Table des matières

Remerciements

Arrivant à faire une thèse on dit "el hamde Li Allah" et on remarque qu'on a négligé une grande proportion de nos relations avec ceux qui nous entourent (grande et petite famille, amis, collègues), malgré que certains d'entre eux nous comprennent bien. Je profite de cette occasion pour les remercier ; tout particulièrement aux parents je leur dit : merci infiniment, seul Allah estime vos sacrifices, et que dire d'un couple qui a élevé neuf enfants et s'est occupé de leurs études jusqu'à ce que deux d'entre eux ont eu des diplômes professionnels, et les sept autres sont tous diplômés de l' U.S.T.H.B.

Durant ces dernières années, particulièrement cette année-ci, j'ai fait subir à ma femme beaucoup de désagréments en me consacrant tout le temps à madame la Thèse, je m'excuse auprès d'elle et auprès de mes trois enfants d'avoir négliger quelque responsabilités, et je les remercie pour toute leur patience.

Je remercie le Professeur Bouzar Chikh de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

Ma gratitude va également aux examinateurs les Professeurs Mihoubi Miloud, SiKaddour Hamza et Smail Abderrahmane. Je suis honoré par la présence dans mon jury de notre invité le professeur Meftah Mokhtar.

Je remercie vivement les Professeurs Bouyakoub Abdelkader et Belbachir Hacène pour leur ancadrement et leurs orientations pour la realisation de ma thèse

Je souhaite remercier mon encadreur de magistère, le Professeur Benzaghou Benali qui m'a fait introduire dans le domaine du "q-analogue"

De nombreuses personnes sont impliquées dans cette thèse dont je cite Belkhir Amine, Bousbaa Imad, Djenan Salah, Mameri Said et paticulièrement TCHIKOU AHMED.

«Pour être versé dans une science, en connaître tous les aspects et s'en rendre maître, il faut en prendre le contrôle, en comprendre les fondements, en analyser les problèmes et parvenir à passer des principes aux applications. Faute d'un tel cheminement, on ne saurait prétendre à la maîtrise»

Ibn Khaldûn (1332-1406), El Mouqaddima

«La Muqaddima demeure sans aucun doute la plus grande oeuvre de son genre qui ait jamais été créée encore, par qui que ce soit, en tous temps et en tous lieu»

A. Toynbee (1889-1975), A Study of History

«L'intuition ne peut nous donner la rigueur, ni même la certitude,... Pour faire l'arithmétique, comme pour faire la géométrie, ou pour faire une science quelconque, il faut autre chose que la logique pure. Cette autre chose, nous n'avons pour la désigner d'autre mot que celui d'intuition»

H. Poincaré (1854-1912), La Valeur de la Science

Introduction

Le q-analogue est une extension utilisée dans plusieurs domaines de la mathématique, particulièrement en combinatoire. Plus précisement la où le triangle de Pascal joue un rôle, le q-analogue des coefficients binomiaux est bien défini par ce qu'on appelle les nombres de Gauss $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ (voir par exemple [2], [47], [39], [38], [27], [34]).

En se référant à l'expression des nombres de Fibonacci et des nombres de Lucas en fonction des coefficients binomiaux, plusieurs auteurs définissent le q-analogue de la suite de Fibonacci et de la suite de Lucas par des formules explicites écrites par les nombres de Gauss. D'après ce que nous savons (d'après Cigler [26]), la première définition est donnée par Schur [42] et [40] et généralisée par la définition proposée par Carlitz [19] et [20]. De nombreux auteurs utilisent la définition de Carlitz [23], [24], [33], [32]. Cigler [22], [21] introduit une nouvelle définition qui est utilisée aussi dans [32] et [33]. Dans [26], Cigler suggère une définition qui unifie sa première approche [21] et celle de Carlitz.

La définition du q-analogue de la suite de Fibonacci et de la suite de Lucas proposée par Cigler [21] a été choisie par Prodinger [41] qui a généralisé partiellement des identités sur les polynômes de Fibonacci et les polynômes de Lucas obtenus par Belbachir et Bencherif [4]. Il a donné un q-analogue à deux identités sur les six identités propsées dans [4]. Une première tentative de compléter le travail de Prodinger fait l'objet du chapitre cinquième (voir [6]). On a constaté que malgré les propriétés importantes obtenues par les approches de Cigler et de Carlitz, le q-analogue de la suite de Fibonacci satisfait deux récurrences d'ordre deux dont aucune n'est satisfaite par le q-analogue de la suite de Lucas. Ceci nous a amené à construire un autre q-analogue de la suite de Lucas à partir des deux récurrences citées pour la suite de Fibonacci [26].

Le travail présenté dans cette thèse complète d'une part les travaux de Carlitz et les travaux de Cigler par l'usage de leurs définitions pour construire un nouveau q-analogue de la suite de Lucas, et pour établir un q-analogue de certaines propriétés liées à la suite de Fibonacci et à la suite de Lucas et étend d'autre part les travaux de Belbachir par la donné du q-analogue des différentes généralisations de la suite de Fibonacci et de la suite de Lucas présentées dans sa thèse de Doctorat d'Etat [3].

Au chapitre premier, on présente des généralités sur la suite de Fibonacci et la suite de Lucas, en se limitant à la présentation de certaines identités liées aux polynômes de Fibonacci et aux polynômes de Lucas, telles que les relations duales, les différentes sommes partielles, le prolongement aux indices négatifs, et les développement établis par Belbachir et Bencherif [4]. On complète ce chapitre avec une introduction à la suite de Fibonacci généralisée et ces deux suites "compagnons", suivie par un préliminaire sur les coefficients bi^{s}nomiaux et sur la suite multibonacci.

Le chapitre deuxième est consacré aux différentes définitions du q-analogue des polynômes de Fibonacci et des polynômes de Lucas. On commence par la définition proposée par Carlitz qui permet d'évaluer le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q^{n-1}z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q^{n-2}z & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 1 \end{pmatrix}.$$

On donne ensuite la définition proposée par Cigler en remarquant qu'elle peut être obtenue par des transformations appliquées à la suite de Fibonacci. On conclut le chapitre par une extension unificatrice proposée aussi par Cigler.

Le chapitre troisième introduit la définition du q-analogue de la suite de Lucas de première espèce et la définition du q-analogue de la suite de Lucas de deuxième espèce de façon à ce que chacune de ces deux suites satisfasse une des deux récurrences relatives à la suite q-Fibonacci. Cela permet de reconsidérer un q-analogue des identités exposées dans le premier chapitre.

Le chapitre quatrième traite de récurrences satisfaites par le q-analogue de la suite de Fibonacci, on montre que le translaté d'une suite qui satisfait de telles récurrences s'exprime en termes de q-analogue de la suite de Fibonacci. On obtient alors un q-analogue des identités

$$\begin{aligned} F_{2n+1} &= F_n^2 + F_{n+1}^2, \\ F_{2n} &= F_n F_{n-1} + F_{n+1} F_n. \end{aligned}$$

Le chapitre cinquième reconsidère la question de Prodinger [41]. On utilise le q-analogue de la suite de Fibonacci proposé dans la définition unificatrice et le q-analogue de la suite de Lucas introduite dans le troisième chapitre, pour établir un q-analogue des développements obtenus par Belbachir et Bencherif [4]. On propose ensuite une extension en se basant sur le q-analogue de la suite de Fibonacci et le q-analogue de la suite de Lucas proposé dans la définition unificatrice. Enfin on établit des développements duaux entre les différents q-analogues de la suite de Lucas.

Le chapitre sixième est consacré aux suite de polynômes

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,m)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{m\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q z^k, \text{ avec } \mathbf{F}_0^{(r)}(z,m)=0,$$

issues de la suite r-Fibonacci. On donne, pour m quelconque, les relations de récurrences, la forme explicite avec la récurrence pour chacune des deux suites compagnons qu'on lui associe. Le cas particulier $m=1$ est étudié séparément dans [5], en évaluant le produit matriciel $C(q^{n-1}z)\cdots C(qz)\,C(z)$ pour une matrice carré d'ordre $r+1$:

$$C(z)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ z & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On généralise ensuite des propriétés liées à la définition de Carlitz. Le cas particulier $m=0$ est aussi étudié pour reconsidérer des propriétés liées à la définition de Cigler.

Au chapitre septième, on exploite le q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux [9] pour généraliser l'identité de Chu-Vandermonde, et définir un q-analogue des suites "multibonacci" et de leurs suite compagnons.

Le dernier chapitre traite le cas p,q-analogue. Une introduction sur les coefficients p,q-binomiaux suivie par une définition des coefficients p,q-bi^{s}nomiaux sont utilisées respectivement pour une approche de la suite p,q-Fibonacci et une approche de la suite p,q-"multibonacci".

Nous concluons ce manuscrit par un résumé récaputilatif du travail achevé, et nous proposons quelque perspectives de prolongement.

Liste des articles

H. Belbachir and A. Benmezai. An altrnative approach to Cigler's q-Lucas polynomials. *Appl. Math. Comput.* **226**, 691-698 (2014).

H. Belbachir and A. Benmezai. A q-analogue for bi^{s}nomial coefficients and generalized Fibonacci sequences. *C. R. Math. Acad. Sci Paris* **352**(3), 167-171 (2014).

H. Belbachir and A. Benmezai. Expansion of Fibonacci and Lucas polynomials : An answer to Prodinger question. *J. Integer Seq.* **12**(3), Article 12.7.6, 15 (2012).

H. Belbachir, A. Benmezai and A. Bouyakoub. The q-analogue of a property of second order linear recurrences. **Prepublication** USTHB, n°272 (2013).

H. Belbachir, A. Benmezai and A. Bouyakoub. Generalized of Chu-Vandermonde Identity. **Submited**.

H. Belbachir, A. Benmezai and A. Bouyakoub. On q-analogue of Fibonacci and Lucas sequences. **Submited**.

H. Belbachir, and A. Benmezai. On the expansion of Fibonacci and Lucas polynomials, revisited. **Submited**.

H. Belbachir, and A. Benmezai. Generalized Carlitz's approach for q-Fibonacci and q-Lucas polynomials. **Submited**.

Chapitre 1

Préliminaires sur la suite de Fibonacci et la suite de Lucas.

1.1 La suite de Fibonacci et la suite de Lucas

La suite de Fibonacci et la suite de Lucas ainsi que leurs généralisations sont très étudiées comme le montre le nombre de papiers publiés chaque année sur des travaux liés à ces deux suites. Pour le contenu de ce chapitre on a choisi de présenter certaines propriétés pour lesquelles on établira le q-analogue dans les chapitres suivants.

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie par la récurrence

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{avec} \quad F_0 = 0, F_1 = 1. \tag{1.1}$$

L'interprétation matricielle de la récurrence (1.1) nous conduit à la relation

$$C^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En prenant la trace de la matrice C^n, pour $n \geq 0$, on retrouve la suite de Lucas $(L_n)_{n\geq 0}$ définie par la récurrence

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad \text{avec} \quad L_0 = 2,\ L_1 = 1.$$

Le calcul du déterminant de la matrice C^n donne la formule de Cassini

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n\,.$$

La diagonalisation de la matrice C donnée par ses valeurs propres α et β, racines du polynôme caractéristique $x^2 - x - 1$.

$$C = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix},$$

donne la formule de Binet

$$F_{n+1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{et} \quad L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Pour plus de détails relativement à ces deux suites et leur applications, on trouve dans la littérature plusieurs références [36], [46], [14], [15] et [16] dont on tire l'interprétation combinatoire suivante :

Le nombre de façons de remplir un ruban linéaire de longueur n par des carrées ou des dominos est égal au nombre F_{n+1}.

Le nombre de façons de remplir un ruban circulaire de longueur n par des carrées ou des dominos est égal au nombre L_n.

Certaines identités liées à ces deux suites seront présentées dans le paragraphe suivant, on donne maintenant l'expression de ces deux suites en fonction des coefficients binomiaux. La liaison entre ces deux suites avec le triangle de Pascal joue un rôle primordial pour les différentes généralisations.

La relation $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ (Formule de Pascal) entraîne que la suite $a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-1-k}{k}$ $(n \geq 0)$ vérifie la récurrence $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, et comme $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, alors $a_n = F_n$ $(n \geq 0)$.

D'où

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} \qquad (n \geq 0)\,. \tag{1.2}$$

Le tableau suivant montre la liaison entre le triangle de Pascal et la suite de Fibonacci ; 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & \nearrow & & 1 & & & & & & & & & & & \\
1 & & \nearrow & & 2 & & & & & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & 3 & & & & & & & & & \\
1 & & 1 & & \nearrow & & 5 & & & & & & & & \\
 & + & & & & \nearrow & & 8 & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 1 & & \nearrow & & 13 & & & & & & \\
 & + & & + & & & & \nearrow & & 21 & & & & & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \nearrow & & 34 & & & & \\
 & + & & + & & + & & & & \nearrow & & 55 & & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \nearrow & & 89 & & \\
 & + & & + & & + & & + & & & & \nearrow & & 144 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \nearrow & & 233 \\
 & + & & + & & + & & + & & + & & & & \nearrow & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & + & & + & & + & & + & & + & & + & & &
\end{array}
$$

Figure 1 : Le triangle de Pascal et la suite de Fibonacci

De la relation bien établie $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$, on déduit pour $n \geq 1$ (L_0 étant égal à 2) l'expression

$$L_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(1 + \frac{k}{n-k}\right) \binom{n-k}{k},$$

ou encore

$$L_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}.$$

Le tableau suivant montre la liaison entre le triangle de Pascal et la suite de Lucas ; 2, 1, 3, 4, 7, 11, ...

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&& F_{-1} & + & 1 &&&&&&&&&&&&& \to & L_0 \\
&&&&&&&&&& F_0 & + && 1 &&&&&&&&&&&& \to & L_1 \\
&&&&&&&&&& 1 & + & 1 & + & 1 &&&&&&&&&&& \to & L_2 \\
&&&&&&&&& 1 && + && 2 & + & 1 &&&&&&&&&& \to & L_3 \\
&&&&&&&& 1 & + & 1 & + & 1 & + & 3 & + & 1 &&&&&&&&& \to & L_4 \\
&&&&&&& 1 & + & 2 && + && 3 & + & 4 & + & 1 &&&&&&&& \to & L_5 \\
&&&&&& 1 & + & 3 & + & 1 & + & 1 & + & 6 & + & 5 & + & 1 &&&&&&& \to & L_6 \\
&&&&& 1 & + & 4 & + & 3 && + && 4 & + & 10 & + & 6 & + & 1 &&&&&& \to & L_7 \\
&&&& 1 & + & 5 & + & 6 & + & 1 & + & 1 & + & 10 & + & 15 & + & 7 & + & 1 &&&&& \to & L_8 \\
&&& 1 & + & 6 & + & 10 & + & 4 && + && 5 & + & 20 & + & 21 & + & 8 & + & 1 &&&& \to & L_9 \\
&& 1 & + & 7 & + & 15 & + & 10 & + & 1 & + & 1 & + & 15 & + & 35 & + & 28 & + & 9 & + & 1 &&& \to & L_{10} \\
& 1 & + & 8 & + & 21 & + & 20 & + & 5 && + && 6 & + & 35 & + & 56 & + & 36 & + & 10 & + & 1 && \to & L_{11} \\
1 & + & 9 & + & 28 & + & 35 & + & 15 & + & 1 & + & 1 & + & 21 & + & 70 & + & 84 & + & 45 & + & 11 & + & 1 & \to & L_{12}
\end{array}
$$

Figure 2 Le triangle de Pascal et la suite de Lucas

$$
L_n = \sum_k \binom{n-k}{k}\left(1 + \frac{k}{n-k}\right) = \sum_k \binom{n-k}{k} + \sum_k \binom{n-k-1}{k-1}
$$

1.2 Les polynômes bivariés de Fibonacci et de Lucas

Pour deux indéterminées polynomiales x et y, notons par $U_n(x,y)$ et $V_n(x,y)$ respectivement les polynômes bivariés de Fibonacci et les polynômes bivariés de Lucas définis respectivement par les récurrences

$$\begin{cases} U_0(x,y)=0,\ U_1(x,y)=1, \\ U_{n+2}(x,y)=xU_{n+1}(x,y)+yU_n(x,y) \qquad (n\geq 0), \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0(x,y)=2,\ V_1(x,y)=x, \\ V_{n+2}(x,y)=xV_{n+1}(x,y)+yV_n(x,y) \qquad (n\geq 0). \end{cases}$$

Les formes explicites de ces deux suites de polynômes sont données respectivement par

$$U_{n+1}(x,y)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k}{k}x^{n-2k}y^k \quad (n\geq 0), \tag{1.3}$$

et

$$V_n(x,y) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\left(1+\frac{k}{n-k}\right)\binom{n-k}{k}x^{n-2k}y^k \tag{1.4}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}x^{n-2k}y^k \quad (n\geq 1). \tag{1.5}$$

Pour $C(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$ on a

$$C^n(x,y)=\begin{pmatrix} yU_{n-1}(x,y) & U_n(x,y) \\ yU_n(x,y) & U_{n+1}(x,y) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Le calcul du déterminant de la matrice $C^n(x,y)$ et la diagonalisation de la matrice $C(x,y)$ nous conduisent aux généralisations suivantes :

$$U_{n-1}(x,y)\,U_{n+1}(x,y)-(U_n(x,y))^2=-(-y)^{n-1},$$

$$U_{n+1}(x,y)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \text{ et } V_n(x,y)=\alpha^n+\beta^n,$$

avec

$$\alpha=\frac{x-\sqrt{x^2+4y}}{2},\ \beta=\frac{x+\sqrt{x^2+4y}}{2}.$$

La trace de la matrice $C^n(x,y)$ est donnée par l'égalité

$$V_n(x,y)=yU_{n-1}(x,y)+U_{n+1}(x,y),$$

que l'on peut écrire en utilisant la relation $U_{n+1}(x,y) = xU_n(x,y) + yU_{n-1}(x,y)$ comme suit

$$V_n(x,y) = 2yU_{n-1}(x,y) + xU_n(x,y),$$

ou encore

$$V_n(x,y) = V_0(x,y)\,yU_{n-1}(x,y) + V_1(x,y)\,U_n(x,y).$$

La dernière égalité se généralise pour toute suite $(S_n(x,y))_{n\geq 0}$ vérifiant $S_{n+2}(x,y) = xS_{n+1}(x,y) + yS_n(x,y)$ à

$$S_n(x,y) = S_0(x,y)\,yU_{n-1}(x,y) + S_1(x,y)\,U_n(x,y),$$

ou d'une façon plus générale à

$$S_{k+n}(x,y) = S_k(x,y)\,yU_{n-1}(x,y) + S_{k+1}(x,y)\,U_n(x,y), \tag{1.7}$$

puisque le translaté $(S_{k+n}(x,y))_{n\geq 0}$ vérifie la même récurrence que la suite initiale $(S_n(x,y))_{n\geq 0}$.

