. 296)



Pour étudier la convergence ou la divergence d'une somme infinie, on peut faire appel à des tests de convergence. Parmi ces tests, nous illustrons d'abord deux tests de convergence :

- Critère de comparaison à l'aide d'une limite (Charron & Parent, 2004, p. 319)

THÉORÈME 6.17 CRITÈRE DE COMPARAISON À L'AIDE D'UNE LIMITE

Soit les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ telles que $a_k > 0$ et $b_k > 0$ pour tout $k \geqslant 1$ et

soit $L = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$, où $L \in \mathbb{R}$.

1) Si $L > 0$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ converge, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge ;

2) Si $L > 0$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ diverge, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge.

Ici, on constate que si la limite L n'est pas finie et positive, on ne peut pas se prononcer sur la convergence ou la divergence de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Dans ce cas, il va falloir utiliser une autre série pour appliquer le test ou opter pour un autre test de convergence.

- Critère de comparaison (Charron & Parent, 2004, p. 318)

THÉORÈME 6.16 CRITÈRE DE COMPARAISON

Soit les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ telles que $0 < a_k \leq b_k$ pour tout $k \geq 1$.

1) Si $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ converge, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge.

2) Si $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ diverge.

Il est très important de constater que si $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ diverge, nous ne pouvons pas conclure que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge aussi, car cette dernière serait inférieure à $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ et donc il serait possible qu'elle converge. Si la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, nous ne pouvons pas conclure que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ converge aussi, car cette série est supérieure à $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ et elle pourrait donc diverger. Dans ces deux cas, ce test de convergence ne nous permet pas de nous prononcer sur la convergence ou la divergence de la série à étudier.

Nous allons revenir sur ces deux critères dans la section 1.3 de ce chapitre, consacrée aux difficultés est fausses conceptions en lien avec le concept de série. Cependant, il existe d'autres critères de convergence parmi lesquels nous citons les suivants.

- Critère de l'intégrale (Charron & Parent, 2004, p. 313)

THÉORÈME 6.14
CRITÈRE DE L'INTÉGRALE

Soit $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, où $a_k > 0$, et f, une fonction positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty$, telle que $f(k) = a_k$ pour tout $k \geq 1$.

1) Si $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge.

2) Si $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge.

- Critère des polynômes (Charron & Parent, 2004, p. 322)

THÉORÈME 6.18
CRITÈRE DES POLYNÔMES

Soit la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, où $a_k > 0$ et $a_k = \frac{P(k)}{Q(k)}$, $P(k)$ et $Q(k)$ étant respectivement deux polynômes de degrés p et q, et soit $d = (q - p)$.

1) Si $d \leq 1$, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge.

2) Si $d > 1$, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge.

- Critère d'Alembert (Charron & Parent, 2004, p. 323)

THÉORÈME 6.19 CRITÈRE DE D'ALEMBERT

Soit la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, où $a_k > 0$, et soit $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1) Si $R < 1$, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge.

2) Si $R > 1$, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge.

3) Si $R = 1$, alors nous ne pouvons rien conclure.

- Critère de Cauchy (Charron & Parent, 2004, p. 324)

THÉORÈME 6.20 CRITÈRE DE CAUCHY

Soit la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, où $a_k > 0$, et soit $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

1) Si $R < 1$, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge.

2) Si $R > 1$, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge.

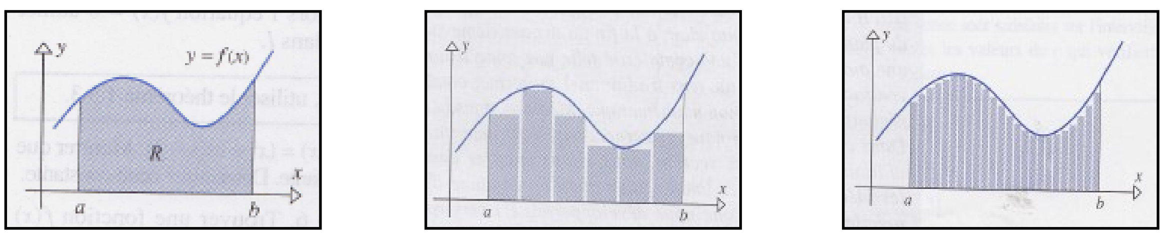
3) Si $R = 1$, alors nous ne pouvons rien conclure.

1.2. Importance des séries dans les domaines mathématique et extramathématique.

Les sommes infinies représentent un sujet de grande importance faisant partie du programme de mathématique au niveau universitaire et collégial. Depuis longtemps, ce concept a occupé une place fondamentale dans l'enseignement postsecondaire et a été identifié comme un concept très difficile à appréhender par les étudiants (Bagni, 2000). Cette place privilégiée accordée à ce dernier découle, entre autres, de son grand nombre d'applications, et ce, aussi bien en mathématiques que dans les autres domaines scientifiques.

En mathématique, le concept de série est une notion clé pouvant être utile à introduire et définir d'autres concepts mathématiques. En effet, les séries peuvent être utilisées pour écrire le développement décimal des nombres réels (ex : 0,9999…= 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + …) et pour définir les séries de puissances et les familles des polynômes tels que les polynômes de Taylor, de Maclaurin, etc. En outre, ce concept est appliqué dans la résolution de certaines équations différentielles et dans le calcul d'aire sous une courbe qui représente une des plus courantes applications de ce concept. Ainsi, en juxtaposant plusieurs rectangles, on peut approximer l'aire sous une courbe dans un intervalle donné. Cette procédure est à l'origine du concept de somme de Riemann et des intégrales définies (Figure 3).

- Figure 3 : Anton (1996, p. 40)



a b c

Dans la Figure 3b, nous pouvons représenter la somme des aires des six rectangles par une somme finie à six termes. Dans ce cas, l'aire de chaque rectangle correspondrait à un terme de cette somme finie. En comparant la Figure 3b à la Figure 3c, il est possible de voir que c'est la somme des aires des rectangles de la Figure 3c qui s'approche plus de l'aire réelle *R* (Figure 3a). En effet, plus il y a de rectangles, meilleure est l'approximation de la valeur de l'aire *R*. Ainsi, si nous répétons cette procédure en faisant tendre le nombre de rectangles vers l'infini et la mesure de leur base vers zéro, la somme des aires de la suite infinie de rectangles tendrait vers l'aire *R*. La somme de cette suite d'une infinitude de rectangles pourrait être représentée par une série dont les termes correspondraient aux aires de ces rectangles. Dans ce cas, on dira que cette série converge vers la valeur de l'aire *R*.

Tels sont quelques exemples d'applications mathématiques parmi les plus fréquentes dans l'enseignement des sommes infinies au niveau postsecondaire.

Dans le domaine extramathématique, les sommes infinies sont utilisées en biologie, en économie, en médecine, en physique, etc. En effet, dans différents champs, ce concept facilite la modélisation de certaines situations telles que la distribution de médicaments dans le corps ou de polluants dans l'atmosphère ainsi que la croissance des intérêts dans un compte en banque. Nous illustrons dans ce qui suit quelques exemples d'applications extramathématiques tirés de certains manuels analysés.

Tel que nous venons de le souligner, en médecine, on peut utiliser les séries afin de déterminer la quantité d'un médicament éliminée par l'organisme après un certain nombre de jours. L'exemple suivant illustre cette application.

- Exemple 1 (Bradley, Smith, Franco, & Marcheterre, 2002, p. 204)

Un patient reçoit une injection de 20 unités de médicament toutes les 24 heures. Le médicament est éliminé de manière exponentielle, de telle sorte que ce qui reste dans l'organisme au bout d'un temps t (en jours) est $f(t) = e^{-t/2}$. Si le traitement se poursuit indéfiniment, combien d'unités de médicament environ resteront dans l'organisme du patient juste avant une injection ?

D'autres applications extramathématiques en lien avec le concept de série qui portent sur le calcul financier sont illustrées dans les exemples suivants.

- Exemple 2 (Bradley et al., 2002, p. 204)

Quel montant minimal doit-on investir aujourd'hui au taux d'intérêt annuel composé continu de 15 % pour qu'à partir de l'an prochain on puisse faire des retraits annuels de 2 000 $ indéfiniment ?

- Exemple 3 (Bradley et al., 2002, p. 204)

> On suppose qu'une machine coûtant 10 000 \$ se déprécie chaque année de 20 % de sa valeur. Autrement dit, la dépréciation de la première année est égale à 10 000 (0,20) = 2 000 \$ et la dépréciation de la deuxième année est égale à 8 000 (0,20) = 1 600 \$, parce que la deuxième année la valeur de la machine est 10 000 – 2 000 = 8 000 \$. Si on calcule la dépréciation de cette manière indéfiniment, quelle est la dépréciation totale ?

Tout bien considéré, les séries ont des applications dans plusieurs domaines (mathématiques, physique, économique, biologique, etc.) et le fait d'avoir une bonne compréhension de ce concept pourrait améliorer la préparation des étudiants à de multiples champs professionnels. En dépit de ce grand nombre d'applications, quelques résultats de recherche centrés sur le concept de somme infinie ont révélé certaines difficultés et fausses conceptions chez certains étudiants en lien avec l'apprentissage et la compréhension des séries, dont nous avons résumé les plus fréquentes dans la section 1.3. En conséquence, il est probable que des difficultés en lien avec ce concept influencent sur le bon déroulement de la formation universitaire ou professionnelle de certains étudiants et cela inciterait vraisemblablement ces derniers à renoncer à des choix de carrière scientifiques et techniques (González-Martín, Nardi & Biza, 2011; González-Martín, Seffah & Nardi, 2009). Cependant, malgré l'importance de ce concept, il y a peu de recherches didactiques en lien avec ce dernier. Par ailleurs, dans certains travaux de recherche en didactique, les séries sont souvent liées de façon implicite à d'autres concepts mathématiques tels que la convergence, les suites, les limites, etc. De plus, dans ces recherches, on s'intéresse plus à l'apprentissage de ce concept qu'à son enseignement (González-Martín, 2013a, 2013b).

1.3. Difficultés et fausses conceptions.

Selon la littérature scientifique en didactique des mathématiques, une des difficultés à assimiler le concept de série trouve son origine dans la perception de l'infini (González-Martín et al., 2011; Kidron, 2002). En effet, certains étudiants considèrent que la somme d'une infinitude de termes implique obligatoirement une somme infiniment grande (Bagni, 2005), ce qui les laisse croire que celle-ci est forcément divergente. Cette fausse conception pourrait provenir du fait qu'une somme infinie est perçue comme un processus incessant qui n'a pas de fin (Kidron, 2002). Ici, on parle de dualité entre l'infini potentiel (un processus sans fin) et l'infini achevé qui est perçu comme un objet (González-Martín et al., 2011; Kidron, 2002). Prenons comme exemple la série convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots$ qui est considérée par certains étudiants comme étant une série divergente, car, selon eux, l'addition des termes se fera de façon perpétuelle. Cette fausse conception pourrait affecter la compréhension du développement décimal illimité d'un nombre réel. Ainsi, ce développement est considéré par certains étudiants comme une procédure d'approximation et non comme un résultat précis (Kidron, 2002). Les étudiants, en comparant $0,\overline{9}$ et 1, pourraient prétendre que $0,\overline{0}1$ serait un nombre égal à $1-0,\overline{9}$. Ainsi, ces derniers n'admettent pas que $0,\overline{9}$ soit égal à 1.

Selon Kidron (2002), la lecture d'une égalité de droite à gauche ou de gauche à droite change complètement l'appréhension de certains étudiants. La perception de l'infini par certains étudiants pourrait être à l'origine de cette difficulté. Ainsi, beaucoup d'étudiants ont de la difficulté à concevoir que $0,1+0,01+0,001,0,0001+\ldots=\frac{1}{9}$, mais ces derniers seraient en mesure d'admettre que $\frac{1}{9}=0,1+0,01+0,001+0,0001+\ldots$, car l'écriture où la somme infinie se trouve à gauche du symbole « = » représente, pour certains étudiants, un processus d'addition de termes sans fin qui ne sera jamais complété (infini potentiel) et donc ça ne convergerait pas vers un nombre précis, mais l'autre écriture ($\frac{1}{9}=0,1+0,01+0,001+0,0001+\ldots$) représente pour ceux-ci le développement de $\frac{1}{9}$ en une infinité de nombres décimaux que les étudiants conçoivent avec plus de facilité.

Le symbolisme et la notation sont parfois une source de difficulté pour certains étudiants (Kidron, 2002). Par exemple, la série $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ est une expression algébrique qui comporte plusieurs symboles mathématiques tels que n qui tend vers l'infini, le symbole de limite, etc. Ainsi, cet ensemble de symboles et de notations qui représente une série pourrait être une contrainte pour certains étudiants qui les empêcherait d'appréhender ce concept. Dans cette même perspective, Mamona (1990) a souligné que beaucoup d'étudiants considèrent les suites numériques comme une liste de nombres, et souvent ils les confondent avec les séries. Cette confusion émanant de certains étudiants a été soulignée aussi par McDonald, Mathews et Strobel (2000) qui considèrent que cette dernière pourrait affecter l'assimilation du concept de série, car les suites numériques sont indispensables à la compréhension des sommes infinies.

En ce qui concerne l'application des tests de convergence des séries, ce sujet a été abordé par Nardi et Ianone (2001) auprès de 60 étudiants en premier cycle universitaire. Cette recherche, réalisée à l'University of East Anglia, au Royaume-Uni, consistait à soumettre aux étudiants une série de questions portant sur la convergence des sommes infinies. Cette étude a révélé que certains étudiants appliquent des tests de convergence d'une façon inappropriée. En effet, certains étudiants résistent à l'idée qu'un test de convergence pourrait ne pas donner de réponse. Dans cette situation, ces étudiants concluent que la série à étudier est divergente plutôt que d'opter pour un autre type de test de convergence. Par exemple, lorsque ces étudiants utilisent le critère de comparaison (voir la section 1.1) pour étudier la convergence d'une série $\{a_n\}$, ils concluent que cette série est divergente si la deuxième série $\{b_n\}$ avec laquelle celle-ci a été majorée est divergente. Cependant, dans ce cas, il va falloir plutôt trouver une autre série pour majorer ou minorer la série à étudier ou opter pour un autre test de convergence, car le test de convergence utilisé avec la série choisie ne permet pas de déduire la nature de la série à étudier.

Les concepts mathématiques sont souvent interdépendants et sont introduits avec des finalités différentes. Si l'on considère deux concepts tels que les séries et les intégrales impropres, l'interdépendance entre ces deux concepts fait que lorsque l'assimilation du concept de série est affectée, ceci pourrait affecter l'appréhension du concept d'intégrale impropre. En effet, certains travaux de recherche soulignent le fait que des difficultés avec le concept de série pourraient avoir un impact sur l'appréhension des intégrales et des intégrales impropres particulièrement (González-Martín, 2006; González-Martín et al., 2011). Dans cette même perspective, Fay et Webster (1985) ont souligné le fait que certains étudiants ne reconnaissent pas la correspondance entre les tests de convergence des intégrales et ceux des séries, car les tests de convergence des séries et les intégrales impropres sont présentés sans attention donnée à l'accentuation des connexions entre intégrale impropre et série. Par ailleurs, González-Martín (2006) et González-Martín et al. (2011) ont révélé que certains étudiants confondent les séries associées aux fonctions ($\sum f(n)$) avec la somme de Riemann d'une fonction dans un intervalle donné bien que ces deux concepts soient entièrement différents.

Enfin, la recherche a identifié des écarts entre la définition formelle d'une série proposée aux étudiants et l'image de ce concept construit par ces derniers. Ainsi, *le concept image* se compose de toute la structure cognitive de l'esprit de l'étudiant qui est associée à un concept donné, ce qui pourrait avoir des aspects qui sont tout à fait différents de la définition formelle de ce dernier (Tall, 1991). En effet, certaines de ces différences se manifestent particulièrement en termes de l'écart potentiel entre les différentes définitions d'un concept mathématique et les tâches (problèmes, exercices, applications, etc.) qui permettent de construire une relation personnelle avec ce concept (González-Martín et al., 2011; Kidron, 2002).

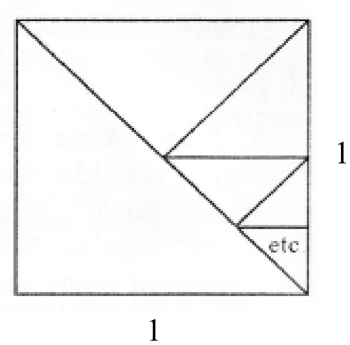
1.4. Importance de la visualisation et les recommandations faites par la recherche.

Beaucoup de recherches soulignent l'importance de l'utilisation de la visualisation en enseignement des concepts mathématiques, car l'utilisation des représentations visuelles permet de mieux construire et facilite l'appréhension des concepts mathématique (Duval, 1993; Eisenberg & Dreyfus, 1991; Tall, 1991). Selon Eisenberg et Dreyfus (1991), il serait essentiel de développer des méthodes pédagogiques pouvant permettre le développement des habiletés de visualisation plutôt que de laisser cette tâche aux étudiants, car l'utilisation de différentes représentations (algébriques, graphiques, etc.) pour représenter un concept mathématique faciliterait l'appréhension de ce dernier (Duval, 1993). Dans cette même vision, Artigue (1999) propose aux praticiens de procéder à un changement du niveau de conceptualisation en intégrant différentes représentations aux concepts mathématiques. Selon elle, la représentation d'un concept mathématique par différents registres de représentation est une tâche indispensable pour favoriser l'apprentissage. Toutefois, il semblerait que, dans l'enseignement postsecondaire, les tâches dans le registre graphique sont déléguées aux étudiants, car l'enseignement traditionnel prend rarement en considération les activités de changement de registres de représentation et considère les représentations visuelles comme un simple moyen de communication malgré le fait qu'elles soient essentielles dans l'activité cognitive de l'étudiant (Duval, 1993). Il est important aussi de mentionner que les recherches sur le rôle des représentations ont pris un essor depuis la publication du livre sur les représentations de Janvier (1987). Ainsi, ces recherches ont incité l'émergence d'activités dans les manuels scolaires donnant une priorité à trois types de représentation : numérique, graphique et algébrique. Cependant, dans le cas de notre recherche, la représentation numérique est implicitement incluse dans la représentation algébrique.

En ce qui a trait au concept de série, Alcock et Simpson (2004) ont souligné que les étudiants qui ont tendance à utiliser des images visuelles dans leurs travaux (étudiants visuels) semblent avoir plus de facilité à accéder aux objets mathématiques et sont en mesure d'utiliser adéquatement certains critères mathématiques tels que le critère de comparaison. Aussi, ces étudiants semblent avoir plus de facilité à donner un sens rigoureux au concept de série et sont souvent confiants dans leurs tâches. Ces chercheurs recommandent fortement l'encouragement des étudiants à utiliser les représentations visuelles et surtout d'établir les liens entre ces dernières et les représentations algébriques. En revanche, Alcock et Simpson (2005), qui avaient pour but d'examiner le comportement des étudiants qui travaillent avec uniquement des représentations algébriques dans le cadre de leur premier cours en Analyse, ont révélé que ces étudiants non visuels s'occupent seulement de l'utilisation des définitions et de leurs représentations algébriques; ils focalisent sur les caractères symboliques sans faire de lien avec d'autres concepts mathématiques.

Afin d'illustrer un peu plus l'utilité de la visualisation dans l'enseignement des séries, nous proposons l'exemple de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$ de la section 1.1. Dans ce cas, une représentation visuelle adéquate peut être utile pour illustrer qu'une somme d'une infinitude de termes ne tend pas forcément vers l'infini. Dans la Figure 4, il est représenté un carré dont l'aire est égale à 1 qui a été partitionné en plusieurs triangles rectangles. Cette figure a été construite de la manière suivante : en premier lieu, une diagonale coupe ce carré en deux triangles rectangles isométriques dont l'aire de chacun est égale à $\frac{1}{2}$. L'aire d'un de ces deux triangles représente ainsi le premier terme de la série. Une autre diagonale coupe le deuxième triangle rectangle en deux autres triangles rectangles dont l'aire de chacun est égale à $\frac{1}{4}$, ce qui nous permet de constater que l'aire d'un de ces derniers représente le deuxième terme

- Figure 4 : Bagni (2000, p.2)



de cette série. On constate ainsi que si nous répétons cette subdivision de triangles indéfiniment, l'aire de chaque triangle obtenu correspondrait à un terme de la série.

Il est clair qu'en additionnant toutes les aires de tous les triangles, le résultat obtenu ne dépassera jamais l'aire du carré qui est égale à 1. Ceci aiderait à admettre que la somme infinie en question ne tend pas vers l'infini et comme elle est croissante et bornée, elle est donc convergente. En visualisant seulement la représentation symbolique la convergence de cette série ne pourrait pas être facilement assimilée par tous les étudiants. Cependant, l'image visuelle de la Figure 4 pourrait aider ceux-ci à mieux appréhender cette convergence. Ainsi, notre recension d'écrits en lien avec l'importance de l'utilisation de la visualisation nous oriente vers un travail de recherche dans lequel nous prêterons une attention particulière à l'utilisation des représentations visuelles et le changement de registres dans l'enseignement du concept de série au niveau postsecondaire.

1.5. L'enseignement classique et les sommes infinies.

Connaissant les principales difficultés et fausses conceptions en lien avec l'apprentissage du concept de série identifiées par la recherche, il serait essentiel de savoir si elles sont prises en compte par l'enseignement au niveau collégial et de prendre conscience de l'impact de ce dernier sur l'apprentissage des étudiants. Cela nous permettra d'avoir une conjecture sur l'enseignement du concept de série au niveau collégial de manière générale.

L'enseignement des séries a fait l'objet de certains travaux de recherche pionniers dans les années 80. Malheureusement, après ces travaux il n'y a pas eu de suite dans la littérature internationale. Parmi les résultats de ces travaux de recherche, Boschet (1983) affirme qu'il existe un vigoureux écart entre ce qui est transmis aux étudiants dans les cours, qui constitue un descriptif de la théorie enseignée du concept de convergence, et les problèmes à résoudre qu'on propose aux étudiants. Ces activités sont souvent réduites à l'application d'un simple algorithme. De plus, dans les manuels et le contenu des cours utilisés en enseignement des suites numériques à cette époque, il y a peu de représentations visuelles et la notion de convergence est exposée sans faire appel à des commentaires ou à des dessins, ce qui engendrait des difficultés et des confusions chez certains étudiants. Par exemple, certains d'entre eux ne traitaient pas les suites comme des fonctions bien qu'elles soient un cas particulier de fonction. Dans cette même perspective, Robert (1982) met l'accent sur le fait que l'enseignement a un impact sur l'apprentissage et précise que les exercices utilisés en enseignement à l'époque où sa recherche a été réalisée (années 80) ne permettaient pas aux étudiants de construire une notion adéquate de la convergence d'une série. Il est important de préciser que ces deux résultats de recherche datent de plus de 30 ans, ce qui ne nous permet pas de nous prononcer sur l'enseignement actuel des séries au niveau postsecondaire étant donné que ces derniers pourraient ne plus être valides.

Selon González-Martín (2010), certains professeurs au niveau collégial ignoreraient différentes représentations et applications du concept de série. Même si ces professeurs semblent maitriser le contenu mathématique sur les séries, le type de tâches offertes aux étudiants est souvent axé sur des démarches algorithmiques. Pour introduire le concept de série, la plupart des professeurs utilisent des objets mathématiques sophistiqués ou des exemples contextualisés qui ne sont pas réalistes (manger continuellement une partie d'un gâteau, puis une partie du reste et ainsi de suite, rebondissement d'une balle indéfiniment, etc.). Aussi, la plupart des tâches utilisées dans leur enseignement sont souvent axées sur l'étude des critères de convergence d'une série et le calcul des sommes partielles. Ainsi, ils utilisent rarement les applications et les représentations visuelles du concept de série et les liens entre différentes représentations sont principalement absents dans leur enseignement. Dans ce cas, ce n'est pas évident que les étudiants puissent être capables d'atteindre un niveau approfondi de conceptualisation. Cette façon de procéder risque de ne pas permettre aux étudiants de bien appréhender les concepts, car ils pourraient être mieux appréhendés lorsqu'ils sont présentés avec différents types de représentation (Artigue, 1999).

Les conséquences des pratiques d'enseignement sur l'apprentissage des étudiants ont été abordées par González-Martín (2013a, 2013b), qui indique que dans l'enseignement actuel, les difficultés principales dans l'apprentissage des séries ayant été identifiées par la recherche, semblent être ignorées par les organisations praxéologiques, dans lesquelles la majorité des tâches concernant les séries sont liées aux critères de convergence et aux applications de procédures algorithmiques. À tout prendre, cette approche pourrait éventuellement avoir de sérieuses conséquences sur l'apprentissage des étudiants. En effet, l'habileté avec la visualisation n'est pas développée chez certains étudiants et même si ces derniers mettent beaucoup de temps et d'énergie pour résoudre les tâches sur les critères de convergence, ils ne seraient pas en mesure d'interpréter des représentations visuelles en référence avec de très simples séries à étudier (González-Martín, 2014). En somme, ces résultats de recherche nous laissent croire que la stratégie d'enseignement adoptée par des professeurs dans l'enseignement actuel s'ajouterait aux nombreuses sources de difficultés identifiées par la recherche chez certains étudiants au niveau collégial. Par ailleurs, il est donc très probable que le fait qu'il y ait peu de recherche en lien avec ce concept n'inciterait pas l'enseignement actuel à changer ou à ajuster son approche qui semble être traditionnelle (González-Martín et al., 2011).

1.6. Manuels et leur importance.

Le manuel scolaire représente un des artefacts les plus importants dans l'enseignement des mathématiques (Sträßer, 2009). En ce qui a trait à la relation entre le manuel et l'enseignant, il y a un lien entre la planification choisie par l'instructeur et l'outil didactique utilisé (Sträßer, 2009). Ainsi, l'enseignant, en consultant un manuel, pourrait ajuster, modifier ou consolider sa planification en lien avec le concept mathématique à enseigner. Ici, l'enseignant assure le rôle de médiateur entre le contenu du manuel et l'apprenant. Cette relation est appelée médiation sémiotique. Dans la médiation sémiotique, deux utilisateurs d'artefact assurent la médiation entre l'apprentissage et l'enseignement : l'enseignant qui représente l'expert dans la matière et l'apprenant qui représente le débutant. Selon Sträßer (2009), dans la recherche en enseignement des mathématiques, il est très important d'identifier l'utilisation des schémas qui pourrait se faire par les professeurs en prêtant une attention particulière sur les activités (problèmes, exercices, etc.) qu'ils proposent aux étudiants. En effet, le choix de ces activités qui sont souvent tirées des manuels avant de les soumettre aux étudiants dépend du schéma planifié par l'enseignant. Lithner (2004) a effectué une étude approfondie sur les différents exemples apparus dans les manuels ainsi qu'une analyse de différents types de tâches en se basant sur des grilles d'analyse quantitative, mais ce travail de recherche n'est pas centré sur un seul concept mathématique, mais sur plusieurs concepts tels que les limites, les fonctions, etc. Selon elle, il y a un lien étroit entre la stratégie d'enseignement des professeurs et le contenu des manuels utilisés autant qu'il y a un lien entre le raisonnement adopté par l'étudiant dans sa stratégie de résolution de problèmes en mathématiques et le type de problèmes qui apparaissent dans les manuels. Ainsi, cet outil didactique pourrait permettre à la recherche d'avoir des informations significatives sur l'enseignement et l'apprentissage d'un concept mathématique quelconque. Lithner (2004) a identifié trois types d'exercices tirés des manuels analysés en se basant sur la stratégie de résolution que ces derniers imposent aux étudiants et qui sont les suivants :

a. Identifier une similarité (IS) : identifier un exemple similaire pour retrouver la solution.

b. Raisonnement local plausible (LPR) : Le choix de stratégie est fondé sur des ressemblances identifiées entre des composants dans l'exercice et les composants dans une situation dans le texte.

c. Raisonnement global plausible (GPR) : Le choix de stratégie est principalement fondé en considérant les propriétés mathématiques intrinsèques des composantes de l'énoncé d'un exercice.

Cette analyse a permis de souligner que la plupart des exercices dans les manuels analysés sont de type IS qui peuvent être principalement résolus en fouillant dans des résolutions d'exercices similaires à ces derniers afin d'appliquer des algorithmes et des méthodes déjà utilisées dans d'autres situations. Cette façon de faire pourrait influencer sur l'apprentissage des étudiants en les empêchant de mieux comprendre le concept mathématique en question.

Dans une autre recherche, González-Martín, Giraldo et Santos (2009) ont utilisé une grille d'analyse pour étudier les différents types de définition du concept de continuité (définition formelle, définition visuelle, l'utilisation du voisinage, l'utilisation des limites) et les types d'exemples (algébriques, graphiques ou mixtes) ainsi que les types d'exercices (exercices purement algébriques, exercices qui ne demandent pas explicitement de compétence dans l'utilisation de graphiques, exercices qui demandent explicitement l'interprétation graphique, exercices qui demandent des compétences graphiques et algébriques) présents dans les manuels universitaires utilisés pour la formation d'enseignants du secondaire et du collégial. Leur travail de recherche avait pour objectif de se renseigner sur la manière dont le concept de continuité est présenté dans les manuels, et ce, en prêtant une attention particulière sur les différents registres de représentation véhiculés dans le contenu de ces instruments didactiques et d'illustrer les liens qui pourraient s'établir avec le concept de continuité avec d'autres concepts mathématiques avancés tel que le concept de limite. Cette analyse de manuels a permis de constater que le concept de continuité est souvent introduit en utilisant la notion de limite et que tous les manuels analysés utilisent des images intuitives qui font appel à des images de traçage de courbe sans lever le crayon du papier. Ainsi, la plupart des manuels analysés utilisent des représentations visuelles, mais ne demandent rarement aux étudiants (futurs enseignants) de produire ou interpréter un graphique. Somme toute, l'approche adoptée par ces manuels utilisés pour la formation des enseignants ne semble pas les aider à la création de conceptions adéquates (dans certains cas, ils incitent plutôt à la création d'images erronées).

Dans la même catégorie d'analyse, González-Martín, Giraldo et Souto (2013) ont illustré la manière dont les nombres réels et irrationnels sont présentés dans les manuels, et ce, en prêtant une attention particulière sur l'articulation et la cohérence de leur organisation. Les résultats de cette recherche indiquent que les définitions, propriétés et exemples sont souvent articulés comme des listes de choses à connaitre ou à mémoriser sans stimuler le développement des explications (technologies dans les termes de Chevallard, 1999) pour justifier les techniques utilisées dans la résolution des tâches proposées.

En revanche, l'étude de Mesa et Griffiths (2012), dans laquelle on n'utilise aucune grille d'analyse, est plus axée sur les données des entretiens, dans lesquels on a explicitement questionné les participants enseignants universitaires de mathématiques sur leur façon d'utiliser leur manuel dans leur enseignement. L'objectif de cette recherche serait de mieux comprendre la perspective des utilisateurs de manuels en se basant sur la relation qu'ils ont développée avec ces outils didactiques, et ce, en prêtant attention à la médiation épistémique qui représente la relation entre les étudiants et le contenu du manuel assurée par l'enseignant ainsi que la médiation épistémique du manuel entre l'instructeur et la conception d'instruction. Selon Mesa et Griffiths (2012), une médiation interpersonnelle du manuel entre l'instructeur et les étudiants devrait reconnaître que l'activité du sujet est orientée vers les étudiants. Dans certains cas particuliers, l'instructeur pourrait utiliser le manuel pour prendre conscience de la mesure avec laquelle une présentation particulière d'un théorème dans le manuel pourrait être trop difficile ou trop facile pour les étudiants ou si une tâche donnée produit le progrès et la compréhension attendus. De manière générale, certains enseignants utilisent intégralement le contenu des manuels, d'autres, ajustent le contenu ou parfois inventent des problèmes pour compléter un cours. Cependant, pour la plupart des enseignants universitaires participant à la recherche, le manuel représente un artefact crucial dans le processus de préparation des cours. De plus, tous les enseignants participants à cette étude ont confirmé que leur planification des devoirs, des examens et des notes de cours est basée sur le contenu des manuels. Ainsi, cela nous laisse croire que le contenu d'un manuel semble être un indicateur qui pourrait nous mettre en exergue le contenu de la partie théorique et pratique planifiée par les enseignants.

Tout bien considéré, on peut distinguer deux types d'analyse de manuels parmi d'autres: l'analyse de manuels avec grille dans laquelle on utilise souvent un nombre assez important de manuels et une analyse sans grille dans laquelle souvent un nombre restreint de manuels est utilisé afin de pouvoir effectuer une analyse en profondeur sur les éléments à observer. Somme toute, hormis le fait que l'analyse des manuels permet d'avoir des éclaircissements sur la manière dont les concepts mathématiques sont présentés dans l'enseignement, ce type d'analyse contribue aussi dans la conception du développement professionnel de la pratique enseignante et du raisonnement mathématique sur lequel s'appuient les étudiants pour assimiler les différents concepts. Aussi, en tenant compte de l'effet que pourraient avoir ces outils éducatifs sur l'évolution des cours et sur les modes d'apprentissage des étudiants, l'analyse de ces instruments didactiques pourrait illustrer l'origine de certaines difficultés d'assimilation des concepts chez les apprenants.

Par ailleurs, cette analyse de manuels nous permet aussi de prendre connaissance de l'aspect de la pratique enseignante en lien avec les habitudes des enseignants, et ce, en tenant compte du choix des tâches, la modélisation des situations mathématiques, la verbalisation, la conceptualisation, etc. De plus, quelques résultats de recherche soulignés précédemment dans cette section montrent qu'il y a certains points à améliorer en ce qui a trait à l'approche avec laquelle les concepts mathématiques avancés sont présentés dans les manuels. Il serait donc pertinent de prendre connaissance de cette situation lorsqu'il s'agit du concept de série.

Toujours en lien avec le concept de série, il faut retenir que souvent les professeurs semblent appliquer principalement le contenu du manuel dans leur enseignement, car ils le trouvent très adéquat à l'enseignement du concept de série (González-Martín, 2010; González-Martín et al., 2011). En ce sens que le contenu des manuels influencerait sur la stratégie adoptée par les professeurs dans l'enseignement du concept de série. Aussi, en nous appuyant sur les travaux de recherche illustrés précédemment dans cette section, nous constatons l'impact du contenu des manuels sur l'enseignement et l'apprentissage de certains concepts mathématiques. Ainsi, notre recension d'écrits nous a permis de constater que l'analyse de manuels, dans le but de mieux comprendre l'apprentissage et l'enseignement du concept de série, pourrait être un excellent indicateur de l'enseignement d'un concept mathématique avancé. Donc, il serait pertinent de consulter cet outil didactique afin d'avoir des éléments de réponse en lien avec l'enseignement du concept de série au niveau collégial. C'est la raison pour laquelle nous envisageons de prendre connaissance de la manière dont le concept de série est présenté dans les manuels, et ce, en privilégiant un regard sur deux types de représentation (visuelles et algébriques) utilisées dans ces outils didactiques. Ce choix de regard dans notre analyse de manuels tient compte des recommandations de la recherche citées dans la section 1.4 qui suggèrent l'utilisation des représentations visuelles dans l'enseignement des concepts mathématiques. Pour cette raison, nous nous concentrerons sur l'utilisation des représentations visuelles et la coordination faite avec les représentations algébriques; le registre numérique sera pris en compte de façon implicite dans le registre algébrique. Il existe plusieurs registres de représentation, mais, en mathématiques postsecondaires, les registres les plus courants sont le registre algébrique et le registre graphique, raison pour laquelle nous n'utilisons pas le registre numérique. Pour l'analyse des manuels, nous allons nous appuyer sur des grilles d'analyse quantitative et qualitative afin d'atteindre nos objectifs de recherche que nous développerons à la fin du chapitre 2 consacré au cadre conceptuel. À cet effet, nous bâtirons notre projet de recherche sur la base de la question suivante :

Quelle est la place de la représentation visuelle en lien avec le concept de série dans les manuels utilisés au postsecondaire et quelles sont les représentations (algébriques et graphiques) qui y sont privilégiées? Est-ce qu'il y a une évolution dans le contenu des manuels en ce qui concerne l'utilisation diversifiée de différentes représentations?

Nous allons revenir sur notre question de recherche à la fin du chapitre 2 de ce mémoire, après avoir introduit les outils théoriques que nous allons utiliser pour cette recherche.

2. Cadre conceptuel.

«Il est essentiel, dans l'activité mathématique, soit de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotique au cours d'une même démarche, soit de pouvoir choisir un registre plutôt que l'autre » (Duval, 1993, p.40).

2.1. La théorie des registres de représentation sémiotique de Duval.

2.1.1. Aspects principaux de la théorie des registres de représentation sémiotique de Duval.

La théorie de Duval est axée sur la sémiotique dans l'activité mathématique. Cette théorie s'inspire beaucoup de la théorie linguistique. Néanmoins, ses différentes analyses tiennent de la psychologie cognitive. Un des objectifs principaux de Duval serait de définir le fonctionnement cognitif de la pensée humaine de manière globale, et ce, en prêtant une attention particulière à la pensée mathématique.