La relation (1.7) entraîne plusieurs identités comme

$$\begin{aligned}
U_{2n+1}(x,y) &= (U_n(x,y))^2\,y + (U_{n+1}(x,y))^2,\\
U_{2n}(x,y) &= U_n(x,y)\,V_n(x,y),\\
U_{2n+1}(x,y) &= U_{n+1}(x,y)\,V_{n+1}(x,y) - U_n(x,y)\,V_n(x,y).
\end{aligned}$$

Les identités suivantes sont connues pour les nombres de Fibonacci et les nombres de Lucas et se généralisent d'une façon élémentaire aux polynômes de Fibonacci et aux polynômes de Lucas.

1.2.1 Dualité entre la suite de Fibonacci et la suite de Lucas

La suite de Lucas s'exprime en fonction de la suite de Fibonacci par la relation

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = F_n + 2F_{n-1} = 2F_{n+1} - F_n,$$

qui se generalise pour les polyômes bivariés de Fibonacci et de Lucas comme suit

$$\begin{aligned}
V_n(x,y) &= U_{n+1}(x,y) + yU_{n-1}(x,y)\\
&= xU_n(x,y) + 2yU_{n-1}(x,y)\\
&= 2U_{n+1}(x,y) - xU_n(x,y).
\end{aligned}$$

Comme relation duale, l'expression de la suite de Fibonacci en fonction de la suite de Lucas est donnée par la formule

$$5F_{n+1} = L_{n+1} + L_{n-1} = L_n + 2L_{n-1} = 2L_{n+1} - L_n,$$

et pour les polynômes bivariés de Fibonacci on trouve

$$\begin{aligned}
(1+4y)\,U_n(x,y) &= V_{n+1}(x,y)+yV_{n-1}(x,y) \\
&= V_n(x,y)+2yV_{n-1}(x,y) \\
&= 2V_{n+1}(x,y)-V_n(x,y)\,.
\end{aligned}$$

1.2.2 Quelques sommes partielles

Pour les suites de nombres	*Pour les suites de polynômes*
$\sum_{j=1}^{n} F_j = F_{n+2}-1,$	$\sum_{j=1}^{n} yx^{n-j}U_j(x,y) = U_{n+2}(x,y)-x^{n+1},$
$\sum_{j=1}^{n} L_j = L_{n+2}-3,$	$\sum_{j=1}^{n} yx^{n-j}V_j(x,y) = V_{n+2}(x,y)-(2y+x^2)\,x^n,$
$\sum_{j=1}^{n} F_{2j} = F_{2n+1}-1,$	$\sum_{j=1}^{n} xy^{n-j}U_{2j}(x,y) = U_{2n+1}(x,y)-y^n,$
$\sum_{j=1}^{n} L_{2j} = L_{2n+1}-1,$	$\sum_{j=1}^{n} xy^{n-j}V_{2j}(x,y) = V_{2n+1}(x,y)-xy^n,$
$\sum_{j=1}^{n} F_{2j-1} = F_{2n},$	$\sum_{j=0}^{n} xy^{n-j}U_{2j-1}(x,y) = U_{2n}(x,y)\,,$
$\sum_{j=1}^{n} L_{2j-1} = L_{2n}-2,$	$\sum_{j=1}^{n} xy^{n-j}V_{2j-1}(x,y) = V_{2n}(x,y)-2y^n,$
$5\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j}\,F_{2j} = L_{2n+1}-(-1)^n\,,$	$(1+4y)\sum_{j=0}^{n} (-y)^{n-j}\,U_{2j}(x,y) = V_{2n+1}(x,y)-x\,(-y)^n\,,$
$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j}\,L_{2j} = F_{2n+1}-(-1)^n\,,$	$\sum_{j=0}^{n} (-y)^{n-j}\,V_{2j}(x,y) = U_{2n+1}(x,y)-(-y)^n\,,$
$5\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j}\,F_{2j-1} = L_{2n}-2\,(-1)^n\,,$	$(1+4y)\sum_{j=0}^{n} (-y)^{n-j}\,U_{2j-1}(x,y) = V_{2n}(x,y)-2\,(-y)^n\,,$
$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j}\,L_{2j-1} = F_{2n},$	$\sum_{j=0}^{n} (-y)^{n-j}\,V_{2j}(x,y) = U_{2n}(x,y)\,.$

1.2.3 Convolution avec les coefficients binomiaux

Le produit de convolution des coefficients binomiaux avec la suite de Fibonacci et avec la suite de Lucas sont donnés comme suit

La relation $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}F_{n-j}=F_{2n}$ se généralise à $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^{j}U_{n-j}(x,y)=U_{2n}(x,y)\,,$

et la relation $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}L_{n-j}=L_{2n}$ se généralise à $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^{j}V_{n-j}(x,y)=V_{2n}(x,y)\,.$

1.2.4 Extension aux indices négatifs

Une suite récurrente se prolonge aux indices négatifs d'une façon naturelle par sa relation de récurrence. Pour les nombres de Fibonacci et les nombres de Lucas on a respectivement les formules [46] :

$$F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n,$$

et

$$L_{-n} = (-1)^n L_n,$$

et pour les polynômes bivariés associés, pour $y \neq 0$, on a :

$$U_{-n}(x,y) = (-1)^{n-1} \frac{U_n(x,y)}{y^n},$$

et

$$V_{-n}(x,y) = (-1)^n \frac{V_n(x,y)}{y^n}.$$

1.2.5 Un changement de base pour les formes explicites

Soit ξ_n l'espace engendré sur $\mathbb{Q}$ par la famille libre $(\zeta_n)_k = \left(x^{n-2k}y^k\right)_k$; $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, et soient les familles :

$$\begin{aligned}
\beta_U &= \beta_{n,U} = \left(x^{n-k}U_{n+k+1}\right)_{0\leq k\leq n}, \\
\beta_V &= \beta_{n,V} = \left(x^{n-k}V_{n+k}\right)_{0\leq k\leq n}, \\
\beta_U^* &= \beta_{n,U}^* = \left(x^{n-k}U_{n+k}\right)_{0\leq k\leq n-1}, \\
\beta_V^* &= \beta_{n,V}^* = \left(x^{n-k}V_{n+k-1}\right)_{0\leq k\leq n-1}.
\end{aligned}$$

Les formes explicites (1.3) et (1.4) ne sont que les développements des polynômes bivariés de Fibonacci et les polynômes bivariés de Lucas dans ξ_n muni de la base $(\zeta_n)_k$.

En utilisant le fait que chacune des familles $\beta_{n,U}$ et $\beta_{n,V}$ forme une base de ξ_{2n} et chacune des familles $\beta_{n,U}^*$ et $\beta_{n,V}^*$ forme une base de ξ_{2n-1}, les développements de chacun des éléments $U_{2n+1}(x,y)$ et $V_{2n}(x,y)$ ($resp,$ $U_{2n}(x,y)$ et $V_{2n-1}(x,y)$) par rapport à chacune des bases $\beta_{n,U}$ et $\beta_{n,V}$ $\left(resp,\ \beta_{n,U}^* \text{ et } \beta_{n,V}^*\right)$ sont donnés par les huit formules suivantes établies par Belbachir et Bencherif [4]

$$U_{2n+1}(x,y) \in \beta_{n,U},$$
$$V_{2n}(x,y) \in \beta_{n,V},$$

$$V_{2n}(x,y) = 2U_{2n+1}(x,y) - xU_{2n}(x,y), \tag{1.8}$$

$$U_{2n+1}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k V_{2n-k}(x,y), \text{ avec } a_{n,k} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+k} \binom{j}{k} - \frac{(-1)^{n+k}}{2} \binom{n}{k}, \tag{1.9}$$

$$U_{2n}(x,y) = \sum_{k=1}^{n} b_{n,k} x^k U_{2n-k}(x,y), \text{ avec } b_{n,k} = (-1)^{k+1} \binom{n}{k}, \tag{1.10}$$

$$V_{2n-1}(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} x^k U_{2n-k}(x,y), \text{ avec } c_{n,k} = 2(-1)^{k+1} \binom{n}{k} - \delta_{k,1}, \quad (\delta, \text{ Kron.}) \tag{1.11}$$

$$2V_{2n-1}(x,y) = \sum_{k=1}^{n} d_{n,k} x^k V_{2n-1-k}(x,y), \text{ avec } d_{n,k} = (-1)^{k+1} \frac{2n-k}{n} \binom{n}{k}, \tag{1.12}$$

$$2U_{2n}(x,y) = \sum_{k=1}^{n} e_{n,k} x^k V_{2n-k}(x,y), \text{ avec} \tag{1.13}$$

$$e_{n,k} = (-1)^{k+1} \frac{2n-k}{n} \binom{n}{k} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+k-1} \binom{j}{k-1} - \frac{1}{2} (-1)^{n+k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Remarque 1 *Le cas particulier $(x,y) = (1,z)$ permet de retrouver les polynômes de Fibonacci $U_n(z)$ et les polynômes de Lucas $V_n(z)$. De plus ce cas particulier engendre le cas général puisque*

$$U_{n+1}(x,y) = x^n U_{n+1}\left(y/x^2\right) \quad \textit{et} \quad V_n(x,y) = x^n V_n\left(y/x^2\right).$$

1.3 Polynômes de Fibonacci et de Lucas généralisés

Pour un entier $r \geq 0$ notons par $U_n^{(r)}(x,y)$ les polynômes définis pour $n \geq 0$, par

$$U_{n+1}^{(r)}(x,y) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k,$$

Les polynômes $U_n^{(r)}(x,y)$ qu'on appellera *les polynômes bivariés r-Fibonacci* satisfont la récurrence suivante :

$$\begin{cases} U_0^{(r)}(x,y) = 0, \quad U_k^{(r)}(x,y) = x^{k-1}, \quad (1 \leq k \leq r), \\ U_{n+1}^{(r)}(x,y) = xU_n^{(r)}(x,y) + yU_{n-r}^{(r)}(x,y), \quad (n \geq r). \end{cases}$$

Avec cette relation de récurrence on calcule les termes $U_{n-2r+1}^{(r)}(x,y), \ldots, U_{-1}^{(r)}(x,y)$ et par récurrence, on montre que la puissance $n^{ème}$ de la matrice de type $r+1$

$$C_r(x,y) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ y & 0 & & 0 & x \end{pmatrix},$$

est égale à

$$\begin{pmatrix} yU_{n-r}^{(r)}(x,y) & yU_{n-r-1}^{(r)}(x,y) & \cdots & yU_{n-2r+1}^{(r)}(x,y) & U_{n-r+1}^{(r)}(x,y) \\ yU_{n-r+1}^{(r)}(x,y) & yU_{n-r}^{(r)}(x,y) & \cdots & yU_{n-2r+2}^{(r)}(x,y) & U_{n-r+2}^{(r)}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ yU_{n-1}^{(r)}(x,y) & yU_{n-2}^{(r)}(x,y) & \cdots & yU_{n-r}^{(r)}(x,y) & U_{n}^{(r)}(x,y) \\ yU_{n}^{(r)}(x,y) & yU_{n-1}^{(r)}(x,y) & \cdots & yU_{n-r+1}^{(r)}(x,y) & U_{n+1}^{(r)}(x,y) \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Pour plus de propriétés, on renvoie le lecteur à la thèse de Doctorat d'Etat de Belbachir [3] d'où l'on a pris les relations suivantes :

Avec les formes de Binet correspondantes : si α_1, α_2,…, α_{r+1} sont les racines distinctes du polynôme caractéristique de la matrice $C(x,y)$, alors

$$U_n^{(r)}(x,y) = \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^n}{(q+1)\alpha_k - qx}.$$

Les polynômes bivariés r-Lucas de première espèce définis par

$$W_n^{(r)}(x,y) := \sum_{k=1}^{r+1} \alpha_k^n = tr\left(C^n(x,y)\right),$$

sont liés aux polynômes r-Fibonacci par la relation linéaire

$$W_n^{(r)}(x,y) = U_{n+1}^{(r)}(x,y) + ryU_{n-r}^{(r)}(x,y).$$

Ils satisfont la récurrence

$$\begin{cases} W_0^{(r)}(x,y) = r+1, \quad W_k^{(r)}(x,y) = x^k, \quad (1 \le k \le r), \\ \\ W_{n+1}^{(r)}(x,y) = xW_n^{(r)}(x,y) + yW_{n-q}^{(r)}(x,y), \quad (n \ge r). \end{cases}$$

et admettent, pour $n \ge 1$, la forme explicite

$$\begin{aligned} W_n^{(r)}(x,y) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \left(1 + r\frac{k}{n-rk}\right)\binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k, \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \frac{n}{n-rk}\binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k. \end{aligned}$$

Et les polynômes bivariés r-Lucas de seconde espèce définis par

$$V_n^{(r)}(x,y) := U_{n+1}^{(r)}(x,y) + yU_{n-r}^{(r)}(x,y),$$

satisfont la récurrence

$$\begin{cases} V_0^{(r)}(x,y) = 2, \quad V_k^{(r)}(x,y) = x^k, \quad (1 \leq k \leq r), \\ V_{n+1}^{(r)}(x,y) = xV_n^{(r)}(x,y) + yV_{n-q}^{(r)}(x,y), \quad (n \geq r). \end{cases}$$

et admettent, pour $n \geq 1$, la forme explicite

$$V_n^{(r)}(x,y) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \left(1 + \frac{k}{n-rk}\right) \binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k.$$

Chacune des suites $\left(V_n^{(r)}(x,y)\right)_{n\geq 0}$ et $\left(W_n^{(r)}(x,y)\right)_{n\geq 0}$ généralise la suite de polynômes bivariés de Lucas.

Pour le cas particulier $r = 2$, les figures suivantes montrent la liaison entre le triangle de Pascal et les suites $U_n^{(r)}(x,y)$, $V_n^{(r)}(x,y)$ et $W_n^{(r)}(x,y)$.

$$\begin{array}{cccccccccll}
 & & & & & & & & 1 & \twoheadrightarrow & U_1^{(2)}(x,y) \\
 & & & & & & & x & & \twoheadrightarrow & U_2^{(2)}(x,y) \\
 & & & & & & x^2 & & & \twoheadrightarrow & U_3^{(2)}(x,y) \\
 & & & & & x^3 & + & & y & \twoheadrightarrow & U_4^{(2)}(x,y) \\
 & & & & x^4 & + & & 2xy & & \twoheadrightarrow & U_5^{(2)}(x,y) \\
 & & & x^5 & + & & 3x^2y & & & \twoheadrightarrow & U_6^{(2)}(x,y) \\
 & & x^6 & + & & 4x^3y & + & & y^2 & \twoheadrightarrow & U_7^{(2)}(x,y) \\
 & x^7 & + & & 5x^4y & + & & 3xy^2 & & \twoheadrightarrow & U_8^{(2)}(x,y) \\
x^8 & + & & 6x^5y & + & & 6x^2y^2 & & & \twoheadrightarrow & U_9^{(2)}(x,y) \\
+ & & 7x^6y & + & & 10x^3y^2 & + & & y^3 & \twoheadrightarrow & U_{10}^{(2)}(x,y) \\
 & 8x^7y & + & & 15x^4y^2 & + & & 4xy^3 & & \twoheadrightarrow & U_{11}^{(2)}(x,y) \\
9x^8y & + & & 21x^5y^2 & + & & 10x^2y^3 & & & \twoheadrightarrow & U_{13}^{(2)}(x,y)
\end{array}$$

Figure 3 : Le triangle de Pascal et la suite 2-Fibonacci.

Le tableau suivant montre la liaison entre le triangle de Pascal et la suite 2-Lucas de première espèce

$$
\begin{array}{rcl}
1\ + & & 1 \;\longrightarrow\; V_1^{(2)}(x,y) \\
0\ + & & x \;\longrightarrow\; V_2^{(2)}(x,y) \\
0\ + & & x^2 \;\longrightarrow\; V_3^{(2)}(x,y) \\
y\ + & & x^3 \ + \ y \;\longrightarrow\; V_4^{(2)}(x,y) \\
xy\ \ + & & x^4 \ + \ 2xy \;\longrightarrow\; V_5^{(2)}(x,y) \\
x^2y\ \ + & & x^5 \ + \ 3x^2y \;\longrightarrow\; V_6^{(2)}(x,y) \\
x^3y \ + \ y^2 \ + & & x^6 \ + \ 4x^3y \ + \ y^2 \;\longrightarrow\; V_7^{(2)}(x,y) \\
x^4y \ + \ 2xy^2 \ + & & x^7 \ + \ 5x^4y \ + \ 3xy^2 \;\longrightarrow\; V_8^{(2)}(x,y) \\
x^5y \ + \ 3x^2y^2 \ + & & x^8 \ + \ 6x^5y \ + \ 6x^2y^2 \ + \;\longrightarrow\; V_9^{(2)}(x,y) \\
4x^3y^2 \ + \ y^2 \ + & & x^9 \ + \ 7x^6y \ + \ 10x^3y^2 \ + \ y^3 \;\longrightarrow\; V_{10}^{(2)}(x,y) \\
5x^4y^2 \ + \ 3xy^3 \ + & & x^{10} \ + \ 8x^7y \ + \ 15x^4y^2 \ + \ 4xy^3 \;\longrightarrow\; V_{11}^{(2)}(x,y)
\end{array}
$$

Figure 3 Le triangle de Pascal et la suite de 2-Lucas

$$V_n(x,y) = \sum_k \binom{n-2k}{k}\left(1+\frac{k}{n-2k}\right)x^{n-3k}y^k = \sum_k \binom{n-2k}{k} x^{n-3k}y^k + y\sum_k \binom{n-3-2k}{k} x^{n-3-3k}y^k$$

Le tableau suivant montre la liaison entre le triangle de Pascal et la suite 2-Lucas de deuxième espèce

$$
\begin{array}{rcl}
2 + 1 & \to & W_1^{(2)}(x,y) \\
0 + x & \to & W_2^{(2)}(x,y) \\
0 + x^2 & \to & W_3^{(2)}(x,y) \\
2y + x^3 + y & \to & W_4^{(2)}(x,y) \\
2xy + x^4 + 2xy & \to & W_5^{(2)}(x,y) \\
2x^2y + x^5 + 3x^2y & \to & W_6^{(2)}(x,y) \\
2x^3y + 2y^2 + x^6 + 4x^3y + y^2 & \to & W_7^{(2)}(x,y) \\
2x^4y + 4xy^2 + x^7 + 5x^4y + 3xy^2 & \to & W_8^{(2)}(x,y) \\
2x^5y + 6x^2y^2 + x^8 + 6x^5y + 6x^2y^2 + & \to & W_9^{(2)}(x,y) \\
8x^3y^2 + 2y^2 + x^9 + 7x^6y + 10x^3y^2 + y^3 & \to & W_{10}^{(2)}(x,y) \\
10x^4y^2 + 6xy^3 + x^{10} + 8x^7y + 15x^4y^2 + 4xy^3 & \to & W_{11}^{(2)}(x,y)
\end{array}
$$

Figure 4 Le triangle de Pascal et la suite de 2-Lucas

$$W_n(x,y) = \sum_k \binom{n-2k}{k}\left(1 + 2\frac{k}{n-2k}\right) x^{n-3k} y^k = \sum_k \binom{n-2k}{k} x^{n-3k} y^k + 2y \sum_k \binom{n-3-2k}{k} x^{n-3-3k} y^k$$

Les fonctions génératrices des suites $\left(U_n^{(r)}(x,y)\right)_{n\geq 0}$, $\left(V_n^{(r)}(x,y)\right)_{n\geq 0}$ et $\left(W_n^{(r)}(x,y)\right)_{n\geq 0}$ sont données par :

$$\begin{aligned} U_{x,y}^{(r)}(z) &:= \sum_{n\geq 0} U_{n+1}^{(r)}(x,y)\, z^n = \frac{1}{1-xz-yz^{r+1}}, \\ V_{x,y}^{(r)}(z) &:= \sum_{n\geq 0} V_n^{(r)}(x,y)\, z^n = \frac{2-xz}{1-xz-yz^{r+1}}, \\ W_{x,y}^{(r)}(z) &:= \sum_{n\geq 0} W_n^{(r)}(x,y)\, z^n = \frac{r+1-xz}{1-xz-yz^{r+1}}. \end{aligned}$$

1.4 La suite "multibonacci" et les coefficients *bi^{s}nomiaux*

Désignons par $(\phi_n^{(s)})_{n\geq -s}$, la suite “multibonacci” définie pour $s>1$, par la relation de récurrence

$$\begin{cases} \phi_{-s}^{(s)} = \cdots = \phi_{-2}^{(s)} = \phi_{-1}^{(s)} = 0, \\ \phi_0^{(s)} = 1, \\ \phi_n^{(s)} = \phi_{n-1}^{(s)} + \phi_{n-2}^{(s)} + \cdots + \phi_{n-s-1}^{(s)}, \quad (n\geq 1), \end{cases}$$

notons que $\phi_n^{(1)} = F_{n+1}$.

Il est établi que pour $n\geq 0$, on a

$$\phi_n^{(s-1)} = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+sk_s=n} \binom{k_1+k_2+\cdots+k_s}{k_1,k_2,\ldots,k_s}, \tag{1.15}$$

$$\phi_n^{(s-1)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(s+1)\rfloor} \frac{n-k(s-1)}{n-ks} \binom{n-ks}{k} 2^{n-1-k(s+1)} (-1)^k. \tag{1.16}$$

La vérification des identités (1.15) et (1.16) est bien détaillée dans [3] où on trouve des propriétés et des applications intéressantes. On a choisi pour ce paragraphe de présenter la liaison entre les coefficients *bi^{s}nomiaux* et la suite “multibonacci”.

Les coefficients *bi^{s}nomiaux* sont une extension naturelle des coefficients binomiaux, et ils sont définis de la manière suivante :

Soient $s\geq 1$ et $n\geq 0$ deux entiers; pour un entier $k=0,1,\ldots,sn$, le coefficient *bi^{s}nomial* $\binom{n}{k}_s$ est défini comme étant le k-ième coefficient dans le développement

$$\left(1+x+x^2+\cdots+x^s\right)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}_s x^k,$$

avec la convention que $\binom{n}{k}_s = 0$ pour $k<0$ ou $k>sn$.

Pour une introduction appropriée de ces nombres, on renvoie le lecteur à Smith et Hogatt [44], Bollinger [17] et Andrews et Baxter [1]. De [3] on tire les identités suivantes :

$\star$ Une expression via les coefficients binomiaux

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k} \binom{n}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{s-1}}{j_s}.$$

$\star$ Une relation de récurrence longitudinale

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^{s} \binom{n-1}{k-m}_s.$$

$\star$ Une relation de récurrence diagonale

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}\binom{m}{k-m}_{s-1}.$$

$\star$ Une expression avec un unique symbole de sommation : la formule De Moivre

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j=0}^{\lfloor k/(s+1)\rfloor} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{k-j\,(s+1)+n-1}{n-1}.$$

Considérons maintenant la suite $\left(\psi_n^{(s)}\right)_{n\geq 0}$ définie par

$$\psi_n^{(s)} = \sum_{l=0}^{sm-r} \binom{n-l}{l}_s,$$

où m est donné par l'algorithme étendu de la division euclidienne (voir par exemple Lascoux [37]) : $n = m\,(s+1) - r$, $0 \leq r \leq s$.

Avant de montrer que la suite $\left(\psi_n^{(s)}\right)_{n\geq 0}$ n'est que la suite “multibonacci”, on présente par les deux tableaux suivants les coefficients bi^{s}nomiaux et la suite “multibonacci” pour $s = 3$.

1									
1	1	1	1						
1	2	3	4	3	2	1			
1	3	6	10	12	12	10	6	3	1

Le tableau suivant présente la suite multibonacci et les coefficients bi^Snomiaux pour S=3

										1							→	1
									1								→	1
								1	+	1							→	2
							1	+	2	+	1						→	4
						1	+	3	+	3	+	1					→	8
					1	+	4	+	6	+	4						→	15
				1	+	5	+	10	+	10	+	3					→	29
			1	+	6	+	15	+	20	+	12	+	2				→	56
		1	+	7	+	21	+	35	+	31	+	12	+	1			→	108
	1	+	8	+	28	+	56	+	65	+	40	+	10				→	208
1	+	9	+	36	+	84	+	120	+	101	+	44	+	6			→	401
+	10	+	45	+	120	+	203	+	216	+	135	+	40	+	3		→	773
11	+	55	+	165	+	322	+	413	+	336	+	155	+	31	+	1	→	1490
+	66	+	220	+	486	+	728	+	728	+	456	+	155	+	20		→	2872
78	+	286	+	701	+	1206	+	1428	+	1128	+	546	+	135	+	10	→	5536

Figure 6 les coefficients bi^Snomiaux et la suite multibonacci

Pour s quelconque, il est établi [3] que les deux suites $\left(\phi_n^{(s)}\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\psi_n^{(s)}\right)_{n\geq 0}$ coïncident pour $0 \leq n \leq s$, et pour tout $n > s$ on a

$$\begin{aligned}
\psi_{n-1}^{(s)} + \psi_{n-2}^{(s)} + \cdots + \psi_{n-s-1}^{(s)} &= \sum_{j=1}^{s+1}\left(\sum_{l\geq 0}\binom{n-j-l}{l}_s\right), \\
&= \sum_{j=0}^{s}\left(\sum_{l\geq 0}\binom{n-1-l}{l-j}_s\right), \\
&= \sum_{l\geq 0}\left(\sum_{j=1}^{s+1}\binom{n-1-l}{l-j}_s\right), \\
&= \sum_{l\geq 0}\binom{n-l}{l}_s, \\
&= \psi_n^{(s)}.
\end{aligned}$$

Donc les deux suites $\left(\phi_n^{(s)}\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\psi_n^{(s)}\right)_{n\geq 0}$ sont égales.

Ainsi, l'expression des nombres de Fibonacci par la somme des éléments des diagonales du triangle de Pascal, voir (1.2), est généralisée par la relation

$$\phi_n^{(s)} = \sum_{l=0}^{sm-r}\binom{n-l}{l}_s. \tag{1.17}$$

Chapitre 2

Le q-analogue des polynômes de Fibonacci et de Lucas

La forte liaison entre la suite de Fibonacci et le triangle de Pascal reste très apparente dans le cas du q-analogue comme on le voix dans les travaux de plusieurs auteurs où on trouve des formes explicites qui utilisent soit les coefficients binomiaux comme dans Goyt et Mathisen [32], soit les nombres de Gauss qui sont aussi appelés les coefficients q-binomiaux (voir par exemple [26], [42], [40], [19] et [20]). Dans ce chapitre on donne une petite introduction sur les nombres de Gauss suivie par deux définitions du q-analogue des polynômes de Fibonacci et des polynômes de Lucas suggérées par Carlitz et Cigler. Ces deux définitions sont unifiées par une nouvelle définition donnée aussi par Cigler.

2.1 Le coefficient q-binomial

Soit q une indéterminée (q non racine de 1)

Notons

$$[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1},$$

$$[n]_q! = [1]_q[2]_q \cdots [n]_q,$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}.$$

Il est facile de voir que

$$[n]_q = q^{n-1}[n]_{1/q},$$

$$[n]_q! = q^{\binom{n}{2}}[n]_{1/q}!,$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{1/q},$$

$$[n]_q = [k]_q + q^k[n-k]_q = q^{n-k}[k]_q + [n-k]_q. \tag{2.1}$$

Les nombres de Gauss $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ généralisent les coefficients binomiaux et on montre en utilisant l'égalité (2.1) que

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q, \tag{2.2}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q. \tag{2.3}$$

En effet

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n+1]_q!}{[k]_q!\,[n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q!\left([n+1-k]_q + q^{n+1-k}[k]_q\right)}{[k]_q!\,[n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q![n+1-k]_q}{[k]_q!\,[n+1-k]_q!} + q^{n+1-k}\frac{[n]_q![k]_q}{[k]_q!\,[n+1-k]_q!} \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n+1]_q!}{[k]_q!\,[n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q!\left(q^k[n+1-k]_q + [k]_q\right)}{[k]_q!\,[n+1-k]_q!} \\
&= q^k\frac{[n]_q![n+1-k]_q}{[k]_q!\,[n+1-k]_q!} + \frac{[n]_q![k]_q}{[k]_q!\,[n+1-k]_q!} \\
&= q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q.
\end{aligned}$$

Avec les relations de récurrence (2.2) et (2.3) on obtient le triangle suivant

Le tableau suivant présente les polynômes de Gauss

1							
1	1						
1	$[2]_q$	1					
1	$[3]_q$	$[3]_q$	1				
1	$[4]_q$	$q^2 + [5]_q$	$[4]_q$	1			
1	$[5]_q$	$q^2[2]_q + [7]_q$	$q^2[2]_q + [7]_q$	$[5]_q$	1		
1	$[6]_q$	$q^4 + q^2[4]_q + [9]_q$	$q^3 + q^5 + q^6 + q^2[7]_q + [10]_q$	$q^4 + q^2[4]_q + [9]_q$	$[6]_q$	1	
1	$[7]_q$	$[7]_q + q^4[4]_q + q^2[9]_q$	$q^4 + q^8 + q^9 + q^2[5]_q + q^2[7]_q + [13]_q$	$q^4 + q^8 + q^9 + q^2[5]_q + q^2[7]_q + [13]_q$	$[7]_q + q^4[4]_q + q^2[9]_q$	$[7]_q$	1

Figure 8 Le q-analogue du triangle de Pascal

Considérons maintenant, les operateurs X et Q tels que

$$Xf(x) = xf(x) \quad \text{et} \quad Qf(x) = f(qx).$$

Puisque $QX = qXQ$ alors les symboles X et Q seront utilisés pour désigner un couple d'indéterminées (x, y) vérifiant $yx = qxy$.

Comme q-analogue du binôme de Newton, les relations (2.2) et (2.3) se traduisent par le développement suivant

$$(X+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q X^{n-k} Q^k. \tag{2.4}$$

Si on pose $Z = X^{-1}Q$ alors $ZX = qXZ$ et le développement (2.4) devient

$$\left(1+q^{n-1}Z\right)\left(1+q^{n-2}Z\right)\cdots(1+Z) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q Z^k. \tag{2.5}$$

Le coefficient $q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ considéré comme un q-analogue du nombre $\binom{n}{k}$ sera noté par $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)}$, par suite les deux relations de récurrence (2.2) et (2.3) seront notées respectivement :

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} + q^n \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q^{(1)}, \tag{2.6a}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} + q^{k-1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q^{(1)}. \tag{2.6b}$$

Avec les deux développements (2.4) et (2.5) on peut dire que chacun des deux triangles suivants est un q-analogue du triangle de Pascal. On explicitera dans le sixième chapitre que l'un de ces triangles est lié à l'approche de Carlitz pour le q-analogue de la suite de Fibonacci et de la suite de Lucas, et que l'autre est lié à l'approche de Cigler.

$$\begin{array}{lllll}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q & & & & \\
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q & & & \\
\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q & & \\
\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}_q & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_q & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}_q & \\
\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}_q & \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}_q & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q & \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}_q & \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}_q,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q^{(1)} & & & & \\
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q^{(1)} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q^{(1)} & & & \\
\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q^{(1)} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q^{(1)} & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q^{(1)} & & \\
\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}_q^{(1)} & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q^{(1)} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_q^{(1)} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}_q^{(1)} & \\
\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}_q^{(1)} & \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}_q^{(1)} & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q^{(1)} & \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}_q^{(1)} & \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}_q^{(1)}.
\end{array}$$

La partie suivante est consacrée aux q-analogues de la suite de Fibonacci et de la suite de Lucas, les définitions et les propriétés présentées dans cette partie sont inspirées de l'article de Cigler [26].

2.2 L'approche de Carlitz pour les q-analogues de la suite de Fibonacci et de la suite de Lucas

Carlitz [20] propose comme q-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci les polynômes définis, pour $n \geq 0$, par

$$\mathbf{F}_{n+1}(x, y, 1) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k} y^k \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}_0(x, y, 1) = 0. \tag{2.7}$$

Les premier termes de cette suite sont :

$\mathbf{F}_0(x, y, 1) = 0$, $\mathbf{F}_1(x, y, 1) = 1$, $\mathbf{F}_2(x, y, 1) = x$, $\mathbf{F}_3(x, y, 1) = x^2 + q^2 y$, $\mathbf{F}_4(x, y, 1) = x^3 + q^2 [2]_q xy$, $\mathbf{F}_5(x, y, 1) = x^4 + q^2 [3]_q x^2 y + q^4 y^2$, $\mathbf{F}_6(x, y, 1) = x^5 + q^2 [4]_q x^3 y + q^4 [4]_q xy^2$,...

Les relations (2.2) et (2.3) entraînent que la suite $(\mathbf{F}_n(x, y, 1))_{n \geq 0}$ satisfait les deux relations de récurrence

$$\mathbf{F}_{n+1}(x, y, 1) = x\mathbf{F}_n(x, qy, 1) + qy\mathbf{F}_{n+1}\left(x, q^2 y, 1\right), \tag{2.8}$$

$$\mathbf{F}_{n+1}(x, y, 1) = x\mathbf{F}_n(x, y, 1) + q^{n-1} y\mathbf{F}_{n-1}(x, y, 1), \tag{2.9}$$

avec $\mathbf{F}_0(x, y, 1) = 0$ et $\mathbf{F}_1(x, y, 1) = 1$.

La vérification des relations de récurrence (2.8) et (2.9) pour les indices négatifs nous conduit, pour $y \neq 0$, à l'expression

$$\mathbf{F}_{-n}(x, y, 1) = (-1)^{n-1} q^{\binom{n+1}{2}} \frac{\mathbf{F}_n(x, y/q^n, 1)}{y^n}, \qquad (n \geq 0). \tag{2.10}$$

Avec le changement de variables $(x, y, 1)$ par $(1, z, 1)$, on retrouve le q-analogue des polynômes de Fibonacci $\mathbf{F}_n(z, 1)$ qui satisfait les deux relations de récurrence

$$\mathbf{F}_{n+1}(z, 1) = \mathbf{F}_n(qz, 1) + qz\mathbf{F}_{n-1}\left(q^2 z, 1\right), \tag{2.11}$$

$$\mathbf{F}_{n+1}(z, 1) = \mathbf{F}_n(z, 1) + q^{n-1} z\mathbf{F}_{n-1}(z, 1), \tag{2.12}$$

avec $\mathbf{F}_0(z) = 0$ et $\mathbf{F}_1(z) = 1$.

Et l'identité (1.6) devient

$$C^n(z) = \begin{pmatrix} zU_{n-1}(z) & U_n(z) \\ zU_n(z) & U_{n+1}(z) \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

où $C(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 1 \end{pmatrix}$ et les $U_n(z)$ sont les polynômes de Fibonacci.

L'interprétation matricielle des récurrences (2.11) et (2.12) donne l'égalité

$$C\left(q^{n-1}z\right) C\left(q^{n-2}z\right) \cdots C(z) = \begin{pmatrix} z\mathbf{F}_{n-1}(qz,1) & \mathbf{F}_n(z,1) \\ z\mathbf{F}_n(qz,1) & \mathbf{F}_{n+1}(z,1) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

qui est un q-analogue de (2.13).

Dans le cas des polynômes bivariés on a

$$C\left(x, q^{n-1}y\right) C\left(x, q^{n-2}y\right) \cdots C(x,y) = \begin{pmatrix} y\mathbf{F}_{n-1}(x,qy,1) & \mathbf{F}_n(x,y,1) \\ y\mathbf{F}_n(x,qy,1) & \mathbf{F}_{n+1}(x,y,1) \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

et avec la relation $\mathbf{F}_n(x,y,1) = x^{n-1}\mathbf{F}_n(y/x^2,1)$ on retrouve l'identité (2.14).