Cette théorie met l'accent sur ce que Duval désigne par le paradoxe cognitif de la pensée mathématique. Ce dernier se résume par le fait qu'un objet mathématique n'est pas directement accessible par nos perceptions, mais il le serait à partir de ses différentes représentations. Néanmoins, la distinction entre un objet mathématique et sa représentation est indispensable à l'appréhension conceptuelle de cet objet. Ainsi, les objets mathématiques ne doivent pas être confondus avec leurs représentations, car la confusion entre l'objet mathématique et sa représentation « entraine, à plus ou moins long terme, une perte de compréhension et les connaissances acquises deviennent vite inutilisables hors de leur contexte d'apprentissage. » (Duval, 1993, p. 38)

Selon Duval (1993), il faut faire la nuance entre l'appréhension de la représentation d'un objet mathématique et l'appréhension de l'objet mathématique en question. Ainsi, il désigne par Sémiosis l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique et par Noésis l'appréhension conceptuelle d'un objet mathématique. Il estime aussi qu'il y a une forte liaison entre Sémiosis et Noésis. Ces deux termes sont inséparables, car « il est essentiel, dans l'activité mathématique, soit de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotique (figures, graphes, écriture symbolique, langue naturelle, etc.) au cours d'une même démarche, soit de pouvoir choisir un registre plutôt que l'autre » (Duval, 1993, p.40). En effet, pour qu'un objet mathématique ne soit pas confondu avec sa représentation et pour qu'il soit reconnu dans chacune de ses représentations, il serait indispensable de faire recours à plusieurs registres différents (Duval, 1993, 2000). Aussi, la maitrise de la coordination de ces registres est indispensable afin d'éviter ce que Duval appelle « le cloisonnement entre les différents registres » (Duval, 1993). Nous allons développer ceci au fur et à mesure dans ce chapitre consacré au cadre théorique. Aussi, nous allons illustrer avec plus de détails, dans les prochaines rubriques, les trois activités cognitives fondamentales liées à la Sémiosis (la formation, le traitement et la conversion).

2.1.2. Les systèmes de représentation.

Selon Duval (2000), il n'y pas de connaissance sans représentation et lorsque nous parlons de «représentation», nous devons tenir compte de quatre aspects qui sont les suivants.

a) Le système par lequel la représentation est produite.
   Toute représentation est produite par un système particulier. Il peut être un périphérique physique tel qu'un appareil photo, ou une organisation du cerveau pour une mémoire visuelle des images, ou un système sémiotique tel que

différentes langues. Et le contenu de la représentation d'un objet change en fonction du système de production de la représentation qui est utilisé. Ce dernier pourrait s'agir d'une représentation symbolique (langage écrit tel que les expressions algébriques) ou d'une représentation visuelle (construction des figures géométriques et graphes). Ainsi, le contenu de toute représentation dépend de son système de production et pas seulement de l'objet représenté. Par exemple, le contenu d'une description verbale du portrait d'une personne quelconque est différent du contenu d'un croquis du portrait de cette personne, ou le contenu du graphique d'une fonction n'est pas le même que le contenu de sa description verbale.

b) La relation entre la représentation et l'objet représenté.

   Il existe deux types de systèmes de production de la représentation: d'une part, les dispositifs physiques et les organisations neuronales (images physiques et mentales) et, d'autre part, les autres systèmes sémiotiques (mots, symboles, dessins, etc.). Dans le premier type de système de production de la représentation, la relation est réalisée à partir de l'action d'un objet sur le système (causalité). Cependant, dans le deuxième type, la relation n'est que de la dénotation.

c) La possibilité d'accéder à l'objet représenté.

   Il y a des représentations sémiotiques qui sont une évocation de ce qui a déjà été perçu ou ce qui pourrait être perçu et les représentations des objets qui ne peuvent être perçus (tels que les objets mathématiques).

d) La raison pour laquelle une représentation est nécessaire.

   Une représentation est nécessaire pour une raison de communication ou pour une raison de transformation (tel que le calcul, l'expansion discursive, l'anamorphose, etc.).

Selon la façon dont ces aspects sont pris en compte, on constate que les systèmes de représentation qui représentent un objet mathématique sont changeants (peuvent être nombreux). Ainsi, dans cette perspective, certains étudiants pourraient avoir de la difficulté à chaque fois qu'un système de représentation est changé, tandis que l'objet mathématique désigné reste le même. Mais comme des objets mathématiques ne peuvent être identifiés de façon unique avec aucune de leurs représentations, de nombreux étudiants ne peuvent pas discriminer le contenu de la représentation et de l'objet représenté.

2.1.3. Les représentations sémiotiques.

> *«Il y a un mot à la fois important et marginal en mathématique, c'est le mot « représentation »»*
> *(Duval, 1993, p. 38).*

Duval présente les mathématiques comme étant une discipline répartie en plusieurs domaines (arithmétique, géométrie, algèbre, calcul, statistique, etc.). Dans chaque domaine, nous retrouvons, d'une part, un ensemble de concepts relatifs aux objets tels que les nombres, les fonctions, les vecteurs, etc., et, d'autre part, des algorithmes spécifiques, des procédures, des méthodes de résolution de problèmes, qui sont très liés aux objets/concepts. C'est la raison pour laquelle l'enseignant se retrouve devant une large étendue de choix de manières d'enseigner. Ce dernier pourrait mettre l'accent sur les objets/concepts, et ce, en privilégiant des problèmes spécifiques appropriés à ses objectifs. Cependant, étudier les mathématiques ne se limite pas seulement à connaître des concepts/objets et à appliquer des algorithmes, mais aussi à utiliser des processus de pensée pour comprendre les concepts et leurs applications et à faire recours à plusieurs registres de représentation (Duval, 1995). Duval souligne que l'enseignement traditionnel a tendance à ne privilégier que le registre algébrique, de sorte que les apprenants ne réussissent pas à achever une bonne appréhension des concepts mathématiques et ne sont pas en mesure d'interpréter d'autres représentations telles que les représentations graphiques. En ce qui concerne le concept de série, il serait donc nécessaire de vérifier cette conjecture.

En ce qui a trait au mode cognitif en lien avec l'accès aux objets, la théorie de Duval met l'accent sur le fait qu'il y a une nette distinction entre l'assimilation des connaissances mathématiques et celle des connaissances qui concernent les autres sciences. En effet, en mathématiques il n'existe pas d'instruments pouvant permettre l'accès aux objets. On ne peut ni les étudier en utilisant un microscope ni les photographier. Cependant, on peut y accéder en faisant usage de symboles, d'expressions, de dessins, etc. En ce sens qu'un objet mathématique pourrait être représenté par un symbole, une écriture, un chiffre, etc., c'est ce qu'on appelle « représentations sémiotiques» de même que les tracés et les figures représentent des objets mathématiques (un segment, un point, un cercle, etc.). Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes et de symboles appartenant à un système de représentation qui a ses propres contraintes de signification et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques. Nous développerons avec plus de détails les fonctions cognitives dans les prochaines sections.

2.1.4. Les registres de représentation.

Tel que nous l'avons précisé dans la section 1.6, il existe plusieurs registres de représentation, mais, en mathématiques postsecondaires, les registres les plus courants sont le registre algébrique et le registre graphique. À l'origine, les registres de représentation sont des systèmes sémiotiques. Ces derniers sont des systèmes d'expression et de représentation, tel que le langage naturel et les images, mais en mathématique, on utilise plus souvent des systèmes variés d'écritures des nombres, des écritures algébriques, des figures géométriques, etc. (Duval, 1995, p. 1). Cependant, un système sémiotique peut être un registre de représentation, s'il permet trois fonctions cognitives que nous allons développer dans la section 2.2.

En résumé, un objet mathématique pourrait être représenté par plusieurs aspects différents, et ce, en faisant usage d'une des représentations citées précédemment, mais, malheureusement, certains apprenants le confondent avec sa représentation. Ainsi, tel que nous l'avons souligné dans la section 2.1.1, à long terme, cette confusion entraîne une perte d'appréhension qui représente une contrainte pouvant empêcher l'apprenant d'utiliser ses connaissances acquises dans des situations d'apprentissage. Ces inconvénients pourraient être les conséquences d'une absence d'activités cognitives sur des représentations sémiotiques en mobilisant deux ou plusieurs registres sémiotiques permettant ainsi une meilleure appréhension d'un concept mathématique. Ces inconvénients pourraient être expliqués aussi par le fait que chaque système sémiotique fournit de nouveaux moyens de représentation et procédures de réflexion en mathématiques. Cependant, la diversité de représentations sémiotiques avec laquelle un même objet peut être représenté présente une difficulté pour les apprenants, car dans un système sémiotique, le contenu de la représentation change pendant que l'objet représenté reste le même. Par exemple, lorsqu'on demande à un élève d'effectuer des opérations sur des nombres décimaux, ce n'est pas toujours évident qu'il soit capable de convertir ces nombres en fractions ou en pourcentages. En effet, additionner des nombres décimaux ne s'effectue pas en appliquant les mêmes règles d'addition de fractions, la stratégie de calcul diffère. Ici, on constate que la nécessité de diversifier les registres sémiotiques est requise.

Selon Duval, diversifier l'utilisation des registres sémiotiques incite l'étudiant à reconnaître un objet mathématique dans chacune de ses représentations, ce qui est une condition nécessaire pour qu'un objet mathématique ne soit pas confondu avec sa représentation. Par exemple, lorsqu'on propose aux étudiants d'analyser un graphique, l'objectif de cette initiative ne se limite pas uniquement à connaître ce type de graphique, mais de l'associer, en premier lieu, à la fonction qui lui est appropriée, d'effectuer une interprétation en lien avec le contexte en question et d'identifier l'objet mathématique représenté par la fonction et par la courbe qu'il lui est associé.

2.2. Sémiosis et registres de représentation.

Selon Duval (1993), on a toujours considéré que les représentations sémiotiques ne sont qu'une façon de rendre accessible une représentation mentale, ce qui limite leur rôle à des fins de communication. Cependant, cette conception, qui serait fréquente en enseignement traditionnel, ne reflète qu'une partie de la réalité. En effet, en plus de la communication, les représentations sémiotiques ont des rôles indispensables dans l'activité cognitive de la pensée, qui permet de mieux appréhender les concepts mathématiques. Ces représentations sémiotiques ont un rôle primordial dans ce qui suit:

a) Le développement des représentations mentales : ce développement dépend d'une intériorisation des représentations sémiotiques.

b) L'accomplissement de différentes fonctions cognitives : il s'agit d'une fonction d'objectivation (expression privée) qui ne dépend pas de celle de communication (expression pour autrui) et d'une fonction de traitement qui ne peut pas être remplie par les représentations mentales. En d'autres termes, il s'agit d'une fonction cognitive mentale qui s'effectue sans pour autant être communiquée à autrui comme par exemple le calcul mental. Certaines de ces activités pourraient être directement liées à l'utilisation de systèmes sémiotiques.

c) La production des connaissances : celle-ci se résume par le fait que les représentations sémiotiques permettent des représentations complètement différentes de l'objet représenté étant donné qu'elles peuvent relever de systèmes sémiotiques complètement différents (voir Benveniste, 1974; Bresson, 1987 cités par Duval, 1993, p.39). Somme toute, le développement de systèmes sémiotiques indépendants du langage naturel contribue dans le développement des sciences de manière générale (voir Granger, 1979, cité par Duval, 1993, p.48).

Tout bien considéré, les représentations sémiotiques permettent d'assurer certaines fonctions cognitives importantes. « Le fonctionnement cognitif de la pensée humaine se révèle inséparable de l'existence d'une diversité de registres sémiotiques de représentation» (Duval, 1993, p. 39).

Un système sémiotique peut être un registre de représentation, si celui-ci permet les trois activités cognitives fondamentales : la formation, le traitement et la conversion que nous allons développer dans ce qui suit.

- **La formation** d'une représentation identifiable**.**

La formation est une activité interne à un registre. Par exemple, dessiner une figure géométrique, écrire une formule, tracer un graphique, élaborer un schéma, etc. Cette activité cognitive doit respecter des règles comme par exemple les contraintes de construction pour les figures. La fonction de ces règles est d'assurer, en premier lieu, les conditions d'identification et de reconnaissance de la représentation et, en second lieu, la possibilité de leur utilisation pour des traitements. Dans ce cas, il s'agit uniquement des règles de conformité afin de reconnaitre des représentations.

- **Le traitement.**

Le traitement d'une représentation est la transformation de cette représentation dans le même registre dans lequel celle-ci a été formée. Ainsi, le traitement est une transformation interne à un registre sémiotique. Comme exemple de traitement, nous pourrions citer le calcul numérique ou algébrique ou la reconfiguration d'une figure géométrique comme dans le cas d'une transformation géométrique qui consiste à tracer une hauteur dans un triangle et obtenir ainsi deux triangles rectangles. Cette reconfiguration fait partie de nombreuses opérations qui donnent au registre des figures son rôle heuristique. L'anamorphose est, d'une part, une sorte de traitement qui peut s'appliquer à toute représentation figurale et, d'autre part, une sorte de transformation de figures à l'aide de changement de coordonnées de points appartenant à celles-ci.

- **La conversion.**

La conversion est la transformation d'une représentation dans un registre en une représentation dans un autre registre en conservant la totalité ou une partie seulement de son contenu. Par exemple, illustrer le graphique qui représente une fonction, représenter une inéquation par un demi-plan dans un plan cartésien, etc. Cette stratégie ne doit pas être confondue avec la formation, car, dans une conversion, il ne suffit pas de tracer un graphique ou dessiner une figure géométrique, mais plutôt de représenter une expression algébrique par un graphique ou un dessin. C'est une transformation externe au registre de représentation initial. La description est une conversion d'une représentation non verbale (schéma, figure, graphe) en une représentation linguistique.

La conversion est une activité cognitive différente et indépendante du traitement. Par exemple, des élèves peuvent très bien effectuer l'addition de deux nombres avec leur écriture décimale et avec leur écriture fractionnaire, et ne pas du tout penser à convertir lorsque c'est nécessaire de convertir l'écriture décimale en écriture fractionnaire et réciproquement. Pour l'écriture d'un nombre, il faut distinguer la signification opératoire attachée au signifiant en vertu des règles du système d'écriture. Par exemple, cette signification opératoire n'est pas la même pour 0,25 que pour $\frac{1}{4}$ et pour. 25.10^{-2} Car, dans les trois écritures différentes, on ne met pas en œuvre les mêmes traitements pour effectuer les additions.

$$0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$25.10^{-2} + 25.10^{-2} = 50.10^{-2}$$

Chacune de ces trois écritures a une signification opératoire différente, mais elles représentent le même nombre.

Dans notre cas, en ce qui a trait au concept de série, nous pourrions citer l'exemple de la représentation d'une série par la somme d'une infinité de rectangles. Nous illustrerons subséquemment des exemples visuels qui représentent les trois activités sémiotiques.

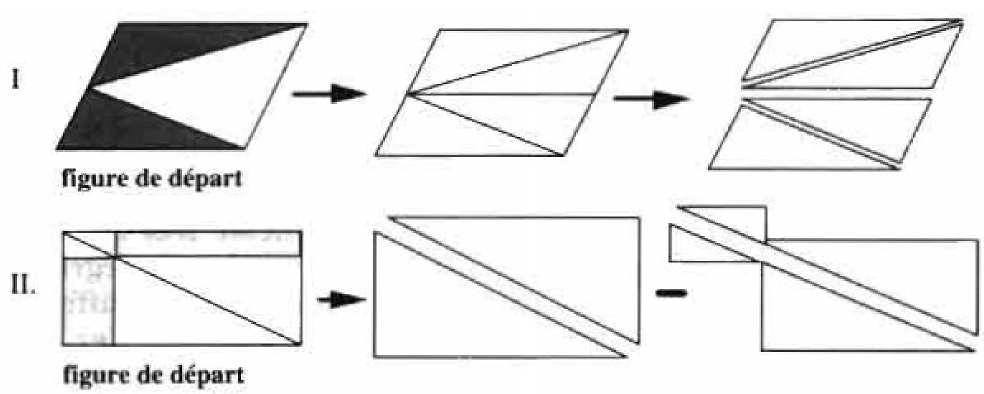
Il est important de noter que la conversion est réversible comme par exemple, on peut représenter une somme infinie par une expression algébrique, par une expression en langue naturelle, par un dessin, etc. Cependant, est-ce que l'étudiant qui est en mesure de passer du registre algébrique au registre graphique pour représenter cette somme infinie serait aussi en mesure de passer du registre graphique au registre algébrique?

Selon Duval, souvent les élèves réussissent la conversion dans un seul sens. Le fait que la conversion soit irréversible pour certains étudiants rend cette activité sémiotique incomplète et ne permettrait pas de mieux appréhender un concept mathématique. Ainsi, la conversion admet des règles à respecter afin d'optimiser ses bienfaits dans l'appréhension conceptuelle des objets mathématiques.

2.2.1. Exemples de traitement.

La Figure 5 illustre deux exemples de traitement permettant la comparaison d'aires; il s'agit, en particulier, de deux cas de reconfiguration. Dans certains cas, il est possible de déduire certaines propriétés géométriques à partir d'une figure donnée (ou que l'on peut construire à partir de l'énoncé) moyennant l'activité de traitement basée sur la modification figurale (reconfiguration d'une figure géométrique). Par exemple, dans la Figure 5-II, l'aire des deux rectangles hachurées faisant partie du grand rectangle est la même, car le rectangle a été subdivisé en deux parties congruentes de part et d'autre de la diagonale et de chaque côté il a été enlevé la même portion d'aire.

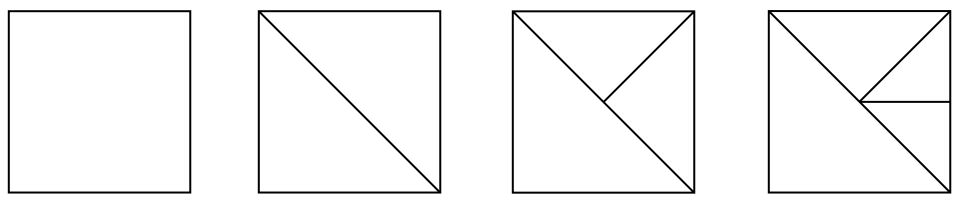
- Figure 5 : Reconfiguration de figures géométriques dans Duval (1994, p. 131)



2.2.2. Exemple de traitement en lien avec le concept de série.

Dans l'exemple de la somme des inverses des puissances de 2 présenté dans les sections 1.1 et 1.4, la subdivision du carré (tel qu'illustré dans la Figure 4) est une activité de traitement. Nous illustrons cette activité de traitement avec plus de détails dans la Figure 6.

- Figure 6 : Exemple de traitement

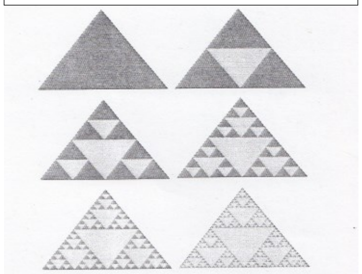


Ce traitement représente une somme des inverses des puissances de 2. Ici, le carré a été subdivisé en 2 un peu comme dans le carré illustré dans la Figure 2 (section 1.1). Cependant, dans la Figure 6 la subdivision se fait à partir d'une diagonale du carré qui nous donne un triangle isocèle qui sera subdivisé à son tour en traçant une hauteur à partir du sommet. On pourrait inviter l'étudiant à reconnaître l'objet mathématique dans ce registre, et ce, en l'incitant à effectuer une conversion pour représenter cette situation dans un autre registre sémiotique. On pourrait reconnaître par la suite qu'il s'agit bel et bien de la somme des inverses des puissances de 2 qui a été représentée dans le registre de représentation géométrique.

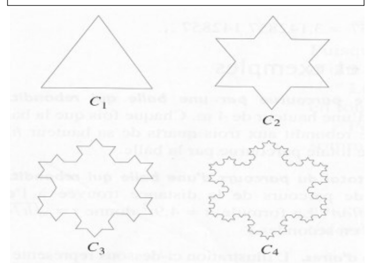
Les représentations visuelles de la Figure 7 font partie de l'énoncé de certains problèmes portant sur les séries. Il s'agit d'un support visuel afin de mieux comprendre l'énoncé de problèmes proposés aux étudiants. Cependant, si la réalisation de ces représentations visuelles faisait partie de la tâche de l'étudiant, ce serait une occasion d'offrir la chance aux étudiants de réaliser, d'une part, une conversion en passant du registre utilisé dans l'énoncé du problème à un registre visuel et, d'autre part, un traitement en portant des modifications à la représentation visuelle qui représente la série en question.

- Figure 7 : Exemples de traitement et concept de série

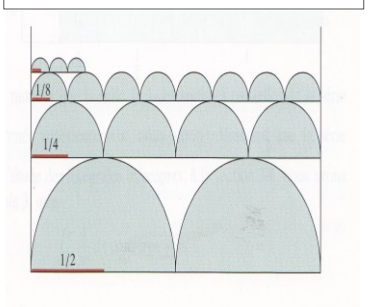
Ross (2006, p. 228)



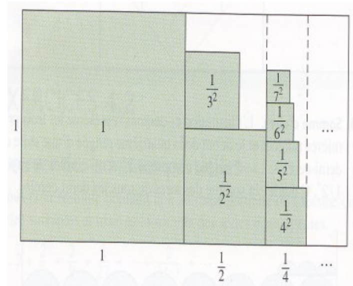
Thomas et al. (2002, p. 280)



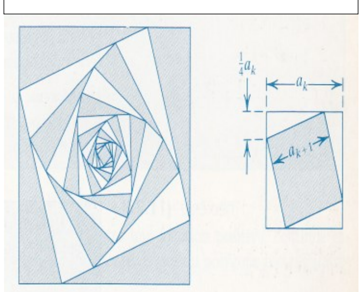
Thomas et al. (2002, p. 280)



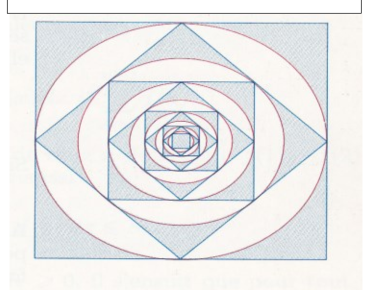
Thomas et al. (2002, p. 280)



Swokowski (1995, p. 543)



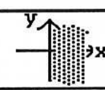
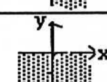
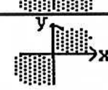
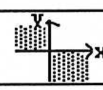
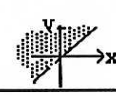
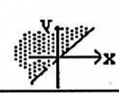
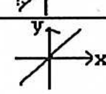
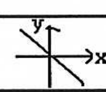
Swokowski (1995, p. 553)



2.2.3. Exemple de conversion et de représentations sémiotiques.

Le tableau 1 illustre des résultats d'une étude qui a été effectuée auprès de 105 élèves du niveau secondaire. Les colonnes I, II et III correspondent à trois registres de représentation différents (I : langue naturelle; II : registre algébrique; III : registre graphique). La quatrième et la cinquième colonne illustrent le taux de réussite de certaines conversions entre les trois registres. Pour la conversion III→ II, il fallait uniquement choisir l'expression algébrique parmi d'autres qui correspondait au graphique hachuré tel que $y = x$, $y = -x$, etc. Il s'agit d'un exemple très intéressant, car le registre de représentation graphique incite les apprenants à établir un codage (pour chaque point correspond un couple de nombres). Cependant, certains élèves se contentaient de placer les points dans le plan cartésien sans pour autant tracer la ligne continue d'une droite qui représente l'équation $y = x$ par exemple. Ici, nous constatons qu'il y a absence de discrimination des variables visuelles pertinentes dans le registre graphique (Duval, 1988). Selon Hitt (2003), en général, lorsqu'un étudiant est appelé à tracer une droite à partir d'une équation, celui-ci aura de grandes difficultés dans la tâche si cette dernière se limite uniquement à construire des représentations graphiques à partir d'expressions algébriques en calculant seulement les coordonnées de quelques points. Aussi, cette manière de procéder n'aiderait pas l'étudiant à être en mesure d'interpréter un graphique ou de déterminer l'expression algébrique qui lui correspond. Les deux dernières colonnes indiquant le taux de réussite des tâches nous permettent de repérer les phénomènes de non-congruence (absence de correspondance entre représentations, voir la section 2.3) pour la conversion des représentations. Par exemple, dans la troisième ligne, il y a un écart important enregistré entre le passage de III→II et le passage de I→III. En effet, le passage de III→II, qui se limite à une simple tâche de reconnaissance est nettement moins réussi que le passage de I→III. Pour le passage de I→III, « il y a correspondance sémantique entre les unités signifiantes de l'expression linguistique de la relation et de sa représentation graphique» (Duval, 1995, p. 56). Cependant, il n'y a pas de correspondance sémantique entre les unités signifiantes pour le passage III→II. Dans ce cas, on doit recourir à ce que Duval appelle « la globalisation descriptive » (Duval, 1995, p. 245). Cette dernière s'explique par le fait « de regrouper dans une même expression des données ou des relations distinctes, mais semblables ». Souvent, les difficultés en lien avec la non-congruence se traduisent par des échecs dans les tâches qui demandent une conversion de représentations qui révèlent un cloisonnement des registres de représentation. Selon Duval, ce cloisonnement persiste même si on mobilise plusieurs registres de représentation dans notre enseignement et il rend la conversion insuffisante pour l'appréhension des concepts mathématiques. Ainsi, il souligne que la coordination de différents registres de représentation est une condition indispensable à la compréhension qui complète les trois activités cognitives de la Sémiosis (formation, traitement et conversion). Nous allons définir et donner plus de détails sur la coordination dans la section 2. 3 consacrée à la Noésis et la coordination des registres de représentation.

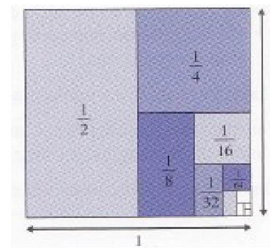
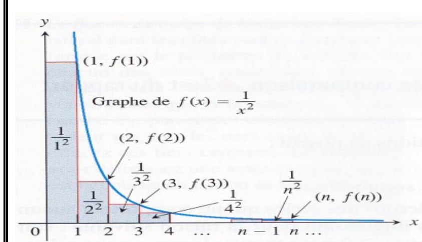
- Tableau 1 : Exemples de conversions (Duval, 1995, p. 55)

I	II	III	I → III : *hachurer*	III→ II : *choisir l'expressi on*
1...l'ensemble des points qui ont une abscisse positive	$x > 0$		67%	51%
2...........................qui ont une ordonnée négative	$y < 0$		67%	61%
3.................dont l'abscisse et et l'ordonnée sont de même signe	$xy \geq 0$		56%	25%
4.	$xy \leq 0$			.23 %
5.............dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse (*la droite y=x étant déjà tracée sur le graphique*)	$y > x$		38%	38%
6.............dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse (*la droite y=x n'étant pas déjà tracée sur le graphiqu*	$y > x$		19%	25%
7................dont l'ordonnée est égale à l'abscisse	$y = x$		60%	75%
8...............dont l'ordonnée est l'opposée de l'abscisse	$y = - x$		34%	58%

2.2.4. Exemples de conversion et de représentations sémiotiques en lien avec le concept de série.

Nous pouvons concrétiser les activités de conversion à l'apprentissage des sommes infinies. En effet, l'exemple de conversion suivant nous permettra de mieux comprendre comment une telle activité pourrait permettre de mieux appréhender le concept de somme infinie et pourrait par la même occasion évacuer des conceptions erronées comme par exemple le fait que certains étudiants considèrent qu'une série est forcément divergente (voir section 1.3). Nous pourrons aussi, par la même occasion, prévoir les différentes contraintes en lien avec la congruence (correspondance entre représentations) de la conversion en nous basant sur la théorie de Duval. Selon ce dernier, la correspondance entre deux représentations qui appartiennent à deux registres différents s'établit par la correspondance des unités signifiantes de chaque registre. Par exemple, dans la phrase « l'ensemble des points dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse », on constate qu'il y a une correspondance terme à terme entre les unités signifiantes. Autrement dit, on peut effectuer une conversion inverse allant de l'expression algébrique ($y > x$) à l'expression en langue naturelle. Nous rappelons que, selon Duval (2004), dans une conversion nous avons, d'une part, le contenu mathématique qui serait conceptuel non sémiotique (mental) et, d'autre part, la représentation sémiotique qui serait choisie selon le besoin de communication et le coût du traitement (externe ou matérielle). À partir de ce point de vue, la conversion serait le résultat d'une compréhension conceptuelle, et des difficultés avec celle-ci seraient un indicateur d'incompréhension.

- Tableau 2 : Exemples de conversions et concept de série[1]

I	II	III
La somme des inverses des puissances de 2.	$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$	
La somme des inverses des carrées des nombres entiers.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots$	

Dans le tableau 2, on peut voir deux exemples de deux conversions, utilisant quatre registres sémiotiques différents : langue naturelle, registre algébrique, registre géométrique et registre graphique. Dans la colonne III, on peut reconnaître la première série représentée par un carré dont l'aire est égale à 1 et dont chacune des parties qui le composent représente un terme de cette somme infinie. En effectuant un traitement dans la représentation visuelle qui correspond à la première série, nous pouvons constater que nous ne dépasserons jamais l'aire totale du rectangle. Ce traitement s'effectue de la manière suivante. En premier lieu, on a subdivisé ce carré en deux parties isométriques, ensuite on a subdivisé une moitié en deux, ensuite un quart en deux, etc. On répète cette opération indéfiniment, mais on constate bien qu'on ne sortira jamais du carré. La subdivision de cette figure géométrique est un traitement et chaque terme de la série est représenté par une portion de ce carré. Le fait qu'on ne sort pas de ce carré pourrait aider l'étudiant à mieux admettre que cette série ne dépassera pas l'aire de cette figure géométrique qui est égale à

[1] Les figures 1 et 2 de la section 1.1 ont été utilisées dans ce tableau.

un. Cette série converge vers 1 (représenté par l'aire du carré de côté 1), mais l'utilisation de l'infini potentiel peut faire certains étudiants considérer qu'il y aura toujours des parties à subdiviser et donc que la série ne peut pas être convergente. Cependant, le fait que la série soit croissante et qu'elle soit bornée nous permet d'affirmer qu'elle est convergente. En ce qui a trait à la conversion, nous pensons que les passages I→III et II→III pourraient être difficiles à accomplir dans les deux sens, car il n'y a pas de correspondances sémantiques entre les unités signifiantes. La seule conversion qui serait accessible est le passage I→II qui est congruente et se limite simplement à établir des liens sémantiques entre chacune des unités signifiantes dans chacun des deux registres de représentation.

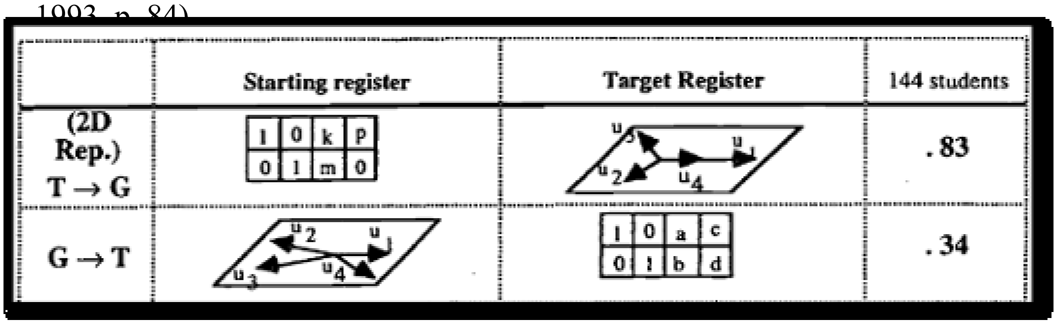
En ce qui concerne la série qui représente la somme des inverses des carrés des nombres entiers, le traitement dans le registre graphique dans lequel on a représenté des rectangles situés sous la courbe de la fonction $f(x)=\frac{1}{x^2}$ pourrait aussi permettre certains étudiants d'admettre la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. On voit que l'aire de chaque rectangle situé sous cette courbe correspond à un terme de la série. À l'aide du calcul de l'intégrale de 1 à l'infini, on peut déterminer l'aire au-dessous de la courbe. Dans ce cas, cette aire est finie, alors notre série converge, car les rectangles qui représentent les termes de la série sont situés au-dessous de cette courbe. Pour expliquer cela de façon simple, la somme des aires des rectangles est plus petite que l'aire au-dessous de la courbe. Dans ce cas, si l'aire au-dessous de la courbe est finie, l'aire de tous les rectangles doit être finie elle aussi, puisqu'elle est plus petite, ce qui nous permettra de conclure que la série en question converge. Il est possible de conclure ce résultat en utilisant le critère de l'intégrale (voir section 1.1) pour déterminer la convergence de la série. En ce qui a trait à la conversion, nous pensons que les passages I→III et II→III seraient très difficiles à accomplir dans les deux sens, car il n'y a pas de correspondances sémantiques entre les unités signifiantes. La seule conversion qui serait accessible pourrait être le passage I→II qui est congruente et se limite simplement à établir des liens sémantiques entre chacune des unités signifiantes dans chacun des deux registres de représentation.

2.3. Noésis : Les règles de la conversion et la coordination entre les registres.

La Sémiosis est l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique et la Noésis pourrait être résumée par l'appréhension conceptuelle d'un objet. Ainsi, les difficultés d'apprentissage et les contraintes auxquels les élèves se heurtent régulièrement dans la résolution des problèmes en mathématiques nous incitent à admettre que la Noésis et une activité fondamentale du fonctionnement cognitif de la pensée : « il n'y a pas de Noésis sans Sémiosis, c'est-à-dire sans le recours à une pluralité au moins potentielle de systèmes sémiotiques, recours qui implique leur coordination pour le sujet lui-même » (Duval, 1995, p.5).

Tel que nous l'avons souligné dans la section 2.2 de ce chapitre, la conversion peut, dans certains cas, être vue comme une traduction facile d'unité à unité, ce qui fait que cette dernière soit congruente. Dans d'autres cas, il est tout le contraire : la conversion pourrait être non congruente comme dans le cas d'un des exemples du tableau 1 (ensemble de points dont l'ordonnée et abscisse sont de même signe → $x \times y > 0$). La Figure 8 illustre la congruence d'une conversion dans un sens et la non-congruence de cette même conversion dans le sens opposé.

- Figure 8 : Tâche élémentaire de conversion (Pavlopoulou, 1993, cité par Duval, 1993, p. 84)



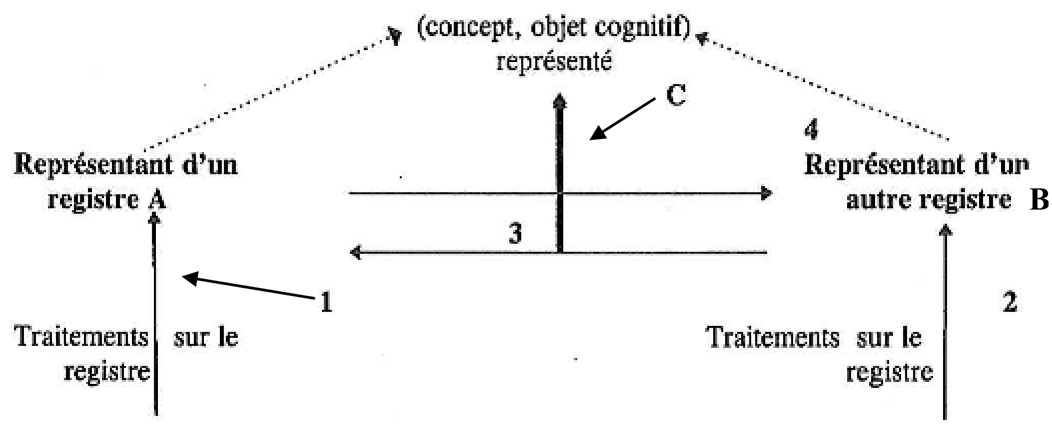
	Starting register	Target Register	144 students
(2D Rep.) T → G	1 0 k p / 0 1 m 0		.83
G → T		1 0 a c / 0 1 b d	.34

La Figure 8 illustre un tableau dans lequel nous pouvons voir deux registres de représentation différents représentant un même objet mathématique. Il s'agit de représenter des vecteurs par un dessin et par une table de valeurs. Nous constatons ainsi que, sur 144 étudiants, 83% d'étudiants ont réussi à tracer des vecteurs à partir d'une table de valeurs. Cependant, seulement 34% ont réussi à représenter des vecteurs déjà tracés dans une table de valeurs.

Deux représentations d'un objet n'ont pas le même contenu d'un registre à un autre et lorsque la conversion de l'un à l'autre est non congruente, les deux contenus peuvent être compris comme deux objets très différents, ce qui empêche les étudiants d'appréhender le concept mathématique en question. L'absence apparente de correspondance entre les contenus de deux représentations d'un même objet provient du fait que le contenu de la représentation ne dépend pas seulement de l'objet représenté, mais aussi du système activé de production.

La Noésis concerne l'appréhension conceptuelle d'un objet et pour qu'un apprenant puisse reconnaitre un objet mathématique dans un registre de représentation précis, il va falloir qu'il soit en mesure d'effectuer la coordination des registres de représentation qui se manifeste par la capacité de reconnaitre dans au moins deux représentations différentes la représentation d'un même objet. Cependant, l'absence de coordination n'empêche pas l'appréhension totale d'un concept mathématique, « mais cette compréhension, limitée au contexte sémiotique d'un seul registre, ne favorise guère les transferts et les apprentissages ultérieurs : elle rend les connaissances acquises peu ou pas mobilisables dans toutes les situations où elles devraient être réellement utilisées » (Duval, 1993, p. 52). De plus, les échecs ou même les blocages mentaux lorsque la conversion est non congruente révèlent un manque de coordination entre les registres utilisés simultanément. Ainsi, en plus de la réversibilité de la conversion, la compréhension conceptuelle est possible quand une coordination entre les registres sémiotiques utilisés est assurée (Duval, 1995). Pour cette raison, la coordination est une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec le contenu de la représentation. Afin de mieux illustrer l'importance de la coordination qui s'ajoute aux trois autres activités cognitives, nous nous appuyons sur la Figure 9 qui représente une activité cognitive dans laquelle on représente le traitement, la conversion et la formation qui est implicite.

- Figure 9 : Activités cognitives et leur fonctionnement (Duval, 1993, p. 51)



Les flèches 1 et 2 correspondent au traitement qui est une transformation interne à un registre. Dans cette activité, on a fait usage de deux registres sémiotiques. Il est clair qu'il est indispensable d'utiliser au moins deux registres sémiotiques afin que l'activité cognitive puisse être complète, car il ne peut y avoir de conversion si on n'a pas au moins deux registres. Les flèches 3 et 4 correspondent à des conversions, qui sont des transformations externes aux deux registres sémiotiques. Les deux flèches sont orientées dans deux sens opposés pour exprimer la réversibilité de la conversion qui assure le passage du registre A à l'autre registre et vice versa. La flèche C, orientée vers l'objet cognitif, correspond à la compréhension intégrative d'une représentation et exprime la coordination entre les deux registres qui est une autre règle à suivre afin que la compréhension du concept en question soit complète. Et naturellement les flèches en pointillé relient le concept représenté avec sa représentation dans les deux registres sémiotiques (A et B) et indiquent la distinction entre la représentation de l'objet et le représenté qui est l'objet mathématique lui-même.

Il est important de mentionner que ce cas d'activité est le plus simple, car, parfois et dépendamment du domaine, la coordination de trois registres sémiotiques pourrait être nécessaire. Le changement de registre est indispensable, car chaque registre possède des traitements qui lui sont propres. Toutefois, l'absence de cette coordination ne va pas empêcher l'apprenant de toute compréhension, mais elle ne lui permettra pas de pouvoir mobiliser les connaissances acquises dans des contextes différents. En ce sens que l'étudiant ne sera pas en mesure de contrôler le sens de ce qu'il apprend pendant son apprentissage. Ici, on pourrait faire le lien avec l'importance de véhiculer des connaissances et de reconnaître un concept mathématique tel que la série dans des applications hors du domaine mathématique.

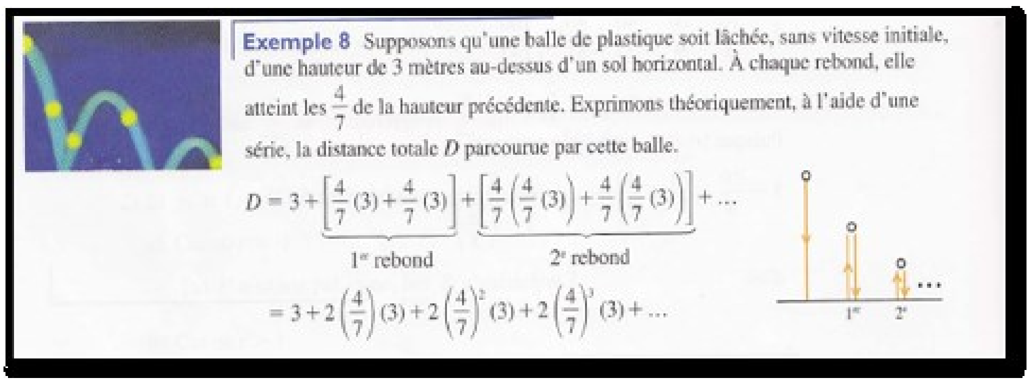
2.4. Applications du concept de série.

Nous savons maintenant que les activités cognitives en lien avec la Sémiosis et la Noésis complètent l'apprentissage de l'étudiant et lui permettent, d'une part, de donner du sens à ce qu'il fait et, d'autre part, de véhiculer ses connaissances dans d'autres contextes hors du domaine mathématique en cherchant un moyen approprié de modélisation. L'apprentissage des mathématiques ne doit pas se limiter à une seule pratique de concepts/objets particuliers et à juste appliquer des algorithmes, mais il doit aussi contrôler des processus de pensée qui permettent aux étudiants de comprendre des concepts et leurs applications (Duval, 2000).

Les applications et les activités avec contexte permettent aux étudiants de mobiliser différents registres de représentation; par exemple, Hitt (2003) montre, dans un environnement de résolution de problèmes avec contexte (applications extramathématiques), que certains étudiants mobilisent des registres de représentations en se basant sur des productions sémiotiques et en effectuant des coordinations entre différents registres afin de résoudre ces problèmes. Les représentations mobilisées par ces étudiants ont été un élément essentiel pour donner une cohérence à leur production afin d'atteindre le résultat du problème en question. Ainsi, Hitt (2003) montre l'importance de la variété hétérogène des représentations sémiotiques mobilisées dans des démarches mathématiques et le lien entre ces représentations et les applications des concepts mathématiques qui permettent d'améliorer la compréhension et la construction de ces derniers.

Dans le cas des séries, le changement de registres pourrait, tel qu'il est mentionné dans la section 2.2, inciter les étudiants à reconnaître les séries dans d'autres contextes et ainsi véhiculer leurs connaissances acquises pour modéliser des situations dans des applications hors du domaine mathématique. Dans l'exemple suivant, l'étudiant est appelé à reconnaître la série numérique dans le contexte en question (il s'agit d'une balle qui rebondit indéfiniment).

- Exemple 4 (Charron & Parent, 2004, p. 308)


Exemple 8 Supposons qu'une balle de plastique soit lâchée, sans vitesse initiale, d'une hauteur de 3 mètres au-dessus d'un sol horizontal. À chaque rebond, elle atteint les $\frac{4}{7}$ de la hauteur précédente. Exprimons théoriquement, à l'aide d'une série, la distance totale D parcourue par cette balle.

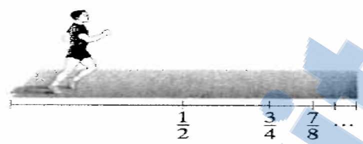
$$D = 3 + \underbrace{\left[\frac{4}{7}(3) + \frac{4}{7}(3)\right]}_{1^{\text{er}}\text{ rebond}} + \underbrace{\left[\frac{4}{7}\left(\frac{4}{7}(3)\right) + \frac{4}{7}\left(\frac{4}{7}(3)\right)\right]}_{2^{\text{e}}\text{ rebond}} + \ldots$$

$$= 3 + 2\left(\frac{4}{7}\right)(3) + 2\left(\frac{4}{7}\right)^2(3) + 2\left(\frac{4}{7}\right)^3(3) + \ldots$$

Ici, la conversion aurait pu avoir une très grande utilité pour l'apprenant qui serait appelé à modéliser cette situation. Cependant, la modélisation est déjà faite dans cet exemple. Il serait préférable que ce type d'application extramathématique soit proposé en tant que problème qui inciterait l'étudiant à modéliser la situation. En effet, si l'étudiant en question a, au préalable, acquis des connaissances dans différents registres, il serait en mesure de reconnaître le concept en jeu dans ce contexte. La distance parcourue par la balle pourrait être calculée en utilisant une somme infinie particulière, une série géométrique, dont les termes correspondent à la hauteur de la balle dans chaque rebond. Cela n'est qu'une situation parmi d'autres, il existe d'autres applications telles que celles que nous avons illustrées dans la section 1.2. Voici un autre exemple d'application qui demande une modélisation d'une situation.

- Exemple 5 (Bradley et al., 2002, p. 204)

Un coureur ne peut jamais atteindre la fin d'une course. En effet, il doit d'abord parcourir la moitié de la longueur de la piste, puis la moitié de la distance restante, de sorte qu'il a parcouru à ce stade $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de la longueur de la piste et qu'il lui en reste $\frac{1}{4}$ à courir. Après avoir couru la moitié de cette distance, il lui reste encore $\frac{1}{8}$ de la piste à parcourir, et ainsi de suite, indéfiniment.



On suppose que le coureur court à une vitesse constante et qu'il lui faut un temps T (en minutes) pour parcourir la première moitié de la piste. Écrire une série infinie donnant le temps *total* nécessaire au coureur pour parcourir la piste et montrer que ce temps total est $2T$, comme on pouvait intuitivement s'y attendre.

L'exemple 5 montre l'utilité de reconnaître le concept de série dans un problème contextualisé avant de modéliser la situation en question d'une façon adéquate et l'utilité de discuter sur l'infini potentiel et l'infini achevé (voir section 1.3). Dans ce cas, l'étudiant pourrait s'appuyer sur la représentation visuelle de l'énoncé afin de déterminer la somme infinie qui permet de donner le temps total nécessaire au coureur pour parcourir la piste qui représente la réponse à ce problème. Ainsi, nous constatons l'utilité des applications extramathématiques qui inciteraient parfois les étudiants à développer des habiletés en lien avec les représentations visuelles et leur permettraient aussi de donner du sens au concept de série. C'est la raison pour laquelle nous envisageons de prêter une attention aux applications mathématiques et extramathématiques, et ce, dans la partie théorique et la partie pratique des manuels analysés.

2.5. Objectifs de recherche.

La théorie de Duval suggère en partie de développer des habiletés de visualisation et de diversifier les registres de représentation afin de mieux appréhender les concepts mathématiques tels que les sommes infinies. Aussi, selon des études précédentes concernant l'enseignement des sommes infinies au postsecondaire, ce concept serait essentiel à la compréhension de l'évolution historique des mathématiques modernes et certaines de ses branches, ainsi que plusieurs applications mathématiques et extramathématiques des notions de l'Analyse (González-Martín, Seffah & Nardi, 2009). Notre travail de recherche s'appuie sur l'importance de l'utilisation des registres de représentation et sur les activités cognitives en lien avec ces derniers afin de mieux connaitre l'enseignement du concept de série au niveau postsecondaire. Notre analyse de manuels se penchera sur le contenu de la partie pratique et théorique en lien avec le concept de série. En ce qui a trait à la partie théorique, nous allons prêter une attention particulière aux exemples qui apparaissent dans les manuels, et ce, en nous basant sur les différents registres de représentation utilisés. Nous considérons que les exemples occupent un espace assez important dans les manuels. C'est la raison pour laquelle nous pensons que l'analyse de cette partie du contenu des manuels pourrait apporter des éléments de réponse à notre question de recherche qui est la suivante. Quelle est la place de la représentation visuelle en lien avec le concept de série dans les manuels et quelles sont les représentations (algébriques et graphiques) qui y sont privilégiées? Est-ce qu'il y a une évolution dans le contenu des manuels en ce qui concerne l'utilisation diversifiée de différentes représentations? Tel que discuté dans les sections 1.4, 1.6 et 2.1.4, il existe plusieurs registres de représentation, mais, en mathématiques postsecondaires, les registres les plus courants sont le registre algébrique et le registre graphique. C'est la raison pour laquelle nous n'utilisons pas, de façon explicite, le registre numérique.

Aussi, l'importance des applications mathématiques et extramathématiques du concept de série nous oriente vers l'analyse des différentes activités (exercices et problèmes) avec et sans contexte, et ce, en prêtant une attention aux différents registres de représentations qui y sont véhiculés. Ainsi, en prenant en compte tous ces éléments, les objectifs spécifiques de notre recherche sont les suivants :

O1 : Réaliser une analyse des manuels utilisés au niveau postsecondaire, et ce, en nous intéressant aux registres de représentations algébrique et graphique et aux activités qui leur sont rattachées en lien avec le concept de série. Hormis le registre graphique, nous nous intéressons à différentes représentations visuelles telles que les dessins.

O2 : Classifier différents types d'activités (exercices et problèmes) en soulignant les rôles des représentations visuelles utilisées dans celles-ci et illustrer les différentes applications extramathématiques.

O3 : Classifier les manuels analysés afin de vérifier s'il y a eu une évolution dans leur approche en ce qui concerne l'utilisation des registres de représentation et les applications du concept de série hors du domaine mathématique.

Nous reviendrons sur ces objectifs dans le chapitre 3 consacré à la méthodologie, et ce, en mettant l'accent sur les outils d'analyse à utiliser et sur les différentes étapes à suivre.

3. Méthodologie.

Dans ce chapitre, nous apportons des éléments pour répondre aux questions formulées dans la section 1.6 afin d'atteindre nos objectifs de recherche exprimés dans la section 2.5. Pour cela nous procéderons à une vaste collecte de matériels didactiques qui permettra d'obtenir un échantillon représentatif de l'enseignement du concept de série au niveau postsecondaire. À cet effet, notre étude sera axée sur l'analyse de manuels scolaires utilisés au Québec. Tel que nous l'avons mentionné dans le premier chapitre, le concept de série est introduit de façon formelle au niveau collégial. C'est la raison pour laquelle nous avons ciblé l'analyse des manuels au niveau collégial. Tel que nous l'avons souligné dans la section 1.6, l'analyse des manuels semble être une approche de recherche suffisamment significative et caractéristique de l'enseignement du concept de série au niveau postsecondaire. Nous donnons plus de détails à propos de la construction de notre échantillon dans la section 3.2. Afin d'effectuer notre étude, nous avons constitué un outil d'analyse (grilles) que nous décrirons dans la section 3.3 de ce chapitre. Cette analyse sera principalement axée sur les différents registres de représentations et les activités qui leur sont rattachées en lien avec le concept de série.

3.1. Type de recherche.

Notre recherche consiste à effectuer une analyse de contenu : cette dernière a pour objectif de recueillir et traiter des données d'un texte, et ce, en identifiant des informations qui répondent à notre question de recherche et en essayant de ressortir des spécificités comme par exemple repérer une particularité dans un manuel. Selon Lamoureux (2006), l'analyse de contenu permet d'effectuer une étude systémique d'une production (écrite, orale, visuelle ou audiovisuelle). Ce type d'analyse consiste à étudier de façon rigoureuse une œuvre produite par l'être humain et peut inclure les deux types d'analyses suivantes :

- L’analyse du contenu manifeste d’une production : Autrement dit, ce qui est explicitement exprimé (ex : les mots écrits d’un discours politique).

- L’analyse du contenu latent d’une production : Autrement dit, ce qui n’est pas formellement exprimé (ex : les raisons non dévoilées d’une décision politique).

L’analyse de contenu a ses avantages et ses inconvénients. Parmi ses avantages, nous pouvons citer les suivants :

- La systématisation de la recherche documentaire qui s’explique par le fait que cette analyse définit les éléments à illustrer dans les documents étudiés.

- La richesse d’interprétation qui s’explique par le fait qu’un même document peut être étudié par plusieurs chercheurs ayant des objectifs différents.

Parmi ses inconvénients, Lamoureux (2006) cite les suivants :

- Le temps requis pour le choix des documents et l’analyse de ces derniers qui pourrait être long.

- L’écart à la réalité, car les productions ne reflètent pas forcément la réalité dont elles témoignent.

- La fiabilité des sources qui n’est pas toujours une valeur absolue (ex : comment évaluer l’opinion d’un journaliste quand on sait que les articles sont censurés par le journal qui les publie?).

- La formation des analystes (ou codeurs), car ces derniers doivent adopter la même manière de consigner.

Il est important de préciser que, dans le cadre de notre recherche, le deuxième et le troisième inconvénients sont minimisés, car nous nous intéressons à l’utilisation de différents registres mathématiques, ce qui peut être observé de façon objective, sans accorder de l'intérêt aux raisons de cette utilisation. Notre analyse de contenu est descriptive, c'est-à-dire, nous déterminons des éléments et des catégories dans les manuels analysés, et ce, en utilisant des classifications basées sur des données quantitatives et qualitatives (par exemple : dans un manuel, il existe sept exemples dont trois sont visuels et quatre sont algébriques).

Dans notre recherche, nous utilisons des données principalement numériques, mais nous recueillons aussi des données essentiellement non numériques qui représentent des informations importantes que nous allons étudier de manière interprétative. C'est la raison pour laquelle notre recherche est à la fois de type quantitatif et qualitatif. Néanmoins, notre étude est majoritairement quantitative, car notre grille d'analyse est consacrée particulièrement aux données numériques, et ce, mis à part une partie de cette grille dans laquelle on répertorie des exemples d'applications extramathématiques et les activités qui incitent à la réalisation et à la production de représentations visuelles. Pour ce qui est des données numériques (analyse quantitative), il s'agit de quantifier des données basées sur des critères que nous allons illustrer et développer dans la section 3.3 de ce chapitre.

3.2. Échantillon et choix de manuels comme outil didactique à analyser.

Tel que nous l'avons précisé dans la section 2.5, nos objectifs de recherche concernent l'introduction des sommes infinies dans les manuels scolaires de niveau postsecondaire et ce, en prêtant une attention particulière sur l'approche adoptée dans ces outils didactiques et les registres de représentation utilisés. Nous rappelons aussi que dans le contexte où la recherche se développe, au Québec, l'introduction des séries a lieu au niveau collégial et que pour cette raison nous analysons des manuels utilisés dans le cours *Calcul intégral* qui se donne en deuxième session de la première année des études collégiales au Québec (voir section 1.1).

Pour analyser les approches utilisées par les manuels scolaires du niveau collégial d'une façon exhaustive, nous avons décidé de considérer une période de temps suffisamment longue (15 ans). Une fois établie la période de 15 ans, nous avons choisi des manuels utilisés dans des Cégeps[2] de Montréal entre 1993 et 2008[3]. Un premier échantillon a été construit avec le plan du cours *Calcul intégral* utilisé par un enseignant au Cégep Maisonneuve durant l'année scolaire 2008-2009, ainsi qu'une liste de manuels connus de lui, considérés comme des manuels très utilisés dans les Cégeps de Montréal dans le cadre du cours *Calcul intégral*. Pour compléter cette liste, nous avons effectué une recherche dans le centre des archives de la Bibliothèque Nationale de Montréal qui nous a permis de consulter un bon nombre de manuels et d'en choisir ceux édités entre 1993 et 2008. Nous nous sommes restreints aux Cégeps de Montréal, car étant la plus grande ville du Québec, nous faisons l'hypothèse qu'elle est représentative de ce qui se passe ailleurs dans la province. Enfin, pour les manuels qui ont plusieurs éditions, nous avons considéré les différentes éditions seulement dans le cas où elles présentaient des modifications significatives dans le chapitre des séries; dans le cas contraire, nous avons seulement considéré dans nos analyses l'édition la plus ancienne. Cette procédure nous a permis de disposer d'un échantillon de 17 manuels, chacun identifié par une lettre de A à Q. Nus illustrons ces 17 manuels dans le tableau suivant.

[2] Acronyme de « *Collège d'enseignement général et professionnel* » où les études collégiales ont lieu.

[3] Ce travail de recherche a été entamé en début de l'année 2009, raison pour laquelle l'intervalle de temps s'arrête en 2008. Malheureusement, ce travail a dû être interrompu pendant l'analyse des données pour être repris en 2014.

- Tableau 3: Les 17 manuels de notre échantillon

A Robert (1992)	B Ayres & Mendelson (1993)	C Charron & Parent (1993)	D Beaudoin & Laforest (1994)	E Wild (1995)	F Swokowski (1995)
G Anton (1996)	H Massé (1997)	I Charron & Parent (1997)	J Ouellet (2000)	K Hughes-Hallett, Gleason, Beaudoin, Charlebois, Labrie & Fraser (2001)	L Bradley, Smith, Franco & Marcheterre (2002)
M Dominguez & Rouquès (2002)	N Thomas, Finney, Weir & Giordano (2002)	O Charron & Parent (2004)	P Ross (2006)	Q Amyotte (2008)	

3.3. Éléments à observer dans les manuels et grilles d'analyse.

Tout au long de notre analyse de manuels, nous utilisons deux types de grilles : une grille d'analyse quantitative et qualitative établie pour chaque manuel et une grille d'analyse récapitulative dans laquelle nous introduisons tous les éléments à observer dans les 17 manuels simultanément. Nous allons illustrer notre façon de procéder en lien avec l'utilisation de ces grilles avec plus de détails, et ce, en soulignant et expliquant toutes les étapes à suivre dans les sections 3.3.1 et 3.3.2. Dans un premier temps, nous identifions l'auteur, le titre et l'année du manuel ainsi que le nombre de pages consacrées au concept de série[4]. Ces informations seront introduites dans la grille d'analyse qui représente le manuel en question. Le nombre de pages consacrées au concept de série dans chaque manuel nous permettra de déterminer dans quel ratio ce concept apparait dans cet outil didactique, ce qui nous donnera une idée sur la place de ce concept dans les manuels. En deuxième lieu, nous entamerons l'analyse des éléments observables en lien avec les registres de représentation utilisés pour l'introduction du concept de série.

3.3.1. Classification des représentations visuelles.

Afin de répondre à nos objectifs de recherche, nous allons utiliser la grille d'analyse individuelle comportant des données qualitatives et quantitatives recueillies dans chaque manuel et qui nous permettront d'avoir des éléments de réponse à notre question de recherche qui vont être illustrées en détail dans le chapitre 4 consacré à l'analyse des données. Ces éléments sont les suivants : le nombre, type et fonction des représentations visuelles (graphes, dessins, etc.) ainsi que le ratio de ces dernières par page. Avant de rentrer dans le vif du sujet de cette section, nous aimerions souligner la distinction entre deux types de représentations visuelles : dessin et graphique. Le premier type de représentation visuelle (dessin) pourrait être une image dans le registre géométrique, ainsi que toute autre représentation visuelle telle qu'une forme quelconque, un portrait, une photo, etc. Le deuxième type (graphique) sera seulement une image dans le registre graphique comme par exemple la courbe d'une fonction trigonométrique, quadratique, etc. Tel que nous l'avons souligné dans la section 2.2 en nous basant sur la théorie des registres sémiotiques de Duval, l'utilisation de différentes représentations sémiotiques et l'application des activités cognitives en lien avec ces représentations sont indispensables à l'appréhension complète des concepts mathématiques en général et du concept de série en particulier. Ainsi, l'utilisation des représentations visuelles de manière générale en plus du registre algébrique est une nécessité afin de permettre une appréhension optimale du concept de série. C'est la raison pour laquelle, nous nous intéressons aux différentes représentations visuelles dans la partie théorique (hors problèmes) et dans la partie pratique (exercices et problèmes) des manuels. Pour classifier les représentations visuelles (dessins et graphiques) utilisées dans les activités (exercices et problèmes) des manuels analysés, nous nous sommes inspirés de la classification d'Elia et Philippou (2004) qui se base sur les

---

[4] Nombre de pages consacré au concept de série à l'exception des séries de Taylor et des séries de puissances. Lorsque le contenu prend plus que la moitié d'une page, nous le comptons comme une page complète. Mais, lorsqu'il ne dépasse pas la moitié d'une page, nous comptons 0,5 d'une page.

types et rôles de chacune de ces représentations. Les deux types de représentations visuelles que nous utiliserons dans la grille d'analyse sont les suivants :

- R.V.D Pb : il s'agit des représentations visuelles (dessins) qui apparaissent dans un problème.
- R.V.G Pb : il s'agit des représentations visuelles (graphiques) qui apparaissent dans un problème.

Les quatre catégories des représentations visuelles sont les suivantes (Elia & Philippou, 2004) :

- Décorative (DEC) : il s'agit d'une représentation visuelle (dessin ou graphique) qui ne donne aucune information sur les démarches de la résolution du problème.
- Représentative (REP) : il s'agit d'une représentation visuelle (dessin ou graphique) qui représente une partie du contenu du problème ou tout le contenu du problème, mais elle n'est pas indispensable à la résolution de ce dernier.
- Organisationnelle (ORG) : il s'agit d'une représentation visuelle (dessin ou graphique) qui aide l'étudiant à organiser sa démarche de résolution du problème, mais elle n'est pas indispensable à cette résolution. Aussi, toutes les données nécessaires à la résolution du problème en question existent dans l'énoncé de ce dernier.
- Informationnelle (INF) : la résolution du problème est basée sur cette représentation visuelle (dessin ou graphique). Cette dernière est indispensable à la résolution de celui-ci. Elle contient des informations indispensables à la résolution du problème en question.

Pour classifier les représentations visuelles (dessins et graphiques) utilisées dans la partie théorique des manuels analysés, nous avons créé trois catégories. Les deux types de représentations visuelles sont désignés dans la grille d'analyse comme suit.

- R.V.D h. Pb : il s'agit des représentations visuelles (dessins) qui apparaissent dans la partie théorique (hors problème).
- R.V.G h. Pb : il s'agit des représentations visuelles (graphiques) qui apparaissent dans la partie théorique (hors problème).

Les trois catégories de ces représentations visuelles sont les suivantes :

- Hors concept : représentation visuelle qui n'a pas de lien avec le concept de série. Par exemple, le portrait d'un mathématicien.
- Conceptuelle : représentation visuelle qui a un lien avec le concept de série et qui est nécessaire à la compréhension de l'explication de ce dernier. Par exemple, un graphique dans l'explication du Test intégral.
- Conceptuelle anodine : représentation visuelle qui n'a pas de lien avec le concept de série, mais qui pourrait servir de rappel d'un autre concept mathématique utilisé dans un exemple ou dans un théorème qui porte sur les sommes infinies. Par exemple, un graphique d'une fonction sinus dans la marge pour rappeler sa forme aux étudiants.

3.3.2. Utilisation des registres graphique et algébrique dans les exemples.

Tel que nous l'avons mentionné dans la section 2.1, la distinction entre un objet mathématique et sa représentation est indispensable à l'appréhension conceptuelle de cet objet et les objets mathématiques ne doivent pas être confondus avec leurs représentations, car la confusion entre l'objet mathématique et sa représentation entrainerait une perte de compréhension de ces derniers (Duval, 1993). Ainsi, selon la théorie de Duval, l'utilisation d'au moins deux registres de représentation aiderait à éviter ce genre de confusion et serait aussi indispensable à une meilleure appréhension des concepts mathématiques. C'est la raison pour laquelle nous prêtons une attention particulière aux registres de représentation utilisés dans la partie théorique. Tel que nous l'avons mentionné dans la section 2.4, les exemples occupent un espace important dans les parties consacrées à l'introduction de concepts et de résultats (théorèmes, propriétés, …) et à la présentation de techniques pour résoudre des questions et des problèmes d'un manuel (communément appelés « partie théorique » du chapitre). Pour cette raison, nous envisageons d'analyser ces exemples afin de prendre connaissance de la présence et de l'utilisation des registres algébrique et graphique dans ces exemples. Pour ce faire, nous avons identifié trois types d'exemples qui sont les suivants :

- Exemple visuel : il s'agit d'un exemple dans lequel on retrouve uniquement une représentation visuelle (dessin ou graphique).
- Exemple algébrique : il s'agit d'un exemple dans lequel on utilise uniquement le registre algébrique.
- Exemple mixte : il s'agit d'un exemple qui est à la fois visuel et algébrique.

Aussi, nous allons vérifier si l'étudiant est explicitement appelé à interpréter ou à produire une représentation visuelle dans les dix-sept manuels analysés afin de mieux comprendre un exemple ou de pouvoir résoudre un problème ou un exercice. Ces éléments de réponse apparaitront dans la partie qualitative de la grille d'analyse.

3.3.3. Applications du concept de série et types d'activités dans les manuels.

Dans cette section, nous allons identifier les différents types d'activités (exercices et problèmes) qui vont être comptabilisées avant de retranscrire le nombre de chaque type d'activité dans la partie quantitative de la grille d'analyse. Aussi, dans la partie qualitative de cette grille, nous allons introduire les différentes applications mathématiques et extramathématiques qui apparaissent dans les manuels. Nous avons vu dans les sections 2.2 et 2.3 l'importance des activités cognitives qui permettent de donner du sens aux différents concepts mathématiques et de véhiculer ces derniers dans des contextes hors du domaine mathématique, et ce, en cherchant un moyen approprié de modélisation (section 2.4). Nous avons illustré aussi l'importance de l'application du concept de série dans des domaines extramathématiques ainsi que le rôle indispensable de diversifier l'utilisation des registres de représentations dans la résolution de ces types de tâches.

En ce qui a trait aux différentes activités (exercices et problèmes) qui apparaissent dans les manuels, nous avons identifié deux catégories qui sont les suivantes :

- Activités avec contexte : il s'agit d'exercices et problèmes dans lesquels on retrouve des applications extramathématiques. Dans le but d'aller plus en profondeur en ce qui concerne ces activités, nous avons jugé utile d'analyser les différentes applications extramathématiques des exercices et problèmes contextualisés. Pour ce faire, nous avons identifié les caractéristiques de ces applications et nous avons créé deux catégories qui sont les suivantes :
    - Application réaliste : il s'agit d'applications qui modélisent des phénomènes qu'on peut rencontrer dans la vie quotidienne comme, par exemple, le calcul du gain total d'une entreprise réalisé durant une période de temps indéfinie.
    - Application artificielle : il s'agit d'activités dans un contexte qui semble forcé ou que les étudiants expérimenteront difficilement dans la vie quotidienne comme par exemple le calcul d'une distance parcourue par une fourmi.
- Activités sans contexte : il s'agit d'exercices et problèmes qui exigent, dans la plupart des cas, l'application d'un algorithme tel que l'étude de la convergence

d'une série, le calcul de sa somme, etc. Dans cette catégorie, nous retrouvons cinq sous-catégories qui sont les suivantes :

- Étude de caractère d'une série (EC) : il s'agit d'exercices et problèmes dans lesquels on demande aux étudiants d'étudier la convergence ou la divergence d'une série selon le cas.

- Calcul d'une somme (SM) : dans ce type d'exercices et problèmes, l'étudiant est appelé à calculer la somme de la série qu'on lui propose.

- Étude de caractère et calcul d'une somme (EC-SM) : il s'agit d'exercices et problèmes dans lesquels on demande l'étude de caractère d'une série (EC) et le calcul de sa somme (SM).

- Application d'un résultat théorique (ART) : il s'agit d'exercices et problèmes dans lesquels on demande aux étudiants d'appliquer des formules déjà établies dans des exemples et des théorèmes de la partie théorique du manuel.

- Autres cas (AC) : autres types d'exercices et problèmes qui ne rentrent dans aucune des quatre catégories précédentes.

Le tableau 4 montre la forme qu'auront les grilles utilisées dans notre analyse de manuels.

- Tableau 4 : Grille d’analyse individuelle

<table>
<tr><th colspan="13">Analyse quantitative</th></tr>
<tr><td colspan="13">Auteur :</td></tr>
<tr><td colspan="13">Titre :</td></tr>
<tr><td colspan="13">Année :</td></tr>
<tr><th>Place du concept dans le manuel</th><th colspan="2">R.V.G
Pb</th><th colspan="2">R.V.G
h. Pb</th><th colspan="2">R.V.D
Pb</th><th colspan="2">R.V.D
h. Pb</th><th colspan="2">EX</th><th colspan="2">Activités</th></tr>
<tr><td>Manuel :</td><td colspan="2">/p</td><td colspan="2">/p</td><td colspan="2">/p</td><td colspan="2">/p</td><td colspan="2">/p</td><td colspan="2">/p</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Total :
Taux :</td><td>DEC</td><td></td><td>Hors concept</td><td></td><td>DEC</td><td></td><td>Hors concept</td><td></td><td>Visuel</td><td></td><td colspan="2">Avec contexte</td></tr>
<tr><td>REP</td><td></td><td>C. Anodine</td><td></td><td>REP</td><td></td><td>C. Anodine</td><td></td><td>Mixte</td><td></td><td colspan="2">Sans contexte</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5"></td><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="5">Conceptualisé</td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5">Algébrique</td><td rowspan="5"></td><td>EC</td><td></td></tr>
<tr><td>SM</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3"></td><td>EC-SM</td><td></td></tr>
<tr><td>ART</td><td></td></tr>
<tr><td>AC</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="13">Analyse qualitative</th></tr>
<tr><th colspan="2">Application du concept</th><th colspan="11">Réalisation ou interprétation d’une représentation visuelle</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="11"></td></tr>
</table>

3.4. Grille récapitulative.

Après avoir effectué une étude exhaustive pour chaque manuel en ressortant des éléments de réponse à nos questions de recherche dans une grille d’analyse individuelle, nous allons procéder à la deuxième étape de notre projet de recherche qui consiste à observer simultanément les données illustrées dans les sections précédentes de ce chapitre. Pour ce faire, nous allons introduire ces données dans une seule grille récapitulative. Cette façon de procéder va certainement nous permettre de comparer ces résultats de recherche et de vérifier s'il existe une certaine évolution en ce qui concerne l'approche adoptée par les manuels analysés en lien avec l'utilisation des différents registres de représentation et des activités cognitives en lien avec le concept de série. Nous rappelons que notre troisième objectif de recherche (voir section 2.5) consiste à classifier les manuels analysés afin de vérifier s'il y a une évolution dans l'approche adoptée par ces outils didactiques en ce qui a trait à l'utilisation des registres de représentation et les applications du concept de série hors du domaine mathématique. En d'autres termes, nous allons vérifier si les manuels les plus récents diversifient l'utilisation des registres de représentations, s'ils utilisent plus de représentations visuelles et d'applications extramathématiques. Ainsi, la grille récapitulative nous permettra de disposer d'une première esquisse avant d'effectuer une analyse cluster sur laquelle nous allons nous baser afin de répondre au troisième objectif de recherche illustré dans la section 2.5. Cette analyse se base sur ce que nous avons illustré dans la section 2.2 : Le changement de registres de représentation permettrait de reconnaître le concept de série dans d'autres contextes et ainsi de véhiculer les connaissances acquises pour modéliser des situations dans des applications hors du domaine mathématique qui seraient elles aussi nécessaires dans l'appréhension du concept de série. Les critères auxquels nous prêterons une attention particulière dans cette grille récapitulative sont les suivants.

1. Pages consacrées aux séries et ratio : Dans cette grille récapitulative, nous pouvons vérifier si le ratio en lien avec le nombre de pages consacrées aux séries a augmenté selon l'ordre chronologique (dates d'édition) des manuels analysés. Autrement dit, est-ce qu'il y a eu évolution en ce qui concerne l'importance accordée au concept de série par les manuels analysés?

2. Nombre de dessins et graphiques dans la partie théorique et la partie pratique qui apparaissent dans les manuels ainsi que les 3 types d'exemples (visuels, mixtes et algébriques). Ceci nous permettra de prendre conscience si la présence des représentations visuelles évolue selon l'ordre chronologique des manuels. Cette façon de procéder nous permettra de vérifier si les manuels les plus récents prennent plus en considération les recommandations de la recherche.

3. Tel que nous l'avons mentionné dans la section 2.4 : « étudier les mathématiques ne se limite pas seulement à connaître des concepts/objets et à appliquer des algorithmes, mais aussi à utiliser des processus de pensée pour comprendre les concepts et leurs applications et à faire recours à plusieurs registres de représentation » (Duval, 1995). C'est la raison pour laquelle nous aimerions comparer le nombre et les types d'activités qui apparaissent dans tous les manuels analysés en tenant compte des différentes applications mathématiques et extramathématiques utilisées dans ces derniers. Le fait d'introduire toutes ces données dans une grille récapitulative nous facilitera la tâche d'identifier les manuels qui sont plus axés sur l'application d'algorithmes (calcul d'une somme, étude de caractère, etc.) et de repérer ceux qui favorisent plus les activités avec contexte ainsi que les applications extramathématiques en lien avec le concept de série. Ceci nous permettra aussi de vérifier s'il y a eu une évolution dans l'approche adoptée par les manuels en ce qui a trait à leur intérêt accordé aux différentes applications mathématiques et extramathématiques. Nous illustrons un modèle d'une grille récapitulative dans la page suivante.

- Tableau 5 : Grille d'analyse récapitulative

A	B	…	Q
Robert (1992)	**Ayres & Mendelson (1993)**	…	**Amyotte (2008)**
Pages : Pages pour séries : **Ratio :**	Pages : Pages pour séries : **Ratio :**	…	Pages : Pages pour séries : **Ratio :**
R. Graphiques (pb) : Dec : Rep : Org : Inf : **R. Graphiques (hpb) :** Hors concept : C. Anodine : Conceptualisée : **Dessins (pb) :** Dec : Rep : Org : Inf : **Dessins (hpb) :** Hors concept : C. Anodine : Conceptualisée :	**R. Graphiques (pb) :** Dec : Rep : Org : Inf : **R. Graphiques (hpb) :** Hors concept : C. Anodine : Conceptualisée : **Dessins (pb) :** Dec : Rep : Org : Inf : **Dessins (hpb) :** Hors concept : C. Anodine : Conceptualisée :	… …	**R. Graphiques (p b) :** Dec : Rep : Org : Inf : **R. Graphiques (hpb) :** Hors concept : C. Anodine : Conceptualisée : **Dessins (pb) :** Dec : Rep : Org : Inf : **Dessins (hpb) :** Hors concept : C. Anodine : Conceptualisée :
Exemples : Visuels : Mixtes : Algébriques :	**Exemples :** Visuels : Mixtes : Algébriques :	…	**Exemples :** Visuels : Mixtes : Algébriques :
Activités :	**Activités :**	…	**Activités :**
Avec contexte :	**Avec contexte :**	…	**Avec contexte :**
Sans contexte : | **EC :** **SM :** **EC-SM:** **AR :** **AC :**	**Sans contexte :** | **EC :** **SM :** **EC-SM :** **ART :** **AC :**	…	**Sans contexte :** | **EC :** **SM :** **EC-SM :** **ART :** **AC :**
Application :	**Application :**	…	**Application :**
Est-ce qu'on demande à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle dans ce manuel?	Est-ce qu'on demande à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle dans ce manuel?	…	Est-ce qu'on demande à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle dans ce manuel?