Les propriétés (2.14) et (2.15) montrent que le q-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci proposé par Carlitz est une extension naturelle des polynômes bivariés de Fibonacci, et à partir de ces propriétés Cigler a associé à la définition de Carlitz un q-analogue des polynômes bivariés de Lucas défini par

$$\begin{aligned} \mathbf{Luc}_n(x,y,1) &= tr\left(C\left(x,q^{n-1}y\right) C\left(x,q^{n-2}y\right) \cdots C(x,y)\right) \\ &= y\mathbf{F}_{n-1}(x,qy,1) + \mathbf{F}_{n+1}(x,y,1). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Le calcul du déterminant des deux membres de (2.15) donne un q-analogue de la formule de Cassini

$$\mathbf{F}_{n-1}(x,qy,1)\,\mathbf{F}_{n+1}(x,y,1) - \mathbf{F}_n(x,qy,1)\,\mathbf{F}_n(x,y,1) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} y^{n-1}.$$

L'identité (2.16) entraîne, pour $n \geq 1$, que

$$\begin{aligned} \mathbf{Luc}_n(x,y,1) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{k^2-k} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k} y^k, \\ \mathbf{Luc}_{-n}(x,y,1) &= (-1)^n q^{\binom{n+1}{2}} \frac{\mathbf{Luc}_n(x,y/q,1)}{y^n}, \qquad (y \neq 0) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{Luc}_0(x,y,1) = 2$.

Remarque 2 *Le q-analogue des polynômes bivariés de Lucas ne satisfait, ni une relation de récurrence de type (2.8), ni de type (2.9), cependant avec l'algorithme q-Zeilberger la relation de récurrence suivante est déduite, c'est la plus courte possible*

$$\begin{aligned} \mathbf{Luc}_{n+4}(x,y,1) &= (1+q)\,x\mathbf{Luc}_{n+3}(x,y,1) + \left(q^{n+2}(1+q)\,y - qx^2\right) \mathbf{Luc}_{n+2}(x,y,1) - \\ & \quad q^{n+2}(1+q)\,xy\mathbf{Luc}_{n+1}(x,y,1) - q^{2n+3}y^2\mathbf{Luc}_n(x,y,1), \end{aligned}$$

qui devient en utilisant (2.16)

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+4}(x,y,1) &= (1+q)\,x\mathbf{F}_{n+3}(x,y,1)+\left(q^{n+2}(1+q)\,y-qx^2\right)\mathbf{F}_{n+2}(x,y,1)- \\ &\quad q^{n+2}(1+q)\,xy\mathbf{F}_{n+3}(x,y,1)-q^{2n+3}y^2\mathbf{F}_n(x,y,1).\end{aligned}$$

2.3 L'approche de Cigler pour le q-analogue de la suite de Fibonacci et de la suite de Lucas

Le q-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci et des polynômes bivariés de Lucas suggérés par Cigler sont définis, pour $n \geq 0$ et $n \geq 1$ respectivement, par

$$\mathbf{F}_{n+1}(x,y,0) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k}y^k \qquad \text{avec} \quad \mathbf{F}_0(x,y)=0, \tag{2.17}$$

$$\mathbf{Luc}_n(x,y,0) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k}y^k \quad \text{avec} \quad \mathbf{Luc}_0(x,y)=2. \tag{2.18}$$

La suite $(\mathbf{F}_n(x,y,0))_{n\geq 0}$ satisfait les deux relations de récurrence

$$\mathbf{F}_{n+1}(x,y,0) = x\mathbf{F}_n(x,y,0)+q^{n-1}y\mathbf{F}_{n-1}(x,y/q,0), \tag{2.19}$$

$$\mathbf{F}_{n+1}(x,y,0) = x\mathbf{F}_n(x,qy,0)+qy\mathbf{F}_{n+1}(x,qy,0), \tag{2.20}$$

avec $\mathbf{F}_0(x,y,0)=0$ et $\mathbf{F}_1(x,y,0)=1$.

Ces relations de récurrence, pour $y \neq 0$, prolongent la suite $(\mathbf{F}_n(x,y,0))_n$ aux indices négatifs par

$$\mathbf{F}_{-n}(x,y,0) = (-1)^{n-1}\frac{\mathbf{F}_n(x,y,0)}{y^n}, \quad n \geq 1.$$

Ce qui est remarquable dans la proposition de Cigler, autre que les formes explicites, est le fait que chacun des polynômes bivariés $\mathbf{F}_n(x,y,0)$ et $\mathbf{Luc}_n(x,y,0)$ satisfait la même relation aux q-différence, pour $Df(x)=\frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_n(x,y,0) &= x\mathbf{F}_{n-1}(x,y,0)+(q-1)\,yD\mathbf{F}_{n-1}(x,y,0)+y\mathbf{F}_{n-2}(x,y,0), \\ \mathbf{Luc}_n(x,y,0) &= x\mathbf{Luc}_{n-1}(x,y,0)+(q-1)\,yD\mathbf{Luc}_{n-1}(x,y,0)+y\mathbf{Luc}_{n-2}(x,y,0),\end{aligned}$$

ce qui montre qu'ils sont liés respectivement aux polynômes bivariés de Fibonacci $U_n(x,y)$ et aux polynômes bivariés de Lucas $V_n(x,y)$ par les relations

$$\mathbf{F}_n(x,y,0) = U_n(x+(q-1)\,yD,y)\cdot\mathbf{1}, \tag{2.21}$$

$$\mathbf{Luc}_n(x,y,0) = V_n(x+(q-1)\,yD,y)\cdot\mathbf{1}, \tag{2.22}$$

comme on le voit, pour $2 \leq n \leq 6$,

$$\begin{aligned}
U_2\left(x+(q-1)\,yD, y\right)\cdot\mathbf{1} &= x = \mathbf{F}_2\left(x,y,0\right),\\
U_3\left(x+(q-1)\,yD, y\right)\cdot\mathbf{1} &= x^2+qy = \mathbf{F}_3\left(x,y,0\right),\\
U_4\left(x+(q-1)\,yD, y\right)\cdot\mathbf{1} &= x^3+q\left[2\right]_q xy = \mathbf{F}_4\left(x,y,0\right),\\
U_5\left(x+(q-1)\,yD, y\right)\cdot\mathbf{1} &= x^4+q\left[3\right]_q x^2y+q^3y^2 = \mathbf{F}_5\left(x,y,0\right),\\
U_6\left(x+(q-1)\,yD, y\right)\cdot\mathbf{1} &= x^5+q\left[4\right]_q x^3y+q^3\left[4\right]_q xy^2 = \mathbf{F}_6\left(x,y,0\right).
\end{aligned}$$

Avec l'operateur matriciel

$$C\left(A,y\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ y & A\end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = x+(q-1)\,yD,$$

chacune des relations (2.21) et (2.22) se traduit respectivement par

$$\begin{aligned}
C^n\left(A,y\right)\cdot\mathbf{1} &= \begin{pmatrix} y\mathbf{F}_{n-1}\left(x,y,0\right) & \mathbf{F}_n\left(x,y,0\right)\\ y\mathbf{F}_n\left(x,y,0\right) & \mathbf{F}_{n+1}\left(x,y,0\right)\end{pmatrix},\\
\mathbf{Luc}_n\left(x,y,0\right) &= tr\left(C^n\left(A,y\right)\cdot\mathbf{1}\right).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres formelles $\alpha\left(q\right)$ et $\beta\left(q\right)$ de l'operateur matriciel $C\left(A,y\right)$ nous permettent d'écrire une généralisation de la formule de Binet

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_n\left(x,y,0\right) &= \frac{\alpha\left(q\right)^n-\beta\left(q\right)^n}{\alpha\left(q\right)-\beta\left(q\right)}\cdot\mathbf{1},\\
\mathbf{Luc}_n\left(x,y,0\right) &= \left(\alpha\left(q\right)^n+\beta\left(q\right)^n\right)\cdot\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

par suite, pour $y \neq 0$,

$$\mathbf{Luc}_{-n}\left(x,y,0\right)=\left(\alpha\left(q\right)^{-n}+\beta\left(q\right)^{-n}\right)\cdot\mathbf{1}=\left(-1\right)^n\frac{\mathbf{Luc}_n\left(x,y,0\right)}{y^n}.$$

Remarque 3 *Le q-analogue des polynômes bivariés de Lucas ne satisfait ni une relation de récurrence de type (2.19) ni de type (2.20), mais elle satisfait la relation de récurrence, toujours via l'algorithme de q-Zeilberger,*

$$\begin{aligned}
\mathbf{Luc}_{n+4}\left(x,y,0\right) &= x\mathbf{Luc}_{n+3}\left(x,y,0\right)+q^{n+3}\frac{\left[2\right]_q}{\left[n+1\right]_q}\mathbf{Luc}_{n+2}\left(x,y,0\right)+\\
&\quad q^{n+1}\frac{\left[n+3\right]_q}{\left[n+1\right]_q}xy\mathbf{Luc}_{n+1}\left(x,y,0\right)+q^{n+1}\frac{\left[n+3\right]_q}{\left[n+1\right]_q}y^2\mathbf{Luc}_n\left(x,y,0\right).
\end{aligned}$$

Pour Le q-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci en composant (2.19) et (2.20) on obtient

$$\mathbf{F}_{n+4}\left(x,y,0\right)=x\mathbf{F}_{n+3}\left(x,y,0\right)+q^{n-2}xy\mathbf{F}_{n+1}\left(x,y,0\right)+q^{n-2}y^2\mathbf{F}_n\left(x,y,0\right).$$

Commentaire

Les approches de Carlitz et de Cigler proposées ci-dessus permettent de récuperer les propriétés initialement satisfaites pour $q = 1$, comme l'expression des polynômes de Lucas par la trace d'une matrice ou d'un operateur matriciel appliqué à **1.** Cependant la relation de récurrence la plus réduite pour $\mathbf{Luc}_n$ est une récurrence d'ordre 4, ce qui est "frustrant" pour une relation de récurrence initiale ($q = 1$) d'ordre 2. C'est cette lacune qui nous a motivée à proposer une alternative pour la définition du q-analogue des polynômes de Lucas.

2.4 Une approche unificatrice de Cigler

La définition de Carlitz et la définition de Cigler pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci et des polynômes de Lucas sont des approches distinctes et chacune d'elle possède des propriétés intéressantes, par ailleurs Cigler suggère une définition commune et des transformations qui relient ces deux approches.

Il propose les définitions suivantes :

$$\mathbf{F}_{n+1}(x, y, m) \quad : \quad = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k} y^k, \quad (n \geq 0), \tag{2.24}$$

$$\mathbf{Luc}_n(x, y, m) \quad : \quad = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{(1+m)\binom{k}{2}} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k} y^k, \quad (n \geq 1), \tag{2.25}$$

le q-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci et le q-analogue des polynômes bivariés de Lucas proposés par Carlitz [20] correspondent à

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n+1}(x, y, 1) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k} y^k, \\ \mathbf{Luc}_n(x, y, 1) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{k^2-k} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k} y^k. \end{aligned}$$

et le q-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci et le q-analogue des polynômes bivariés de Lucas proposés par Cigler [21] correspondent à

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n+1}(x, y, 0) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k} y^k, \\ \mathbf{Luc}_n(x, y, 0) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k} y^k, \end{aligned}$$

et les relations de récurrences (2.8) et (2.19) (respectivement (2.9) et (2.20)) deviennent des cas particulier des récurrences

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1}(x,y,m) &= x\mathbf{F}_n(x,y,m)+q^{n-1}y\mathbf{F}_{n-1}\left(x,q^{m-1}y,m\right), &(2.26)\\ \mathbf{F}_{n+1}(x,y,m) &= x\mathbf{F}_n(x,qy,m)+qy\mathbf{F}_{n-1}\left(x,q^{m+1}y,m\right). &(2.27)\end{aligned}$$

Considérons maintenant l'operateurs $\mathbf{U}_m$ défini par

$$\mathbf{U}_m\cdot y^k=q^{m\binom{k}{2}}y^k.$$

L'operateur $\mathbf{U}_1$ nous permet de passer du q-analogue proposé par Cigler [21] à celui proposé par Carlitz [20], par exemple les identités

$$\mathbf{F}_{2n}(x,y,0)=\sum_{j=0}^{n}q^{\binom{j+1}{2}}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q y^jx^{n-j}\mathbf{F}_{n-j}(x,q^ny,0),$$

et

$$q^{\binom{n}{2}+nk}y^n\mathbf{F}_k\left(x,\frac{y}{q^n},0\right)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q x^j\mathbf{F}_{2n+k-j}(x,y,0),$$

établies par Cigler respectivement dans [21] et [25] induisent respectivement des identités pour le q-analogue proposé par Carlitz [20] comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{2n}(x,y,1) &= \sum_{j=0}^{n}q^{j^2}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q y^jx^{n-j}\mathbf{F}_{n-j}\left(x,q^{n+j}y,1\right),\\ q^{2\binom{n}{2}+nk}y^n\mathbf{F}_k(x,y,1) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q x^j\mathbf{F}_{2n+k-j}(x,y,1).\end{aligned}$$

Avec l'operateur $\mathbf{U}_m$ certaines propriétés vérifiées par le q-analogue proposé par Cigler [21] sont généralisées pour la définition unificatrice du q-analogue. Par exemple, le prolongement aux indices négatifs, pour $y\neq 0$, du q-analogue proposé par Cigler [21] s'exprime comme suit

$$\mathbf{F}_{-n}(x,y,0)=(-1)^{n-1}\frac{\mathbf{F}_n(x,y,0)}{y^n},$$

devient

$$\mathbf{F}_{-n}(x,y,m)=(-1)^{n-1}\,q^{-m\binom{n}{2}}\frac{\mathbf{F}_n(x,q^{-mn}y,m)}{(q^{-mn}y)^n}, \tag{2.28}$$

et la relation aux q-différences (voir [26])

$$\mathbf{F}_n(x,y,0)=x\mathbf{F}_{n-1}(x,y,0)+(q-1)\,yD\mathbf{F}_{n-1}(x,y,0)+y\mathbf{F}_{n-2}(x,y,0),$$

devient

$$\mathbf{F}_n(x,y,m)=x\mathbf{F}_{n-1}(x,y,m)+(q-1)\,yD\mathbf{F}_{n-1}(x,q^my,m)+y\mathbf{F}_{n-2}(x,q^my,m).$$

Ce chapitre n'est qu'un préliminaire sur les approches de Carlitz et de Cigler pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci et de Lucas, on trouve des applications et d'autres propriétés telle que l'interprétation combinatoire dans [20], [23], [21] et [26].

Les remarques 2 et 3 sont parmi les motivations principales qui nous ont poussé à refléchir à la possibilité d'explorer d'autres q-analogues pour les polynômes de Lucas.

Chapitre 3

Une approche alternative du q-analogue des polynômes de Lucas

3.1 Introduction

Les nombres de Fibonacci F_n et les nombres de Lucas L_n vérifient la même relation de récurrence $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. De même, les polynômes de Fibonacci $(U_n(z))$ et les polynômes de Lucas $(V_n(z))$ vérifient la relation de récurrence $a_{n+2}(z) = a_{n+1}(z) + za_n(z)$. Cependant pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci et des polynômes de Lucas suggérés par Cigler [21], ou par Carlitz [20], ou encore la proposition unificatrice de Cigler [26], on remarque que la suite de polynômes $(\mathbf{F}_n(z,m))_n$ satisfait deux relations de récurrence de longueur 2, dont aucune n'est satisfaite par la suite de polynômes $(\mathbf{Luc}_n(z,m))_n$ (voir Remarques 3), ce qui nous a amené à définir un q-analogue des polynômes de Lucas de première et de deuxième espèce notés respectivement $((\mathbf{L}_n(z,m))_n$ et $(\mathbb{L}_n(z,m))_n)$ afin d'obtenir un q-analogue des polynômes de Fibonacci et des polynômes de Lucas de façon que chacun des couples de compagnons $((\mathbf{F}_n(z,m))_n, (\mathbf{L}_n(z,m))_n)$ et $((\mathbf{F}_n(z,m))_n, (\mathbb{L}_n(z,m))_n)$ satisfasse la même relation de récurrence. Ce travail a fait l'objet de la publication [7].

3.2 Une approche alternative aux approches de Carlitz et Cigler

Notre proposition porte sur la définition du q-analogue des polynômes de Lucas, et elle se base sur la forme explicite des polynômes de Lucas suivante

$$V_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(1 + \frac{k}{n-k}\right) \binom{n-k}{k} z^k.$$

Définition 4 *On définit le q-analogue des polynômes de Lucas de première espèce et le q-analogue des polynômes de Lucas de seconde espèce respectivement par les formes explicites suivantes*

$$\mathbf{L}_n(z,m) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \left(1 + \frac{[k]_q}{[n-k]_q}\right) z^k, \tag{3.1}$$

$$\mathbb{L}_n(z,m) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \left(1 + q^{n-2k} \frac{[k]_q}{[n-k]_q}\right) z^k, \tag{3.2}$$

pour $n \geq 1$ *et* $\mathbf{L}_0(z,m) = \mathbb{L}_0(z,m) = 2$

Avec ces formes explicites on montre dans le prochain paragraphe que

$$\mathbf{L}_n(z,m) = 2\mathbf{F}_{n+1}(z/q,m) - \mathbf{F}_n(z,m), \tag{3.3}$$

$$\mathbb{L}_n(z,m) = 2\mathbf{F}_{n+1}(z,m) - \mathbf{F}_n(z,m), \tag{3.4}$$

et en utilisant le fait que la suite de polynômes $(\mathbf{F}_{n+1}(z/q,m))_n$ vérifie la récurrence (2.26), et le fait que la suite de polynômes $(\mathbf{F}_{n+1}(z,m))_n$ vérifie la la récurrence (2.27), on déduit le résultat suivant.

Théorème 5 *Les suites de polynômes* $(\mathbf{L}_n(z,m))_n$ *et* $(\mathbb{L}_n(z,m))_n$ *satisfont respectivement les récurrences*

$$\mathbf{L}_{n+1}(z,m) = \mathbf{L}_n(z,m) + q^{n-1} z \mathbf{L}_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right), \tag{3.5}$$

$$\mathbb{L}_{n+1}(z,m) = \mathbb{L}_n(qz,m) + qz \mathbb{L}_{n-1}\left(q^{m+1}z,m\right). \tag{3.6}$$

Dans ce qui suit, on généralisera les identités que l'on a présentées dans le premier chapitre relatives aux polynômes de Lucas.