Il est clair qu'une grille récapitulative de 17 colonnes ne permet pas toujours une lecture efficace vu le nombre de données illustrées dans cette grille à prendre en considération. Il serait donc très difficile de classifier les manuels analysés et vérifier s'il y a une évolution dans leur contenu depuis le plus ancien manuel au plus récent. C'est la raison pour laquelle nous utiliserons une analyse cluster pour pouvoir effectuer cette tâche et ainsi atteindre notre objectif O3 de la section 2.5. Pour ce faire, nous ferons appel au logiciel SPSS pour l'analyse cluster des 17 manuels analysés. Il existe deux types de *clustering* (ensemble de clusters) : le *clustering* en partitionnement et le *clustering* hiérarchique. Le premier *clustering* est une division de données en sous-ensembles sous forme de nuages de points. Ce type de *clustering* est utilisé dans des analyses avec un grand nombre de données, ce qui nous permet pas de visualiser le regroupement progressif de ces dernières. Dans notre cadre de recherche, il sera préférable d'utiliser le *clustering* hiérarchique pour les raisons suivantes : bien que notre échantillon ait une taille assez grande, il demeure un groupe de données bien défini (17 manuels), ce qui est adéquat à un *clustering* hiérarchique , car avec ce dernier nous pouvons choisir un type de dissimilarité adapté à l'objectif de notre étude et à la nature de nos données. Ainsi, nous pourrons avoir une idée d'un nombre précis de classes dans lesquelles nos données peuvent être regroupées. Cette analyse nous permettra de vérifier s'il y a une évolution chronologique dans l'utilisation de représentations visuelles. Nous illustrons tous les avantages et les inconvénients de notre choix de *clustering* dans la section 5.2.

4. Analyse et interprétation des données.

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit les étapes à entreprendre dans notre projet de recherche ainsi que les outils d'analyse (grille individuelle et grille récapitulative) qui allaient être utilisés tout au long de notre analyse de manuels. Le présent chapitre est réparti en trois sections principales qui sont les suivantes:

- La section 4.1 est consacrée à l'analyse individuelle de chaque manuel.
- La section 4.2 est consacrée à l'interprétation des données en tenant compte des résultats issus de l'analyse des dix-sept manuels, et ce, en synthétisant tous les éléments observables introduits dans la grille récapitulative.
- La section 4.3 est consacrée à l'analyse cluster qui nous permettra de comparer nos résultats de recherche de la section 4.2 et d'illustrer l'évolution des contenus dans les manuels analysés.

4.1. Analyse individuelle par manuel.

À la suite de l'analyse des dix-sept manuels, nous avons identifié et catégorisé tous les éléments à observer qui ont été catégorisés selon les critères illustrés dans le chapitre 3 consacré à la méthodologie. Dans cette section, nous illustrons l'analyse des manuels en respectant l'ordre chronologique de la date d'édition de chacun des dix-sept manuels analysés (du plus ancien manuel au plus récent). Ces derniers sont identifiés par ordre alphabétique (de **A** pour le plus ancien à **Q** pour le plus récent) dont les détails de l'interprétation des données sont les suivants :

1. Manuel A : Robert (1992)

Il s'agit d'un manuel de 438 pages dans lequel 21,5 pages sont consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 4,9%. Tel que montré dans le tableau 6 relatif à la grille d'analyse individuelle (A), ce manuel ne présente aucune image visuelle dans la partie pratique. Néanmoins, on peut voir, dans la partie théorique (hors problème), uniquement deux dessins (Figure 10) que nous avons classés comme représentations visuelles conceptuelles anodines, car ces dernières sont des images qui ne représentent que le portrait de deux mathématiciens. De plus, tous les exemples et les activités (exercices et problèmes) de ce manuel apparaissent dans le registre algébrique. Ces activités ne sont pas contextualisées et il n'y en a aucune qui demanderait explicitement de produire ou d'interpréter des représentations visuelles. Ainsi, nous constatons le privilège accordé au registre algébrique et l'absence des activités cognitives fortement recommandées par Duval (1995) que nous avons soulignées dans les sections 2.2 et 2.3. Dans tout le manuel, il existe une seule application mathématique en lien avec le développement en notation décimale d'un nombre périodique et aucune application extramathématique, ce qui montre que cet outil didactique ne répond pas aux recommandations illustrées dans la section 2.4 qui suggèrent fortement les applications des concepts en dehors du domaine mathématique. Somme toute, ces premiers éléments observés dans ce manuel reflètent la conjecture soulignée par Duval qui prétend que l'enseignement traditionnel à tendance à privilégier uniquement le registre algébrique.

- Figure 10 : Les deux représentations visuelles conceptuelles anodines dans Robert (1992, p. 78 et p. 79)

fig.4-1

fig.4-2

- Tableau 6 : Grille d'analyse individuelle (A). Robert (1992)

Analyse quantitative												
Auteur : Serge Robert												
Titre : Calcul différentiel et intégral												
Année : 1992												
Place du concept dans le manuel	**R.V.G Pb**		**R.V.G h. Pb**		**R.V.D Pb**		**R.V.D h. Pb**		**EX**		**Activités**	
Manuel : 434p Total : 21,5 Taux : 4,95 %	0/p		0 /p		0 /p		0,093 /p 2		0,512 /p 11		2,279/p[5] 49	
	DEC	0	Hors concept	0	DEC	0	Hors concept	0	Visuel	0	Avec contexte	0
	REP	0	C. Anodine	0	REP	0	C. Anodine	2	Mixte	0	Sans contexte	49
	ORG	0	Conceptuelle	0	ORG	0	Conceptuelle	0	Algébrique	11	EC	30
	INF	0			INF	0					SM	3
											EC-SM	0
											ART	16
											AC	0

Analyse qualitative	
Application du concept	**Réalisation de graphe ou de dessin**
❖ Application mathématique : • Développement d'un nombre décimal	En aucun endroit dans le manuel, l'étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.

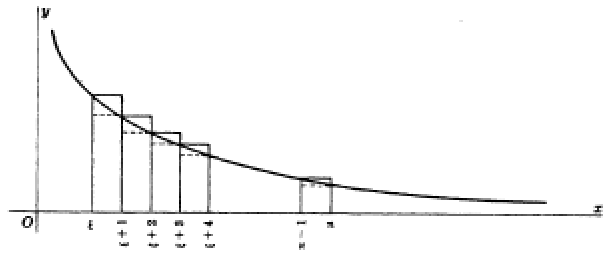
[5] Il existe des activités qui contiennent plusieurs questions indépendantes. Dans ce cas, ces questions sont comptabilisées comme des exercices indépendants.

2. Manuel B : Ayres & Mendelson (1993)

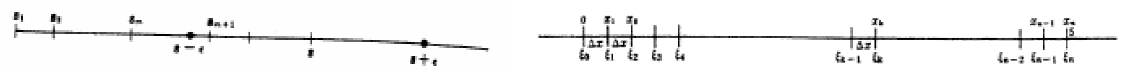
Il s'agit d'un manuel de 480 pages dans lequel 20,5 pages sont consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 4,27% qui n'est pas très loin du taux du manuel A. Ainsi, les deux manuels consacrent environ le même nombre de pages au concept de série. Tel que montré dans le tableau 7 relatif à la grille d'analyse individuelle (B), ce manuel ne présente aucun graphique et aucun dessin dans la partie pratique (R.V.G Pb et R.V.D Pb). Cependant, dans la partie théorique, on trouve un seul graphique (Figure 11), que nous avons classé comme une représentation visuelle conceptuelle et deux dessins (Figure 12), que nous avons classés comme des représentations visuelles conceptuelles anodines, ce qui représente un faible taux si on le compare au taux représentant le nombre de pages consacrées au concept de série. Aussi, tous les exemples et les activités (exercices et problèmes) de ce manuel sont réalisés dans le registre algébrique, ils n'ont pas de contexte et ne contiennent pas d'énoncé qui demande explicitement de produire ou d'interpréter des représentations visuelles. Dans ce cas, nous constatons la même remarque faite pour le manuel A à savoir que ce manuel ne répond pas aux critères recommandés par Duval (1995) qui souligne l'importance de diversifier les registres de représentation en s'appuyant sur les activités cognitives afin de permettre une meilleure appréhension du concept de série. De plus, dans tout le manuel B, il n'existe aucune application mathématique et extramathématique du concept de série.

Dans l'ensemble, ce manuel, qui n'est pas très différent du manuel A dans son contenu, privilégie le registre algébrique et utilise très rarement les représentations visuelles. Ainsi, ces premiers éléments observés dans ce manuel appuient la conjecture de Duval qui souligne que l'enseignement traditionnel a tendance à ne privilégier que le registre algébrique, de sorte que les apprenants ne réussissent pas à achever une bonne appréhension des concepts mathématiques et ne sont pas en mesure d'interpréter d'autres représentations telles que les représentations graphiques.

- Figure 11 : La représentation visuelle conceptuelle dans Ayres & Mendelson (1993, p. 339)



- Figure 12 : Les deux représentations visuelles conceptuelles anodines dans Ayres & Mendelson (1993, p.253 et p.333)



- Tableau 7 : Grille d'analyse individuelle (B). Ayres & Mendelson (1993)

<table>
<tr><td colspan="12">Analyse quantitative</td></tr>
<tr><td colspan="12">Auteur : Frank Ayres et Elliott Mendelson</td></tr>
<tr><td colspan="12">Titre : Calcul différentiel et intégral</td></tr>
<tr><td colspan="12">Année : 1993</td></tr>
<tr><td>Place du concept dans le manuel</td><td colspan="2">R.V.G
Pb</td><td colspan="2">R.V.G
h. Pb</td><td colspan="2">R.V.D
Pb</td><td colspan="2">R.V.D
h. Pb</td><td colspan="2">EX</td><td>Activités</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Manuel : 480p

Total : 20,5p
Taux : 4,27%</td><td colspan="2">0
0 /p</td><td colspan="2">1
0,049 /p</td><td colspan="2">0
0 /p</td><td colspan="2">2
0,097 /p</td><td colspan="2">3
0,146/p</td><td>154
7,512 /p</td></tr>
<tr><td>DEC</td><td>0</td><td>Hors concept</td><td>0</td><td>DEC</td><td>0</td><td>Hors concept</td><td>0</td><td>Visuel</td><td>0</td><td>Avec contexte
0</td></tr>
<tr><td>REP</td><td>0</td><td>C. Anodine</td><td>0</td><td>REP</td><td>0</td><td>C. Anodine</td><td>2</td><td>Mixte</td><td>0</td><td>Sans contexte
154
EC 129</td></tr>
</table>

	ORG	0	Conceptuelle	1	ORG	0	Conceptuelle	0	Algébrique	3	SM	10
	INF	0			INF	0					EC-SM	3
											ART	1
											AC	11

Analyse qualitative	
Application du concept	**Réalisation de graphes ou de dessins**
Aucune application	En aucun endroit dans le manuel, l’étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.

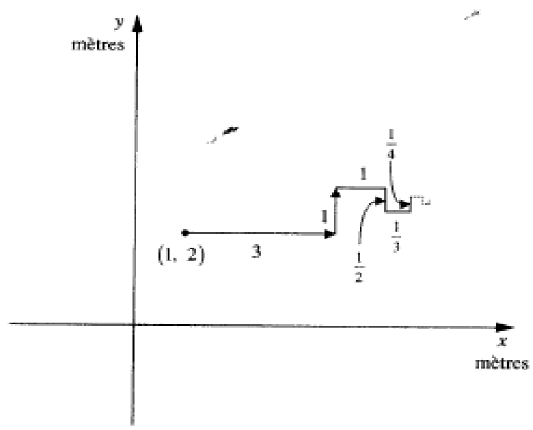
3. Manuel C : Charron & Parent (1993)

Il s’agit d’un manuel de 384 pages dont 38,5 pages sont consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 10,02% qui est nettement plus élevé que les taux des deux manuels précédents. Ainsi, le manuel C semble accorder plus d’importance au concept de série que les manuels A et B. Tel qu’illustré dans le tableau 8 relatif à la grille d’analyse individuelle (C), contrairement aux deux manuels précédents, celui-ci contient un dessin (Figure 13) que nous avons classé comme une représentation visuelle informationnelle dans la partie pratique, car elle détient des informations indispensables à la résolution d’un problème ou d’un l’exercice. Pour ce qui a trait à la partie théorique, ce manuel contient deux graphiques (Figure 14) et un dessin (Figure 15) que nous avons classés comme représentations visuelles conceptuelles. Nous rappelons que tel que nous l’avons expliqué dans le chapitre 3, celles-ci ont un lien avec le concept de série et sont nécessaires à la compréhension de l’explication de ce dernier. Il est clair que bien qu’il y ait une légère évolution par rapport aux deux manuels précédents, le taux relatif aux nombres de représentations visuelles dans ce manuel demeure très faible si on le compare au taux relatif au nombre de pages consacrées au concept de série. Par ailleurs, tel qu’illustré dans le tableau 8, parmi 51 exemples, un seul exemple est mixte (Figure 16) et les 50 autres sont algébriques. Parmi les 272 activités (exercices et problèmes), seulement six sont avec contexte et toutes les activités de ce manuel demeurent dans le registre algébrique et n'incitent pas explicitement à réaliser ou à interpréter des représentations visuelles. En ce qui a trait aux différentes applications, parmi celles-ci, quatre sont extramathématiques et une seule est mathématique (calcul d'aire). Les applications extramathématiques sont en lien avec différents contextes : médical, économique, déplacement d'un mobile et le rebondissement d'une balle. Les deux dernières applications sont artificielles.

Bien que ce manuel montre une évolution dans son contenu en lien avec l'utilisation des représentations visuelles et des applications extramathématiques, les activités cognitives en lien avec le changement de registre de représentation sont absentes et le taux d'utilisation du registre graphique du concept de série demeure assez faible. C'est la raison pour laquelle nous pensons que le manuel C ne répond pas aux critères recommandés par Duval (1995) en lien avec l'importance de l'utilisation des représentations visuelles et du changement de registre de représentation.

- Figure 13 : Représentation visuelle informationnelle (dessin) dans Charron & Parent (1993, p. 278)

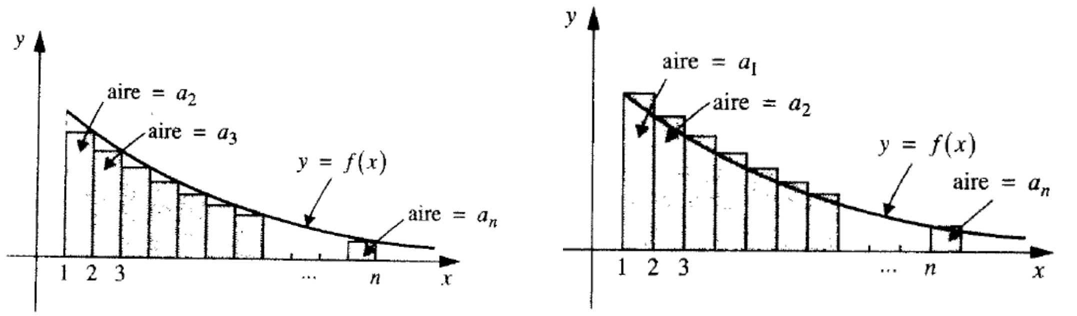
Soit un mobile partant du point (1, 2) et se déplaçant indéfiniment selon le trajet suivant.



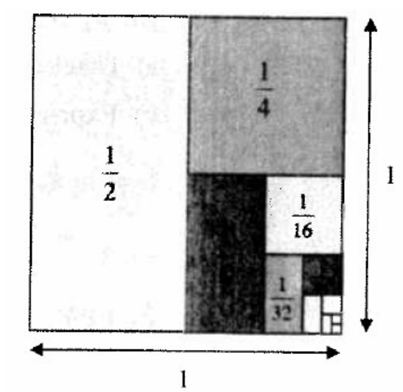
a) Déterminer le point d'arrivée.

b) Déterminer la distance parcourue par ce mobile.

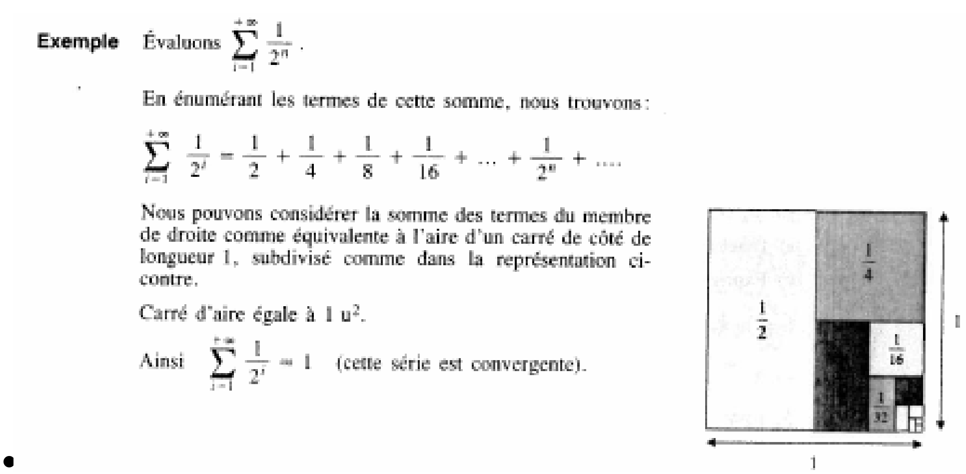
- Figure 14 : Les deux représentations visuelles conceptuelles (graphique) dans Charron & Parent (1993, p. 279 et p. 280)



- Figure 15 : Représentation visuelle conceptuelle dans Charron & Parent (1993, p. 266)



- Figure 16 : Exemple mixte dans Charron & Parent (1993, p. 266)



Exemple Évaluons $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

En énumérant les termes de cette somme, nous trouvons :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots.$$

Nous pouvons considérer la somme des termes du membre de droite comme équivalente à l'aire d'un carré de côté de longueur 1, subdivisé comme dans la représentation ci-contre.

Carré d'aire égale à 1 u^2.

Ainsi $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 1$ (cette série est convergente).

-

- Tableau 8 : Grille d’analyse individuelle (C). Charron & Parent (1993)

<table>
<tr><th colspan="13">Analyse quantitative</th></tr>
<tr><td colspan="13">Auteur : Gilles Charron et Pierre Parent</td></tr>
<tr><td colspan="13">Titre : Calcul différentiel et intégral II</td></tr>
<tr><td colspan="13">Année : 1993</td></tr>
<tr><th>Place du concept dans le manuel</th><th colspan="2">R.V.G
Pb</th><th colspan="2">R.V.G
h. Pb</th><th colspan="2">R.V.D
Pb</th><th colspan="2">R.V.D
h. Pb</th><th colspan="2">EX</th><th colspan="2">Activités</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Manuel : 384 p
Total : 38,5
Taux : 10,02%</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">2
0,052/p</td><td colspan="2">1
0,025/p</td><td colspan="2">1
0,025/p</td><td colspan="2">51
1,325/p</td><td colspan="2">272
7,065/p</td></tr>
<tr><td>DEC</td><td>0</td><td>Hors concept</td><td>0</td><td>DEC</td><td>0</td><td>Hors concept</td><td>0</td><td>Visuel</td><td>0</td><td colspan="2">Avec contexte
6</td></tr>
<tr><td>REP</td><td>0</td><td>C. Anodine</td><td>0</td><td>REP</td><td>0</td><td>C. Anodine</td><td>0</td><td>Mixte</td><td>1</td><td colspan="2">Sans contexte
266</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5">2</td><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">Algébrique</td><td rowspan="5">50</td><td>EC</td><td>139</td></tr>
<tr><td>SM</td><td>32</td></tr>
<tr><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3">1</td><td>EC-SM</td><td>48</td></tr>
<tr><td>ART</td><td>46</td></tr>
<tr><td>AC</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="13">Analyse qualitative</th></tr>
<tr><th colspan="7">Application du concept</th><th colspan="6">Réalisation de graphes ou de dessins</th></tr>
<tr><td colspan="7">❖ Applications mathématiques :
• Calcul d’aire
❖ Autres applications :
❖ Réaliste :
• Médicale
• Économique
❖ Artificielle :
• Déplacement d’un mobile
• Rebondissement d’une balle</td><td colspan="6">En aucun endroit dans le manuel, l’étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.</td></tr>
</table>

4. Manuel D : Beaudoin & Laforest (1994)

Tel qu’illustré dans le tableau 9 relatif à la grille d’analyse individuelle (D), le manuel D semble accorder plus d’intérêt au concept de série comparé aux trois manuels précédents. En effet, il s’agit d’un manuel qui contient 360 pages, dont 59 pages consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 16,39%. Néanmoins, on ne voit pas d'évolution par rapport au nombre de représentations visuelles qui apparaissent uniquement dans la partie théorique avec deux graphiques (Figure 17) que nous avons classés comme représentations visuelles conceptuelles et un dessin (Figure 18) que nous avons classé comme représentation visuelle conceptuelle anodine. Sur les 34 exemples, il y a seulement un exemple algébrique qui contient une représentation visuelle (exemple mixte – Figure 19) et les 33 autres sont algébriques. En ce qui a trait aux activités, il n'y a que trois activités avec contexte sur 132 activités qui sont principalement axées sur l'étude de critère d'une série (EC). Ainsi, nous constatons que cet outil didactique utilise principalement le registre algébrique, et ce, aussi bien dans la partie pratique (exercices et problèmes) que dans la partie théorique. L'analyse qualitative du tableau 9 nous illustre les types d'applications utilisées dans ce manuel qui sont en nombre de six, dont trois d'entre elles sont mathématiques (le développement en notation décimale d'un nombre périodique, calcul d'aire et calcul de périmètre) et les trois autres sont extramathématiques : rebondissement d'une balle et oscillation d'un objet suspendu qui sont artificielles, et une application en économie qui est réaliste. Enfin, à l'image des trois autres manuels analysés, celui-ci n'incite pas explicitement à l'interprétation ou la réalisation d'une représentation visuelle.

Ainsi, les activités cognitives indispensables dans l'appréhension des concepts suggérées par Duval (1995) que nous avons illustrées dans le cadre théorique sont pratiquement inexistantes dans ce manuel.

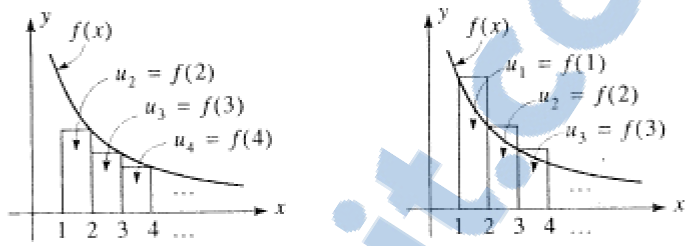
- Tableau 9 : Grille d’analyse individuelle (D). Beaudoin & Laforest (1994)

Analyse quantitative												
Auteur : Germain Beaudoin et Jacques Laforest												
Titre : Calcul 2												
Année : 1994												
Place du concept dans le manuel	**R.V.G Pb**		**R.V.G h. Pb**		**R.V.D Pb**		**R.V.D h. Pb**		**EX**		**Activités**	
Manuel : 360p Total : 59 Taux : 16,39%	0 0/p		2 0,034/p		0 0/p		1 0,017/p		34 0,576/p		132 2,237/p	
	DEC	0	Hors concept	0	DEC	0	Hors concept	0	Visuel	0	Avec contexte 3	
	REP	0	C. Anodine	0	REP	0	C. Anodine	1	Mixte	1	Sans contexte 129	
	ORG	0	Conceptuelle	2	ORG	0	Conceptuelle	0	Algébrique	33	EC	117
											SM	4
	INF	0			INF	0					EC-SM	3
											ART	4
											AC	1

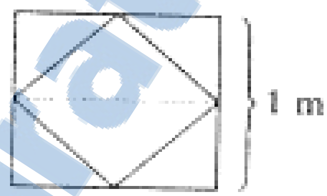
Analyse qualitative	
Application du concept	**Réalisation de graphe ou de dessin**

❖ Applications mathématiques :
❖ Nombre décimal périodique
❖ Calcul d’aire
❖ Calcul de périmètre
❖ Autres applications :
  ❖ Réalistes :
    • Application en économie
  ❖ Artificielles :
    • Rebondissement d’une balle
    • Oscillation d’un objet suspendu
	En aucun endroit dans le manuel, l’étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.

- Figure 17 : Les deux représentations visuelles conceptuelles (graphique) dans Beaudoin & Laforest (1994, p. 248)



- Figure 18 : Représentation visuelle conceptuelle anodine (dessin) dans Beaudoin & Laforest (1994, p. 237)



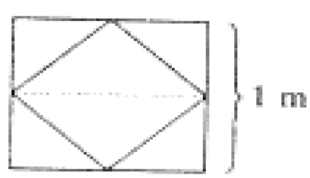
- Figure 19 : Exemple mixte dans Beaudoin & Laforest (1994, p. 237)

Exemple 3

On construit un carré d'un mètre de côté. À l'intérieur de ce carré, on en construit un second dont les sommets reposent sur les milieux des côtés du premier (V. figure ci-après). À partir de ce second carré, on en construit un troisième de la même manière, et ainsi de suite.

(a) Calculer la somme des aires des 5 premiers carrés ainsi construits.

(b) Si on poursuit indéfiniment les constructions, quelle sera la somme des aires de tous les carrés ainsi construits ?



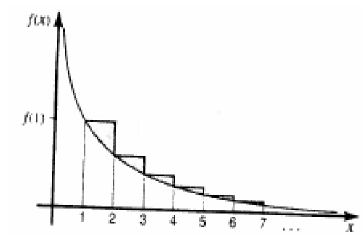
5. Manuel E : Wild (1995)

Les éléments observés dans le manuel E sont très similaires à ceux du manuel D et ce, à l'exception du nombre de pages consacrées au concept de série. En effet, sur 344 pages, 37,5 sont consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 10,90% qui est nettement inférieur au 16,39% du manuel D. Le tableau 10 relatif à la grille d'analyse (D) illustre le faible nombre de représentations visuelles dans la partie théorique et l'absence de ces dernières dans la partie pratique. En effet, dans la partie théorique, on retrouve seulement un graphique (Figure 20) que nous avons classé comme représentation visuelle conceptuelle et deux dessins (Figure 21) que nous avons classés comme représentations visuelles conceptuelles anodines. De plus, sur 37 exemples, seulement deux exemples sont mixtes (Figure 22) et les 34 autres sont algébriques. Ainsi, on constate que le registre algébrique est clairement privilégié dans ce manuel. Dans ce manuel, il n'existe aucun énoncé qui inciterait explicitement la production ou l'interprétation d'une représentation visuelle, ce qui confirme que les activités cognitives indispensables dans l'appréhension des concepts mathématiques suggérées par Duval (1995) sont pratiquement inexistantes. En ce qui concerne les applications du concept de série, nous retrouvons deux applications extramathématiques dont une porte sur un contexte économique et une application artificielle qui porte sur le déplacement d'un moustique. Enfin, le peu d'applications extramathématiques du concept de série et l'utilisation privilégiée du registre algébrique montrent que le manuel E ne répond pas aux critères soulignés dans le cadre théorique.

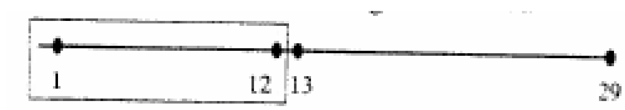
- Tableau 10 : Grille d’analyse individuelle (E). Wild (1995)

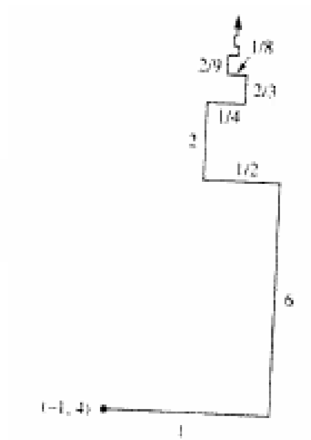
<table>
<tr><td colspan="13">Analyse quantitative</td></tr>
<tr><td colspan="13">Auteur : Suzanne Wild</td></tr>
<tr><td colspan="13">Titre : Calcul différentiel et intégral II</td></tr>
<tr><td colspan="13">Année : 1995</td></tr>
<tr><td>Place du concept dans le manuel</td><td colspan="2">R.V.G Pb</td><td colspan="2">R.V.G h. Pb</td><td colspan="2">R.V.D Pb</td><td colspan="2">R.V.D h. Pb</td><td colspan="2">EX</td><td colspan="2">Activités</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Manuel : 344
Total : 37,5
Taux : 10,90%</td><td colspan="2">0
0/p</td><td colspan="2">1
0,027/p</td><td colspan="2">0
0 /p</td><td colspan="2">2
0,053 /p</td><td colspan="2">36
0,960 /p</td><td colspan="2">92
2,453 /p</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DEC</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Hors concept</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">DEC</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Hors concept</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Visuel</td><td rowspan="2">0</td><td colspan="2">Avec contexte</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">REP</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">C. Anodine</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">REP</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">C. Anodine</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">Mixte</td><td rowspan="2">2</td><td colspan="2">Sans contexte</td></tr>
<tr><td colspan="2">91</td></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">Algébrique</td><td rowspan="5">34</td><td>EC</td><td>60</td></tr>
<tr><td>SM</td><td>16</td></tr>
<tr><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3">0</td><td>EC-SM</td><td>0</td></tr>
<tr><td>ART</td><td>13</td></tr>
<tr><td>AC</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="13">Analyse qualitative</td></tr>
<tr><td colspan="3">Application du concept</td><td colspan="10">Réalisation de graphe ou de dessin</td></tr>
<tr><td colspan="3">❖ Autres applications :
❖ Réaliste :
• Économique
❖ Artificielle :
• Déplacement d’un moustique</td><td colspan="10">En aucun endroit dans le manuel, l’étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.</td></tr>
</table>

- Figure 20 : La représentation visuelle conceptuelle (graphique) dans Wild (1995, p. 260)

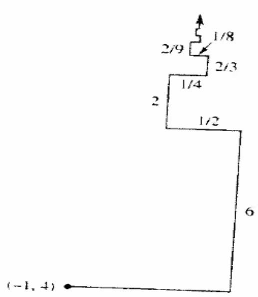
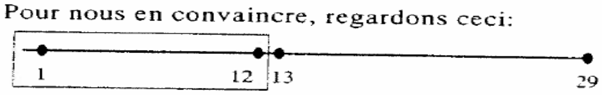


- Figure 21 : Les deux représentations visuelles conceptuelles anodines (dessin) dans Wild (1995, p. 255)





- Figure 22 : Les deux exemples mixtes dans Wild (1995, p. 91, p.255)

Exemple 15-10 Un petit moustique titube le long d'un trajet tel que celui dessiné sur la figure ci-dessous: 	***Exemple 6-4:*** Calculer $\sum_{i=13}^{29} i = 13 + 14 + 15 + ... + 29$ ***Solution:*** Si nous avions désiré la somme de 1 à 29, il n'y aurait eu aucune difficulté. Mais nous ne désirons pas cela. Soyons rusés et remarquons que la sommation pour i allant de 13 jusqu'à 29 n'est rien d'autre que la sommation pour i allant de 1 à 29 soustraite de la sommation pour i allant de 1 à 12. Pour nous en convaincre, regardons ceci: 

6. Manuel F : Swokowski (1995)

Il s’agit d’un manuel de 344 pages dont 37,5 pages sont consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 10,90%. Ce taux est plus faible que celui du manuel E, mais il accorde plus d’importance aux représentations visuelles et aux applications mathématiques et extramathématiques. En effet, la partie pratique contient trois dessins (Figure 23) que nous avons classés comme représentations visuelles informationnelles et, dans la partie théorique, on retrouve deux graphiques classés comme représentations visuelles conceptuelles (similaires à ceux de Charron & Parent (1993) et Wilde (1995)) et deux dessins classés comme représentations visuelles conceptuelles anodines (Figure 24). Les applications extramathématiques sont assez diversifiées : application médicale, application en économie, application en biologie, le mouvement d’un pendule et le rebondissement d’une balle qui est une application artificielle. Tel qu’illustré dans le tableau 11, ce manuel offre uniquement deux applications mathématiques axées sur le calcul d’aire et le développement en notation décimale d’un nombre périodique. Par ailleurs, sur 228 problèmes seulement 7 sont avec contexte et la plupart des exercices et problèmes sans contexte (184 sur 221) portent sur l’étude du caractère et le calcul de la somme d’une série. Aussi, à l’image de la plupart des manuels analysés, celui-ci n’incite pas explicitement à produire ou à interpréter une représentation visuelle et il n’existe aucune activité en lien avec des activités cognitives utiles à l’appréhension du concept de série.

- Tableau 11 : Grille d'analyse individuelle (F). Swokowski (1995)

Analyse quantitative						
Auteur : Earl William Swokowski						
Titre : Analyse						
Année : 1995						
Place du concept dans le manuel	**R.V.G Pb**	**R.V.G h. Pb**	**R.V.D Pb**	**R.V.D h. Pb**	**EX**	**Activités**
Manuel : 344 Total : 37,5 Taux : 10,90%	0 0/p	2 0,050/p	4 0,100 /p	2 0,050 /p	27 0,675 /p	228 5,700 /p

R.V.G Pb		R.V.G h. Pb		R.V.D Pb		R.V.D h. Pb		EX		Activités	
DEC	0	Hors concept	0	DEC	0	Hors concept	0	Visuel	0	Avec contexte	7
REP	0	C. Anodine	0	REP	0	C. Anodine	2	Mixte	0	Sans contexte	221
ORG	0	Conceptuelle	2	ORG	0	Conceptuelle	0	Algébrique	27	EC	152
										SM	20
INF	0			INF	4					EC-SM	22
										ART	8
										AC	19

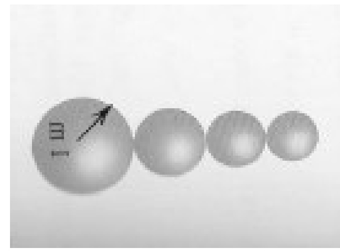
Analyse qualitative	
Application du concept	**Réalisation de graphe ou de dessin**
❖ Applications mathématiques : • Développement décimal • Calcul d'aire ❖ Autres applications : ❖ Réalistes : • Application médicale • Application en économie • Application en biologie ❖ Artificielles : • Rebondissement d'une balle • Le mouvement d'un pendule	En aucun endroit dans le manuel, l'étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.

- Figure 23 : Les trois représentations visuelles informationnelles (dessin) dans Swokowski (1995, p.543 et p. 553)

50 Imaginons qu'il soit possible d'empiler des boules comme le montre la figure. Si le rayon de la première boule mesure 1 m et que le rayon de la $n^{\text{ième}}$ boule est donné par la relation de récurrence $r_{n+1} = r_n\sqrt{n/(n+1)}$ pour n entier positif quelconque,

(a) montrer que la hauteur de la pile peut devenir aussi grande que l'on veut.

(b) si le matériau de ces boules pèse 1 t/m^3, montrer que le poids total de la pile ne dépassera jamais 4π tonnes.



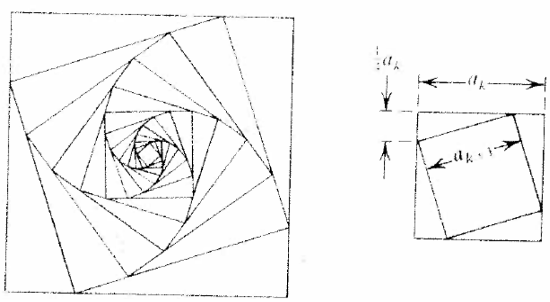
61 La première figure montre une suite de carrés $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$. On désigne par a_k le côté d'un carré S_k, par A_k son aire et par P_k son périmètre. Le carré S_{k+1} est obtenu à partir du carré S_k en joignant les quatre points des côtés de S_k situés à $(1/4)a_k$ des sommets, comme illustré dans la deuxième figure.

(a) Trouver une relation entre a_{k+1} et a_k.

(b) Trouver une expression de a_n, A_n et P_n.

(c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

EXERCICE 61

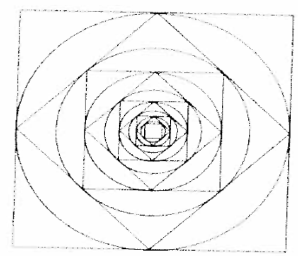


62 La figure illustre les termes d'une suite constituée alternativement d'un carré et d'un cercle. Chaque cercle est inscrit dans un carré et chaque carré (à l'exception du plus grand) est inscrit dans un cercle. Soit K_n l'aire du $n^{\text{ième}}$ carré et C_n l'aire du $n^{\text{ième}}$ cercle.

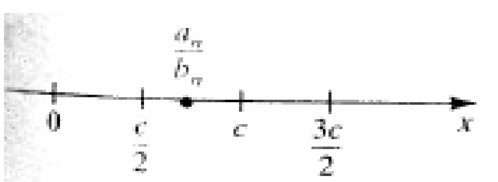
(a) Établir une relation entre K_n et C_n et entre C_n et K_{n+1}.

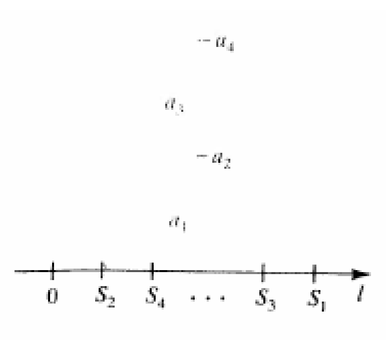
(b) Quelle proportion du plus grand carré représente la partie ombrée du dessin ?

EXERCICE 62



- Figure 24 : Les deux représentations visuelles conceptuelles anodines (dessin) dans Swokowski (1995, p. 549 et p. 558)





7.

7. Manuel G : Anton (1996)

Le manuel G contient 420 pages, dont 64 pages sont consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 15,24%. Nous constatons ainsi que ce manuel et le manuel D accordent plus de place au concept de série comparé aux autres manuels. Dans la partie pratique, ce manuel ne contient que quatre dessins (Figure 25) que nous avons classés comme représentations visuelles informationnelles. Dans la partie théorique, on retrouve deux graphiques (Figure 26) et un dessin (Figure 27) que nous avons classés comme représentations visuelles conceptuelles. De plus, il n'y a aucun exemple visuel ou mixte (tous les exemples sont présentés dans le registre algébrique). Parmi les 320 activités, seulement 3 contiennent un contexte et 240 problèmes sur 317 portent sur l'étude du caractère et le calcul d'une somme d'une série. Ainsi, nous constatons le privilège accordé au registre algébrique aussi bien dans la partie théorique que dans la partie pratique. Dans tout le manuel, il existe uniquement deux applications extramathématiques, qui sont artificielles (rebondissement d'une balle et le déplacement d'une fourmi), car elles ne sont pas faciles à expérimenter dans la vie quotidienne. Enfin, en aucun cas ce manuel inciterait explicitement l'interprétation ou la production d'une représentation visuelle et on ne retrouve aucune activité nécessaire à l'appréhension du concept de série tel que recommandé par la théorie de Duval.

- Tableau 12 : Grille d'analyse individuelle (G). Anton (1996)

<table>
<tr><td colspan="13">Analyse quantitative</td></tr>
<tr><td colspan="13">Auteur : Howard Anton</td></tr>
<tr><td colspan="13">Titre : Calcul intégral</td></tr>
<tr><td colspan="13">Année : 1996</td></tr>
<tr><td>Place du concept dans le manuel</td><td colspan="2">R.V.G
Pb</td><td colspan="2">R.V.G
h. Pb</td><td colspan="2">R.V.D
Pb</td><td colspan="2">R.V.D
h. Pb</td><td colspan="2">EX</td><td colspan="2">Activités</td></tr>
<tr><td rowspan="10">Manuel : 420

Total : 64
Taux : 15,24%</td><td colspan="2">0
0/p</td><td colspan="2">2
0,03/p</td><td colspan="2">4
0,06/p</td><td colspan="2">1
0,02/p</td><td colspan="2">39
0,61 /p</td><td colspan="2">319
4,98 /p</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DEC</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Hors concept</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">DEC</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Hors concept</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Visuel</td><td rowspan="2">0</td><td colspan="2">Avec contexte</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">REP</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">C. Anodine</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">REP</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">C. Anodine</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Mixte</td><td rowspan="2">0</td><td colspan="2">Sans contexte</td></tr>
<tr><td colspan="2">317</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5">2</td><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">Algébrique</td><td rowspan="5">39</td><td>EC</td><td>165</td></tr>
<tr><td>SM</td><td>57</td></tr>
<tr><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3">4</td><td>EC-SM</td><td>18</td></tr>
<tr><td>ART</td><td>42</td></tr>
<tr><td>AC</td><td>35</td></tr>
<tr><td colspan="13">Analyse qualitative</td></tr>
<tr><td colspan="4">Application du concept</td><td colspan="9">Réalisation de graphe ou de dessin</td></tr>
<tr><td colspan="4">❖ Autres applications :
❖ Artificielles :
• Rebondissement d'une balle.
• Déplacement d'une fourmi.</td><td colspan="9">En aucun endroit dans le manuel, l'étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.</td></tr>
</table>

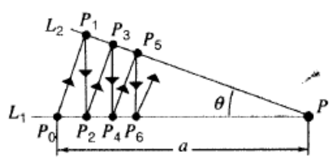
- Figure 25 : Les quatre représentations visuelles informationnelles dans Anton (1996, p. 295 et p. 296)

38. Les droites L_1 et L_2 se rencontrent en un point P selon un angle θ, où $0 < \theta < \pi/2$ (voir figure 6.3.1). On choisit un point P_0 sur L_1 situé à une distance de a unités de P. À partir de P_0, on construit un chemin en zigzag entre les droites L_1 et L_2 de telle sorte qu'à partir d'un point, on se dirige toujours vers la droite perpendiculairement à celle-ci. Trouver chacune des sommes suivantes en fonction de θ.

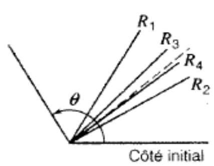
a) $P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots$

b) $P_0P_1 + P_2P_3 + P_4P_5 + \cdots$

c) $P_1P_2 + P_3P_4 + P_5P_6 + \cdots$



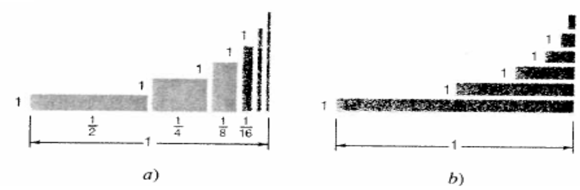
39. Tel qu'illustré à la figure 6.3.2, traçons la bissectrice R_1 de l'angle θ. Traçons ensuite la bissectrice R_2 de l'angle formé par R_1 et le côté initial. Ensuite, on obtient les rayons R_3, R_4, R_5, … par bissection de l'angle entre les deux rayons précédents. Démontrer que la suite des angles que font ces rayons avec le côté initial a pour limite $\theta/3$. [Ce problème s'inspire de *Trisection of an Angle in an Infinite Number of Steps* par Eric Kincannon, paru dans *The College Mathematical Journal*, Vol. 21, N° 5, Novembre 1990.]



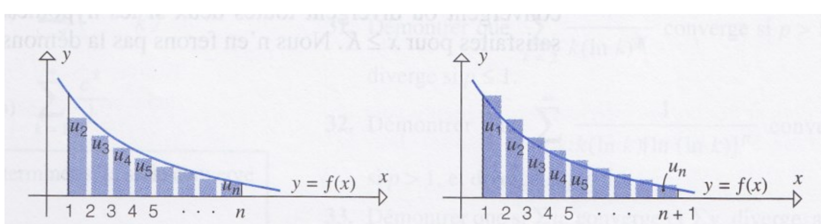
40. Dans son *De configurationibus qualitatum et motuum* (écrit dans les années 1350), l'évêque français de Lisieux, Nicole Oresme, démontra par un argument géométrique que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots = 2$$

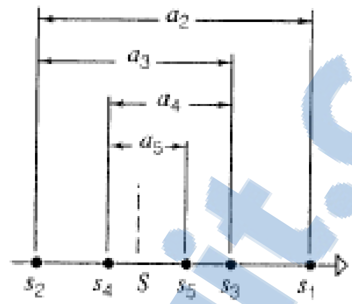
Chacun des termes de la série est représenté par l'aire d'un rectangle à la figure 6.3.3*a*). À la figure 6.3.3*b*) on a subdivisé l'aire totale obtenue en a) en des rectangles d'aires A_1, A_2, A_3, …. Montrer que $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots = 2$. [Pour faciliter la représentation, la figure montre des échelles horizontales et verticales différentes.]



- Figure 26 : Les deux représentations visuelles graphiques conceptuelles dans Anton (1996, p. 303)



- Figure 27 : La représentation visuelle conceptuelle (dessin) dans Anton (1996, p. 327)



8. Manuel H : Massé (1997)

Il s'agit d'un manuel de 348 pages dont 51 pages sont consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 15,09%. Ce taux est très proche de ceux des manuels D et G. Tel qu'illustré dans le tableau 13, dans la partie pratique, il n'y a aucune représentation visuelle, mais dans la partie théorique, on retrouve trois graphiques dont un que nous avons classé comme représentation visuelle anodine (Figure 28) et deux que nous avons classés comme représentations visuelles conceptuelles (Figure 29) ainsi que huit dessins dont sept que nous avons classés comme représentations visuelles hors concept (portraits de mathématiciens) et un que nous avons classé comme représentation visuelle conceptuelle anodine (Figure 30). Il est important aussi de souligner que parmi les onze représentations visuelles, seulement deux sont conceptuelles et tous les exemples sont présentés dans le registre algébrique. Ainsi, nous constatons le privilège accordé au registre algébrique et le peu de représentations visuelles essentielles à l'appréhension du concept de série, ce qui montre que ce manuel ne tient pas compte des recommandations de Duval en lien avec l'importance de l'utilisation des représentations visuelles et la diversification des registres de représentation. En ce qui a trait aux activités, il n'existe aucun problème ou exercice avec contexte : sur 75 activités, 71 sont en lien avec l'étude du caractère et le calcul de la somme d'une série. Aussi, ce manuel propose uniquement deux applications mathématiques dont une application est en lien avec le calcul d'aire et l'autre avec le développement en notation décimale d'un nombre périodique. Enfin, dans ce manuel, il n'existe aucune activité qui inciterait explicitement l'interprétation ou la production d'une représentation visuelle ou qui aurait un lien avec des activités cognitives recommandées dans la théorie sémiotique de Duval.

- Tableau 13 : Grille d'analyse individuelle (H). Massé (1997)

<table>
<tr><td colspan="13">Analyse quantitative</td></tr>
<tr><td colspan="13">Auteur : Bernard Massé</td></tr>
<tr><td colspan="13">Titre : Calcul intégral</td></tr>
<tr><td colspan="13">Année : 1997</td></tr>
<tr><td>Place du concept dans le manuel</td><td colspan="2">R.V.G Pb</td><td colspan="2">R.V.G h. Pb</td><td colspan="2">R.V.D Pb</td><td colspan="2">R.V.D h. Pb</td><td colspan="2">EX</td><td colspan="2">Activités</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Manuel : 348

Total : 51
Taux : 15,09%</td><td colspan="2">0
0/p</td><td colspan="2">3
0,059 /p</td><td colspan="2">0
0/p</td><td colspan="2">8
0,157 /p</td><td colspan="2">41
0,804/p</td><td colspan="2">75
1,471 /p</td></tr>
<tr><td>DEC</td><td>0</td><td>Hors concept</td><td>0</td><td>DEC</td><td>0</td><td>Hors concept</td><td>7</td><td>Visuel</td><td>0</td><td colspan="2">Avec contexte
0</td></tr>
<tr><td>REP</td><td>0</td><td>C. Anodine</td><td>1</td><td>REP</td><td>0</td><td>C. Anodine</td><td>1</td><td>Mixte</td><td>0</td><td colspan="2">Sans contexte
75</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5">2</td><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">Algébrique</td><td rowspan="5">41</td><td>EC</td><td>47</td></tr>
<tr><td>SM</td><td>16</td></tr>
<tr><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3">0</td><td>EC-SM</td><td>8</td></tr>
<tr><td>ART</td><td>4</td></tr>
<tr><td>AC</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="13">Analyse qualitative</td></tr>
<tr><td colspan="4">Application du concept</td><td colspan="9">Réalisation de graphe ou de dessin</td></tr>
<tr><td colspan="4">❖ Applications mathématiques :
• Calcul d'aire
• Nombre décimal périodique.</td><td colspan="9">En aucun endroit dans le manuel, l'étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.</td></tr>
</table>

- Figure 28 : La représentation visuelle conceptuelle anodine (graphique) dans Massé (1997, p. 240)

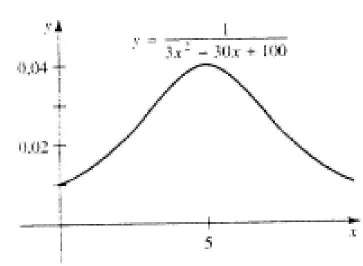


Figure 6.4

- Figure 29 : Les deux représentations visuelles conceptuelles (graphique) dans Massé (1997, p. 219 et p. 220)

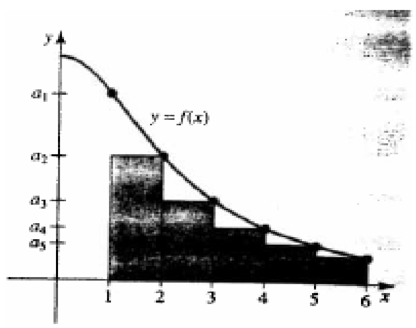


Figure 6.1

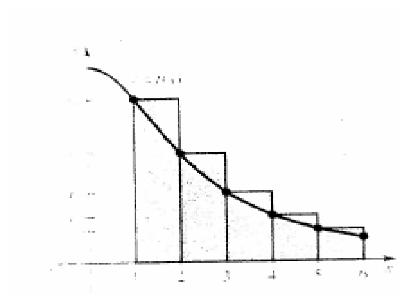
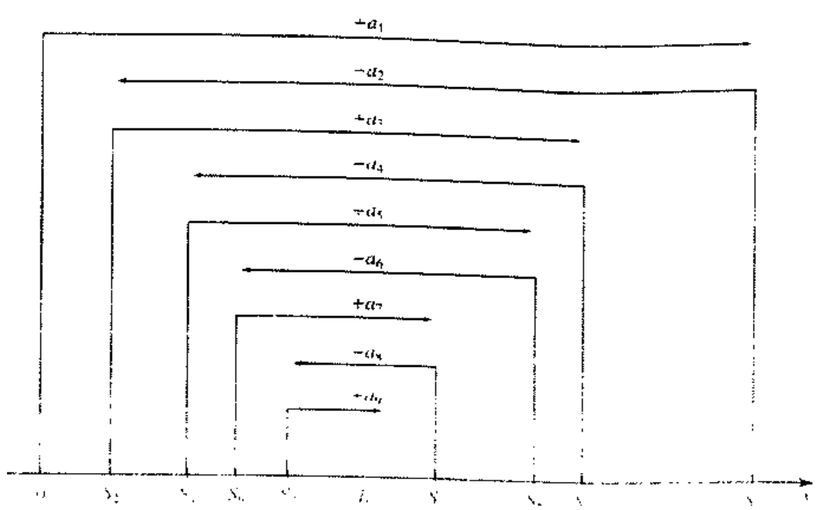


Figure 6.2

- Figure 30 : La représentation visuelle conceptuelle anodine (dessin) dans Massé (1997, p.238)



9. Manuel I : Charron & Parent (1997)

Ce manuel contient 390 pages, dont 41 pages consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 10,51%. Dans la partie pratique, on retrouve un seul dessin que nous avons classé comme représentation visuelle informationnelle (similaire avec celle de Charron & Parent, 1993 – voir la Figure 13), mais la partie théorique contient deux graphiques (similaires avec ceux de Charron & Parent, 1993 – voir la Figure 14) et deux dessins dont un que nous avons classé comme représentation visuelle conceptuelle (similaire avec celui de Charron & Parent, 1993 – voir la Figure 15) et l'autre que nous avons classé comme représentation visuelle conceptuelle anodine (Figure 31). En ce qui a trait aux exemples, le manuel I offre 55 exemples, dont deux mixtes (le premier exemple est similaire avec celui de Charron & Parent, 1993 – voir la Figure 16 – et le deuxième est illustré dans la Figure 32) et 53 algébriques. Parmi, les 166 activités seulement deux sont avec contexte et à l'image de tous les autres manuels analysés précédemment, la plupart des exercices et problèmes sont axés sur l'étude du caractère et le calcul de la somme d'une série. Ainsi, nous constatons le privilège accordé au registre algébrique et le peu de représentations visuelles essentielles à l'appréhension du concept de série ainsi que l'absence des activités qui inciteraient explicitement la production ou l'interprétation des représentations visuelles. Ceci qui confirme que ce manuel ne tient pas compte des recommandations de Duval en lien avec l'importance de l'utilisation des représentations visuelles et la diversification des registres de représentation que nous avons soulignées dans la section 2.2 de notre cadre théorique. Aussi, ce manuel contient deux applications mathématiques en lien avec le calcul d'aire et le développement décimal ainsi que 2 applications extramathématiques qui portent sur le rebondissement d'une balle et du déplacement d'un mobile. Ce peu d'applications extramathématiques du concept de série révèle que le manuel I n'incite pas à véhiculer les connaissances acquises afin de modéliser des situations dans des applications hors du domaine mathématique tel que nous l'avons souligné dans notre cadre théorique.

- Tableau 14 : Grille d'analyse individuelle (I). Charron & Parent (1997).

<table>
<tr><th colspan="13">Analyse quantitative</th></tr>
<tr><td colspan="13">Auteur : Gilles Charron et Pierre Parent</td></tr>
<tr><td colspan="13">Titre : Calcul intégral</td></tr>
<tr><td colspan="13">Année : 1997</td></tr>
<tr><th>Place du concept dans le manuel</th><th colspan="2">R.V.G
Pb</th><th colspan="2">R.V.G
h. Pb</th><th colspan="2">R.V.D
Pb</th><th colspan="2">R.V.D
h. Pb</th><th colspan="2">EX</th><th colspan="2">Activités</th></tr>
<tr><td rowspan="10">Manuel : 390p

Total : 41p
Taux : 10,51%</td><td colspan="2">0

0/p</td><td colspan="2">2

0,049
/p</td><td colspan="2">1

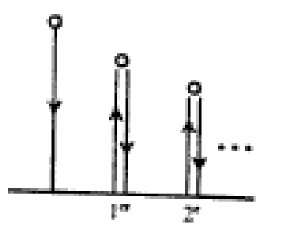
0,024 /p</td><td colspan="2">2

0, 049/p</td><td colspan="2">55

1,341/p</td><td colspan="2">166

0,780/p</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DEC</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Hors concept</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">DEC</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Hors concept</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Visuel</td><td rowspan="2">0</td><td colspan="2">Avec contexte</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">REP</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">C. Anodine</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">REP</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">C. Anodine</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Mixte</td><td rowspan="2">2</td><td colspan="2">Sans contexte</td></tr>
<tr><td colspan="2">164</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5">2</td><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">Algébrique</td><td rowspan="5">53</td><td>EC</td><td>82</td></tr>
<tr><td>SM</td><td>18</td></tr>
<tr><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3">1</td><td>EC-SM</td><td>27</td></tr>
<tr><td>ART</td><td>36</td></tr>
<tr><td>AC</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="13">Analyse qualitative</th></tr>
<tr><td colspan="5">Application du concept</td><td colspan="8">Réalisation de graphe ou de dessin</td></tr>
<tr><td colspan="5">❖ Applications mathématiques :
• Calcul d'aire
• Développement décimal
❖ Applications artificielles :
• Rebondissement d'une balle
• Déplacement d'un mobile</td><td colspan="8">En aucun endroit dans le manuel, l'étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.</td></tr>
</table>

- Figure 31 : Représentation visuelle conceptuelle anodine dans Charron & Parent (1997, p. 281)



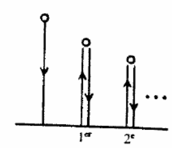
- Figure 32 : Exemple mixte dans Charron & Parent (1997, p. 281)

Exemple 8 Supposons qu'une balle de plastique soit lâchée, sans vitesse initiale, d'une hauteur de 3 mètres au-dessus d'un sol horizontal. À chaque rebondissement, elle atteint les $\frac{4}{5}$ de la hauteur précédente. Exprimons théoriquement, à l'aide d'une série, la distance totale D parcourue par cette balle.

$$D = 3 + \underbrace{\left[\frac{4}{5}(3) + \frac{4}{5}(3)\right]}_{1^{er}\text{ bond}} + \underbrace{\left[\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}(3)\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}(3)\right)\right]}_{2^{e}\text{ bond}} + \ldots$$

$$= 3 + 2\left(\frac{4}{5}\right)(3) + 2\left(\frac{4}{5}\right)^2(3) + 2\left(\frac{4}{5}\right)^3(3) + \ldots$$

$$= 3 + 6\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n.$$



Or, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ est une série géométrique où $a = \frac{4}{5}$ et $r = \frac{4}{5}$; puisque $|r| < 1$,

nous avons $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \dfrac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = 4$ (théorème 6),

d'où $D = 3 + (6 \times 4) = 27$, donc 27 mètres.

10. Manuel J : Ouellet (2000)

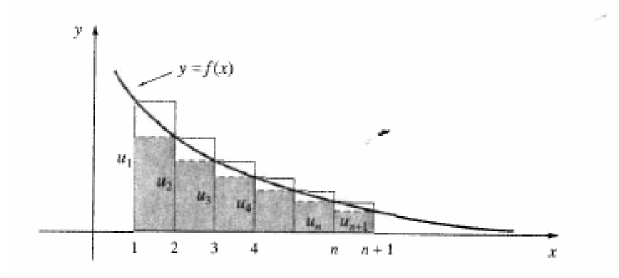
Il s'agit d'un manuel de 413 pages dont 37,5 pages sont consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 9,07%. Si on compare le taux représentant le nombre de pages consacré aux séries du manuel J avec ceux analysés jusqu'à présent, on constate que ce dernier accorde moins d'espace au concept en question. Dans tous les exercices et problèmes de ce manuel, il n'existe aucune représentation visuelle, mais dans la partie théorique, nous retrouvons un graphique que nous avons classé comme représentation visuelle conceptuelle (Figure 33) et deux dessins, dont un que nous avons classé comme représentation visuelle conceptuelle anodine (Figure 34) et l'autre que nous avons classé comme représentation visuelle hors concept (portrait de Mathématicien). De plus, parmi les 31 exemples, aucun n'est visuel ou mixte. Ainsi, nous constatons que le registre algébrique est privilégié, ce qui montre que les suggestions de Duval soulignées dans la section 2.2 sont loin d'être prises en compte par le manuel J. Par ailleurs, tel qu'illustré dans le tableau 15 relatif à la grille d'analyse individuelle (J), parmi les 104 activités, aucune n'est avec contexte et la plupart (99 sur 104) de ces dernières portent sur l'étude de caractère et le calcul de la somme d'une série. La partie consacrée à l'analyse qualitative de la grille d'analyse individuelle (J) révèle qu'il n'y a aucune application mathématique ou extramathématique, ce qui indique que les suggestions soulignées dans la section 2.4 en lien avec l'importance des applications en dehors du domaine mathématique d'un concept ne sont pas prises en considération par ce manuel. Enfin, dans ce dernier, on ne retrouve aucun endroit où l'interprétation ou la production d'un graphique ou d'un dessin est explicitement requise et les activités cognitives pouvant améliorer l'appréhension du concept de série sont absentes, ce qui confirme l'écart entre le contenu de ce manuel en lien avec le concept de série et les recommandations de Duval soulignées dans les sections 2.2 et 2.3.

- Tableau 15 : Grille d'analyse individuelle (J). Ouellet (2000)

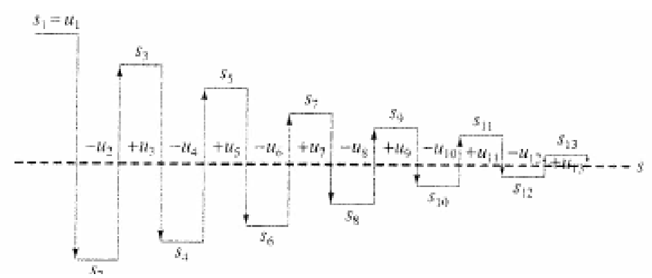
Analyse quantitative												
Auteur : Gilles Ouellet												
Titre : Calcul 2												
Année : 2000												
Place du concept dans le manuel	**R.V.G Pb**		**R.V.G h. Pb**		**R.V.D Pb**		**R.V.D h. Pb**		**EX**		**Activités**	
Manuel : 413p Total : 37,5 Taux : 9,07%	0 0/p		1 0,027/p		0 0/p		2 0,053/p		31 0,827/p		104 2,773/p	
	DEC	0	Hors concept	0	DEC	0	Hors concept	1	Visuel	0	Avec contexte	0
	REP	0	C. Anodine	0	REP	0	C. Anodine	1	Mixte	0	Sans contexte	104
	ORG	0	Conceptuelle	1	ORG	0	Conceptuelle	0	Algébrique	31	EC	88
											SM	10
	INF	0			INF	0					EC-SM	1
											ART	5
											AC	0

Analyse qualitative	
Application du concept	**Réalisation de graphe ou de dessin**
Aucune application	En aucun endroit dans le manuel, l'étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.

- Figure 33 : La représentation visuelle conceptuelle (graphique) dans Ouellet (2000, p. 275)



- Figure 34 : La représentation visuelle conceptuelle anodine (dessin) dans Ouellet (2000, p. 283)



11. Manuel K: Hughes-Hallett, Gleason, Beaudoin, Charlevoix, Labrie & Fraser (2001)

Le manuel K est très différent de tous les autres manuels dans la manière dont le concept de série est présenté. En effet, contrairement aux autres manuels dans lesquels on introduit les sommes infinies en expliquant la notion de sommation et les suites numériques, celui-ci entame ce concept en introduisant les séries de fonctions telles que les séries de Maclaurin et de Taylor. Aussi, ce manuel consacre très peu d'espace au concept de série étant donné qu'il contient 360 pages dont seulement 13,5 pages sont consacrées aux sommes infinies, ce qui représente un taux de 3,75%. Tel qu'illustré dans le tableau 16, dans tout l'ensemble des problèmes et exercices qui apparaissent dans ce manuel n'y a qu'une représentation visuelle informationnelle (Figure 35), mais la partie théorique offre deux graphiques que nous avons classés comme représentations visuelles conceptuelles

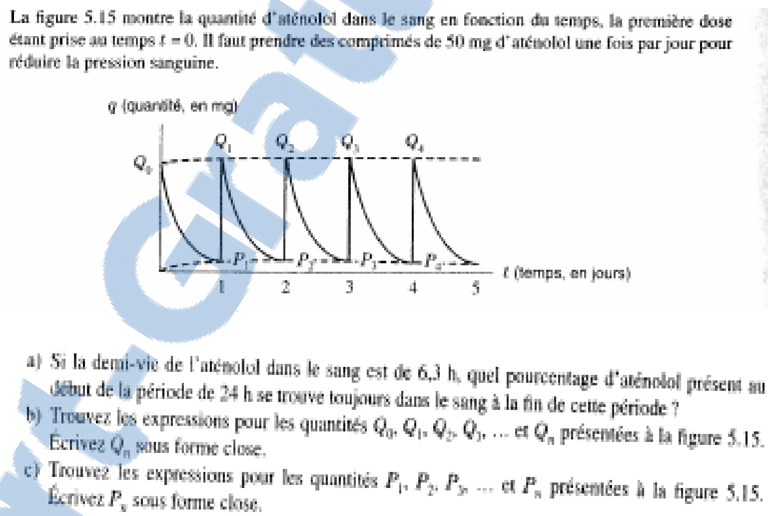
(Figure 36) et trois dessins dont deux classés comme représentations visuelles conceptuelles (Figure 37) et un classé comme représentation visuelle conceptuelle anodine (Figure 38). De plus, il n'existe aucun exemple visuel et parmi les 4 exemples, seulement un exemple est mixte (Figure 39) et trois autres sont algébriques, ce qui confirme que l'importance de l'utilisation des représentations visuelles et la diversification des registres de représentations soulignées par Duval ne sont pas tenues en compte par le manuel K. Parmi les 45 activités, 11 activités sont avec contexte et les 34 autres ne contiennent aucun contexte : 29 activités portent sur l'étude de caractère ou le calcul de la somme d'une série. En ce qui a trait aux applications, on retrouve onze applications extramathématiques (dix réalistes et une artificielle) qui portent sur des contextes médicaux, économiques et physiques (rebondissement d'une balle et déplacement de trains), ce qui nous laisse croire que ce manuel accorde plus d'importance aux applications extramathématiques si on le compare aux autres manuels analysés.

- Tableau 16 : Grille d'analyse individuelle (K). Hughes-Hallet et al (2000)

<table>
<tr><th colspan="13">Analyse quantitative</th></tr>
<tr><td colspan="13">Auteurs : Deborah Hughes-Hallett, Andrew M. Gleason, Michel Beaudoin, Paul Charlevoix, Mario Labrie et Bernard Fraser</td></tr>
<tr><td colspan="13">Titre : Calcul intégral</td></tr>
<tr><td colspan="13">Année : 2001</td></tr>
<tr><th>Place du concept dans le manuel</th><th colspan="2">R.V.G Pb</th><th colspan="2">R.V.G h. Pb</th><th colspan="2">R.V.D Pb</th><th colspan="2">R.V.D h. Pb</th><th colspan="2">EX</th><th colspan="2">Activités</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Manuel : 360
Total : 13,5
Taux : 3,75%</td><td colspan="2">1
0,074/p</td><td colspan="2">2
0,148 /p</td><td colspan="2">0
0/p</td><td colspan="2">3
0,222 /p</td><td colspan="2">4
0,296 /p</td><td colspan="2">45
3,333/p</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DEC</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Hors concept</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">DEC</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Hors concept</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Visuel</td><td rowspan="2">0</td><td colspan="2">Avec contexte</td></tr>
<tr><td colspan="2">11</td></tr>
<tr><td rowspan="2">REP</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">C. Anodine</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">REP</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">C. Anodine</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Mixte</td><td rowspan="2">1</td><td colspan="2">Sans contexte</td></tr>
<tr><td colspan="2">34</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="3">Conceptuelle</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="3">Conceptuelle</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">Algébrique</td><td rowspan="3">3</td><td>EC</td><td>10</td></tr>
<tr><td>SM</td><td>16</td></tr>
<tr><td>INF</td><td>1</td><td>INF</td><td>0</td><td>EC-SM
ART
AC</td><td>3
4
1</td></tr>
</table>

Analyse qualitative	
Application du concept	**Réalisation de graphe ou de dessin**
❖ Autres applications : ❖ Réalistes : • Application médicale • Économique • Déplacement de deux trains ❖ Artificielles : • Rebondissement d'une balle	En aucun endroit dans le manuel, l'étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.

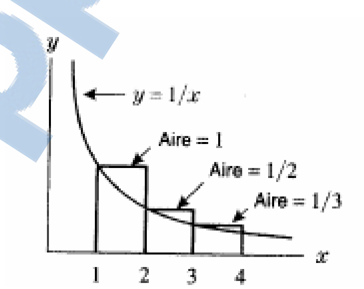
- Figure 35 : La représentation visuelle informationnelle (dessin) dans Hughes-Hallet et al. (2000, p. 276)

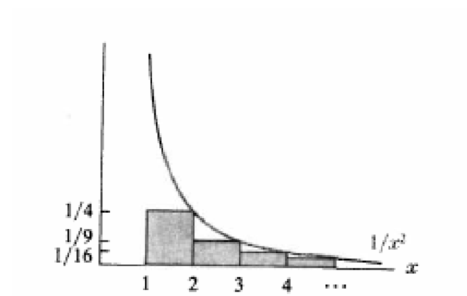


La figure 5.15 montre la quantité d'aténolol dans le sang en fonction du temps, la première dose étant prise au temps $t = 0$. Il faut prendre des comprimés de 50 mg d'aténolol une fois par jour pour réduire la pression sanguine.

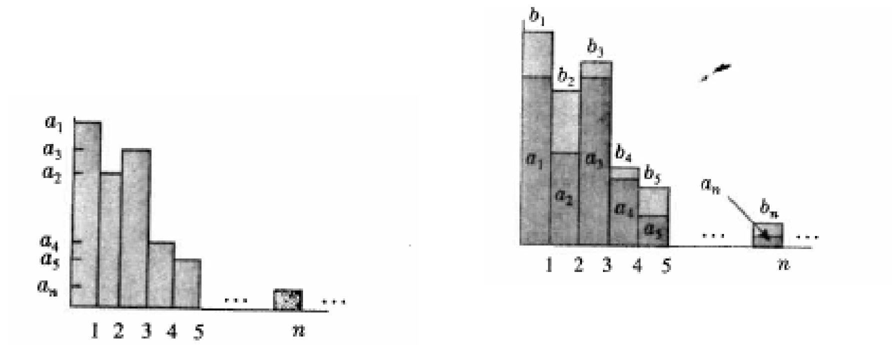
a) Si la demi-vie de l'aténolol dans le sang est de 6,3 h, quel pourcentage d'aténolol présent au début de la période de 24 h se trouve toujours dans le sang à la fin de cette période ?
b) Trouvez les expressions pour les quantités $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ et Q_n présentées à la figure 5.15. Écrivez Q_n sous forme close.
c) Trouvez les expressions pour les quantités $P_1, P_2, P_3, \ldots$ et P_n présentées à la figure 5.15. Écrivez P_n sous forme close.

- Figure 36 : Les deux représentations visuelles conceptuelles (graphique) dans Hughes-Hallet et al. (2000, p. 260 et p. 288)

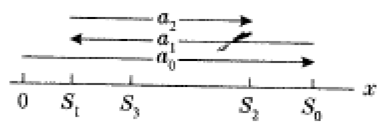




- Figure 37 : Les deux représentations visuelles conceptuelles (dessin) dans Hughes-Hallet et al. (2000, p. 285 et p. 287)



- Figure 38 : La représentation visuelle conceptuelle anodine (dessin) dans Hughes-Hallet et al. (2000, p. 261)



- Figure 39 : Exemple mixte dans Hughes-Hallet et al. (2000, p. 261)

Exemple 7 Montrez que la série $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$ diverge.

Solution On va interpréter les termes 1, 1/2, 1/3, … comme les hauteurs des rectangles de base 1 qu'on utilise pour calculer l'approximation de $\int_1^\infty (1/x)\, dx$ par les sommes de gauche (voir la figure 5.11).

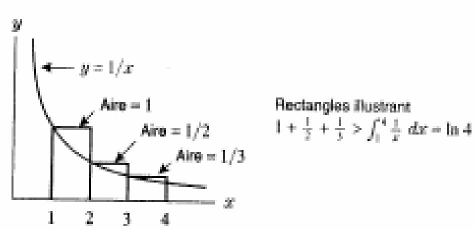


Figure 5.11 : Comparaison de la série harmonique avec $\int_1^\infty 1/x\, dx$

Puisque la somme des aires des rectangles est plus grande que l'aire sous la courbe, on a

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1)$$

pour la n-ième somme partielle. Puisque $\ln(n+1)$ devient arbitrairement grand quand $n \to \infty$, la somme partielle doit le devenir également. Ainsi, la suite des sommes partielles n'a aucune limite et la série diverge.

12. Manuel L: Bradley, Smith, Franco & Marcheterre (2002)

Il s'agit d'un manuel de 295 pages dont 53,5 pages sont consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 18,14% : un taux assez élevé si on le compare à celui des autres manuels analysés jusqu'à maintenant. Dans tous les problèmes et exercices, il n'existe aucun graphique, mais nous retrouvons trois dessins dont deux classés comme représentations visuelles représentationnelles (Figure 40) et un classé comme représentation visuelle informationnelle (Figure 41). La partie théorique contient sept graphiques dont deux classés comme représentations visuelles conceptuelles (Figure 42) et cinq classés comme représentations visuelles conceptuelles anodines (Figure 43) ainsi que quatre dessins dont trois classés comme représentations visuelles conceptuelles (Figure 44) et un autre classé comme représentation visuelle hors concept (portrait d'un mathématicien). Dans ce manuel, il n'existe aucun exemple visuel, mais parmi les 34 exemples, on retrouve seulement un exemple mixte (Figure 45) et 33 exemples algébriques, ce qui montre le privilège accordé au registre algébrique dans la partie théorique et pratique du manuel L. Par ailleurs, sur 293 activités, seulement onze sont avec contexte; ces applications extramathématiques portent sur des contextes médicaux, économiques, sociaux, historiques et physiques (rebondissement d'une balle et le mouvement d'un volant qui sont deux applications artificielles). Cela nous laisse croire que ce manuel offre un contenu qui est relativement en harmonie avec les recommandations de la section 2.4 du cadre théorique en lien avec l'importance des applications hors du domaine mathématique d'un concept mathématique. En ce qui a trait aux applications mathématiques, le tableau 17 nous montre qu'il existe une seule application qui est en lien avec le calcul d'aire. Enfin, à l'image des autres manuels analysés, il n'existe aucune activité qui demande explicitement la production ou l'interprétation d'une représentation visuelle. Ainsi, mis à part le nombre d'applications extramathématiques qui est relativement élevé, l'utilisation des représentations visuelles est peu nombreuse et les activités cognitives en lien avec les registres de représentations sont absentes, ce qui souligne que le contenu de ce manuel en lien avec le concept de série ne répond pas aux suggestions de la théorie de Duval.

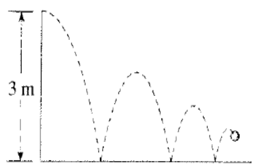
- Tableau 17 : Grille d’analyse individuelle (L). Bradley, Smith, Franco & Marcheterre (2002)

Analyse quantitative												
Auteur : Gerald L. Bradley, Karl J. Smith, Ariel Franco & Bernard Marcheterre												
Titre : Calcul intégral												
Année : 2002												
Place du concept dans le manuel	**R.V.G Pb**		**R.V.G h. Pb**		**R.V.D Pb**		**R.V.D h. Pb**		**EX**		**Activités**	
Manuel : 295p	0 0/p		7 0,131/p		3 0,112/p		4 0,056/p		35 0,654/p		293 5,477p	
Total : 53,5 p Taux : 18,14%	DEC	0	Hors concept	0	DEC	0	Hors concept	1	Visuel	0	Avec contexte 11	
	REP	0	C. Anodine	5	REP	2	C. Anodine	0	Mixte	1	Sans contexte 282	
	ORG	0	Conceptuelle	2	ORG	0	Conceptuelle	3	Algébrique	34	EC	206
											SM	27
	INF	0			INF	1					EC-SM	20
											ART	9
											AC	20

Analyse qualitative	
Application du concept	**Réalisation de graphe ou de dessin**
❖ Applications mathématiques : • Calcul d’aire ❖ Autres applications : ❖ Réalistes : • Application médicale • Économique • Sociale • Concept historique ❖ Artificielles : • Rebondissement d’une balle • Mouvement d’un pendule • Mouvement d’un volant	En aucun endroit dans le manuel, l’étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.

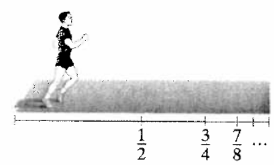
- Figure 40 : Les deux représentations visuelles représentationnelles (dessin) dans Bradley et al. (2002, p. 203 et p. 204)

48. On lâche une balle d'une hauteur de 3 m. Chaque fois que la balle rebondit, elle remonte à une hauteur égale à 0,6 fois la hauteur dont elle est tombée. Quelle est la distance totale parcourue par la balle ?