3.3 Dualité entre les polynômes de Fibonacci et les polynômes de Lucas

La première partie de cette section est consacrée aux expressions du q-analogue des polynômes de Lucas en fonction du q-analogue des polynômes de Fibonacci, représentées par les trois résultats suivants :

Le premier résultat présente un q-analogue de la relation (donnée par la trace de la matrice $(c(z))^n$) ;

$$V_n(z) = U_{n+1}(z) + zU_{n-1}(z).$$

Théorème 6 *Le q-analogue des polynômes de Lucas de première espèce et le q-analogue des polynômes de Lucas de seconde espèce satisfont respectivement les relations :*

$$\mathbf{L}_n(z,m) = \mathbf{F}_{n+1}(z/q,m) + z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z,m), \qquad (n \geq 1), \tag{3.7}$$

$$\mathbb{L}_n(z,m) = \mathbf{F}_{n+1}(z,m) + q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right), \qquad (n \geq 1). \tag{3.8}$$

Preuve. Par définition

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_n(z,m) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q z^k + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \frac{[k]_q}{[n-k]_q} z^k, \\
\mathbb{L}_n(z,m) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q z^k + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q q^{n-2k} \frac{[k]_q}{[n-k]_q} z^k,
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_n(z,m) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{z}{q}\right)^k + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q z^k, \\
\mathbb{L}_n(z,m) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q z^k + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{n-2k} z^k,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_n(z,m) &= \mathbf{F}_{n+1}\left(\frac{z}{q},m\right) + z\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-2-k \\ k \end{bmatrix}_q z^k, \\
\mathbb{L}_n(z,m) &= \mathbf{F}_{n+1}(z,m) + z\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k+2}{2}+m\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-2-k \\ k \end{bmatrix}_q q^{n-2-2k} z^k,
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_n(z,m) &= \mathbf{F}_{n+1}\left(\frac{z}{q},m\right) + z\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-2-k \\ k \end{bmatrix}_q (q^m z)^k, \\
\mathbb{L}_n(z,m) &= \mathbf{F}_{n+1}(z,m) + q^{n-1}z\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-2-k \\ k \end{bmatrix}_q \left(q^{m-1}z\right)^k,
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat par les formes explicites (2.24) et (2.25). □

Le second résultat donne un q-analogue de la relation homogène

$$V_n(z) = 2U_{n+1}(z) - U_n(z).$$

Théorème 7 *Le q-analogue des polynômes de Lucas de première espèce et le q-analogue des polynômes de Lucas de seconde espèce satisfont respectivement les relations : pour $n \geq 0$,*

$$\mathbf{L}_n(z,m) = 2\mathbf{F}_{n+1}(z/q,m) - \mathbf{F}_n(z,m), \tag{3.9}$$

$$\mathbb{L}_n(z,m) = 2\mathbf{F}_{n+1}(z,m) - \mathbf{F}_n(z,m). \tag{3.10}$$

Preuve. Il suffit de remplacer $z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z,m)$ par $\mathbf{F}_{n+1}(z/q,m) - \mathbf{F}_n(z,m)$, et de remplacer $q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}(q^{m-1}z,m)$ par $\mathbf{F}_{n+1}(z,m) - \mathbf{F}_n(z,m)$ dans le Théorème 6. □

Remarque 8 *On en déduit les identités suivantes :*

$$\mathbf{L}_n(z,m) = \mathbf{F}_n(z,m) + 2z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z,m), \qquad (n \geq 1), \tag{3.11}$$

$$\mathbb{L}_n(z,m) = \mathbf{F}_n(z,m) + 2q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right), \qquad (n \geq 1). \tag{3.12}$$

La seconde partie de cette section est consacrée aux expressions du q-analogue des polynômes de Fibonacci en fonction du q-analogue des polynômes de Lucas. Ces expressions sont représentées par des résultats duaux des résultats de la partie précédente.

La relation

$$(1+4z)\,U_n(z) = V_{n+1}(z) + zV_{n-1}(z), \qquad (n \geq 1), \tag{3.13}$$

satisfaite par les polynômes de Fibonacci $U_n(z)$ et les polynômes de Lucas $V_n(z)$ est généralisée par le résultat suivant :

Théorème 9 *Chacune des identités suivantes, pour $(n \geq 1)$, représente un q-analogue de l'égalité (3.13).*

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_n(z,m) + (2+2/q)\,z\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z\right) &= \mathbf{L}_{n+1}(z/q,m) + z\mathbf{L}_{n-1}(q^m z,m), \\
\mathbf{F}_n(z,m) + (2+2/q)\,q^n z\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z,m\right) &= \mathbb{L}_{n+1}(z,m) + q^{n-1}z\mathbb{L}_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right).
\end{aligned}$$

Preuve. 1) Dans l'ensemble des suites de polynômes vérifiant une récurrence de type (2.26), les suites de polynômes $(\mathbf{F}_n(z,m))_n$, $(z\mathbf{F}_n(q^{m-1}z))_n$, $(\mathbf{L}_{n+1}(z/q,m))_n$ et $(z\mathbf{L}_{n-1}(q^m z,m))_n$

sont les q-analogues des suites de polynômes $(U_n(z))_n$, $(zU_n(z))_n$, $(V_{n+1}(z))_n$ et $(zV_{n-1}(z))_n$ respectivement.

Soient les constantes a, b, c telles que

$$\mathbf{F}_n(z,m) + az\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z\right) = b\mathbf{L}_{n+1}(z/q,m) + cz\mathbf{L}_{n-1}(q^m z,m).$$

Sachant que la relation de récurrence est de longueur deux, il suffit de vérifier cette dernière égalité pour $n=1$ et $n=2$.

Pour $n=1$ on trouve $1+az = b(1+2z/q)+2cz$.

Pour $n=2$ on trouve $1+az = b(1+z+2z/q)+cz$.

donc $b=c=1$ et $a=2+2/q$.

2) En tenant compte du fait que dans l'ensemble des suites de polynômes vérifiant une récurrence de type (2.27) les suites de polynômes $\mathbf{F}_n(z,m)$, $q^n z\mathbf{F}_n(q^{m-1}z,m)$, $\mathbb{L}_{n+1}(z,m)$ et $q^{n-1}z\mathbb{L}_{n-1}(q^{m-1}z,m)$ sont dans cet ordre les q-analogues des suites de polynômes $(U_n(z))_n$, $(zU_n(z))_n$, $(V_{n+1}(z))_n$ et $(zV_{n-1}(z))_n$, alors avec la même méthode on établit la seconde identité du théorème. □

Comme q-analogue de la relation $(1+4z)U_n(z) = 2V_{n+1}(z) - zV_n(z)$ considérons le resultat suivant :

Théorème 10 *Le q-analogue des polynômes de Fibonacci et le q-analogue des polynômes de Lucas satisfont les relations :*

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_n(z,m) + 4z/q\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z,m\right) &= 2\mathbf{L}_{n+1}(z/q,m) - \mathbf{L}_n(z,m),\\
\mathbf{F}_n(z,m) + 4q^n z\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z,m\right) &= 2\mathbb{L}_{n+1}(z,m) - \mathbb{L}_n(z,m).
\end{aligned}$$

Preuve. La première identité se démontre par une méthode similaire à celle utilisée dans la preuve du Théorème 9. On peut l'établir en utilisant respectivement les relations (3.11) et (3.7) comme suit

$$\begin{aligned}
& 2\mathbf{L}_{n+1}\left(\frac{z}{q},m\right) - \mathbf{L}_n(z,m)\\
= {} & 2\left(\mathbf{F}_{n+1}\left(\frac{z}{q},m\right) + 2\frac{z}{q}\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z,m\right)\right) - \left(\mathbf{F}_{n+1}\left(\frac{z}{q},m\right) + z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z,m)\right),\\
= {} & \mathbf{F}_n(z,m) + \frac{4}{q}z\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z,m\right).
\end{aligned}$$

Pour la seconde identité on exploite les relations (3.12) et (3.8)

$$\begin{aligned} & 2\mathbb{L}_{n+1}(z,m) - \mathbb{L}_n(z,m) \\ = \; & 2\left(\mathbf{F}_{n+1}(z,m) + 2q^n z\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z,m\right)\right) - \left(\mathbf{F}_{n+1}(z,m) + q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right)\right), \\ = \; & \mathbf{F}_n(z,m) + 4q^n z\mathbf{F}_n\left(\frac{z}{q},m\right). \end{aligned}$$

□

On conclut cette section par le résultat suivant qui donne deux q-analogues de la relation

$$(1+4z)\,U_n(z) = V_n(z) + 2zV_{n-1}(z). \tag{3.14}$$

Théorème 11 *Avec les suites de polynômes* $(\mathbf{F}_n(z,m))_n$, $(\mathbf{L}_n(z,m))_n$ *et* $(\mathbb{L}_n(z,m))_n$, *la relation (3.14) admet deux q-analogues :*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n(z,m) + 4z\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z,m\right) &= \mathbf{L}_n(z,m) + 2z\mathbf{L}_{n-1}(q^m z,m), \\ \mathbf{F}_n(z,m) + \frac{4}{q}q^n z\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z,m\right) &= \mathbb{L}_n(z,m) + 2q^{n-1}z\mathbb{L}_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right). \end{aligned}$$

Preuve. D'après les identités (3.11) et (3.9), on a

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}_n(z,m) + 2z\mathbf{L}_{n-1}(q^m z,m) \\ = \; & (\mathbf{F}_n(z,m) + 2z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z,m)) + 2z\left(2\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z,m\right) - \mathbf{F}_{n-1}(q^m z,m)\right), \\ = \; & \mathbf{F}_n(z,m) + 4z\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z,m\right), \end{aligned}$$

et en utilisant les identités (3.12) et (3.10) on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{L}_n(z,m) + 2q^{n-1}z\mathbb{L}_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right) \\ = \; & \left(\mathbf{F}_n(z,m) + 2q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right)\right) + 2q^{n-1}z\left(2\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z,m\right) - \mathbf{F}_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right)\right), \\ = \; & \mathbf{F}_n(z,m) + \frac{4}{q}q^n z\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z,m\right). \end{aligned}$$

□

3.4 Identités sommatoires des polynômes q-Lucas.

Dans cette section on évalue quelque sommes liées aux termes de chacune des suites de polynômes $(\mathbf{L}_n(z,m))_n$ et $(\mathbb{L}_n(z,m))_n$. On généralise ainsi les identités que l'on a citées dans le premier chapitre sur des sommes de polynômes de Lucas.

Théorème 12 *La somme des n premiers termes s'exprime comme :*

$$\sum_{i=1}^{n} q^{i} z \mathbf{L}_i\left(q^{m-1}z,m\right) = \mathbf{L}_{n+2}(z,m)-(1+2z), \tag{3.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q^{n-i} z \mathbb{L}_i\left(q^{m+n-i}z,m\right) = \mathbb{L}_{n+2}\left(\frac{z}{q},m\right)-(1+2q^{n}z). \tag{3.16}$$

Preuve. On procède par récurrence sur n.

1) Pour $n=1$, la relation de récurrence (3.5) donne $\mathbf{L}_3(z,m)-(1+2z)=qz\mathbf{L}_1\left(q^{m-1}z,m\right)$.

Si l'égalité (3.15) est vraie jusqu'à l'ordre k alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} q^{i} z \mathbf{L}_i\left(q^{m-1}z,m\right) &= q^{k+1}z\mathbf{L}_{k+1}\left(q^{m-1}z,m\right)+\mathbf{L}_{k+2}(z,m)-(1+2z)\\ &= \mathbf{L}_{k+3}(z,m)-(1+2z).\end{aligned}$$

2) Pour $n=1$, la relation de récurrence (3.6) donne $\mathbb{L}_3(z/q,m)-(1+2qz)=z\mathbb{L}_1(q^{m}z,m)$.

Si l'égalité (3.16) est vraie jusqu'à l'ordre k alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} q^{k+1-i} z \mathbb{L}_i\left(q^{m+k+1-i}z,m\right) &= z\mathbb{L}_{k+1}(q^{m}z,m)+\mathbb{L}_{k+2}(z,m)-\left(1+2q^{k+1}z\right)\\ &= \mathbb{L}_{k+3}(z/q,m)-\left(1+2q^{k+1}z\right).\end{aligned}$$

□

Théorème 13 *La somme des n premiers termes d'ordres pairs :*

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^{(m-1)\binom{i}{2}+(2n-i)i} z^{i}\mathbf{L}_{2(n-i)}\left(q^{i(m-1)}z,m\right) = \mathbf{L}_{2n+1}(z,m)-q^{m\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}}z^{n}, \tag{3.17}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^{(m+1)\binom{i}{2}} z^{i}\mathbb{L}_{2(n-i)}\left(q^{(m+1)i}z,m\right) = \mathbb{L}_{2n+1}\left(\frac{z}{q},m\right)-q^{(m+1)\binom{n}{2}}z^{n}. \tag{3.18}$$

Preuve. On procède par récurrence sur n

1) Pour $n=1$, la récurrence (3.5) donne $\mathbf{L}_2(z,m)=\mathbf{L}_3(z,m)-qz$

Si l'égalité (3.17) est vraie jusqu'à l'ordre k alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k} q^{(m-1)\binom{i}{2}+(2k+2-i)i} z^i \mathbf{L}_{2(k+1-i)}\left(q^{i(m-1)}z,m\right) \\
=\;& \mathbf{L}_{2(k+1)}(z,m)+\sum_{i=1}^{k} q^{(m-1)\binom{i}{2}+(2k+2-i)i} z^i \mathbf{L}_{2(k+1-i)}\left(q^{i(m-1)}z,m\right) \\
=\;& \mathbf{L}_{2(k+1)}(z,m)+\sum_{i=0}^{k-1} q^{(m-1)\binom{i+1}{2}+(2k+1-i)(i+1)} z^{i+1} \mathbf{L}_{2(k-i)}\left(q^{(i+1)(m-1)}z,m\right) \\
=\;& \mathbf{L}_{2(k+1)}(z,m)+q^{2k+1}z\sum_{i=0}^{k-1} q^{(m-1)\binom{i}{2}+(2k-i)i} \left(q^{m-1}z\right)^i \mathbf{L}_{2(k-i)}\left(q^{i(m-1)}\left(q^{m-1}z\right),m\right) \\
=\;& \mathbf{L}_{2(k+1)}(z,m)+q^{2k+1}z\left(\mathbf{L}_{2k+1}\left(q^{m-1}z,m\right)-q^{m\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}}\left(q^{m-1}z\right)^k\right) \\
=\;& \mathbf{L}_{2k+3}(z,m)-q^{m\binom{k+1}{2}+\binom{k+2}{2}}z^{k+1}.
\end{aligned}$$

2) Pour $n=1$, la récurrence (3.6) donne $\mathbb{L}_3(z/q,m)-z=\mathbb{L}_2(z,m)$.

Si l'égalité (3.18) est vraie jusqu'à l'ordre k alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k} q^{(m+1)\binom{i}{2}} z^i \mathbb{L}_{2(k+1-i)}\left(q^{(m+1)i}z,m\right) \\
=\;& \mathbb{L}_{2k+2}(z,m)+\sum_{i=1}^{k} q^{(m+1)\binom{i}{2}} z^i \mathbb{L}_{2(k+1-i)}\left(q^{(m+1)i}z,m\right) \\
=\;& \mathbb{L}_{2k+2}(z,m)+\sum_{i=0}^{k-1} q^{(m+1)\binom{i+1}{2}} z^{i+1} \mathbb{L}_{2(k-i)}\left(q^{(m+1)(i+1)}z,m\right) \\
=\;& \mathbb{L}_{2k+2}(z,m)+z\sum_{i=0}^{k-1} q^{(m+1)\binom{i}{2}} \left(q^{m+1}z\right)^i \mathbb{L}_{2(k-i)}\left(q^{(m+1)i}\left(q^{m+1}z\right),m\right) \\
=\;& \mathbb{L}_{2k+2}(z,m)+z\mathbb{L}_{2k+1}(q^m z,m)-q^{(m+1)\binom{k+1}{2}}z^{k+1} \\
=\;& \mathbb{L}_{2k+3}\left(\frac{z}{q},m\right)-q^{(m+1)\binom{k+1}{2}}z^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 14 *La somme des n premiers termes d'ordres impairs :*

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^{2i(n-1)+(m-3)\binom{i}{2}} z^i \mathbf{L}_{2(n-i)-1}\left(q^{i(m-1)}z,m\right) = \mathbf{L}_{2n}(z,m)-2q^{(m-1)\binom{n}{2}}z^n, \tag{3.19}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^{(m+1)\binom{i}{2}} z^i \mathbb{L}_{2(n-i)-1}\left(q^{(m+1)i}z,m\right) = \mathbb{L}_{2n}\left(\frac{z}{q},m\right)-2q^{(m+1)\binom{n}{2}}z^n. \tag{3.20}$$

Preuve. On procède par récurrence sur n

1) Pour $n=1$, la récurrence (3.5) donne $\mathbf{L}_2(z,m)=\mathbf{L}_3(z,m)-qz$

Si l'égalité (3.19) est vraie jusqu'à l'ordre k alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k} q^{2ik+(m-3)\binom{i}{2}} z^i \mathbf{L}_{2(k-i)+1}\left(q^{i(m-1)}z,m\right)\\
=\;& \mathbf{L}_{2k+1}(z,m)+\sum_{i=1}^{k} q^{2ik+(m-3)\binom{i}{2}} z^i \mathbf{L}_{2(k-i)+1}\left(q^{i(m-1)}z,m\right)\\
=\;& \mathbf{L}_{2k+1}(z,m)+z\sum_{i=0}^{k-1} q^{2(i+1)k+(m-3)\binom{i+1}{2}} z^i \mathbf{L}_{2(k-i)-1}\left(q^{(i+1)(m-1)}z,m\right)\\
=\;& \mathbf{L}_{2k+1}(z,m)+q^{2k}z\sum_{i=0}^{k-1} q^{2i(k-1)+(m-3)\binom{i}{2}} \left(q^{m-1}z\right)^i \mathbf{L}_{2(k-i)-1}\left(q^{i(m-1)}\left(q^{m-1}z\right),m\right)\\
=\;& \mathbf{L}_{2k+1}(z,m)+q^{2k}z\left(\mathbf{L}_{2k}\left(q^{m-1}z,m\right)-2q^{(m-1)\binom{k}{2}}\left(q^{m-1}z\right)^k\right)\\
=\;& \mathbf{L}_{2(k+1)}(z,m)-2q^{(m-1)\binom{k+1}{2}}z^{k+1}.
\end{aligned}$$

2) Pour $n=1$, la récurrence (3.6) donne $\mathbb{L}_3(z/q,m)-z=\mathbb{L}_2(z,m)$.