56. Le philosophe grec Zénon d'Élée (495-435 av. J.-C.) a présenté un certain nombre de paradoxes sur lesquels se sont longuement penchés les mathématiciens de son époque. Ces paradoxes jouèrent un rôle important dans la découverte des nombres infinitésimaux. Le plus célèbre est peut-être le *paradoxe de la course*, qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Un coureur ne peut jamais atteindre la fin d'une course. En effet, il doit d'abord parcourir la moitié de la longueur de la piste, puis la moitié de la distance restante, de sorte qu'il a parcouru à ce stade $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ de la longueur de la piste et qu'il lui en reste $\frac{1}{4}$ à courir. Après avoir couru la moitié de cette distance, il lui reste encore $\frac{1}{8}$ de la piste à parcourir, et ainsi de suite, indéfiniment.

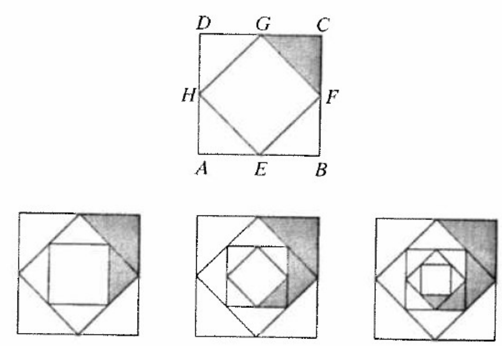


On suppose que le coureur court à une vitesse constante et qu'il lui faut un temps T (en minutes) pour parcourir la première moitié de la piste. Écrire une série infinie donnant le temps *total* nécessaire au coureur pour parcourir la piste et montrer que ce temps total est $2T$, comme on pouvait intuitivement s'y attendre.

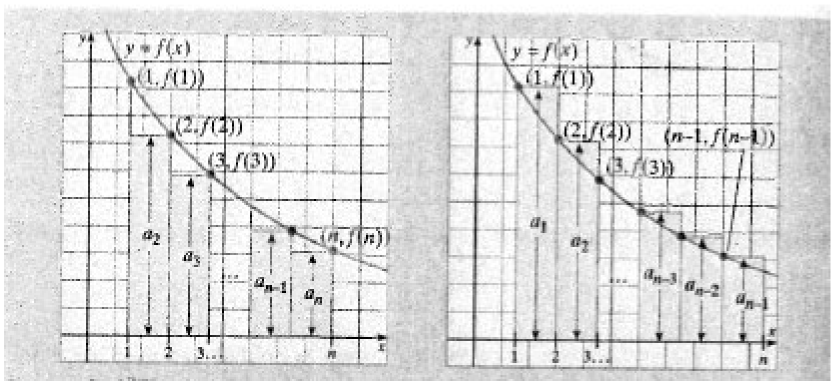
- Figure 41 : Les quatre représentations visuelles informationnelles (dessin) dans Bradley et al. (2002, p. 205)

62. Le carré *ABCD* a des côtés de longueur égale à 1. On forme le carré *EFGH* en reliant les milieux des côtés du premier carré, comme à la figure 5.12. On suppose que la configuration des régions tramées se poursuit indéfiniment. Quelle est l'aire totale des régions tramées ?

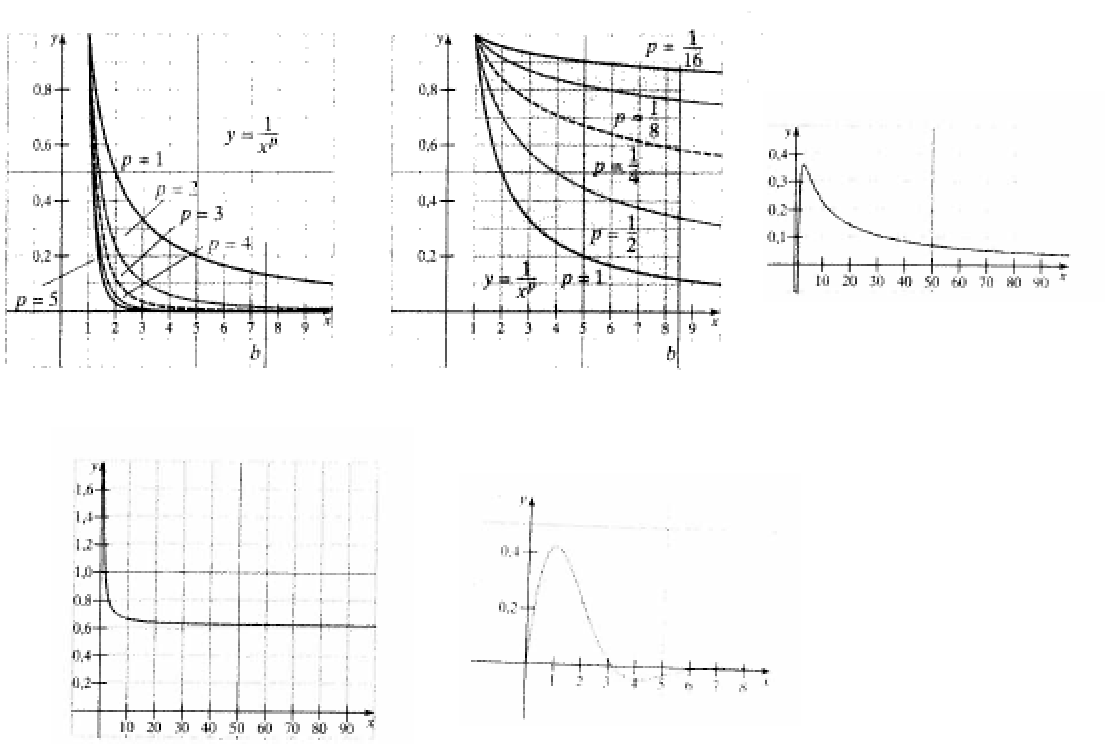
63. Reprendre le problème 62 pour un carré dont les côtés ont pour longueur *a*.



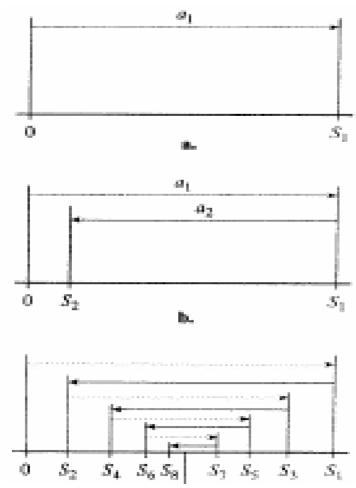
- Figure 42 : Les deux représentations visuelles conceptuelles (graphiques) dans Bradley et al. (2002, p. 208)



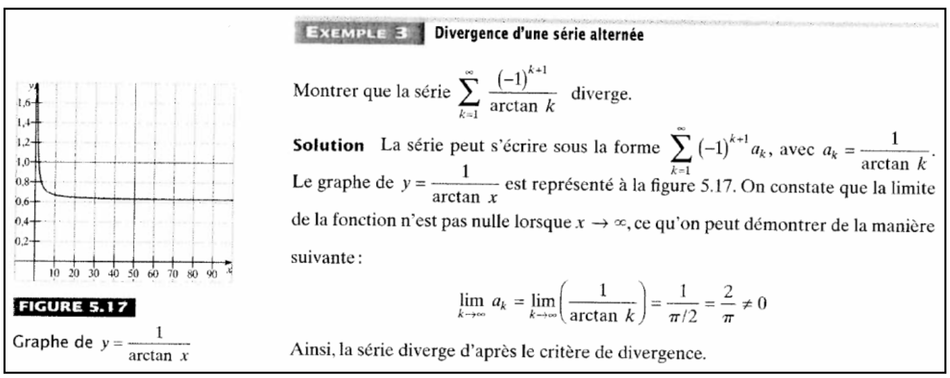
- Figure 43 : Les cinq représentations visuelles conceptuelles anodines (dessin) dans Bradley et al. (2002, p. 211, p. 233 et p. 237)



- Figure 44 : Les trois représentations visuelles conceptuelles (dessin) dans Bradley et al. (2002, p. 231).



- Figure 45: Exemple mixte dans Bradley et al. (2002, p. 233)



EXEMPLE 3 **Divergence d'une série alternée**

Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\arctan k}$ diverge.

Solution La série peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$, avec $a_k = \frac{1}{\arctan k}$. Le graphe de $y = \frac{1}{\arctan x}$ est représenté à la figure 5.17. On constate que la limite de la fonction n'est pas nulle lorsque $x \to \infty$, ce qu'on peut démontrer de la manière suivante :

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\arctan k}\right) = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \neq 0$$

Ainsi, la série diverge d'après le critère de divergence.

FIGURE 5.17

Graphe de $y = \frac{1}{\arctan x}$

13. Manuel M : Dominguez & Rouquès (2002)

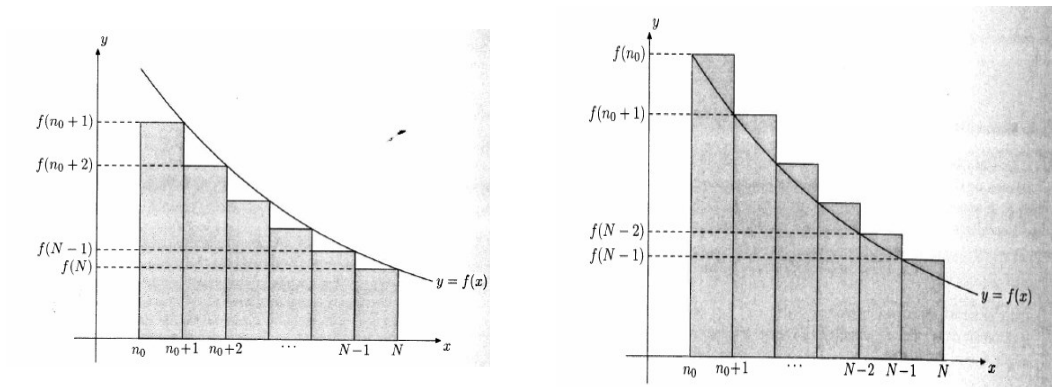
Le manuel M a la particularité de ne pas contenir d'activités en lien avec le concept de série. Tel qu'illustré dans le tableau 18, il s'agit d'un manuel de 380 pages dont 28 sont consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 7,37%. Ainsi, nous constatons que cet outil didactique accorde peu d'espace au concept de série. De plus, dans la partie théorique, nous retrouvons seulement deux graphiques que nous avons classés comme représentations visuelles conceptuelles (Figure 46) et trois dessins que nous avons classés comme représentations visuelles conceptuelles anodines (Figure 47). Par ailleurs, tous les exemples sont algébriques dont un seul contient une application mathématique en lien avec le développement en notation décimale d'un nombre périodique. Enfin, à l'image des autres manuels analysés, il n'existe aucune activité qui demande explicitement la production ou l'interprétation d'une représentation visuelle. Ainsi, ce manuel ne répond à aucune suggestion faite par Duval illustrées dans le chapitre 2.

- Tableau 18 : Grille d'analyse individuelle (M). Dominguez & Rouquès (2002)

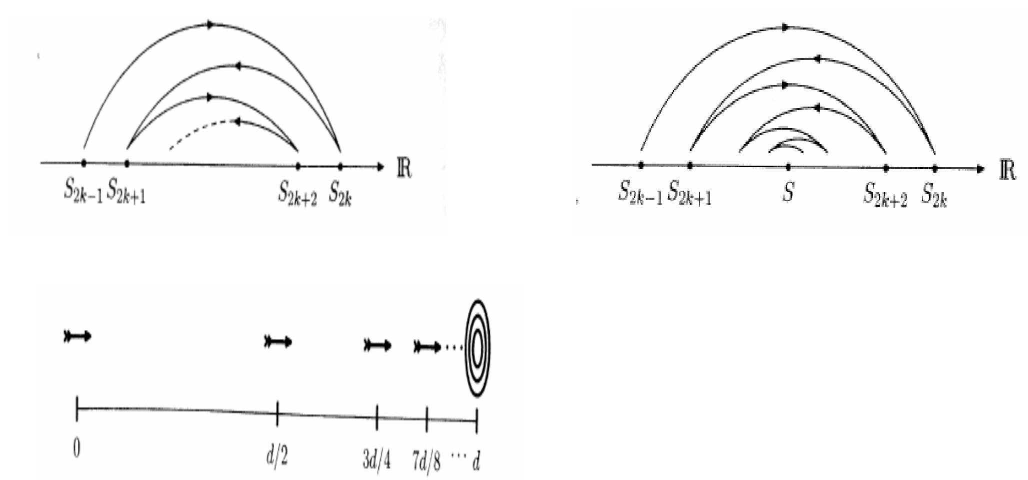
Analyse quantitative						
Auteur : Sophie Dominguez et Jean-Philippe Rouquès						
Titre : Leçon particulière sur le cours de math : analyse 1$^{\text{ère}}$ année						
Année : 2002						
Place du concept dans le manuel	**R.V.G Pb**	**R.V.G h. Pb**	**R.V.D Pb**	**R.V.D h. Pb**	**EX**	**Activités**
Manuel : 380p Total : 28 Taux : 7,37%	0 0/p	2 0,071 /p	0 0/p	3 0,107/p	10 0,357/p	0 0/p
	DEC 0	Hors concept 0	DEC 0	Hors concept 0	Visuel 0	Avec contexte 0
	REP 0	C. Anodine 0	REP 0	C. Anodine 3	Mixte 0	Sans contexte 0
	ORG 0	Conceptuelle 2	ORG 0	Conceptuelle 0	Algébrique 10	EC 0 SM 0
	INF 0		INF 0			EC-SM 0 ART 0 AC 0

Analyse qualitative	
Application du concept	**Réalisation de graphe ou de dessin**
❖ Application mathématique : • Développement décimal	En aucun endroit dans le manuel, l'étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.

- Figure 46 : Les deux représentations visuelles conceptuelles (graphique) dans Dominguez & Rouquès (2002, p. 366 et p. 368)



- Figure 47 : Les trois représentations visuelles conceptuelles anodines (dessin) dans Dominguez & Rouquès (2002, p.353, p. 374 et p. 376)



14. Manuel N: Thomas, Finney, Weir & Giordano (2002)

Ce manuel contient 387 pages, dont 49 pages consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 12,66%. Tel qu'illustré dans le tableau 19, le manuel N contient un nombre assez important de représentations visuelles, mais présente très peu d'applications extramathématiques. En effet, la partie pratique de ce manuel contient sept dessins dont trois nous les avons classés comme représentations visuelles informationnelles (Figure 48) et quatre que nous avons classés comme représentations visuelles organisationnelles (Figure 49). Par ailleurs, la partie théorique contient cinq graphiques que nous avons classés comme représentations visuelles conceptuelles (Figure 50) et dix dessins dont trois classés comme représentations visuelles conceptuelles (Figure 51), trois classés comme représentations visuelles conceptuelles anodines (Figure 52) et quatre classés comme représentations visuelles hors concept (portrait de mathématiciens). Cependant, dans aucun cas ce manuel demande explicitement d'interpréter ou de produire une représentation visuelle. Ainsi, nous constatons que les recommandations en lien avec l'utilisation des représentations visuelles illustrées dans le chapitre 2 sont relativement prises en compte dans ce manuel, mais les activités cognitives en lien avec le changement de registres de représentations sont inexistantes. Parmi les 297 activités, seulement deux sont avec contexte et la plupart de ces dernières portent sur l'étude du caractère et le calcul de la somme d'une série. Par ailleurs, nous retrouvons dans ce manuel une seule application extramathématique portant sur le rebondissement d'une balle (application artificielle) et deux applications mathématiques dont une est en lien avec le calcul d'aire et l'autre avec la théorie des fractales. Le peu d'applications en lien avec le concept mathématique en question souligne le fait que les suggestions de la section 2.4 ne sont pas prises en considération par ce manuel.

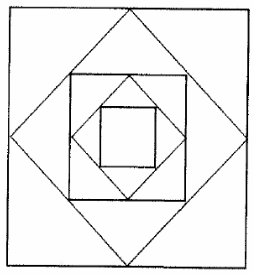
- Tableau 19 : Grille d'analyse individuelle (N). Thomas, Finney, Weir & Giordano (2002)

<table>
<tr><td colspan="13">Analyse quantitative</td></tr>
<tr><td colspan="13">Auteur : George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir & Frank R. Giordano</td></tr>
<tr><td colspan="13">Titre : Calcul intégral</td></tr>
<tr><td colspan="13">Année : 2002</td></tr>
<tr><td>Place du concept dans le manuel</td><td colspan="2">R.V.G Pb</td><td colspan="2">R.V.G h. Pb</td><td colspan="2">R.V.D Pb</td><td colspan="2">R.V.D h. Pb</td><td colspan="2">EX</td><td colspan="2">Activités</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Manuel : 387p

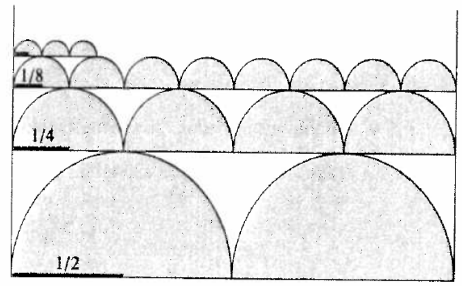
Total : 49
Taux : 12,66%</td><td colspan="2">0
0/p</td><td colspan="2">5
0,102 /p</td><td colspan="2">7
0,143 /p</td><td colspan="2">10
0,204 /p</td><td colspan="2">31
0,633 /p</td><td colspan="2">217
4,429/p</td></tr>
<tr><td>DEC</td><td>0</td><td>Hors concept</td><td>0</td><td>DEC</td><td>0</td><td>Hors concept</td><td>4</td><td>Visuel</td><td>0</td><td colspan="2">Avec contexte
2</td></tr>
<tr><td>REP</td><td>0</td><td>C. Anodine</td><td>0</td><td>REP</td><td>0</td><td>C. Anodine</td><td>1</td><td>Mixte</td><td>1</td><td colspan="2">Sans contexte
215</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="4">Conceptuelle</td><td rowspan="4">5</td><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="4">Conceptuelle</td><td rowspan="4">5</td><td rowspan="4">Algébrique</td><td rowspan="4">30</td><td>EC</td><td>145</td></tr>
<tr><td>SM</td><td>27</td></tr>
<tr><td rowspan="2">INF</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">INF</td><td rowspan="2">3</td><td>EC-SM</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>ART
AC</td><td>3
30</td></tr>
<tr><td colspan="13">Analyse qualitative</td></tr>
<tr><td colspan="3">Application du concept</td><td colspan="10">Réalisation de graphe ou de dessin</td></tr>
<tr><td colspan="3">❖ Applications mathématiques :
• Calcul d'aire
• Théorie des fractales
❖ Autres applications :
❖ Artificielles :
• Rebondissement d'une balle</td><td colspan="10">En aucun endroit dans le manuel, l'étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.</td></tr>
</table>

- Figure 48 : Les trois représentations visuelles informationnelles (dessin) dans Thomas et al. (2002, p. 279 et p. 280)

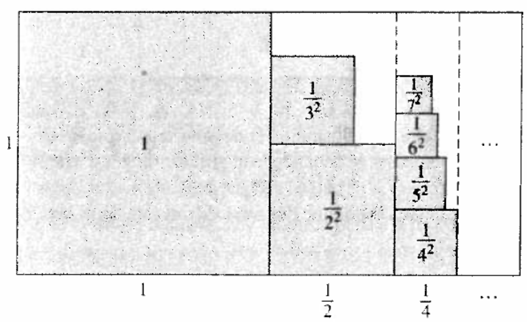
49. ***Somme d'aires.*** L'illustration ci-dessous représente les cinq premières figures d'une suite de carrés. L'aire du carré extérieur est de 4 m^2. Chaque carré successif est obtenu en joignant les points milieux des côtés du carré précédent. Calculez la somme des aires de tous les carrés.



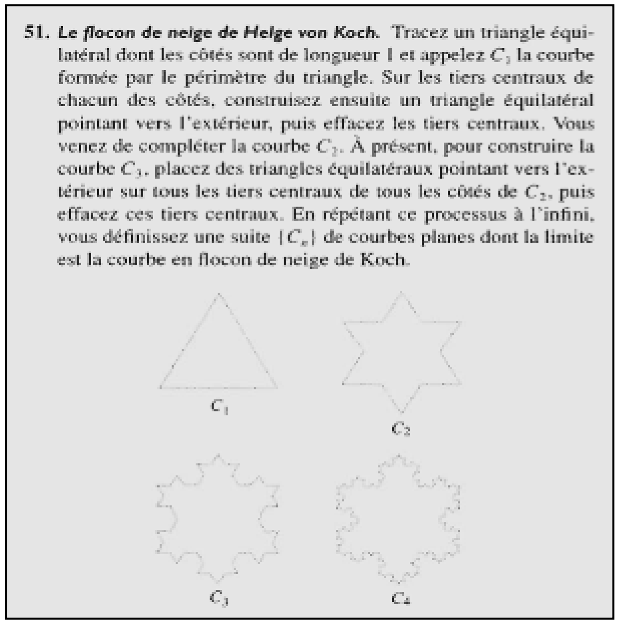
50. ***Somme d'aires.*** L'illustration ci-dessous représente les trois premières rangées et le début de la quatrième rangée d'une suite de demi-cercles. La n^e rangée comprend 2^n demi-cercles de rayon $1/2^n$. Calculez la somme des aires de tous les demi-cercles.



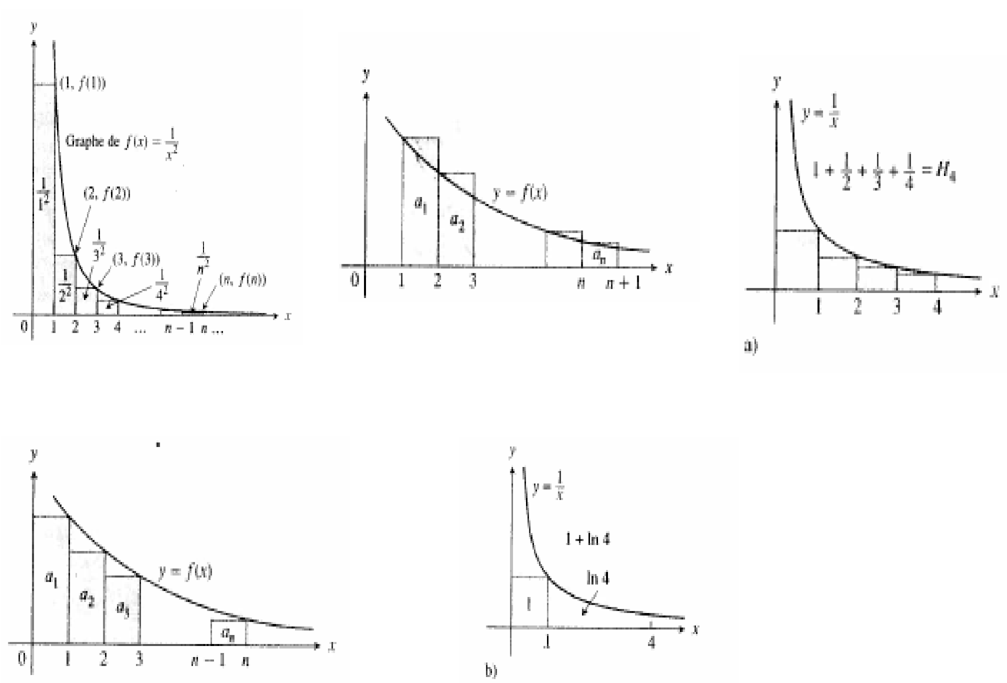
52. ***Apprendre en écrivant.*** La figure ci-dessous fournit une preuve intuitive que la somme $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ est inférieure à 2. Expliquez comment.



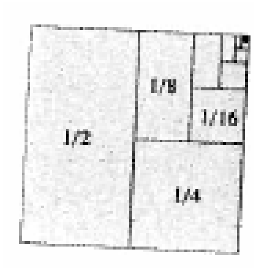
- Figure 49 : Les quatre représentations visuelles organisationnelles (dessin) dans Thomas et al. (2002, p. 280)

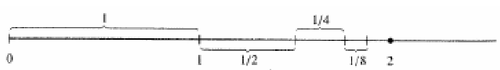

51. ***Le flocon de neige de Helge von Koch.*** Tracez un triangle équilatéral dont les côtés sont de longueur 1 et appelez C_1 la courbe formée par le périmètre du triangle. Sur les tiers centraux de chacun des côtés, construisez ensuite un triangle équilatéral pointant vers l'extérieur, puis effacez les tiers centraux. Vous venez de compléter la courbe C_2. À présent, pour construire la courbe C_3, placez des triangles équilatéraux pointant vers l'extérieur sur tous les tiers centraux de tous les côtés de C_2, puis effacez ces tiers centraux. En répétant ce processus à l'infini, vous définissez une suite $\{C_n\}$ de courbes planes dont la limite est la courbe en flocon de neige de Koch.

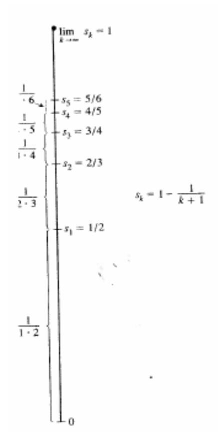
- Figure 50 : Les cinq représentations visuelles conceptuelles (graphique) dans Thomas et al. (2002, p. 282 et p. 284)



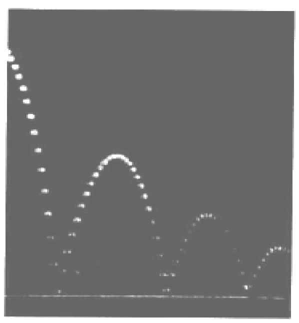
- Figure 51 : Les trois représentations visuelles conceptuelles (dessin) dans Thomas et al. (2002, p. 249, p. 268 et p. 273)

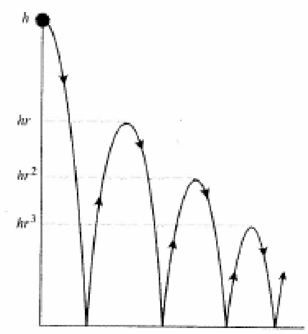


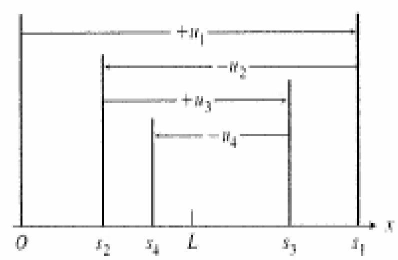




- Figure 52 : Les trois représentations visuelles conceptuelles anodines (dessin) dans Thomas et al. (2002, p. 272, p. 296)







15. Manuel O : Charron & Parent (2004)

Avant d'entamer l'interprétation des données du tableau 20 relatif à la grille d'analyse individuelle (O), nous aimerions souligner que, selon tous les enseignants interviewés dans le cadre d'une suite à ce projet de recherche (González-Martín, 2010), ce dernier semble être le plus utilisé dans les cégeps de la région de Montréal au moment de notre collecte de données. Il s'agit d'un manuel de 427 pages dont 54,5 pages sont consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 12,99%. La partie pratique de cet outil didactique contient seulement un dessin que nous avons classé comme représentation visuelle informationnelle (Figure 53), mais la partie théorique contient deux graphiques que nous avons classés comme représentations visuelles conceptuelles (Figure 54) et onze dessins dont un classé comme représentation visuelle conceptuelle (Figure 55), deux autres classés comme représentations visuelles conceptuelles anodines (Figure 56) et huit autres classés comme représentations visuelles hors concept (portraits de mathématiciens). Ainsi, nous constatons que hormis les huit représentations visuelles hors concept qui ne sont pas utiles à l'appréhension du concept de série, il existe une seule représentation visuelle conceptuelle qui est nécessaire à l'appréhension du concept de série De plus, parmi les 55 exemples, il n'existe aucun exemple visuel : seulement deux exemples sont mixtes (le premier est similaire à celui de Charron & Parent, 1993 – voir la Figure 16 – et le deuxième est similaire à celui de Charron & Parent, 1997 – voir la Figure 31) et les 54 autres sont algébriques. Ainsi, nous constatons le privilège accordé au registre algébrique et le peu d'intérêt accordé aux recommandations de la recherche et celles des sections 2.2 et 2.3 en lien avec l'importance de diversifier les registres de représentation et l'utilisation des représentations visuelles. Sur 167 activités, seulement deux sont avec contexte et la plupart des autres activités portent sur l'étude du caractère et le calcul de la somme d'une série qui exigeraient souvent l'application d'un algorithme. En ce qui concerne les applications en lien avec le concept de série, on remarque qu'il existe une seule application mathématique portant sur le calcul d'aire et seulement deux applications extramathématiques dont une application médicale et une application physique (rebondissement d'une balle) qui est artificielle. Cette dernière est une application très fréquente dans la plupart des manuels analysés. Le peu d'applications extramathématiques confirme que le manuel O ne tient pas compte des recommandations illustrées dans le chapitre 2 en lien avec l'importance des applications d'un concept en dehors du domaine mathématique. Enfin, dans aucun endroit de ce manuel on demande explicitement l'interprétation ou la production d'une représentation visuelle, ce qui montre que ce dernier ne favorise pas les différentes activités cognitives en lien avec le changement de registres de représentation.

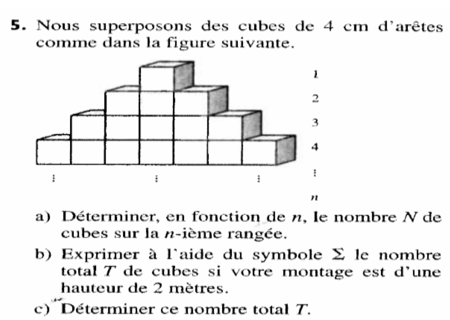
- Tableau 20 : Grille d'analyse individuelle (O). Charron & Parent (2004)

Analyse quantitative
Auteur : Gilles Charron et Pierre Parent
Titre : Calcul intégral
Année : 2004

Place du concept dans le manuel	**R.V.G Pb**		**R.V.G h. Pb**		**R.V.D Pb**		**R.V.D h. Pb**		**EX**		**Activités**	
Manuel : 427p Total : 54,5p Taux : 12,99%	0 /p		2 0,036/p		1 0,018 /p		11 0,202/p		55 1,009 /p		167 3,064 /p	
	DEC	0	Hors concept	0	DEC	0	Hors concept	8	Visuel	0	Avec contexte	2
	REP	0	C. Anodine	0	REP	0	C. Anodine	2	Mixte	2	Sans contexte	165
	ORG	0	Conceptuelle	2	ORG	0	Conceptuelle	1	Algébrique	53	EC	78
											SM	30
	INF	0			INF	1					EC-SM	24
											ART	31
											AC	2

Analyse qualitative	
Application du concept	**Réalisation de graphe ou de dessin**
❖ Applications mathématiques : • Calcul d'aire ❖ Autres applications : ❖ Réalistes : • Application médicale ❖ Artificielles : • Rebondissement d'une balle	En aucun endroit dans le manuel, l'étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.

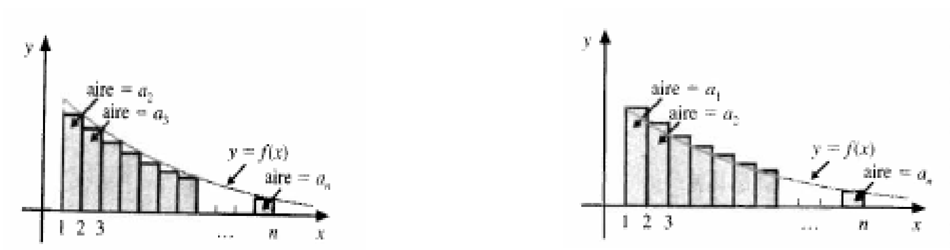
- Figure 53 : La représentation visuelle informationnelle (dessin) dans Charron & Parent (2004, p. 118)



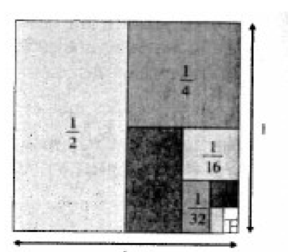
5. Nous superposons des cubes de 4 cm d'arêtes comme dans la figure suivante.

a) Déterminer, en fonction de n, le nombre N de cubes sur la n-ième rangée.
b) Exprimer à l'aide du symbole Σ le nombre total T de cubes si votre montage est d'une hauteur de 2 mètres.
c) Déterminer ce nombre total T.

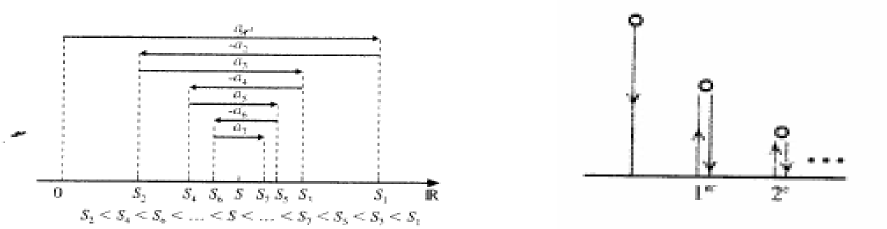
- Figure 54 : Les deux représentations visuelles conceptuelles (graphique) dans Charron & Parent (2004, p. 313 et p. 314)



- Figure 55 : La représentation visuelle conceptuelle (dessin) dans Charron & Parent (2004, p. 296)



- Figure 56 : La représentation visuelle conceptuelle anodine (dessin) dans Charron & Parent (2004, p. 308 et p. 330)



16. Manuel P : Ross (2006)

Le manuel P contient 440 pages dont 64 pages sont consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 0,145 qui semble être très faible en le comparant aux taux des autres manuels analysés. Cependant, celui-ci offre le plus grand nombre de représentations visuelles: dans la partie pratique, nous retrouvons neuf dessins dont cinq classés représentations visuelles organisationnelles (Figure 57), trois classés représentations visuelles représentationnelles (Figure 58), et un classé comme représentation visuelle décorative (Figure 59) ainsi que quatre graphiques classés comme représentations visuelles informationnelles (Figure 60). Tel qu'illustré dans le tableau 21, dans la partie théorique, nous retrouvons quinze graphiques dont neuf classés comme représentations visuelles conceptuelles (Figure 61 : nous avons illustré uniquement cinq graphiques, car ils sont tous similaires) et six classés comme représentations visuelles conceptuelles anodines (Figure 62) ainsi que neuf dessins dont quatre classés comme représentations visuelles conceptuelles (Figure 63), deux classés comme représentations visuelles conceptuelles anodines (Figure 64) et un classé comme représentation visuelle hors concept. Par contre, il n'existe aucune activité qui demande explicitement l'interprétation ou la production d'une représentation visuelle. Ainsi, nous constatons que ce manuel accorde une importance à l'utilisation des représentations visuelles tel que recommandé par la théorie de Duval, mais ne prend pas compte de l'importance du changement des registres de représentation et des activités cognitives qui se rattachent à ces derniers. Par ailleurs, les vingt-cinq exemples qui existent dans ce manuel sont tous algébriques. Parmi les 173 activités qui apparaissent dans ce manuel, cinq sont avec contexte et les 168 autres sont sans contexte dont la plupart d'entre elles portent sur l'étude de caractère et le calcul de la somme d'une série tel que la plupart des autres manuels analysés. Enfin, nous retrouvons cinq applications extramathématiques qui portent sur un contexte médical et un contexte physique dans lequel on retrouve l'exemple de la rotation d'une roue, le rebondissement d'une balle, l'oscillation d'un pendule, et le déplacement d'un moustique. Ces trois dernières applications sont artificielles. Ainsi, bien que le nombre d'applications extramathématiques soit relativement grand (cinq applications), il demeure que la plupart d'entre elles sont artificielles (trois applications artificielles).

- Tableau 21 : Grille d'analyse individuelle (P). Ross (2006)

Analyse quantitative												
Auteur : André Ross												
Titre : Calcul intégral pour les sciences de la nature												
Année : 2006												
Place du concept dans le manuel	**R.V.G Pb**		**R.V.G h. Pb**		**R.V.D Pb**		**R.V.D h. Pb**		**EX**		**Activités**	
Manuel : 440 Total : 64 Taux : 0,145	4 0,0625/p		15 0,234 /p		9 0,141 /p		7 0,109 /p		25 0,391 /p		173 2,661/p	
	DEC	0	Hors concept	0	DEC	1	Hors concept	1	Visuel	0	Avec contexte	5
	REP	0	C. Anodine	6	REP	3	C. Anodine	2	Mixte	0	Sans contexte	168
	ORG	0	Conceptuelle	9	ORG	5	Conceptuelle	4	Algébrique	25	EC	112
											SM	11
	INF	4			INF	0					EC-SM	4
											ART	27
											AC	14
Analyse qualitative												
Application du concept						**Réalisation de graphe ou de dessin**						
❖ Autres applications : ❖ Réalistes : • La vitesse de rotation d'une roue • Application médicale ❖ Artificielles : • Oscillation d'un pendule • Rebondissement d'une balle • Déplacement d'un moustique						En aucun endroit dans le manuel, l'étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.						

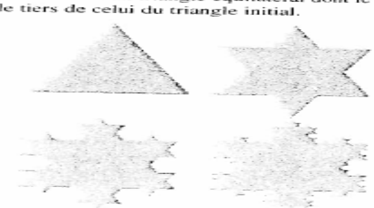
- Figure 57 : Les cinq représentations visuelles organisationnelles (dessin) dans Ross (2006, p. 328, p. 344 et p. 345)

1. La figure suivante illustre la construction d'un *tapis de Sierpinski* carré. On prend un carré de côté unitaire que l'on partitionne en neuf carrés et on retranche le carré central. On partitionne ensuite les huit carrés restants de la même façon et on retranche à nouveau le carré central. La figure suivante illustre les trois premières étapes.

a) Montrer que la somme des aires des carrés enlevés est égale à 1.
b) En déduire l'aire du tapis de Sierpinski.

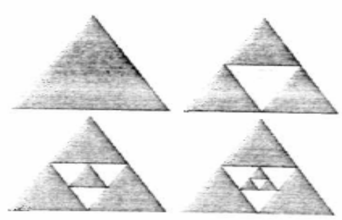
On laisse tomber une balle d'une hauteur de 1 m. À Celle-ci rebondit aux deux tiers de la hauteur dont elle est tombée.

). La figure suivante illustre la construction d'un *flocon de von Koch*. On divise chaque côté d'un triangle équilatéral de côté unitaire en trois parties égales et sur la partie centrale de chacun des côtés on construit un triangle équilatéral dont le côté est le tiers de celui du triangle initial.



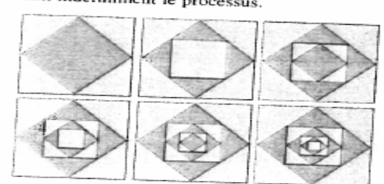
On divise alors en trois parties égales chaque côté de la figure obtenue et on répète le processus indéfiniment.

29. On prend un triangle équilatéral de couleur foncée dont l'aire est a. En joignant les points milieux de chacun des côtés, on forme un nouveau triangle équilatéral que l'on colorie d'une couleur pâle. Dans ce triangle on en inscrit un autre que l'on colorie de couleur foncée. On poursuit indéfiniment le processus.



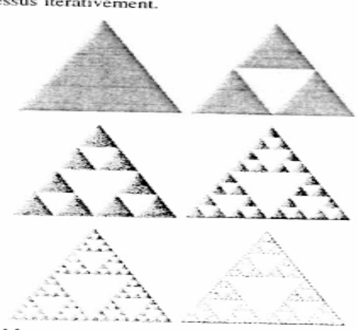
a) Déterminer la série décrivant, en fonction de a, l'aire de la surface de couleur pâle obtenue en poursuivant le processus indéfiniment.
b) Dire si la série diverge ou converge, évaluer la somme si la série converge.
c) Déterminer la série décrivant, en fonction de a, l'aire de la surface de couleur foncée obtenue en poursuivant le processus indéfiniment.
d) Dire si la série diverge ou converge, évaluer la somme si la série converge.
e) Si le côté du triangle initial est de longueur 2.

28. On prend un carré de couleur pâle dont l'aire est a. En joignant les points milieux de chacun des côtés, on forme un nouveau carré que l'on colorie d'une couleur foncée. Dans ce carré on en inscrit un autre que l'on colorie de couleur pâle. On poursuit indéfiniment le processus.



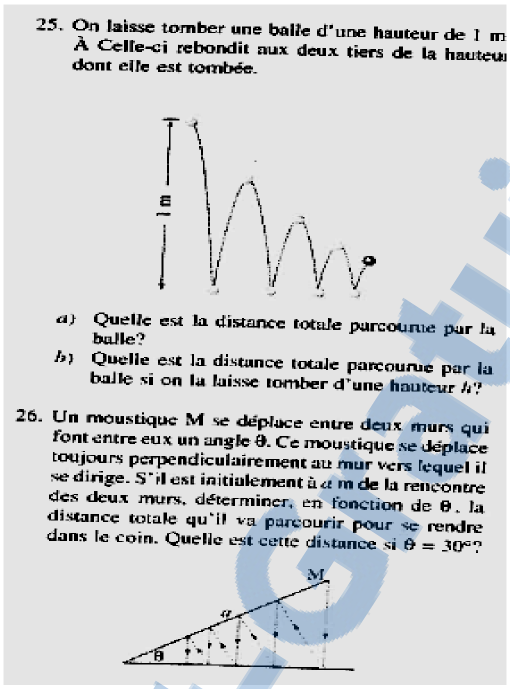
a) Déterminer la série décrivant, en fonction de a, l'aire de la surface de couleur pâle obtenue en poursuivant le processus indéfiniment.
b) Dire si la série diverge ou converge, évaluer la somme si la série converge.
c) Déterminer la série décrivant, en fonction de a, l'aire de la surface de couleur foncée obtenue en poursuivant le processus indéfiniment.
d) Dire si la série diverge ou converge, évaluer la somme si la série converge.
e) Si le côté du carré initial est de longueur 2, quelle est l'aire de la surface de couleur pâle ? de couleur foncée?

1. La figure suivante illustre la construction d'un *tapis de Sierpinski* triangulaire. On prend un triangle équilatéral et on en joint les points milieux puis on découpe le nouveau triangle équilatéral ainsi construit. Dans les triangles restants, on répète le processus itérativement.



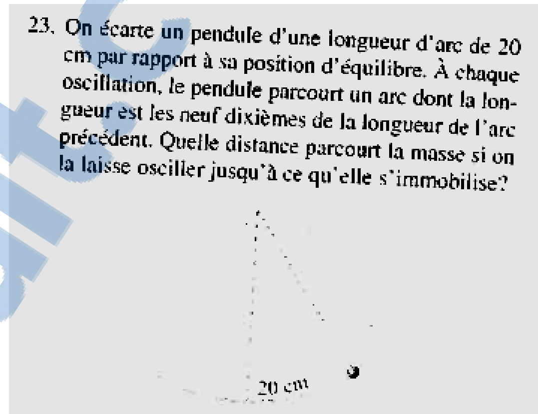
a) Montrer que la somme des aires retranchées est égale à l'aire du triangle initial.
b) Quelle conclusion en tirez-vous?

- Figure 58 : Les trois représentations visuelles représentationnelles (dessin) dans Ross (2006, p. 343 et p. 344)

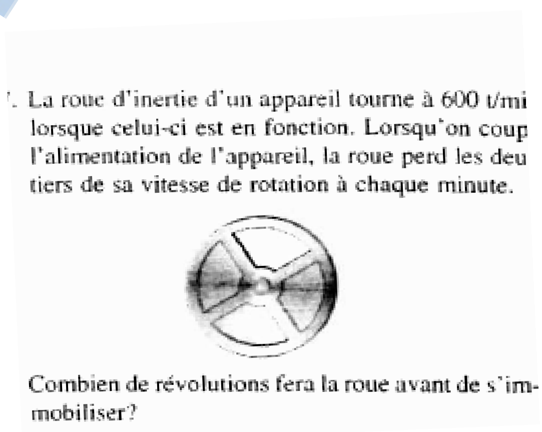

25. On laisse tomber une balle d'une hauteur de 1 m. À Celle-ci rebondit aux deux tiers de la hauteur dont elle est tombée.

a) Quelle est la distance totale parcourue par la balle?
b) Quelle est la distance totale parcourue par la balle si on la laisse tomber d'une hauteur h?

26. Un moustique M se déplace entre deux murs qui font entre eux un angle θ. Ce moustique se déplace toujours perpendiculairement au mur vers lequel il se dirige. S'il est initialement à a m de la rencontre des deux murs, déterminer, en fonction de θ, la distance totale qu'il va parcourir pour se rendre dans le coin. Quelle est cette distance si θ = 30°?


23. On écarte un pendule d'une longueur d'arc de 20 cm par rapport à sa position d'équilibre. À chaque oscillation, le pendule parcourt un arc dont la longueur est les neuf dixièmes de la longueur de l'arc précédent. Quelle distance parcourt la masse si on la laisse osciller jusqu'à ce qu'elle s'immobilise?

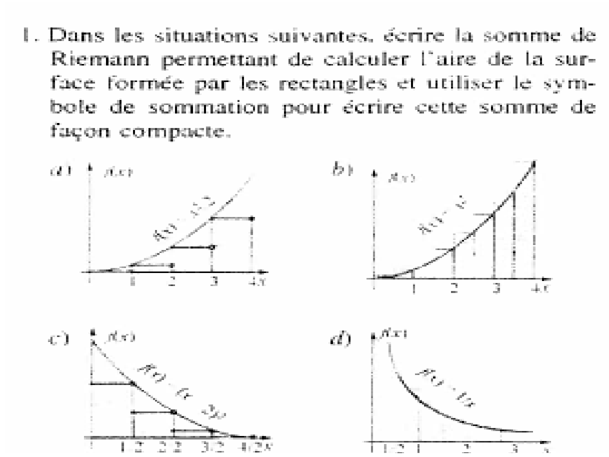
- Figure 59 : La représentation visuelle décorative (dessin) dans Ross (2006, p. 344)


. La roue d'inertie d'un appareil tourne à 600 t/mi lorsque celui-ci est en fonction. Lorsqu'on coup l'alimentation de l'appareil, la roue perd les deu tiers de sa vitesse de rotation à chaque minute.

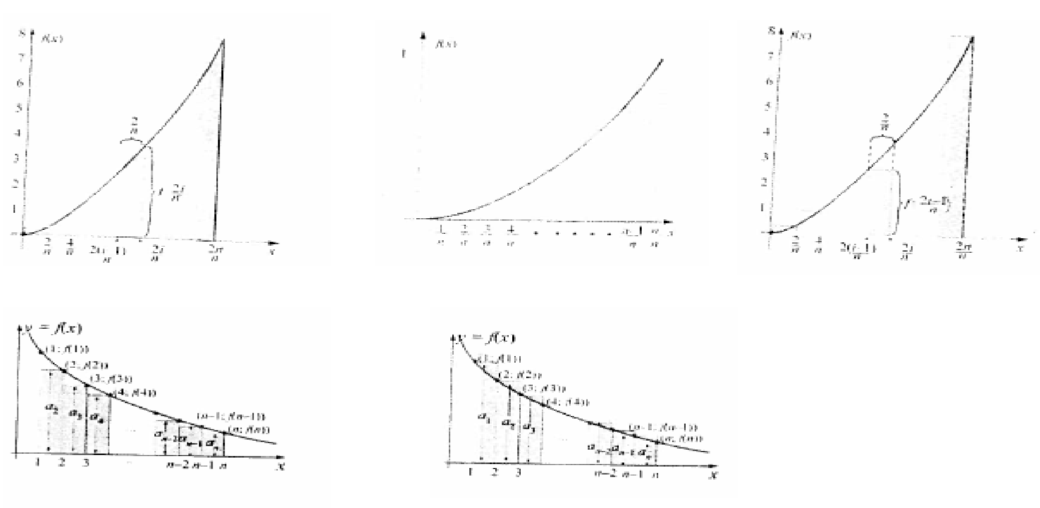
Combien de révolutions fera la roue avant de s'immobiliser?

•

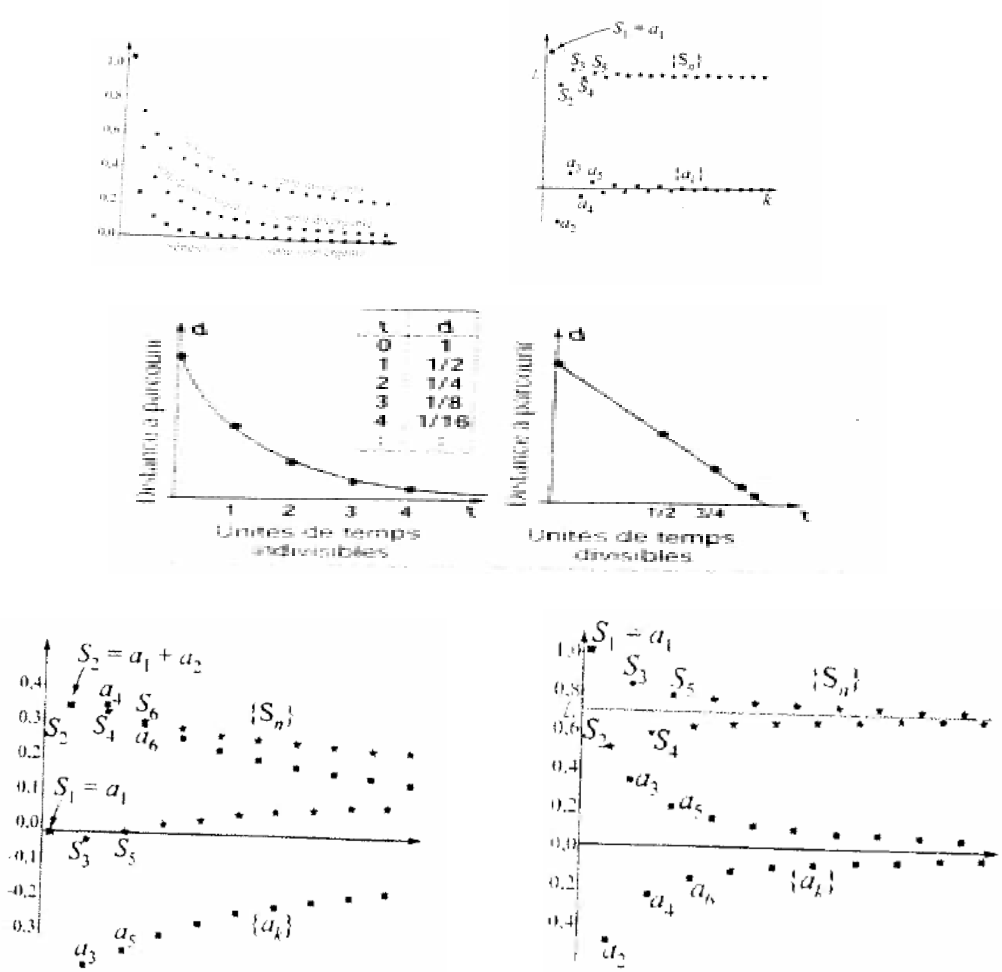
- Figure 60 : Les quatre graphiques classés comme représentations visuelles informationnelles dans Ross (2006, p. 47)



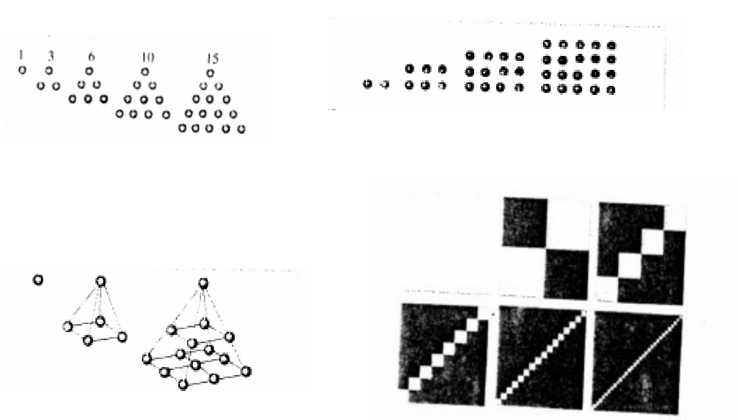
- Figure 61: Exemples de représentations visuelles conceptuelles (graphiques) dans A. Rosse (2006, p. 42, p. 43 et p. 352)



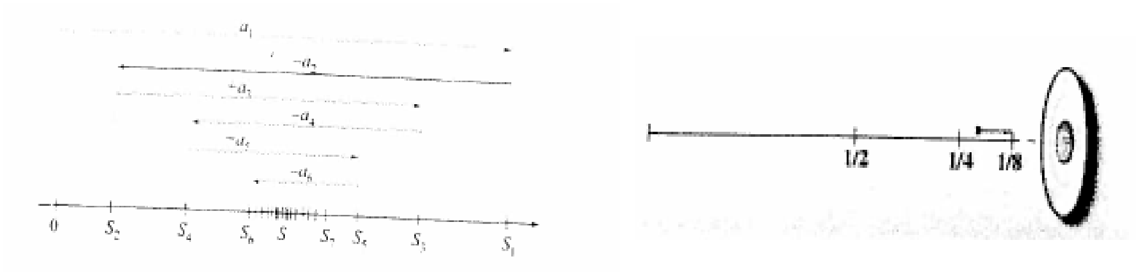
- Figure 62: Exemples de représentations visuelles conceptuelles anodines (graphiques) dans Ross (2006, p. 351, p. 354, p. 371 et p. 372)



- Figure 63 : Les quatre représentations visuelles conceptuelles (dessins) dans Ross (2006, p. 46)



- Figure 64 : Les deux représentations visuelles conceptuelles anodines (dessins) dans Ross (2006, p.342 et p. 373)



17. Manuel Q : Amyotte (2008)

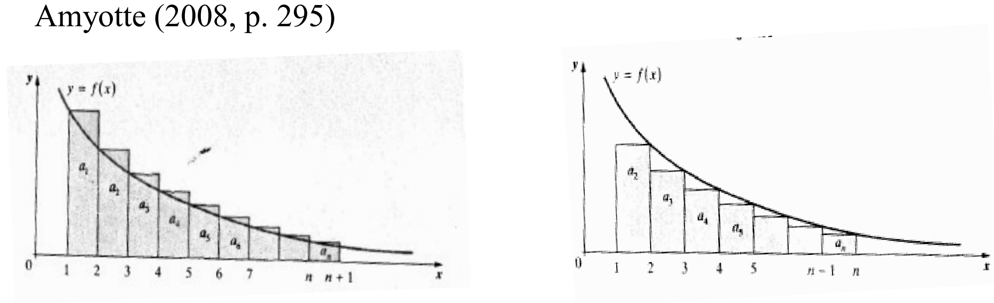
Ce dernier manuel contient 426 pages, dont 50 pages consacrées au concept de série, ce qui représente un taux de 11,74%. Tel qu'illustré dans le tableau 22, le manuel Q bien qu'il soit plus récent que tous les autres, ne contient aucune représentation visuelle dans la partie pratique, mais dans la partie théorique, nous retrouvons deux graphiques que nous avons classés comme représentations visuelles conceptuelles (Figure 65) et onze dessins dont trois classés comme représentations visuelles conceptuelles (Figure 66) et huit classés représentations visuelles hors concepts (portraits de mathématiciens et images pour décoration), ce qui représente un taux très faible étant donné que sur treize représentations visuelles, huit sont hors concepts qui n'ont aucun lien avec l'appréhension du concept de série. De plus, dans ce manuel, il n'existe aucune activité qui demande explicitement de produire ou d'interpréter une représentation visuelle. Ainsi, on est très loin des recommandations de la section 2.2 et 2.3 en lien avec l'importance de l'utilisation des représentations visuelles et des activités cognitives rattachées au changement des registres de représentation. De plus, les 22 exemples qui apparaissent dans ce manuel sont tous algébriques, ce qui montre le privilège accordé au registre algébrique. En ce qui a trait aux activités, il n'existe aucun exercice ou problème avec contexte et la plupart de ces derniers portent sur l'étude de caractère et le calcul de la somme d'une série. Il n'existe aucune application extramathématique mis à part deux applications mathématiques en lien avec le calcul d'aire sous une courbe et une représentation fractionnaire d'un nombre décimal dans la partie théorique de ce manuel. Ainsi, nous constatons que ce dernier n'accorde aucune importance à l'application du concept de série en dehors du domaine mathématique.

- Tableau 22 : Grille d'analyse individuelle (Q). Amyotte (2008)

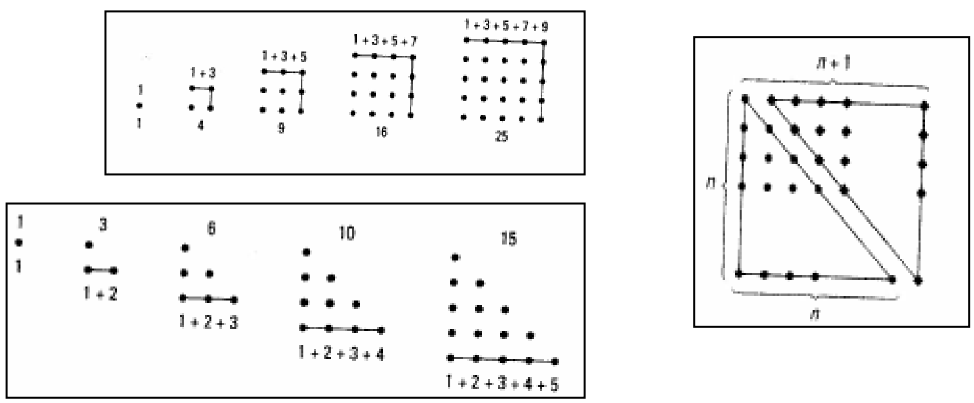
<table>
<tr><th colspan="13">Analyse quantitative</th></tr>
<tr><td colspan="13">Auteur : Luc Amyotte</td></tr>
<tr><td colspan="13">Titre : Calcul intégral</td></tr>
<tr><td colspan="13">Année : 2008</td></tr>
<tr><th>Place du concept dans le manuel</th><th colspan="2">R.V.G
Pb</th><th colspan="2">R.V.G
h. Pb</th><th colspan="2">R.V.D
Pb</th><th colspan="2">R.V.D
h. Pb</th><th colspan="2">EX</th><th colspan="2">Activités</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Manuel : 426p

Total : 50
Taux : 11,74%</td><td colspan="2">0
0/p</td><td colspan="2">2
0,040/p</td><td colspan="2">0
0 /p</td><td colspan="2">11
0,220/p</td><td colspan="2">22
0,440/p</td><td colspan="2">51
1,02/p</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DEC</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Hors concept</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">DEC</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Hors concept</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">Visuel</td><td rowspan="2">0</td><td colspan="2">Avec contexte</td></tr>
<tr><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">REP</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">C. Anodine</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">REP</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">C. Anodine</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">Mixte</td><td rowspan="2">0</td><td colspan="2">Sans contexte</td></tr>
<tr><td colspan="2">51</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5">2</td><td rowspan="2">ORG</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="5">Conceptuelle</td><td rowspan="5">3</td><td rowspan="5">Algébrique</td><td rowspan="5">22</td><td>EC</td><td>34</td></tr>
<tr><td>SM</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">INF</td><td rowspan="3">0</td><td>EC-SM</td><td>0</td></tr>
<tr><td>ART</td><td>0</td></tr>
<tr><td>AC</td><td>7</td></tr>
<tr><th colspan="13">Analyse qualitative</th></tr>
<tr><td colspan="6">Application du concept</td><td colspan="7">Réalisation de graphe ou de dessin</td></tr>
<tr><td colspan="6">❖ Applications mathématiques :
• Calcul d'aire sous une courbe
• Représentation fractionnaire d'un nombre décimal</td><td colspan="7">En aucun endroit dans le manuel, l'étudiant est appelé explicitement à interpréter ou à réaliser une représentation visuelle.</td></tr>
</table>

- Figure 65 : Les deux représentations visuelles conceptuelles (graphique) dans Amyotte (2008, p. 295)



- Figure 66 : Les trois représentations visuelles conceptuelles (dessin) dans Amyotte (2008, p. 15)



Après avoir illustré les différentes représentations visuelles utilisées dans les dix-sept manuels analysés, nous constatons que, presque dans tous ces manuels, les représentations graphiques conceptuelles sont les mêmes (semblables à la Figure 65 sur cette page). En effet, cette image est utilisée par tous ces manuels afin d'expliquer le test intégral (voir section 1.1) qui est un critère de convergence parmi d'autres critères.

4.2. Analyse récapitulative.

Dans cette section nous effectuons une analyse récapitulative qui a pour objectif de comparer les éléments observés dans les 17 manuels analysés. Pour ce faire nous nous appuyons sur la grille récapitulative illustrée dans le tableau 23.

- Tableau 23 : Grille d’analyse récapitulative avec données

A	B	C	D	E	F
Serge Robert 1992	**Frank Ayres & Elliott Mendelson** 1993	**Gilles Charron & Pierre Parent** 1993	**Germain Beaudoin & Jacques Laforest** 1994	**Suzanne Wild** 1995	**Earl William Swokowski** 1995
Pages : 434 Pages pour séries : 21,5 **Ratio : 4,95%**	Pages : 480 Pages pour séries : 20,5 **Ratio : 4,27%**	Pages : 384 Pages pour séries : 38,5 **Ratio : 10,02%**	Pages : 360 Pages pour séries : 59 **Ratio : 16,39%**	Pages : 344 Pages pour séries : 37,5 **Ratio : 10,90%**	Pages : 1123 Pages pour séries : 40 **Ratio : 3,56%**
R. Graphiques (pb) : 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) :** **0** Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle :0 **Dessins (pb) :** **0** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf : 0 **Dessins (hpb) :** 2(0,093) Hors concept :0 C. Anodine : 2 Conceptuelle :0	**R. Graphiques (pb) :** 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) :** **1** (0,049) Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 1 **Dessins (pb) :** **0** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf : 0 **Dessins (hpb) :** 2(0,097) Hors concept :0 C. Anodine : 2 Conceptuelle :0	**R. Graphiques (pb) :** 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) :** **2(0,052)** Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 2 **Dessins (pb) :** **1(0,025)** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf : 1 **Dessins (hpb) :** 1(0,025) Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle :1	**R. Graphiques (pb)** 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) :** **2(0,034)** Hors concept : C. Anodine : Conceptuelle : 2 **Dessins (pb) :** **0** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **Dessins (hpb) :** 1(0,017) Hors concept :0 C. Anodine : 1 Conceptuelle :0	**R. Graphiques (p b) :** 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) :** **1** Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 1 **Dessins (pb) :** **0** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **Dessins (hpb) :** 2(0,053) Hors concept :0 C. Anodine : 2 Conceptuelle :0	**R. Graphiques (pb) :** 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) :** **2(0,050)** Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 2 **Dessins (pb) :** **4(0,1)** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :4 **Dessins (hpb) :** 2(0,50) Hors concept :0 C. Anodine :2 Conceptuelle :0
Exemples : **11(0,512)** Visuels :0 Mixtes : 0 Algébriques : 11	**Exemples :** **3(0,146)** Visuels :0 Mixtes : 0 Algébriques : 3	**Exemples :** **51(1,325)** Visuels :0 Mixtes : 1 Algébriques : 50	**Exemples :** **34(0,576)** Visuels :0 Mixtes : 1 Algébriques : 33	**Exemples :** **36(0,960)** Visuels :0 Mixtes : 2 Algébriques : 34	**Exemples :** **27(0,675)** Visuels :0 Mixtes : 0 Algébriques : 27
Activités : **49(2,279/P)**	**Activités :** **154(7,512)**	**Activités :** **272(7,065)**	**Activités :** **132(2,24)**	**Activités :** **92(2,453)**	**Activités :** **228(5,7)**
Avec contexte : 0	**Avec contexte : 0**	**Avec contexte : 6**	**Avec contexte : 3**	**Avec contexte : 1**	**Avec contexte : 7**
Sans contexte 49 **1. EC : 30** **2. SM : 3** **1 & 2 : 0** **A.RT : 16** **AUC : 0**	**Sans contexte : 154** **1. EC : 129** **2. SM : 10** **1 & 2 : 3** **A.RT : 1** **AUC : 11**	**Sans contexte : 266** **1. EC : 139** **2. SM : 32** **1 & 2 : 48** **A.RT : 46** **AUC : 1**	**Sans contexte : 129** **1. EC : 117** **2. SM : 4** **1 & 2 : 3** **A.RT : 4** **AUC : 1**	**Sans contexte : 91** **EC : 60** **SM : 16** **EC-SM : 0** **A.RT : 13** **AUC : 2**	**Sans contexte 221** **1. EC : 152** **2. SM : 20** **1 & 2 : 22** **A.RT : 8** **AUC : 19**
Application : Développement décimal	**Application :** Aucune application	**Application :** Médicale Économique Rebondissement d’une balle Déplacement d’un mobile Calcul d’aire	**Application :** Nombre décimal périodique Calcul d’aire Rebondissement d’une balle Application en économie Oscillation d’un objet suspendu Calcul de périmètre	**Application :** Économique Déplacement d’un moustique	**Application :** Développement décimal Calcul d’aire Rebondissement d’une balle Le mouvement d’un pendule Application médicale Application en économie Application en biologie
Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l’étudiant d’interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l’étudiant d’interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l’étudiant d’interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l’étudiant d’interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l’étudiant d’interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l’étudiant d’interpréter ou de réaliser une représentation visuelle

G	H	I	J	K	L
Howard Anton 1996	**Bernard Massé** 1997	**Gilles Charron & Pierre Parent** 1997	**Gilles Ouellet** 2000	Deborah Hughes-Hallett, Andrew M. Gleason, Michel Beaudoin, Paul Charlevoix, Mario Labrie & Bernard Fraser 2001	**Gerald L.** Bradley, Karl. J. Smith, Ariel Franco & Bernard Marcheterre 2002
Pages : 420 Pages pour séries : 64 **Ratio : 15,24%**	Pages : 348 Pages pour séries : 51 **Ratio : 15,09%**	Pages : 390 Pages pour séries : 41 **Ratio : 10,51%**	Pages : 413 Pages pour séries : 37,5 **Ratio : 9,07%**	Pages : 365 Pages pour séries : 13,5 **Ratio : 3,7%**	Pages : 295 Pages pour séries : 53,5 **Ratio : 18,14**
R. Graphiques (p b) : 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) : 2(0,031)** Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 2 **Dessins (pb) : 4(0,062)** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :4 **Dessins (hpb) :** 1(0,016) Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 1	**R. Graphiques (p b) :** 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) : 3(0,059)** Hors concept :0 C. Anodine : 1 Conceptuelle : 2 **Dessins (pb) : 0** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **Dessins (hpb) :** 8(0,157) Hors concept : 7 C. Anodine : 1 Conceptuelle :0	**R. Graphiques (pb) :** 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) : 2(0,049)** Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 2 **Dessins (pb) : 1(0,024)** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :1 **Dessins (hpb) :** 2(0,049) Hors concept :0 C. Anodine : 1 Conceptuelle : 1	**R. Graphiques (p b) :** 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) : 1(0,027)** Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 1 **Dessins (pb) : 0** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **Dessins (hpb) :** 2(0,053) Hors concept : 1 C. Anodine : 1 Conceptuelle :0	**R. Graphiques (pb) :** 1(0,074) Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf : 1 **R. Graphiques (hpb) : 2(0,296)** Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 2 **Dessins (pb) : 0** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **Dessins (hpb) :** 3(0,222) Hors concept : C. Anodine : 1 Conceptuelle :2	**R. Graphiques (p b) :** 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) : 7(0,131)** Hors concept :0 C. Anodine :5 Conceptuelle : 2 **Dessins (pb) : 3(0,056)** Dec :0 Rep :2 Org : Inf : 1 **Dessins (hpb) :** 4(0,075) Hors concept : 1 C. Anodine :0 Conceptuelle :3
Exemples : 39(0,609) Visuels :0 Mixtes : 0 Algébriques : 39	**Exemples : 41(0,804)** Visuels :0 Mixtes : 0 Algébriques : 41	**Exemples : 55(1,341)** Visuels :0 Mixtes : 2 Algébriques : 53	**Exemples : 31(0,827)** Visuels :0 Mixtes : 0 Algébriques : 31	**Exemples : 4(0,987)** Visuels :0 Mixtes : 1 Algébriques : 3	**Exemples : 35(0,654)** Visuels :0 Mixtes : 1 Algébriques : 34
Activités : 319(4,98)	**Activités : 75 (1,471)**	**Activités : 166(4,049)**	**Activités : 104(2,773)**	**Activités : 45(3,333)**	**Activités : 293(5,477)**
Avec contexte : 2	**Avec contexte : 0**	**Avec contexte : 2**	**Avec contexte : 0**	**Avec contexte : 11**	**Avec contexte : 11**
Sans contexte : 317 **1. EC : 165** **2. SM : 57** **1 & 2 : 18** **A.RT : 42** **AUC : 35**	**Sans contexte: 75** **1. EC : 47** **2. SM : 16** **1 & 2 : 8** **A.RT : 4** **AUC : 0**	**Sans contexte 164** **1. EC : 82** **2. SM : 18** **1 & 2 : 27** **A.RT : 36** **AUC : 1**	**Sans contexte 104** **1. EC : 88** **2. SM : 10** **1 & 2 : 1** **A.RT : 5** **AUC : 0**	**Sans contexte 34** **1. EC : 10** **2. SM : 16** **1 & 2 : 3** **A.RT : 4** **AUC : 1**	**Sans contexte 282** **1. EC : 206** **2. SM : 27** **1 & 2 : 20** **A.RT : 9** **AUC : 20**
Application : Rebondissement d'une balle	**Application :** Calcul d'aire Développement décimal	**Application :** Calcul d'aire Développement décimal Rebondissement d'une balle Déplacement d'un mobile	**Application :** Aucune application	**Application :** Application médicale Rebondissement d'une balle Économique Déplacement de deux trains	**Application :** Application médicale Économique Sociale Concept historique Rebondissement d'une balle Mouvement d'un Pendule Mouvement d'un volant Calcul d'aire
Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle

M	N	O	P	Q
Sophie Dominguez & Jean-Philippe Rouquès **2002**	George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir & Frank R. Giordano **2002**	**Gilles Charron &Pierre Parent** **2004**	**André Ross** **2006**	**Luc Amyotte** **2008**
Pages : 380 Pages pour séries : 28 **Ratio : 7,37%**	Pages : 387 Pages pour séries : 49 **Ratio : 12,66**	Pages : 427 Pages pour séries : 54,5 **Ratio : 12,76%**	Pages : 440 Pages pour séries : 65 **Ratio : 14,70%**	Pages : 426 Pages pour séries : 50 **Ratio : 11,74%**
R. Graphiques (pb) : 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) :** **2(0,071)** Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 2 **Dessins (pb) :** **0** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **Dessins (hpb) :** **3(0,107)** Hors concept :0 C. Anodine : 3 Conceptuelle 0:	**R. Graphiques (pb) :** 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) :** **3(0,102)** Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 3 **Dessins (pb) :** **7(0,143)** Dec :0 Rep :0 Org :5 Inf :2 **Dessins (hpb) :** **10(0,204)** Hors concept : 4 C. Anodine : 3 Conceptuelle : 3	**R. Graphiques (pb) :** 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) :** **2(0,036)** Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 2 **Dessins (pb) :** **2(0,036)** Dec :1 Rep :0 Org :0 Inf : 1 **Dessins (hpb) :** **11(0,202)** Hors concept : 8 C. Anodine : 2 Conceptuelle : 1	**R. Graphiques (pb) :** **4(0,062)** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :4 **R. Graphiques (hpb) :** **15(0,234)** Hors concept :0 C. Anodine : 6 Conceptuelle : 9 **Dessins (pb) :** **8(0,123)** Dec : 1 Rep : 2 Org : 5 Inf : 0 **Dessins (hpb) :** **7 (0,109)** Hors concept : 1 C. Anodine : 2 Conceptuelle : 4	**R. Graphiques (pb) :** 0 Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **R. Graphiques (hpb) :** **2(0,040)** Hors concept :0 C. Anodine :0 Conceptuelle : 2 **Dessins (pb) :** **0** Dec :0 Rep :0 Org :0 Inf :0 **Dessins (hpb) :** **11(0,220)** Hors concept : 8 C. Anodine :0 Conceptuelle : 3
Exemples : **10(0,357)** Visuels :0 Mixtes : 0 Algébriques : 10	**Exemples :** **31(0,633)** Visuels :0 Mixtes : 1 Algébriques : 30	**Exemples :** **55(1,009)** Visuels :0 Mixtes : 2 Algébriques : 53	**Exemples :** **25(0,385)** Visuels :0 Mixtes : 0 Algébriques : 25	**Exemples :** **22(0,440)** Visuels :0 Mixtes : 0 Algébriques : 22
Activités : **0**	**Activités :** **217(4,429)**	**Activités :** **167(3,064)**	**Activités :** **173(2,661)**	**Activités :** **51 (1,02)**
Avec contexte : 0	**Avec contexte : 2**	**Avec contexte : 2**	**Avec contexte : 5**	**Avec contexte : 0**
Sans contexte : 0 **1. EC : 0** **2. SM : 0** **1 & 2 : 0** **A.RT : 0** **AUC : 0**	**Sans contexte : 215** **1. EC : 145** **2. SM : 27** **1 & 2 : 10** **A.RT : 3** **AUC : 30**	**Sans contexte : 165** **1. EC : 78** **2. SM : 30** **1 & 2 : 24** **A.RT : 31** **AUC : 2**	**Sans contexte : 168** **1. EC : 112** **2. SM : 11** **1 & 2 : 4** **A.RT : 27** **AUC : 14**	**Sans contexte : 51** **1. EC : 34** **2. SM : 10** **1 & 2 : 0** **A.RT : 0** **AUC : 7**
Application: Développement décimal	**Application :** Rebondissement d'une balle Calcul d'aire Théorie des fractales	**Application :** Calcul d'aire Rebondissement d'une balle Application médicale Transformation d'un nombre périodique	**Application :** Oscillation d'un pendule. Rebondissement d'une balle. Déplacement d'un moustique. La vitesse de rotation d'une roue. Application médicale	**Application :** Représentation fractionnaire d'un nombre décimal
Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle	Dans ce manuel, on ne demande, en aucun cas, à l'étudiant d'interpréter ou de réaliser une représentation visuelle

Dans le but de faciliter la lecture de la grille d'analyse récapitulative et ainsi pouvoir comparer nos résultats de recherche entre tous les manuels analysés, nous allons répartir cette dernière en sous-grilles récapitulatives de sorte que chacune de celles-ci soit en lien avec un seul élément observable. En premier lieu, nous allons illustrer les deux grilles récapitulatives des différentes représentations visuelles dans la partie pratique et dans la partie théorique qui apparaissent dans les dix-sept manuels analysés. Ensuite, nous exposons les différents types d'exemples, (exemples algébriques, visuels et mixtes) dans une autre grille récapitulative. En dernier lieu, nous illustrons les différentes applications mathématiques et extramathématiques dans une grille récapitulative où nous pouvons voir toutes les applications qui apparaissent dans les dix-sept manuels analysés.