Si l'égalité (3.20) est vraie jusqu'à l'ordre k alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k} q^{(m+1)\binom{i}{2}} z^i \mathbb{L}_{2(k+1-i)-1}\left(q^{(m+1)i}z,m\right)\\
=\;& \mathbb{L}_{2k+1}(z,m)+\sum_{i=1}^{k} q^{(m+1)\binom{i}{2}} z^i \mathbb{L}_{2(k+1-i)-1}\left(q^{(m+1)i}z,m\right)\\
=\;& \mathbb{L}_{2k+1}(z,m)+\sum_{i=0}^{k-1} q^{(m+1)\binom{i+1}{2}} z^{i+1} \mathbb{L}_{2(k-i)-1}\left(q^{(m+1)(i+1)}z,m\right)\\
=\;& \mathbb{L}_{2k+1}(z,m)+z\sum_{i=0}^{k-1} q^{(m+1)\binom{i}{2}} \left(q^{m+1}z\right)^i \mathbb{L}_{2(k-i)}\left(q^{(m+1)i}\left(q^{m+1}z\right),m\right)\\
=\;& \mathbb{L}_{2k+1}(z,m)+z\left(\mathbb{L}_{2k}\left(q^{m},m\right)-2q^{(m+1)\binom{k}{2}}\left(q^{m+1}z\right)^k\right)\\
=\;& \mathbb{L}_{2k+3}(z/q,m)-2q^{(m+1)\binom{k+1}{2}}z^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 15 *Les sommes alternées des termes de même parité de la suite* $\mathbf{L}_n(z,m)$ *sont données respectivement par*

$$\mathbf{F}_{2n}(z/q,m)=\sum_{i=1}^{n} q^{(m+1)\binom{n-i}{2}}(-z)^{n-i}\mathbf{L}_{2i-1}\left(q^{(m+1)(n-i)}z,m\right), \tag{3.21}$$

$$\mathbf{F}_{2n+1}(z/q,m)-q^{(m+1)\binom{n}{2}}(-z)^n=\sum_{i=1}^{n} q^{(m+1)\binom{n-i}{2}}(-z)^{n-i}\mathbf{L}_{2i}\left(q^{(m+1)(n-i)}z,m\right). \tag{3.22}$$

Les sommes alternées des termes de même parité de la suite $\mathbb{L}_n(z,m)$ sont données respectivement par

$$\mathbf{F}_{2n}(z,m)=\sum_{i=0}^{n-1}q^{2i(n-i)+(m+1)\binom{i}{2}}(-z)^i\,\mathbb{L}_{2(n-i)-1}\left(q^{(m-1)i}z,m\right), \tag{3.23}$$

$$\mathbf{F}_{2n+1}(z,m)-q^{\binom{2n}{2}+(m-3)\binom{n}{2}}(-z)^n=\sum_{i=0}^{n-1}q^{(2n-i)i+(m-1)\binom{i}{2}}(-z)^i\,\mathbb{L}_{2(n-i)}\left(q^{(m-1)i}z,m\right). \tag{3.24}$$

Preuve. On procède par récurrence sur n

1) Pour $n=1$, la relation (3.7) donne : $\mathbf{L}_1(z,m)=\mathbf{F}_2(z/q,m)+z\mathbf{F}_0(q^m z,m)=\mathbf{F}_2(z/q,m)$.

Si l'égalité (3.21) est vraie jusqu'à l'ordre k alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}q^{(m+1)\binom{k-i+1}{2}}(-z)^{k+1-i}\,\mathbf{L}_{2i-1}\left(q^{(m+1)(k+1-i)}z,m\right)&=-z\mathbf{F}_{2k}(q^m z,m)+\mathbf{L}_{2k+1}(z,m)\\&=\mathbf{F}_{2k+2}(z/q,m).\end{aligned}$$

2) Pour $n=2$, la relation (3.7) devient : $\mathbf{L}_2(z,m)=\mathbf{F}_3(z/q,m)+z\mathbf{F}_1(q^m z,m)=\mathbf{F}_3\left(\frac{z}{q},m\right)+z$.

Si l'égalité (3.22) est vraie jusqu'à l'ordre k alors

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k+1}q^{(m+1)\binom{k+1-i}{2}}(-z)^{k+1-i}\,\mathbf{L}_{2i}\left(q^{(m+1)(k+1-i)}z,m\right)\\=&\ -z\left(\mathbf{F}_{2k+1}(q^m z,m)-q^{(m+1)\binom{k}{2}}\left(-q^{m+1}z\right)^k\right)+\mathbf{L}_{2k+2}(z,m)\\=&\ \mathbf{F}_{2k+3}(z/q,m)-q^{(m+1)\binom{k+1}{2}}(-z)^{k+1}.\end{aligned}$$

3) Pour $n=1$, la relation (3.8) devient : $\mathbb{L}_1(z,m)=\mathbf{F}_2(z,m)+q^0 z\mathbf{F}_0(q^{m-1}z,m)=\mathbf{F}_2(z,m)$.

Si l'égalité (3.23) est vraie jusqu'à l'ordre k alors

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{k}q^{2i(k+1-i)+(m+1)\binom{i}{2}}(-z)^i\,\mathbb{L}_{2(k+1-i)-1}\left(q^{(m-1)i}z,m\right)\\=&\ \mathbb{L}_{2k+1}(z,m)+\sum_{i=1}^{k}q^{2i(k+1-i)+(m+1)\binom{i}{2}}(-z)^i\,\mathbb{L}_{2(k+1-i)-1}\left(q^{(m-1)i}z,m\right)\\=&\ \mathbb{L}_{2k+1}(z,m)+\sum_{i=0}^{k-1}q^{2(i+1)(k-i)+(m+1)\binom{i+1}{2}}(-z)^{i+1}\,\mathbb{L}_{2(k-i)-1}\left(q^{(m-1)(i+1)}z,m\right)\\=&\ \mathbb{L}_{2k+1}(z,m)-q^{2k}z\mathbf{F}_{2k}\left(q^{m-1}z,m\right)\\=&\ \mathbf{F}_{2k+2}(z,m).\end{aligned}$$

4) Pour $n=2$, la relation (3.8) devient : $\mathbb{L}_2(z,m)=\mathbf{F}_3(z,m)+q^1 z\mathbf{F}_1(q^{m-1}z,m)=\mathbf{F}_3(z,m)+qz$.

Si l'égalité (3.24) est vraie jusqu'à l'ordre k alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k} q^{(2k+2-i)i+(m-1)\binom{i}{2}} (-z)^i \mathbb{L}_{2(k+1-i)} \left(q^{(m-1)i} z, m\right) \\
= \;& \mathbb{L}_{2k+2}(z,m) - \sum_{i=1}^{k} q^{(2k+2-i)i+(m-1)\binom{i}{2}} (-z)^i \mathbb{L}_{2(k+1-i)} \left(q^{(m-1)i} z, m\right) \\
= \;& \mathbb{L}_{2k+2}(z,m) - \sum_{i=0}^{k-1} q^{(2k+1-i)(i+1)+(m-1)\binom{i+1}{2}} (-z)^{i+1} \mathbb{L}_{2(k-i)} \left(q^{(m-1)(i+1)} z, m\right) \\
= \;& \mathbb{L}_{2k+2}(z,m) - q^{2k+1} z \left(\mathbf{F}_{2k+1}\left(q^{m-1}z\right) - q^{\binom{2k}{2}+(m-3)\binom{k}{2}} \left(-q^{m-1}z\right)^k\right) \\
= \;& \mathbf{F}_{2k+3}(z,m) - q^{\binom{2k+2}{2}+(m-3)\binom{k+1}{2}} (-z)^{k+1} .
\end{aligned}$$

□

3.5 Convolution avec les coefficients binomiaux

La formule $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k}$ est généralisée par Cigler [21], lequel montre les deux identités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{2n}(z,m) &= \sum_{i=0}^{n} q^{(m-1)\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q \left(q^{n-1}z\right)^i \mathbf{F}_{n-i}\left(q^{(m-1)i}z, m\right), \\
\mathbf{F}_{2n}(z,m) &= \sum_{i=0}^{n} q^{\binom{i+1}{2}+m\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q z^i \mathbf{F}_{n-i}\left(q^{mi+n}z, m\right).
\end{aligned}$$

Les nombres de Lucas satisfont la relation $L_{2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} L_{n-i}$. Cette propriété se généralise au q-analogue des polynômes de Lucas de première espèce et au q-analogue des polynômes de Lucas de deuxième espèce respectivement par :

Proposition 16

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{2n}(z,m) &= \sum_{i=0}^{n} q^{(m-1)\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q \left(q^{n-1}z\right)^i \mathbf{L}_{n-i}\left(q^{(m-1)i}z, m\right), \\
\mathbb{L}_{2n}(z,m) &= \sum_{i=0}^{n} q^{\binom{i+1}{2}+m\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q z^i \mathbb{L}_{n-i}\left(q^{mi+n}z, m\right).
\end{aligned}$$

D'une façon plus générale, on montre le résultat suivant.

Théorème 17 *Pour tout $k \geq 1$, on a*

$$\mathbf{L}_{n+k}(z,m) = \sum_{i=0}^{k} q^{(m-1)\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q \left(q^{n-1}z\right)^i \mathbf{L}_{n-i}\left(q^{(m-1)i}z,m\right), \tag{3.25}$$

$$\mathbb{L}_{n+k}(z,m) = \sum_{i=0}^{k} q^{\binom{i+1}{2}+m\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q z^i \mathbb{L}_{n-i}\left(q^{mi+k}z,m\right). \tag{3.26}$$

Preuve. On procède par récurrence sur k.

1) Pour $k=1$,

$$\mathbf{L}_n(z,m) + q^{n-1}z\mathbf{L}_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right) = \mathbf{L}_{n+1}(z,m),$$

c'est la relation de récurrence (3.5).

Si l'identité (3.25) est vraie jusqu'à l'ordre t alors

$$\begin{aligned}
& \mathbf{L}_{n+t}(z,m) + q^{n+t-1}z\mathbf{L}_{n+t-1}\left(q^{m-1}z,m\right) \\
= & \sum_{i=0}^{t} q^{(m-1)\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix}_q \left(q^{n-1}z\right)^i \mathbf{L}_{n-i}\left(q^{(m-1)i}z,m\right) + \\
& q^{n+t-1}z \sum_{i=0}^{t} q^{(m-1)\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix}_q \left(q^{m+n-3}z\right)^i \mathbf{L}_{n-1-i}\left(q^{(m-1)(i+1)}z,m\right) \\
= & \sum_{i=0}^{t} q^{(m-1)\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix}_q \left(q^{n-1}z\right)^i \mathbf{L}_{n-i}\left(q^{(m-1)i}z,m\right) + \\
& q^{n+t-1}z \sum_{i=0}^{t} q^{(m-1)\binom{i-1}{2}} \begin{bmatrix} t \\ i-1 \end{bmatrix}_q \left(q^{m+n-3}z\right)^{i-1} \mathbf{L}_{n-i}\left(q^{(m-1)i}z,m\right) \\
= & \sum_{i=0}^{t} \left(\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix}_q + q^{t-i+1} \begin{bmatrix} t \\ i-1 \end{bmatrix}_q \right) q^{(m-1)\binom{i}{2}} \left(q^{n-1}z\right)^i \mathbf{L}_{n-i}\left(q^{(m-1)i}z,m\right),
\end{aligned}$$

ainsi

$$\mathbf{L}_{n+t+1}(z,m) = \sum_{i=0}^{t+1} q^{m\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} t+1 \\ i \end{bmatrix}_q \left(q^{n-1}z\right)^i \mathbf{L}_{n-i}\left(q^{(m-1)i}z,m\right).$$

2) Pour $k=1$,

$$\mathbb{L}_n(qz,m) + qz\mathbb{L}_{n-1}\left(q^{m+1}z,m\right) = \mathbb{L}_{n+1}(z,m)$$

c'est la relation de récurrence (3.6).

Si l'identité (3.26) est vraie jusqu'à l'ordre t alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{L}_{n+t}(qz,m)+qz\mathbb{L}_{n+t-1}\left(q^{m+1}z,m\right)\\
=&\sum_{i=0}^{t}q^{\binom{i+1}{2}+m\binom{i}{2}}\begin{bmatrix}t\\i\end{bmatrix}_q(qz)^i\,\mathbb{L}_{n-i}\left(q^{mi+t+1}z,m\right)+\\
&qz\sum_{i=0}^{t}q^{\binom{i+1}{2}+m\binom{i}{2}}\begin{bmatrix}t\\i\end{bmatrix}_q\left(q^{m+1}z\right)^i\,\mathbb{L}_{n-1-i}\left(q^{mi+t+1+m}z,m\right)\\
=&\sum_{i=0}^{t}q^{\binom{i+1}{2}+m\binom{i}{2}}\begin{bmatrix}t\\i\end{bmatrix}_q(qz)^i\,\mathbb{L}_{n-i}\left(q^{mi+t+1}z,m\right)+\\
&\sum_{i=0}^{t}q^{\binom{i}{2}+i+m\binom{i-1}{2}+m(i-1)}\begin{bmatrix}t\\i-1\end{bmatrix}_q(qz)^i\,\mathbb{L}_{n-i}\left(q^{mi+t+1}z,m\right)\\
=&\sum_{i=0}^{t}q^{\binom{i+1}{2}+m\binom{i}{2}}\left(\begin{bmatrix}t\\i\end{bmatrix}_q q^i+\begin{bmatrix}t\\i-1\end{bmatrix}_q\right)z^i\mathbb{L}_{n-i}\left(q^{mi+t+1}z,m\right),
\end{aligned}$$

ainsi

$$\mathbb{L}_{n+t+1}(z,m)=\sum_{i=0}^{t+1}q^{\binom{i+1}{2}+m\binom{i}{2}}\begin{bmatrix}t+1\\i\end{bmatrix}_q z^i\mathbb{L}_{n-i}\left(q^{mi+t+1}z,m\right).$$

□

3.6 Extension du q-analogue des polynômes de Lucas aux indices négatifs

Dans le chapitre 2 on a vu que le q-analogue de la suite des polynômes de Fibonacci $\mathbf{F}_n(z,m)$ se prolonge aux indices négatifs, pour $z\neq 0$, par

$$\mathbf{F}_{-n}(z,m)=(-1)^{n-1}\,q^{-m\binom{n}{2}}\frac{\mathbf{F}_n\left(q^{-mn}z,m\right)}{\left(q^{-mn}z\right)^n}. \tag{3.27}$$

En ce qui concerne le q-analogue des polynômes de Lucas, les relations de récurrence (3.5) et (3.6) nous suggèrent ce qui suit.

Théorème 18 *Pour tout $n\geq 0$,et pour $z\neq 0$*

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{-n}(z,m)&=(-1)^n\,q^{-m\binom{n}{2}}\frac{\mathbb{L}_n\left(q^{-mn}z,m\right)}{\left(q^{-mn}z\right)^n},\\
\mathbb{L}_{-n}(z,m)&=(-1)^n\,q^{-m\binom{n}{2}}\frac{\mathbf{L}_n\left(q^{-mn}z,m\right)}{\left(q^{-mn}z\right)^n}.
\end{aligned}$$

Preuve. Pour $n \geq 0$, considérons les fractions rationnelles

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{-n}(z) &= (-1)^n q^{-m\binom{n}{2}} \frac{\mathbb{L}_n(q^{-mn}z, m)}{(q^{-mn}z)^n}, \\
\mathbf{Q}_{-n}(z) &= (-1)^n q^{-m\binom{n}{2}} \frac{\mathbf{L}_n(q^{-mn}z, m)}{(q^{-mn}z)^n}.
\end{aligned}$$

1) On a

$$\mathbf{P}_{-1}(z) = \frac{-q^m}{z}, \quad \mathbf{P}_0(z) = 2, \quad \mathbf{P}_{-n}(z) + q^{-n-1} z \mathbf{P}_{-n-1}\left(q^{m-1}z\right) = \mathbf{P}_{-n+1}(z).$$

En effet

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}_{-n}(z) + q^{-n-1} z \mathbf{P}_{-n-1}\left(q^{m-1}z\right) \\
= {} & (-1)^n q^{-m\binom{n}{2}} \frac{\mathbb{L}_n(q^{-mn}z, m)}{(q^{-mn}z)^n} + q^{-n-1} z (-1)^{n+1} q^{-m\binom{n+1}{2}} \frac{\mathbb{L}_n(q^{-mn-1}z, m)}{(q^{-mn-1}z)^{n+1}} \\
= {} & (-1)^{n-1} q^{-m\binom{n}{2}} \frac{1}{(q^{-mn}z)^n} \left(\mathbb{L}_{n+1}\left(q^{-mn-1}z, m\right) - \mathbb{L}_n\left(q^{-mn}z, m\right)\right) \\
= {} & (-1)^{n-1} q^{-m\binom{n}{2}} \frac{\mathbb{L}_n(q^{-mn+m}z, m)}{(q^{-mn}z)^{n-1}} \\
= {} & \mathbf{P}_{-n+1}(z).
\end{aligned}$$

Notons que $\mathbf{P}_0(z) = \mathbf{L}_0(z, m)$ et $\mathbf{P}_0(z) + q^{-1} z \mathbf{P}_{-1}(q^{m-1}z) = \mathbf{L}_1(z, m)$ alors $\mathbf{P}_{-n}(z) = \mathbf{L}_{-n}(z, m)$.

2) On a

$$\mathbf{Q}_{-1}(z) = \frac{-q^m}{z}, \quad \mathbf{Q}_0(z) = 2, \quad \mathbf{Q}_{-n}(z) + z \mathbf{Q}_{-n-1}(q^m z) = \mathbf{Q}_{-n+1}\left(\frac{z}{q}\right).$$

En effet

$$\begin{aligned}
& \mathbf{Q}_{-n}(z) + z \mathbf{Q}_{-n-1}(q^m z) \\
= {} & (-1)^n q^{-m\binom{n}{2}} \frac{\mathbf{L}_n(q^{-mn}z, m)}{(q^{-mn}z)^n} + z (-1)^{n+1} q^{-m\binom{n+1}{2}} \frac{\mathbf{L}_{n+1}(q^{-mn}z, m)}{(q^{-mn}z)^{n+1}} \\
= {} & (-1)^{n-1} q^{-m\binom{n}{2}} \frac{1}{(q^{-mn}z)^n} \left(\mathbf{L}_{n+1}\left(q^{-mn}z, m\right) - \mathbf{L}_n\left(q^{-mn}z, m\right)\right) \\
= {} & (-1)^{n-1} \frac{\mathbf{L}_{n-1}(q^{-mn+m-1}z, m)}{(q^{-mn}z)^{n-1}} q^{n-1} \\
= {} & \mathbf{Q}_{-n+1}(z/q).
\end{aligned}$$

Notons que $\mathbf{Q}_0(z) = \mathbb{L}_0(z, m)$ et $\mathbf{Q}_0(z) + z\mathbf{Q}_{-1}(q^m z) = \mathbb{L}_1(z/q, m)$ ainsi $\mathbf{Q}_{-n}(z) = \mathbb{L}_{-n}(z, m)$.
□

D'autres propriétés liées aux suites seront présentées dans le prochain chapitre après avoir montré des propriétés plus générales.

Chapitre 4

Les q-déformations des suites récurrentes linéaires d'ordre deux

4.1 Introduction

L'une des propriétés importantes satisfaites par les nombres de Fibonacci est la relation

$$G_{n+k} = G_k \mathbf{F}_{n-1} + G_{k+1} \mathbf{F}_n, \tag{4.1}$$

qui est vraie pour toute suite G_n vérifiant $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$, avec des conditions initiales quelconques.

Afin de généraliser la relation (4.1) pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci proposé par Cigler $\mathbf{F}_n(z,0)$ et pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci proposé par Carlitz $\mathbf{F}_n(z,1)$, on utilisera la proposition unificatrice du q-analogue des polynômes de Fibonacci $\mathbf{F}_n(z,m)$. Par la suite, avec les cas particuliers $m = 0$ et $m = 1$ on généralisera les identités $\mathbf{F}_{2n+1} = \mathbf{F}_n^2 + \mathbf{F}_{n+1}^2$ et $\mathbf{F}_{2n} = \mathbf{F}_n \mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n$ pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci $\mathbf{F}_n(z,0)$ et pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci $\mathbf{F}_n(z,1)$. On conclut avec une application sur le q-analogue des polynômes de Lucas que l'on a présenté dans le chapitre trois. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [11], et dans [12] pour le cas particulier $m = 0$.

4.2 Le cas de la proposition unificatrice du q-analogue

Notation 19 *Nous posons*

$$\Omega_m = \left\{ U = (U_n(z))_{n\in\mathbb{Z}} : U_{n+2}(z) = U_{n+1}(z) + q^n z U_n\left(q^{m-1} z\right) \ \textit{avec}\ U_0(z), U_1(z) \in \mathbb{R}[z] \right\}.$$

$$\Theta_m = \left\{ U = (U_n(z))_{n\in\mathbb{Z}} : U_{n+2}(z) = U_{n+1}(qz) + qz U_n\left(q^{m+1} z\right) \ \textit{avec}\ U_0(z), U_1(z) \in \mathbb{R}[z] \right\}.$$

et désignons par $E, z, Q_m, \mathbb{Q}$ *les operateurs définis par :* $(EU)_n(z) = U_{n+1}(z), (zU)_n(z) = zU_n(z), (Q_mU)_n(z) = U_n(q^m z), (\mathbb{Q}U)_n(z) = q^n U_n(z)$.

et à toute fonction $p(z) = \sum_{i=l}^{t} a_i z^i$ *où* $l, t \in \mathbb{Z}$, *nous associons*

$$\widetilde{p}(z) = \sum_{i=l}^{t} a_i z^i Q_{m-1}^i \quad \text{et} \quad \widehat{p}(z) = \sum_{i=l}^{t} a_i z^i \mathbb{Q}^i.$$

Remarque 20 *Avec les applications* $\Psi : \Omega_m \longrightarrow (\mathbb{R}[z])^2$ *et* $\Psi : \Theta_m \longrightarrow (\mathbb{R}[z])^2$ *telles que* $\Psi(U) = \binom{U_0(z)}{U_1(z)}$, *chacun des ensembles* Ω_m *et* Θ_m *muni de l'addition des suites et la multiplication par des réels est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel isomorphe à* $(\mathbb{R}[z])^2$.

Proposition 21 *Le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* Ω_m *est stable pour les operateurs* $EQ^{-1} = EQ_{-1}$ *et* zQ_{m-1}.

Preuve. Pour $U \in \Omega_m$, considérons les éléments $a = EQ^{-1}U$ et $b = zQ_{m-1}U$.

Comme pour tout entier n on a

$$\begin{aligned} a_{n+1}(z) + q^n z a_n\left(q^{m-1}z\right) &= U_{n+2}(z/q) + q^{n+1} z/q U_{n+1}\left(q^{m-2}z\right) = U_{n+3}(z/q) = a_{n+2}(z), \\ b_{n+1}(z) + q^n z b_n\left(q^{m-1}z\right) &= z\left(U_{n+1}\left(q^{m-1}z\right) + q^n q^{m-1} z U_n\left(q^{2m-2}z\right)\right) = zU_{n+2}\left(q^{m-1}z\right) = b_{n+2}(z). \end{aligned}$$

Alors les éléments a et b sont dans Ω_m. □

Proposition 22 *Le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* Θ_m *est stable pour les operateurs* E *et* $\mathbb{Q}zQ_{m-1}$.

Preuve. Pour $U \in \Theta_m$ considérons les éléments $c = EU$ et $d = \mathbb{Q}zQ_{m-1}U$.

Comme pour tout entier n on a

$$\begin{aligned} c_{n+1}(z) + zc_n(q^m z) &= U_{n+2}(z) + zU_{n+1}(q^m z) = U_{n+3}(z/q) = c_{n+2}(z/q), \\ d_{n+1}(z) + zd_n(q^m z) &= z\left(q^{n+1}U_{n+1}\left(q^{m-1}z\right) + q^{n+1}q^{m-1}zU_n\left(q^{2m-1}z\right)\right) \\ &= q^{n+1}zU_{n+2}\left(q^{m-2}z\right) \\ &= d_{n+2}(z/q). \end{aligned}$$

Alors les éléments $c_n(z)$ et $d_n(z)$ sont dans Θ_m. □

Proposition 23 *L'isomorphisme* $\Psi : \Omega_m \longrightarrow (\mathbb{R}[z])^2$ *satisfait*

$$\Psi^{-1}\left(z^i \Psi(U)\right) = z^i Q_{m-1}^i U \text{ pour tout } U \in \Omega_m \text{ tel que } \Psi(U) \in \mathbb{R}^2, \tag{4.2}$$

où $z\binom{p(z)}{t(z)} = \binom{zp(z)}{zt(z)}$.

Preuve. Pour $U \in \Omega_m$ tel que $\Psi(U) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\Psi\left(z^i Q_{m-1}^i U\right) = \Psi\left(z^i U\right) = \begin{pmatrix} z^i U_0(z) \\ z^i U_1(z) \end{pmatrix} = z^i \Psi(U).$$

Donc $z^i Q_{m-1}^i U = \Psi^{-1}(z^i \Psi(U))$, car $\Psi^{-1}(z^i \Psi(U)) \in \Omega_m$ et d'après la Proposition 21 on a $z^i Q_{m-1}^i U \in \Omega_m$. $\square$

Proposition 24 *L'isomorphisme $\Psi : \Theta_m \longrightarrow (\mathbb{R}[z])^2$ satisfait*

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}\left((qz)^i \Psi(U)\right) &= z^i \mathbb{Q}^i Q_{m-1}^i U \text{ pour tout } U \in \Theta_m \text{ tel que } \Psi(U) \in \{0\} \times \mathbb{R}, \quad (4.3) \\ \Psi^{-1}\left(z^i \Psi(U)\right) &= z^i \mathbb{Q}^i Q_{m-1}^i U \text{ pour tout } U \in \Theta_m \text{ tel que } \Psi(U) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \quad (4.4) \end{aligned}$$

où $z\binom{p(z)}{t(z)} = \binom{zp(z)}{zt(z)}$.

Preuve. Pour $U \in \Theta_m$ tel que $\Psi(U) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ on a

$$\Psi\left(z^i \mathbb{Q}^i Q_{m-1}^i U\right) = \Psi\left(z^i \mathbb{Q}^i U\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ (qz)^i U_1 \end{pmatrix} = (qz)^i \Psi(U).$$

Donc $\Psi^{-1}\left((qz)^i \Psi(U)\right) = z^i \mathbb{Q}^i Q_{m-1}^i U$, car $\Psi^{-1}\left((qz)^i \Psi(U)\right) \in \Theta_m$ et d'après la Proposition 22 on a $z^i \mathbb{Q}^i Q_{m-1}^i U \in \Theta_m$.

Pour $U \in \Theta_m$ tel que $\Psi(U) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ on a

$$\Psi\left(z^i \mathbb{Q}^i Q_{m-1}^i U\right) = \Psi\left(z^i \mathbb{Q}^i U\right) = \begin{pmatrix} z^i U_0 \\ 0 \end{pmatrix} = z^i \Psi(U).$$

Donc $\Psi^{-1}(z^i \Psi(U)) = z^i \mathbb{Q}^i Q_{m-1}^i U$, car $\Psi^{-1}(z^i \Psi(U)) \in \Theta_m$ et d'après la Proposition 22, $z^i \mathbb{Q}^i Q_{m-1}^i U \in \Theta_m$. $\square$

Remarque 25 *Les éléments $z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z, m)$ et $\mathbf{F}_n(z,m)$ forment une base du sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\{U \in \Omega_m \quad \text{tel que} \quad \Psi(U) \in \mathbb{R}^2\}$ puisque*

$$\Psi(z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z, m)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \Psi(\mathbf{F}_n(z,m)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les éléments $q^{n-1} z\mathbf{F}_{n-1}(q^{m-1} z, m)$ et $\mathbf{F}_n(z,m)$ forment une base du sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\{U \in \Theta_m \quad \text{tel que} \quad \Psi(U) \in \mathbb{R}^2\}$ puisque

$$\Psi\left(q^{n-1} z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^{m-1} z, m\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \Psi(\mathbf{F}_n(z,m)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n \geq 0$, il est facile de voir que le terme général d'une suite $G \in \Omega_m \cup \Theta_m$ est un polynômes. Pour $n < 0$, on montre le résultat suivant :

Proposition 26 *Soit $G \in \Omega_m \cup \Theta_m$, pour tout entier négatif n, on a*

$$G_n(z) = p(z) + q\left(\frac{1}{z}\right),$$

où $p(z)$ et $q(z)$ sont deux polynômes donnés.

Preuve. Pour $G \in \Omega_m$ avec $G_0(z) = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i z^i$ et $G_1(z) = \sum_{i=0}^{r} \beta_i z^i$, on a $\Psi(U) = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i z^i \binom{1}{0} + \sum_{i=0}^{r} \beta_i z^i \binom{0}{1} = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i z^i \Psi(z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z, m)) + \sum_{i=0}^{r} \beta_i z^i \Psi(\mathbf{F}_n(z, m))$ (voir la Remarque 25).

D'aprés la Proposition 24 :

$(U_n(z))_{n\in\mathbb{Z}} = \Psi^{-1}\left(\sum_{i=0}^{s} \alpha_i z^i \Psi(z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z, m)) + \sum_{i=0}^{r} \beta_i z^i \Psi(\mathbf{F}_n(z, m))\right) = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i z^i Q_m^i (z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z, m$
$\sum_{i=0}^{r} \beta_i z^i Q_m^i (\mathbf{F}_n(z, m))_{n\in\mathbb{Z}}$.

L' expression (3.27) nous donne alors le résultat.

On utilise une méthode similaire pour $G \in \Theta_m$. □

On peut énoncer maintenant le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 27 *Pour $G_n(z) \in \Omega_m$, (resp. $G_n(z) \in \Theta_m$), on a*

$$\begin{aligned} E^k Q_{-k}(G_n(z))_{n\in\mathbb{Z}} &= \widetilde{G}_k\left(z/q^k\right)(z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z, m))_{n\in\mathbb{Z}} + \widetilde{G}_{k+1}\left(z/q^k\right)(\mathbf{F}_n(z, m))_{n\in\mathbb{Z}}, \\ E^k(G_n(z))_{n\in\mathbb{Z}} &= \widehat{\widehat{G}}_k(z)\left(q^{n-1} z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^{m-1} z, m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}} + \widehat{\widehat{G}}_{k+1}(z/q)(\mathbf{F}_n(z, m))_{n\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Preuve. 1) Soit $G \in \Omega_m$ et $k \in \mathbb{Z}$, d'après la Proposition 26 posons $G_k(z) = \sum_{i=r}^{s} \alpha_i z^i$ et $G_{k+1}(z) = \sum_{i=l}^{t} \beta_i z^i$, où $r, s, l, t \in \mathbb{Z}$.

D'après la Proposition 21 les deux suites $E^k Q_{-k}(G_n(z))_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\widetilde{G}_k\left(z/q^k\right)(z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z, m))_{n\in\mathbb{Z}}$ $+\widetilde{G}_{k+1}\left(z/q^k\right)(\mathbf{F}_n(z, m))_{n\in\mathbb{Z}}$ sont dans Ω_m. Ainsi ces deux suites coïncident si l'égalité suivante est satisfaite

$$\Psi\left(E^k Q_{-k}\left((G_n(z))_{n\in\mathbb{Z}}\right)\right) = \Psi\left(\widetilde{G}_k\left(z/q^k\right)(z\mathbf{F}_{n-1}(z))_{n\in\mathbb{Z}} + \widetilde{G}_{k+1}\left(z/q^k\right)(\mathbf{F}_n(z))_{n\in\mathbb{Z}}\right).$$

On a $\Psi\left(E^k Q^{-k}\left((G_n(z))_{n\in\mathbb{Z}}\right)\right) = \binom{G_k\left(z/q^k\right)}{G_{k+1}\left(z/q^k\right)} = \sum_{i=r}^{s} \alpha_i \left(z/q^k\right)^i \binom{1}{0} + \sum_{i=l}^{t} \beta_i \left(z/q^k\right)^i \binom{0}{1}$, et on a

$$\begin{aligned} &\Psi\left(\widetilde{G}_k\left(z/q^k\right)(z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z, m))_{n\in\mathbb{Z}} + \widetilde{G}_{k+1}\left(z/q^k\right)(\mathbf{F}_n(z, m))_{n\in\mathbb{Z}}\right) \\ = \ &\Psi\left(\sum_{i=r}^{s} \alpha_i \left(z/q^k\right)^i Q_{m-1}^i (z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z, m))_{n\in\mathbb{Z}} + \sum_{i=l}^{t} \beta_i \left(z/q^k\right)^i Q_{m-1}^i (\mathbf{F}_n(z, m))_{n\in\mathbb{Z}}\right) \\ = \ &\sum_{i=r}^{s} \frac{\alpha_i}{q^{ik}} \Psi\left(z^i Q_{m-1}^i (z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z, m))_{n\in\mathbb{Z}}\right) + \sum_{i=l}^{t} \frac{\beta_i}{q^{ik}} \Psi\left(z^i Q_{m-1}^i (\mathbf{F}(z, m))_{n\in\mathbb{Z}}\right). \end{aligned}$$

Selon la relation (4.2) on a

$$\begin{aligned}
&\Psi\left(\widetilde{G}_k\left(z/q^k\right)\left(z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^m z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}+\widetilde{G}_{k+1}\left(z/q^k\right)\left(\mathbf{F}_n\left(z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right)\\
=&\sum_{i=r}^{s}\alpha_i\left(z/q^k\right)^i\Psi\left(\left(z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^m z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right)+\sum_{i=l}^{t}\beta_i\left(z/q^k\right)^i\Psi\left(\left(\mathbf{F}_n\left(z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right)\\
=&\sum_{i=r}^{s}\alpha_i\left(z/q^k\right)^i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sum_{i=l}^{t}\beta_i\left(z/q^k\right)^i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2) Soit $G\in\Omega_m$ et $k\in\mathbb{Z}$, d'après la Proposition 26 posons $G_k\left(z\right)=\sum_{i=r}^{s}\alpha_i z^i$ et $G_{k+1}\left(z\right)=\sum_{i=l}^{t}\beta_i z^i$, où $r,s,l,t\in\mathbb{Z}$.

D'après la Proposition 21, les deux suites $E^k\left(G_n\left(z\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\widehat{\widehat{G}}_k\left(z\right)\left(q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(z\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}+\widehat{\widehat{G}}_{k+1}\left(\frac{z}{q}\right)\left(\mathbf{F}_n\left(z\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont dans Ω_m. Ainsi ces deux suites coïncident si l'égalité suivante est satisfaite

$$\Psi\left(E^k\left(G_n\left(z\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right)=\Psi\left(\widehat{\widehat{G}}_k\left(z\right)\left(q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(z\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}+\widehat{\widehat{G}}_{k+1}\left(\frac{z}{q}\right)\left(\mathbf{F}_n\left(z\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right).$$

On a $\Psi\left(E^k\left(G_n\left(z\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right)=\binom{G_k(z)}{G_{k+1}(z)}=\sum_{i=r}^{s}\alpha_i z^i\binom{1}{0}+\sum_{i=0}^{t}\beta_i z^i\binom{0}{1}$, et on a

$$\begin{aligned}
&\Psi\left(\widehat{\widehat{G}}_k\left(z\right)\left(q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}+\widehat{\widehat{G}}_{k+1}\left(\frac{z}{q}\right)\left(\mathbf{F}_n\left(z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right)\\
=&\Psi\left(\sum_{i=r}^{s}\alpha_i z^i\mathbb{Q}^iQ_{m-1}^i\left(q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}+\sum_{i=l}^{t}\beta_i\left(\frac{z}{q}\right)^i\mathbb{Q}^iQ_{m-1}^i\left(\mathbf{F}_n\left(z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right)\\
=&\sum_{i=r}^{s}\alpha_i\Psi\left(z^i\mathbb{Q}^iQ_{m-1}^i\left(q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right)+\sum_{i=l}^{t}\beta_i\Psi\left(\left(\frac{z}{q}\right)^i\mathbb{Q}^iQ_{m-1}^i\left(\mathbf{F}_n\left(z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right).
\end{aligned}$$

Selon les relations (4.3) et (4.4) on a

$$\begin{aligned}
&\Psi\left(\widehat{\widehat{G}}_k\left(z\right)\left(q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}+\widehat{\widehat{G}}_{k+1}\left(\frac{z}{q}\right)\left(\mathbf{F}_n\left(z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right)\\
=&\sum_{i=r}^{s}\alpha_i z^i\Psi\left(\left(q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right)+\sum_{i=l}^{t}\beta_i z^i\Psi\left(\left(\mathbf{F}_n\left(z,m\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right)\\
=&\sum_{i=r}^{s}\alpha_i z^i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sum_{i=l}^{t}\beta_i z^i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

En particulier, pour un entier fixé k, on déduit les résultats suivants :

Corollaire 28 *Pour $G\in\Omega_1$ (resp. $G\in\Omega_2$), on a pour $n\geq 0$;*

$$G_{k+n}\left(z/q^k\right)=G_k\left(z/q^k\right)*z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^m z,m\right)+G_{k+1}\left(z/q^k\right)*\mathbf{F}_n\left(z,m\right),\tag{4.5}$$

$$G_{k+n}\left(z\right)=G_k\left(z\right)\Delta q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right)+G_{k+1}\left(\frac{z}{q}\right)\Delta\mathbf{F}_n\left(z,m\right).\tag{4.6}$$

où $\left(\sum_{i=c}^{d}\alpha_i z^i\right)*U_n(z)=\sum_{i=c}^{d}\alpha_i z^i U_n\left(q^{(m-1)i}z\right)$ *et* $\left(\sum_{i=c}^{d}\alpha_i z^i\right)\Delta U_n(z)=\sum_{i=c}^{d}\alpha_i z^i q^{ni}U_n\left(q^{(m-1)i}z\right)$ *avec* $c,d\in\mathbb{Z}$.