En ce qui a trait à l'utilisation des représentations visuelles dans la section consacrée à la théorie, le nombre de ces dernières augmente en général de façon chronologique dans les manuels analysés, mais le ratio demeure insignifiant avec une moyenne de 0,17 par page, tel qu'il est illustré dans le tableau 24.

- Tableau 24: Grille récapitulative-représentations visuelles : Nombre et rôle des images et des graphes dans la section théorique (González-Martín, Seffah & Nardi, 2009; Seffah & González-Martín, 2011a, 2011b)

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
Nombre dessins/graphes (ratio)	2/0 0,09	2/1 0,15	1/2 0,08	1/2 0,05	2/1 0,08	2/2 0,10	1/2 0,05	8/3 0,22	2/2 0,10
Nombre images/graphes conceptuelles	0/0	0/1	1/2	0/2	0/1	0/2	1/2	0/2	1/2
	J	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	
Nombre dessins/graphes (ratio)	2/1 0,08	1/4 0,37	4/7 0,21	3/2 0,18	10/5 0,31	10/2 0,22	7/15 0,34	11/2 0,26	
Nombre dessins/graphes conceptuelles	0/1	0/4	3/2	0/2	5/3	1/2	4/9	3/2	

Dans la grande majorité des dix-sept manuels, les graphiques sont utilisés pour appuyer la démonstration du test intégral (voir l'explication du test intégral dans la section 1.1). Ces graphiques sont classés comme représentations visuelles conceptuelles, car ils permettent la visualisation des termes de la série et ils veulent favoriser la compréhension de l'explication du test intégral. Néanmoins, la plupart des manuels analysés s'appuient sur les constituants de ce type de graphique afin d'expliquer le test intégral, mais sans faire explicitement référence à l'image jointe au contenu du test intégral (le même graphique qu'on retrouve dans la partie théorique de tous les manuels)[6]. À travers le tableau 24, nous constatons que la plupart des manuels (14 manuels) n'utilisent pas plus de 2 graphes classés comme représentations visuelles conceptuelles, à l'exception des manuels K et P dans lesquels il apparaît plus de quatre graphes dont le premier manuel contient 4 graphiques classés comme représentations visuelles conceptuelles et le deuxième manuel contient 9 graphiques classés comme représentations visuelles conceptuelles et 6 autres classés comme représentations visuelles conceptuelles anodines. Néanmoins, les 9 graphiques portent sur le même contenu (test d'intégral). L'analyse des dix-sept manuels a permis aussi de prendre conscience que dans aucun manuel, l'étudiant est explicitement appelé à interpréter ou à construire une représentation visuelle. En ce sens, ce dernier n'est pas incité à représenter un même objet mathématique dans des registres différents, ce qui nous laisse croire que les dix-sept manuels analysés ne favorisent pas la coordination entre les registres algébrique et graphique (Seffah & González-Martín, 2011a, 2011b). Ainsi, ces résultats confirment que ces manuels ne tiennent pas compte des recommandations de la théorie des registres sémiotiques de Duval illustrée dans notre cadre théorique.

[6] Il est aussi important de noter que la recherche semble indiquer que les étudiants ne sont pas capables d'interpréter ce graphique de façon adéquate (González-Martín, 2014).

- Tableau 25: Grille récapitulative-représentations visuelles : Nombre et rôle des images et des graphes dans la section pratique : exercices et problèmes

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Nombre images/graphes	0/0	0/0	1/0	0/0	0/0	4/0	4/0	0/0	1/0
(ratio)	0	0	0,03	0	0	0,11	0,06	0	0,02
	J	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	
Nombre images/graphes	0/0	0/0	3/0	0/0	7/0	1/0	8/0	0/0	
(ratio)	0	0	0,06	0	0,14	0,02	0.12	0	

Le tableau 25 nous révèle des résultats assez surprenants. En effet, dans tous les manuels, il n'existe aucun graphique dans la partie pratique (exercices et problèmes) et le nombre de dessins est nettement inférieur à celui qui apparait dans la partie théorique. De plus, en général, il est rare de trouver un manuel qui utilise plusieurs représentations différentes en lien avec les séries. Dans la partie théorique, la plupart des manuels utilisent les mêmes graphiques pour illustrer le test intégral, mais on ne propose pas aux apprenants d'utiliser ces représentations visuelles dans des activités mathématiques. En effet, dans la plupart des manuels, l'étudiant est appelé à appliquer les critères de convergence sans pour autant s'appuyer sur des représentations visuelles. Dans ce cas, il serait probable que les étudiants ne soient pas appelés à effectuer des coordinations entre le registre algébrique et le registre graphique étant donné qu'ils n'utilisent pas les deux registres dans les différents exercices et problèmes faisant partie du contenu des dix-sept manuels. Nous rappelons que la coordination est une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec le contenu de la représentation, ce qui favorise une meilleure appréhension des concepts mathématiques (Duval, 1995). Ainsi, nous constatons aussi que les activités cognitives et la diversification des registres de représentations qui sont fortement suggérées par Duval dans notre cadre théorique sont absentes dans tous les manuels analysés.

La plupart des manuels analysés présentent un grand nombre d'exemples en lien avec le concept de somme infinie. En effet, dans douze manuels, nous retrouvons plus de 30 exemples (voir le tableau 26).

- Tableau 26: Grille récapitulative-exemples : Nombre et types d'exemples dans les manuels

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
Exemples	11	3	51	34	36	27	39	41	55
(ratio)	0,512	0,147	1,325	0,576	0,960	0,675	0,609	0,804	1,341
Visuels	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Algébriques	11	3	50	33	34	27	39	41	53
Mixtes	0	0	1	1	2	0	0	0	2
	J	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	
Exemples	31	4	35	10	31	55	25	23	
(ratio)	0,827	0,987	0,654	0,357	0,633	1,009	0,391	0,460	
Visuels	0	0	0	0	0	0	0	0	
Algébriques	31	3	34	10	30	53	25	23	
Mixtes	0	1	1	0	1	2	0	0	

Cependant, la plupart de ces exemples sont donnés dans le registre algébrique, à l'exception de huit manuels dans lesquels il apparaît quelques exemples mixtes. Nous pouvons constater aussi la prédominance du registre algébrique dans la présentation du concept de série dans les manuels. Enfin, il est important de mentionner que dans les dix-sept manuels, il n'existe aucun exemple purement visuel. Ainsi, dans ces exemples, l'objet mathématique n'est représenté généralement que dans un seul registre sémiotique (algébrique), ce qui ne faciliterait pas la compréhension complète du concept de série chez les étudiants.

En ce qui a trait aux applications du concept, le tableau 27 montre que le nombre et le ratio (nombre d'applications par page) de ces dernières est négligeable.

- Tableau 27: Grille récapitulative-applications du concept : Les applications dans les 17 manuels

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Applications	1	0	6	7	2	8	2	2	5
(ratio)	0,05	0	0,16	0,12	0,05	0,20	0,03	0,04	0,12
Mathématiques	1	0	1	4	0	2	0	2	3
Autres applications	0	0	5	3	2	6	1	0	2
Réalistes	0	0	2	2	1	5	0	0	0
Artificielles	0	0	3	1	1	1	2	0	2
	J	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	
Applications	0	7	9	1	4	3	5	1	
(ratio)	0	0,52	0,17	0,04	0,08	0,06	0,08	0,02	
Mathématiques	0	0	1	1	2	1	0	1	
Autres applications	0	7	8	0	2	2	5	0	
Réalistes	0	6	5	0	0	1	3	0	
Artificielles	0	1	3	0	2	1	2	0	

En effet, huit manuels ne contiennent pas plus de deux applications et leur ratio ne dépasse pas 0,05 application par page. De plus, dans deux manuels (B et J), on ne trouve aucune application du concept de série. Le manuel L par contre contient le plus grand nombre d'applications (9 applications) dont 8 sont classées comme extramathématiques (classées « autres applications » dans le tableau 27). Nous soulignons que toutes les applications sont prises en compte, et ce, même si celles-ci concernent le même sujet. Par exemple, si dans un manuel, il existe deux applications en lien avec l'économie, celles-ci sont comptées deux fois. Dans plusieurs manuels, nous retrouvons en majorité des applications classées comme extramathématiques, ce qui montre qu'il n'y a pas un assez grand nombre d'applications mathématiques du concept de série dans la plupart des manuels. D’ailleurs, ces applications sont inexistantes dans six manuels, et ce, bien que les sommes infinies soient nécessaires à introduire d’autres concepts clés en mathématiques. Ainsi, on constate un manque de création de liens entre différents concepts mathématiques. En ce qui concerne les catégories d’applications classées comme extramathématiques, nous constatons que parmi ces dernières, il existe celles qui ne s’adaptent pas à des événements de la vie quotidienne (applications artificielles). D’ailleurs, dans les manuels G, I et N toutes les applications sont artificielles. Les résultats de recherche en lien avec les différentes applications du concept de série révèlent que les manuels analysés ne tiennent pas compte des recommandations de Duval illustrées dans la section 2.4. En effet, selon Duval (2000), l'apprentissage des mathématiques ne doit pas se limiter à une pratique de concepts/objets et à l’application des algorithmes, mais il doit aussi contrôler des processus de pensée qui permettent aux apprenants d’appréhender des concepts et leurs applications. Ainsi, nous pouvons faire un lien entre le changement de registres qui pourrait inciter les étudiants à reconnaître le concept de série dans différents contextes et donc véhiculer leurs connaissances acquises afin de modéliser des situations dans des applications hors du domaine mathématique qui fait défaut dans la plupart des manuels analysés.

4.3. Analyse cluster.

Nous avons introduit toutes les variables en lien avec les éléments observables ressortis de l’analyse des dix-sept manuels dans le logiciel SPSS afin d’effectuer une analyse cluster qui pourrait nous permettre de classer ces manuels en groupes et ainsi pouvoir vérifier si le contenu de ces manuels évolue selon un ordre chronologique croissant. Pour ce faire, nous avons utilisé, en premier lieu, un fichier Excel (tableau 28) dans lequel nous avons introduit tous les éléments observables (représentations visuelles graphiques, dessins, exemples visuels, exemples mixtes, etc.) avant d’introduire toutes ces données sous forme de variables dans le logiciel SPSS. Une version préliminaire de l’analyse cluster a été présentée dans Seffah & González-Martín (2011c).

- Tableau 28 : Fichier Excel contenant les données numériques de la grille d'analyse récapitulative

	A	B	C	D	E	F
Année	1992	1993	1993	1994	1995	1995
Ratio	4,95	4,27	10,02	16,39	10,9	3,56
R. Graphiques (pb)	0	0	0	0	0	0
Décoratives	0	0	0	0	0	0
Représentatives	0	0	0	0	0	0
Organisationnelles	0	0	0	0	0	0
Informationnelles	0	0	0	0	0	0
R. Graphiques (hpb)	0	1	2	2	1	2
Hors concept	0	0	0	0	0	0
Conceptuelles anodines	0	0	0	0	0	0
Conceptuelles	0	1	2	2	1	2
Dessins (pb)	0	0	1	0	0	4
Décoratives	0	0	0	0	0	0
Représentatives	0	0	0	0	0	0
Organisationnelles	0	0	0	0	0	0
Informationnelles	0	0	1	0	0	4
Dessins (hpb)	2	2	1	1	2	2
Hors concept	0	0	0	0	0	0
Conceptuelles anodines	2	2	0	1	2	2
Conceptuelles	0	0	1	0	0	0
Exemples	11	3	51	34	36	27
Exemples visuels	0	0	0	0	0	0
Exemples mixtes	0	0	1	1	2	0
Exemples algébriques	11	3	50	33	34	27
Activités	49	154	272	132	92	228
Activités avec contextes	0	0	6	3	1	7
Activités sans contextes	49	154	266	129	91	221
EC	30	129	139	117	60	152
SM	3	10	32	4	16	20
EC & SM	0	3	48	3	0	22
ART	16	1	46	4	13	8
AUC	0	11	1	1	2	19
Applications	1	0	6	7	2	8
Mathématiques	1	0	1	4	0	2
Extramathématiques	0	0	5	3	2	6
Réalistes	0	0	2	2	1	5
Artificielles	0	0	3	1	1	1

	G	H	I	J	K	L
Année	1996	1997	1997	2000	2001	2002
Ratio	15,24	15,09	10,51	9,07	3,7	18,14
R. Graphiques (pb)	0	0	0	0	1	0
Décoratives	0	0	0	0	0	0
Représentatives	0	0	0	0	0	0
Organisationnelles	0	0	0	0	0	0
Informationnelles	0	0	0	0	1	0
R. Graphiques (hpb)	2	3	2	1	4	7
Hors concept	0	0	0	0	0	0
Conceptuelles anodines	0	1	0	0	0	5
Conceptuelles	2	2	2	1	4	2
Dessins (pb)	4	0	1	0	0	6
Décoratives	0	0	0	0	0	0
Représentatives	0	0	0	0	0	2
Organisationnelles	0	0	0	0	0	0
Informationnelles	4	0	1	0	0	1
Dessins (hpb)	1	8	2	2	1	4
Hors concept	0	7	0	1	0	1
Conceptuelles anodines	0	1	1	1	1	0
Conceptuelles	1	0	1	0	0	3
Exemples	39	41	55	31	4	35
Exemples visuels	0	0	0	0	0	0
Exemples mixtes	0	0	2	0	1	1
Exemples algébriques	39	41	53	31	3	34
Activités	319	75	166	104	45	293
Activités avec contextes	2	0	2	0	11	11
Activités sans contextes	317	75	164	104	34	282
EC	165	47	82	88	10	206
SM	57	16	18	10	16	27
EC & SM	18	8	27	1	3	20
ART	42	4	36	5	4	9
AUC	35	0	1	0	1	20
Applications	1	2	5	0	7	9
Mathématiques	0	2	3	0	0	1
Extramathématiques	1	0	2	0	7	8
Réalistes	0	0	0	0	6	5
Artificielles	1	0	2	0	1	3

	M	N	O	P	Q
Année	2002	2002	2004	2006	2008
Ratio	7,37	12,66	12,76	14,7	11,74
R. Graphiques (pb)	0	0	0	4	0
Décoratives	0	0	0	0	0
Représentatives	0	0	0	0	0
Organisationnelles	0	0	0	0	0
Informationnelles	0	0	0	4	0
R. Graphiques (hpb)	2	5	2	19	2
Hors concept	0	0	0	0	0
Conceptuelles anodines	0	0	0	14	0
Conceptuelles	2	5	2	5	2
Dessins (pb)	0	7	2	27	0
Décoratives	0	0	1	1	0
Représentatives	0	0	0	2	0
Organisationnelles	0	5	0	24	0
Informationnelles	0	2	1	0	0
Dessins (hpb)	3	10	11	7	11
Hors concept	0	4	8	1	8
Conceptuelles anodines	3	3	2	2	0
Conceptuelles	0	3	1	4	3
Exemples	10	31	55	25	22
Exemples visuels	0	0	0	0	0
Exemples mixtes	0	1	2	0	0
Exemples algébriques	10	30	53	25	22
Activités	0	217	167	173	51
Activités avec contextes	0	2	2	5	0
Activités sans contextes	0	215	165	168	51
EC	0	145	78	112	34
SM	0	27	30	11	10
EC & SM	0	10	24	4	0
ART	0	3	31	27	0
AUC	0	30	2	14	7
Applications	1	4	3	5	1
Mathématiques	1	2	1	0	1
Extramathématiques	0	2	2	5	0
Réalistes	0	0	1	3	0
Artificielles	0	2	1	2	0

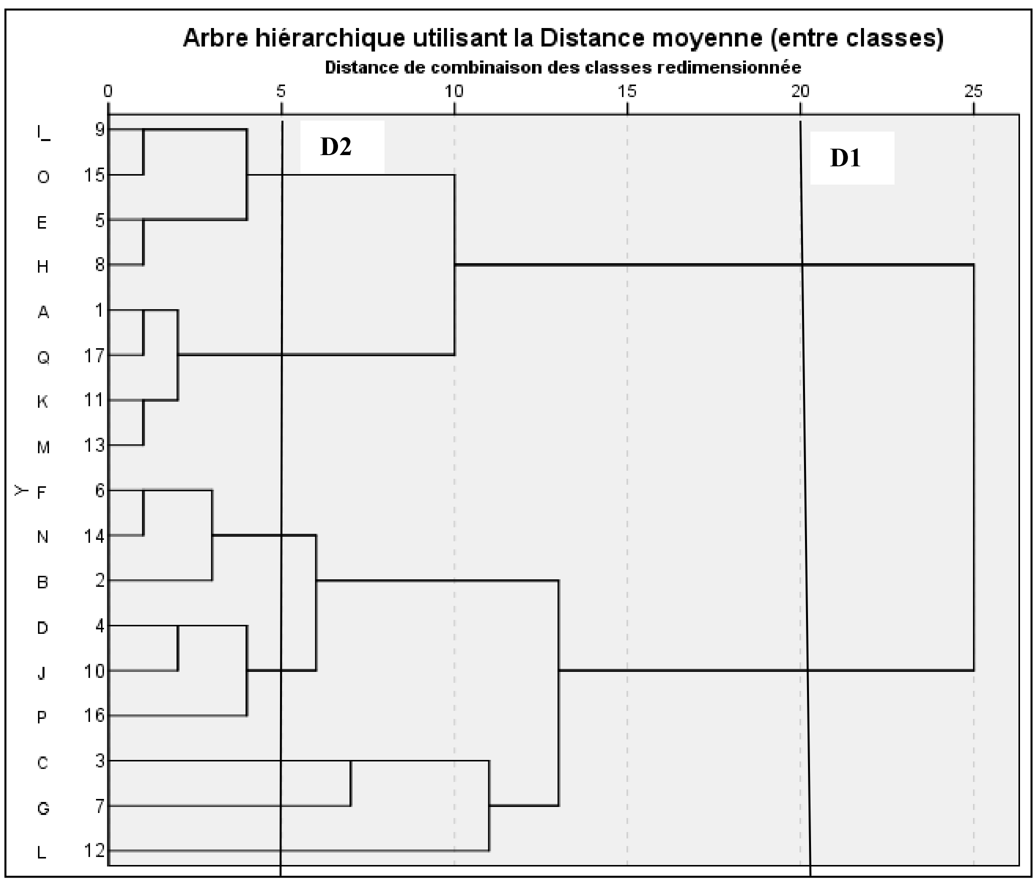
4.3.1 La classification hiérarchique.

Tel que nous l'avons précisé dans le chapitre 3 consacré à la méthodologie, il existe deux types d'analyse cluster : le *clustering* en partitionnement et le *clustering* hiérarchique (classification hiérarchique). Dans le cadre de notre recherche, nous avons opté pour la classification hiérarchique, car elle s'applique parfaitement à un petit échantillon (17 manuels) et permet de visualiser les regroupements progressifs des données (manuels). De plus, nous pouvons choisir le type de dissimilarité qui s'adapte à nos objectifs. Le résultat d'une classification hiérarchique peut prendre plusieurs formes, mais nous avons choisi l'arbre hiérarchique appelé aussi dendrogramme, car elle est la plus facilement interprétable. Après avoir introduit toutes les données dans Excel, le logiciel SPSS calcule la dissimilarité entre les objets (17 manuels) avant de regrouper deux objets ayant des similarités pour former une classe, et ce, en se basant sur le nombre et le type de représentations visuelles de ces manuels. Autrement dit, le logiciel regroupe les objets qui se ressemblent et sépare les objets qui ne se ressemblent pas. Cette procédure se fait continuellement jusqu'à ce que tous les objets soient regroupés. Ces regroupements successifs produisent l'arbre hiérarchique. Nous pouvons tronquer l'arbre hiérarchique selon nos besoins afin de distinguer les différentes classes ainsi formées. Cette façon de faire nous permettra de retrouver des similarités entre les manuels faisant partie d'une même classe. Ainsi, nous pourrons vérifier si les manuels les plus récents sont regroupés dans une même classe. Cette information nous permettra de confirmer si le contenu des manuels en lien avec le concept de série évolue selon un ordre chronologique. Il serait intéressant aussi de vérifier s'il existe des groupes de manuels qui ont une particularité qui dépend du contenu de ces manuels.

4.3.2 Développement de l'arbre hiérarchique.

Avant d'interpréter les résultats illustrés dans l'arbre hiérarchique, nous souhaitons donner une brève description des constituants ainsi que le fonctionnement de ce dernier. L'axe vertical du graphique (Figure 67) est porteur d'informations : la distance entre deux éléments (manuels) est égale au niveau auquel ces deux éléments fusionnent: par exemple, la distance qui sépare le manuel 9 (I) et le manuel 15 (O) est inférieure à 5 (distance moyenne entre les classes : plus cette distance est petite, plus il y a de ressemblances entre les objets en question). Ceci signifie qu'il y a une similarité entre ces deux manuels. Par conséquent, dans l'axe vertical, les objets y sont alignés dans un ordre dépendant du programme de classification. Ce programme se fait automatiquement par le logiciel SPSS. Nous allons procéder aux choix du nombre de classes par coupure d'arbre (couper l'arbre en traçant une droite verticale telle qu'illustré dans la Figure 67).

- Figure 67 : Arbre hiérarchique-analyse cluster des dix-sept manuels analysés.



Ainsi, dans cette figure, la droite D1 coupe l’arbre en deux classes composées des éléments suivants :

{(9, 15, 5, 8, 1, 17, 11, 13) ; (6, 14, 2, 4, 10, 16, 3, 7, 12)}

Par contre, la droite D2 coupe l’arbre en cinq classes qui sont les suivantes :

{(9, 15, 5, 8) ; (1, 17, 11, 13) ; (6, 14, 2, 4, 10, 16) ; (3, 7, 12)}

Ainsi, l’arbre hiérarchique (Figure 67) qui représente le diagramme illustré par le logiciel montre qu’il n’y a aucune règle basée sur un ordre chronologique croissant à l’origine des groupes formés dans ce diagramme, parce qu’on constate par exemple que le plus ancien manuel (le manuel A) qui date de 1992 se retrouve dans le deuxième groupe dans lequel se trouve le manuel le plus récent (le manuel Q) qui date de 2008. Par ailleurs, nous retrouvons dans le troisième groupe le manuel B qui date de 1993 avec le manuel N qui date de 2002. C’est la raison pour laquelle nous pensons qu’il n’y a pas d’évolution claire qui respecte un ordre chronologique dans le contenu des manuels analysés si on se base sur les données utilisées dans cette analyse cluster basée sur le nombre et le type des représentations visuelles utilisées par les 17 manuels analysés.

5. Conclusions.

Le but de notre recherche était d'explorer la manière dont le concept de série est présenté dans les manuels utilisés au niveau collégial. Pour ce faire, nous avons opté pour l'analyse du contenu des manuels en lien avec ce concept, et ce, en prêtant une attention particulière aux différents registres de représentations utilisés et à l'intérêt accordé par ces outils didactiques aux représentations visuelles. Rappelons la question de notre recherche.

Quelle est la place de la représentation visuelle en lien avec le concept de série dans les manuels utilisés au postsecondaire et quelles sont les représentations (algébriques et graphiques) qui y sont privilégiées? Est-ce qu'il y a une évolution dans le contenu des manuels en ce qui concerne l'utilisation diversifiée de différentes représentations?

En somme, les résultats de notre analyse semblent appuyer les conjectures énoncées dans la problématique en lien avec les concepts avancés de manière générale évoquées dans notre recension d'écrits. En effet, l'approche adoptée par les manuels pour présenter le concept de somme infinie semble être traditionnelle avec peu d'applications et de représentations visuelles. Dans tous les manuels analysés, il n'existe aucun exemple purement visuel. Ainsi, le registre privilégié demeure toujours l'algébrique et la coordination entre ce dernier et le registre graphique est inexistante dans les 17 manuels analysés, et ce, bien que cette dernière soit indispensable à l'appréhension d'un concept mathématique (Duval, 1995). Hormis le fait que ces manuels utilisent rarement le registre graphique (ou d'autres représentations visuelles), dans tout l'échantillon que nous avons analysé, l'étudiant n'est pas explicitement appelé à interpréter ou à produire une représentation visuelle. Ainsi, nous pensons que les représentations visuelles qui apparaissent dans les 17 manuels sont utilisées uniquement à des fins de communication, ce qui ne permettrait pas à l'étudiant de mieux appréhender le concept mathématique de série numérique. Par ailleurs, les résultats de notre analyse montrent que les applications mathématiques sont très rares, et ce, bien que les séries soient fondamentales dans l'introduction d'autres concepts mathématiques et qu'elles soient utiles pour la modélisation de plusieurs phénomènes. Somme toute, nous pensons que l'enseignement actuel semble adopter une approche qui n'aiderait pas certains étudiants à avoir une image visuelle du concept de somme infinie et à construire un sens approprié de ce dernier. Néanmoins, il va falloir être prudent devant nos résultats de recherche, car bien que notre échantillon semble être significatif (17 manuels), il demeure que ces manuels sont utilisés uniquement dans la province québécoise et plus exactement dans la ville de Montréal. Il serait donc imprudent de généraliser ces résultats de recherche à plus grande échelle.

À long terme, nos résultats de recherche auraient contribué à mieux comprendre l'enseignement du concept de série ainsi que les mécanismes sous-jacents à l'apprentissage de ce concept chez les étudiants au niveau postsecondaire, ce qui pourrait mettre en lumière les ajustements nécessaires afin de choisir les approches les plus efficaces. Cependant, il serait important d'avoir un regard critique sur les limites de notre recherche. Nous pensons alors que notre travail de recherche pourrait être complété par une étude qui ait pour objectif d'observer la pratique enseignante et l'apprentissage des étudiants. À cet effet, il serait intéressant d'effectuer des interviews avec des professeurs sur leur approche en lien avec l'enseignement du concept de série (González-Martín, 2010; 2015), ainsi que d'organiser des séances d'observation de leurs pratiques d'enseignement, et de soumettre un questionnaire aux étudiants en lien avec ce concept en accordant un intérêt à l'utilisation de différents registres de représentations (González-Martín, 2013a, 2013b, 2014).

En ce qui a trait au cadre conceptuel, nous pensons que ce dernier était très pertinent étant donné notre intérêt par l'utilisation de représentations visuelles. En effet, nous avons souligné dans la problématique l'importance du concept de série et les difficultés que certains étudiants rencontrent les empêchant ainsi de bien appréhender ce concept, et ce, en nous appuyant sur quelques résultats et recommandations de la recherche. Duval met l'accent sur l'importance de diversifier les registres de représentation et l'utilisation des représentations visuelles nécessaires à l'appréhension complète d'un concept mathématique. Nos résultats de recherche révèlent que les recommandations faites par la recherche en lien avec les registres de représentation n'ont pas été prises en compte par les manuels analysés. Ainsi, nous pouvons faire un lien avec les difficultés d'apprentissage soulevées dans notre problématique qui pourraient être en partie expliquées par le fait que les manuels utilisés par les étudiants ne tiennent pas compte des suggestions soulignées dans la théorie sémiotique de Duval. Toutefois, il faut demeurer prudent, car il doit y avoir d'autres raisons que nous n'avons pas encore explorées qui seraient à l'origine des difficultés rencontrées par les étudiants en lien avec l'appréhension du concept de série, telles que celles provenant des aspects épistémologiques.

Dans notre question de recherche, nous nous intéressons aussi à l'évolution du contenu des manuels analysés. Rappelons la question de recherche en lien avec l'évolution du contenu des manuels analysés :

Est-ce qu'il y a une évolution dans le contenu des manuels en ce qui concerne l'utilisation diversifiée de différentes représentations?

Afin de trouver des éléments de réponse à cette question, nous avons opté pour une analyse cluster des 17 manuels. Cette dernière nous a révélé qu'il n'y a pas d'évolution dans le contenu des manuels. En effet, l'analyse cluster nous a permis de constater que dans une même classe faisant partie des composantes d'un dendrogramme (représentation graphique d'une hiérarchie) on retrouve des manuels qui ont une différence de plus de dix années. En ce qui a trait à l'utilisation des représentations visuelles, cette analyse a finalement consolidé le fait qu'il n'y a pas une évolution dans le contenu des 17 manuels que nous avons pu constater dans les deux grilles récapitulatives (représentations visuelles dans la partie théorique et dans la partie pratique : tableaux 24 et 25). Toutefois, cette analyse demeure limitée étant donné que nous nous sommes basé uniquement sur les éléments observables utilisés dans notre grille d'analyse récapitulative. Il serait alors intéressant de réaliser un autre travail de recherche dans lequel on effectuerait une analyse cluster avec une autre variable composée de plusieurs catégories qu'on pourrait ajouter aux données utilisées dans notre recherche afin d'élargir les critères qui pourraient donner une particularité à chaque manuel. Cela pourrait éventuellement nous permettre de construire des groupes de manuels ayant des particularités distinctes.

Somme toute, en nous fiant à tout le contenu de ce mémoire, nous pensons avoir trouvé des éléments de réponse pouvant nous permettre de mieux comprendre la manière dont le concept de série est présenté dans les manuels du niveau collégial. Par ailleurs, ces éléments peuvent servir d'éclairage pour mieux comprendre certaines des difficultés qu'éprouvent les étudiants quand ils apprennent les séries numériques, ainsi que pour organiser des séances de formation continue auprès des enseignants du niveau collégial pour réfléchir sur leurs pratiques et le contenu des manuels.

Bibliographie

Alcock, L. & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, *57*(1), 77-100.

Alcock, L. & Simpson, A. (2005). Convergence of sequences and series 2: interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(1), 1-32.

Artigue, M (1999). The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary Research in Education. *Notices of the AMS*, *46*(3), 1377-1385.

Bagni, G.T. (2000). Difficulties with series in history and in the classroom. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (pp.82-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bagni, G.T. (2005). Infinite series from history to mathematics education. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*. Retrieved April 2007 from http ://www.ex.ac.uk/cimt/bagni.pdf

Boschet, F. (1983). Les suites numériques comme objet d'enseignement (premier cycle de l'enseignement supérieur français). *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 141-163.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Conseil Canadien sur l'Apprentissage (2005). *Carnet du savoir. Spécial : les étudiants possèdent-ils les compétences de base en écriture et en* *mathématiques dont ils ont besoin au moment de leur arrivée à l'université?* Octobre 2005.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, *1*, 235-253.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, *5*, 37-65.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM, 17*, 121-138.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Neuchatel : Peter Lang.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 55-69). Hiroshima (Japan): PME.

Duval, R. (2004). A Crucial Issue in Mathematics Education: The ability to change representation register. In M. Niss (Eds.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematics Education* (pp. 1-17). ICME.

Elia, I. & Philippou, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 351-358). Bergen, Norway: PME.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunnigham (Eds.), *Visualization in Teaching Mathematics* (pp. 25-37). Washington: Math. Assoc. of America.

Fay, T. & Webster, P. (1985). Infinite series and improper integrals: a dual approach. *Mathematics and computer education*, *19*(3), 185-191.

González-Martín, A. S. (2006). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje.* Université de La Laguna, Espagne, (ISBN: 84-7756-679-8).

González-Martín, A.S. (2010). The concept of series: teachers' conceptions and teaching practices. In M.M.F. Pinto & T.F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 33-40). Belo Horizonte (Brazil): PME.

González-Martín, A.S. (2013a). Students' personal relationship with series of real numbers as a consequence of teaching practices. In B. Ubuz, Ç. Haser & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME8) (pp. 2326-2335). Antalya (Turkey).

González-Martín, A.S. (2013b). The consequence of teaching practices on students' personal relationship with the convergence of series of real numbers. In A.M. Linder & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 361-368). Kiel (Germany): PME.

González-Martín, A.S. (2014). Pre-university students' personal relationship with the visualisation of series of real numbers. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 201-208). Vancouver (Canada): PME.

González-Martín, A. S. (2015). The use of textbooks by pre-university teachers: An example with infinite series of real numbers. In K. Krainer & N. Vondrovà (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research* *in Mathematics Education* (CERME9) (pp. 2124-2130). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague.

González-Martín A.S., Giraldo, V. & Santos, F. (2009). An analysis of the introduction of the notion of continuity in undergraduate textbooks in Brazil. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 81-88). Thessaloniki, Greece: PME.

González-Martín, A.S., Giraldo, V. & Souto, A.M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 230-248.

González-Martín, A.S., Nardi, E. & Biza, I. (2011). Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practices: the case of infinite series. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(5), 565-589.

González-Martín, A.S., Seffah, R. & Nardi, E. (2009). The concept of series in textbooks: a meaningful introduction? In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 105-112). Thessaloniki, Greece: PME.

Hitt, F. (2003). Le Caractère Fonctionnel des Représentations. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 8*, 255-271.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Kidron, I. (2002). Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. In A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for*

Psychology of Mathematics Education (vol. 3, pp. 209-216). Norwich (UK): PME.

Lamoureux, A. (2006). *Recherche et méthodologie en sciences humaines* (2e éd.). Montréal (Québec): Beauchemin, Chenelière Éducation.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 405-427.

Mamona, J. (1990). Sequences and series – Sequences and Functions: Students' confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 21*(2), 333-337.

McDonald, M.A., Mathews, D.M. & Strobel, K.H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. In E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (Vol. 8, pp. 77-102). Providence, RI: American Mathematical Society.

Mesa, V. & Griffiths, B. (2012). Textbook mediation of teaching: an example from tertiary mathematics instructors. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 85-107.

Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES) (2016). *Sciences informatiques et mathématiques (200.C0). Programme d'études préuniversitaires. Enseignement collégial*. Gouvernement du Québec. Repéré à http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/contenu/documents_soutien/Ens_Sup/Collegial/Form_collegiale/Programmes_etudes_preuniversitaires/200.C0_Sciences_informatiques_mathematiques_VF.pdf.

Nardi, E. & Iannone, P. (2001). On Convergence of a series: The unbearable inconclusiveness of the limit comparison test. In M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *Proceedings of the 25th Concerence of the International*

Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 3, pp. 399-406). Utretch (Netherlands): PME.

Robert, A. (1982). L'acquisition du concept de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en didactique des mathématiques, 3*(3), 307-341.

Seffah, R., & González-Martín, A.S. (2011a). Applications et représentations du concept de somme infinie dans les manuels scolaires du collégial. In F. Hitt (Ed.), *Colloque en didactique des mathématiques – Formation à la recherche en didactique des maths*. CD-format (9 pages). Montréal : UQÀM.

Seffah, R & González-Martín, A. S. (2011b). The concept of series in undergraduate textbooks: Tasks and representations. In B. Ubuz (Eds.), *Proceedings of the 35rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 137-144). Ankara, Turkey: PME.

Seffah, R., & González-Martín, A. S. (2011c). The concept of series in textbooks and in teaching practices [Special Issue: Proceedings of the CIEAEM63 – Facilitating access and participation: Mathematical practices inside and outside the classroom]. *Quaderni di Ricerca in Didattica / Mathematics (QRDM)*, *22*(1), 416-419.

Sträber, R. (2009). Instruments for learning and teaching mathematics. An attempt to theorise about the role of textbooks, computers and other artefacts to teach and learn mathematics. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 67-81). Thessaloniki, Greece: PME.

Tall, D. (1991). Intuition and Rigour: The role of Visualization in Calculus. In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and*

Learning of Mathematics (pp. 105-119). MAA Notes nº 19. Mathematical Association of America: Washington DC.

Liste des manuels analysés

A Robert, S. (1992). *Calcul différentiel et intégral.* Cégep de Saint-Jean-sur-Richelieu.

B Ayres, F. & Mendelson, E. (1993). *Calcul différentiel et intégral (2^e édition)*. Québec : Chenelière/ McGraw-Hill.

C Charron, G. & Parent, P. (1993). *Calcul différentiel et intégral II*. Québec : Études Vivantes.

D Beaudoin, G. & Laforest, J. (1994). *Calcul 2*. Montréal : Les éditions BL.

E Wild, S. (1995). *Calcul différentiel et intégral II*. Québec : Études vivantes.

F Swokowski, E. W. (1995). *Analyse*. Bruxelles : De Boeck.

G Anton, H. (1996). *Calcul intégral*. Québec : Reynald Goulet INC.

H Massé, B. (1997). *Calcul intégral*. Saint-Laurent : Éditions du renouveau pédagogique.

I Charron, G. & Parent, P (1997). *Calcul intégral*. Québec : Études Vivantes.

J Ouellet, G. (2000). *Calcul 2 : introduction au calcul intégral*. Québec : Le Griffon d'argile.

K Hughes-Hallet, D., Gleason, A. M., Beaudoin, M., Charlebois, P., Labrie, M. & Fraser, B. (2001). *Calcul integral*. Montréal-Toronto: Chenelière/ McGraw-Hill.

L Bradley, G. L., Smith, K. J., Franco, A. & Marcheterre, B. (2002). *Calcul intégral*. Québec : ERPI.

M Dominguez, S. & Rouquès, J. P. (2002). *Leçon particulière sur le cours de math : analyse* $1^{ère} anné$. Paris : Ellipses.

N Thomas, G. B., Finney, R. L., Weir, M. D., Giordano, F. R. (2002). *Calcul intégral (10^e édition)*. Québec : Beauchemin.

O Charron, G. & Parent, P. (2004). *Calcul intégral (3^e édition)*. Québec : Beauchemin.

P Ross, A. (2006). *Calcul intégral pour les sciences de la nature*. Québec : Le Griffon D'argile.

Q Amyotte, L. (2008). *Calcul intégral*. Québec : ERPI.