Corollaire 29 *On donne l'expression des termes d'indice négatifs, pour* $G\in\Omega_m$ *(resp.* $G\in\Theta_m$*), pour* $n\geq 0$ *:*

$$\begin{aligned} G_{k-n}\left(z/q^k\right) &= (-1)^n q^{m\binom{n+1}{2}}\left(G_k\left(z/q^k\right)*\frac{\mathbf{F}_{n+1}\left(q^{-mn}z,m\right)}{z^n}-G_{k+1}\left(z/q^k\right)*\frac{\mathbf{F}_n\left(q^{-mn}z,m\right)}{z^n}\right),\\ G_{k-n}(z) &= (-1)^n q^{m\binom{n+1}{2}}\left(G_k(z)\,\Delta\frac{\mathbf{F}_{n+1}\left(q^{-mn-1}z,m\right)}{z^n}-G_{k+1}\left(\frac{z}{q}\right)\Delta\frac{\mathbf{F}_n\left(q^{-mn}z,m\right)}{z^n}\right). \end{aligned}$$

4.3 Le cas du q-analogue proposé par Carlitz

Avec l'approche de Carlitz, on remarque pour le cas particulier $m=1$ que si $p(z)=\sum_{i=c}^{d}\alpha_i z^i$ alors pour tout $n\geq 0$, on a $p(z)*U_n(z)=p(z)\,U_n(z)$ et $p(z)\,\Delta U_n(z)=p(q^n z)\,U_n(z)$, ainsi les relations (4.5) et (4.6) deviennent respectivement comme suit :

Pour $G\in\Omega_1$ et $G\in\Theta_1$ respectivement on a pour tout $n\geq 0$,

$$G_{k+n}\left(z/q^k\right) = G_k\left(z/q^k\right)z\mathbf{F}_{n-1}(qz,1)+G_{k+1}\left(z/q^k\right)\mathbf{F}_n(z,1), \tag{4.7}$$

$$G_{k+n}(z) = G_k(q^n z)\left(q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}(z,1)\right)+G_{k+1}\left(q^{n-1}z\right)\left(\mathbf{F}_n(z,1)\right). \tag{4.8}$$

Les identités (4.7) et (4.8) peuvent être déduites de la façon suivante :

Soit $G\in\Omega_1$, puisque $E^kQ^{-k}G\in\Omega_1$ alors pour $C(z)=\begin{pmatrix}0&1\\z&1\end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}G_{k+n}\left(z/q^k\right)\\G_{k+n+1}\left(z/q^k\right)\end{pmatrix} &= C\left(q^{n-1}z\right)C\left(q^{n-2}z\right)\cdots C(z)\begin{pmatrix}G_k\left(z/q^k\right)\\G_{k+1}\left(z/q^k\right)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}z\mathbf{F}_{n-1}(qz,1) & \mathbf{F}_n(z,1)\\ z\mathbf{F}_n(qz,1) & \mathbf{F}_{n+1}(z,1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_k\left(z/q^k\right)\\G_{k+1}\left(z/q^k\right)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$G_{k+n}\left(z/q^k\right)=z\mathbf{F}_{n-1}(qz,1)\,G_k\left(z/q^k\right)+\mathbf{F}_n(z,1)\,G_{k+1}\left(z/q^k\right).$$

Soit $G_n(z)\in\Theta_1$. Comme la suite $g_n(z)=G_{n+k}\left(q^{1-n}z\right)$ satisfait la récurrence $g_{n+2}(z)=g_{n+1}(z)+q^{-n}zg_n(z)$, alors d'aprés la relation (4.5), pour $k=0$, on trouve

$$g_n(z)=g_0(z)\,z\mathbf{Fib}_{n-1}\left(q^{-1}z,1\right)+g_1(z)\,\mathbf{Fib}_n(z,1),$$

où $\mathbf{Fib}_{n+1}(z,1)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}q^{-k^2}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}_{\frac{1}{q}}z^k=\mathbf{F}_{n+1}\left(q^{-n}z,1\right).$

Donc

$$g_n(z) = g_0(z)\, z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^{1-n}z, 1\right) + g_1(z)\, \mathbf{F}_n\left(q^{1-n}z, 1\right),$$

par suite

$$g_n\left(q^{n-1}z\right) = g_0\left(q^{n-1}z\right) q^{n-1} z\mathbf{F}_{n-1}(z, 1) + g_1\left(q^{n-1}z\right) \mathbf{F}_n(z, 1),$$

et enfin on obtient

$$G_{n+k}(z) = G_k(q^n z)\, q^{n-1} z\mathbf{F}_{n-1}(z, 1) + G_{k+1}\left(q^{n-1}z\right) \mathbf{F}_n(z, 1).$$

Remplaçons maintenant, dans (4.7) et (4.8), la suite G par le q-analogue des polynômes de Fibonacci proposé par Carlitz $(\mathbf{F}_n(z, 1))_{n\in\mathbb{Z}}$. Pour $k = n$ on tire les identités

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2n+1}(z/q^n, 1) &= \mathbf{F}_n(z/q^n, 1)\, z\mathbf{F}_n(qz, 1) + \mathbf{F}_{n+1}(z/q^n, 1)\, \mathbf{F}_{n+1}(z, 1), && (4.9)\\ \mathbf{F}_{2n+1}(z, 1) &= \mathbf{F}_n(q^n z, 1)\, q^n z\mathbf{F}_n(z, 1) + \mathbf{F}_{n+1}(q^n z, 1)\, \mathbf{F}_{n+1}(z, 1), && (4.10) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2n}(z/q^n, 1) &= \mathbf{F}_n(z/q^n, 1)\, z\mathbf{F}_{n-1}(qz, 1) + \mathbf{F}_{n+1}(z/q^n, 1)\, \mathbf{F}_n(z, 1), && (4.11)\\ \mathbf{F}_{2n}(z, 1) &= \mathbf{F}_n\left(q^{n-1}z, 1\right) q^{n-1} z\mathbf{F}_{n-1}(z, 1) + \mathbf{F}_{n+1}\left(q^{n-1}z, 1\right) \mathbf{F}_n(z, 1), && (4.12) \end{aligned}$$

de même en choisissant comme élément de Ω_1 le q-analogue des polynômes de Lucas de première espèce associé à l'approche de Carlitz $(\mathbf{L}_n(z, 1))_{n\in\mathbb{Z}}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{2n+1}(z/q^n, 1) &= \mathbf{L}_n(z/q^n, 1)\, z\mathbf{F}_n(qz, 1) + \mathbf{L}_{n+1}(z/q^n, 1)\, \mathbf{F}_{n+1}(z, 1), && (4.13)\\ \mathbf{L}_{2n}(z/q^n, 1) &= \mathbf{L}_n(z/q^n, 1)\, z\mathbf{F}_{n-1}(qz, 1) + \mathbf{L}_{n+1}(z/q^n, 1)\, \mathbf{F}_n(z, 1), && (4.14) \end{aligned}$$

et en choisissant comme élément de Θ_1 le q-analogue des polynômes de Lucas de deuxième espèce associé à l'approche de Carlitz $(\mathbb{L}_n(z, 1))_{n\in\mathbb{Z}}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{2n+1}(z, 1) &= \mathbb{L}_n(q^n z, 1)\, q^n z\mathbf{F}_n(z, 1) + \mathbb{L}_{n+1}(q^n z, 1)\, \mathbf{F}_{n+1}(z, 1), && (4.15)\\ \mathbb{L}_{2n}(z, 1) &= \mathbb{L}_n\left(q^{n-1}z, 1\right) q^{n-1} z\mathbf{F}_{n-1}(z, 1) + \mathbb{L}_{n+1}\left(q^{n-1}z, 1\right) \mathbf{F}_n(z, 1). && (4.16) \end{aligned}$$

4.4 Le cas du q-analogue proposé par Cigler

Avec le q-analogue des polynômes de Fibonacci proposé par Cigler, on obtient deux q-analogues pour la relation $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$ si on remplace m par 0 dans

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2n+1}(z/q^n, m) &= \mathbf{F}_n(z/q^n, m) * (z\mathbf{F}_n(q^m z, m)) + \mathbf{F}_{n+1}(z/q^n, m) * (\mathbf{F}_{n+1}(z, m)),\\ \mathbf{F}_{2n+1}(z, m) &= \mathbf{F}_n(z, m)\, \Delta\left(q^n z\mathbf{F}_n\left(q^{m-1}z, m\right)\right) + \mathbf{F}_{n+1}(z/q, m)\, \Delta(\mathbf{F}_{n+1}(z, m)), \end{aligned}$$

et on obtient deux q-analogues pour la relation $F_{2n} = F_n F_{n-1} + F_{n+1} F_n$ si on remplace m par 0 dans

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{2n}\left(z/q^n, m\right) &= \mathbf{F}_n\left(z/q^n, m\right) * \left(z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^m z, m\right)\right) + \mathbf{F}_{n+1}\left(z/q^n, m\right) * \left(\mathbf{F}_n\left(z, m\right)\right), \\
\mathbf{F}_{2n}\left(z, m\right) &= \mathbf{F}_n\left(z, m\right) \Delta \left(q^{n-1} z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^{m-1} z, m\right)\right) + \mathbf{F}_{n+1}\left(z/q, m\right) \Delta \left(\mathbf{F}_n\left(z, m\right)\right).
\end{aligned}$$

De même pour les relations suivantes satisfaites par la suite de Fibonacci et de Lucas (voir [46] et [36])

$$\begin{aligned}
L_{2n+1} &= L_n F_n + L_{n+1} F_{n+1}, \\
L_{2n} &= L_n F_{n-1} + L_{n+1} F_n,
\end{aligned}$$

on obtient un premier q-analogue avec le q-analogue de la suite de Lucas de première espèce

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{2n+1}\left(z/q^n, m\right) &= \mathbf{L}_n\left(z/q^n, m\right) * z\mathbf{F}_n\left(q^m z, m\right) + \mathbf{L}_{n+1}\left(z/q^n, m\right) * \mathbf{F}_{n+1}\left(z, m\right), \\
\mathbf{L}_{2n}\left(z/q^n, m\right) &= \mathbf{L}_n\left(z/q^n, m\right) * z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^m z, m\right) + \mathbf{L}_{n+1}\left(z/q^n, m\right) * \mathbf{F}_n\left(z, m\right),
\end{aligned}$$

et un deuxième q-analogue avec le q-analogue de la suite de Lucas de deuxième espèce

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_{2n+1}\left(z, m\right) &= \mathbb{L}_n\left(z, m\right) \Delta q^n z\mathbf{F}_n\left(q^{m-1} z, m\right) + \mathbb{L}_{n+1}\left(\frac{z}{q}, m\right) \Delta \mathbf{F}_{n+1}\left(z, m\right), \\
\mathbb{L}_{2n}\left(z, m\right) &= \mathbb{L}_n\left(z, m\right) \Delta q^{n-1} z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^{m-1} z, m\right) + \mathbb{L}_{n+1}\left(\frac{z}{q}, m\right) \Delta \left(\mathbf{F}_n\left(z, m\right)\right).
\end{aligned}$$

Dans le chapitre précédent, on a établit des propriétés liées au q-analogue de la suite de Fibonacci et au q-analogue de la suite de Lucas. Comme extension, on traitera dans le prochain chapitre le q-analogue des identités obtenues par Belbachir et Bencherif [4] en cherchant les développements des polynômes de Fibonacci et des polynômes de Lucas sur des bases appropriées.

Chapitre 5

Un changement de base pour les formes explicites

Belbachir et Bencherif [4] avaient montré que chacune des familles $\left(x^{n-k}U_{n+k+1}\right)_{0\leq k\leq n}$ et $\left(x^{n-k}V_{n+k}\right)_{0\leq k\leq n}$ forme une base de "ξ_{2n}" l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par la famille libre $\zeta_{2n} = \left(x^{2n-2k}y^{k}\right)$; $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, et que chacune des familles $\left(x^{n-k}U_{n+k}\right)_{0\leq k\leq n-1}$ et $\left(x^{n-k}V_{n+k-1}\right)_{0\leq k\leq n-1}$ forme une base de ξ_{2n-1}. En cherchant les développements des polynômes bivariés de Fibonacci et les polynômes bivariés de Lucas sur les bases ζ_{2n} et ζ_{2n-1} ils ont obtenu six formules essentielles (1.8), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), (1.13).

Dans ce chapitre on présente les travaux realisés dans [8] qui consistent à généraliser les identités citées ci-dessus aux polynômes q-Fibonacci et aux polynômes q-Lucas.

5.1 Le développement des polynômes $\mathbf{F}_n$, $\mathbf{L}_n$ et $\mathbb{L}_n$ sur des bases appropriées

Les formes explicites du q-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci et le q-analogue des polynômes bivariés de Lucas de première et de deuxième espèce sont données respectivement par les formules

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{n+1}(x,y,m) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k} y^k, \\
\mathbf{L}_n(x,y,m) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \left(1+\frac{[k]_q}{[n-k]_q}\right) x^{n-2k} y^k, \\
\mathbb{L}_n(x,y,m) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \left(1+q^{n-2k}\frac{[k]_q}{[n-k]_q}\right) x^{n-2k} y^k.
\end{aligned}$$

Ce sont les développements par rapport à la base $\left(x^{n-2k}y^k\right)_{n\geq 2k\geq 0}$.

Dans cette section on donnera pour tout $j\in\mathbb{Z}$ le développement de :

$\mathbf{L}_{2n}(x,y,m)$ et $\mathbb{L}_{2n}(x,y,m)$ par rapport à la famille $\left(x^{n-k}\mathbf{F}_{n+k+1}(x,q^jy,m)\right)_{0\leq k\leq n}$,

$\mathbf{F}_{2n+1}(x,y,m)$ par rapport aux familles $\left(x^{n-k}\mathbf{L}_{n+k}(x,y,m)\right)_{0\leq k\leq n}$ et $\left(x^{n-k}\mathbb{L}_{n+k}(x,q^jy,m)\right)_{0\leq k\leq n}$,

$\mathbf{F}_{2n}(x,y,m)$, $\mathbf{L}_{2n-1}(x,y,m)$ et $\mathbb{L}_{2n-1}(x,y,m)$ par rapport à $\left(x^{n-k}\mathbf{F}_{n+k}(x,q^jy,m)\right)_{0\leq k\leq n-1}$,

$\mathbf{F}_{2n}(x,y,m)$ et $\mathbf{L}_{2n-1}(x,y,m)$ par rapport à la famille $\left(x^{n-k}\mathbf{L}_{n+k-1}(x,q^jy,m)\right)_{0\leq k\leq n-1}$,

$\mathbf{F}_{2n}(x,y,m)$ et $\mathbb{L}_{2n-1}(x,y,m)$ par rapport à la famille $\left(x^{n-k}\mathbb{L}_{n+k-1}(x,q^jy,m)\right)_{0\leq k\leq n-1}$.

Avant d'entamer ces développements, remarquons que les relations

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{n+1}(x,y,m) &= x^n\mathbf{F}_{n+1}\left(\frac{y}{x^2},m\right), \\
\mathbf{L}_n(x,y,m) &= x^n\mathbf{L}_n\left(\frac{y}{x^2},m\right), \\
\mathbb{L}_n(x,y,m) &= x^n\mathbb{L}_n\left(\frac{y}{x^2},m\right),
\end{aligned}$$

nous permettent de supposer que $x=1$ sans perte de généralité dans les résultats.

Nous assimilerons $(1,z,m)$ à (z,m).

Proposition 30 *1) Si une suite $\left(U_n(z,m)\right)_n$ vérifie la récurrence*

$$U_{n+1}(z,m) = U_n(z,m) + q^{n-1}zU_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right), \tag{5.1}$$

alors pour tout $0\leq k\leq n$

$$\sum_{j=0}^{k} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^j U_{n+k-j}(z,m) = q^{m\binom{k}{2}+\binom{n}{2}-\binom{n-k}{2}} z^k U_{n-k}\left(q^{mk-k}z,m\right). \tag{5.2}$$

2) Si une suite $\left(U_n(z,m)\right)_n$ vérifie la récurrence

$$U_{n+1}(z,m) = U_n(qz,m) + qzU_{n-1}\left(q^{m+1}z,m\right), \tag{5.3}$$

alors pour tout $0 \leq k \leq n$

$$\sum_{j=0}^{k} q^{\binom{k-j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^j U_{n+k-j}\left(q^{j-k}z, m\right) = q^{m\binom{k}{2}} z^k U_{n-k}\left(q^{mk}z, m\right). \tag{5.4}$$

Preuve. 1) On procède par récurrence sur k, pour $k = 1$ on a la récurrence (5.1).

Si la relation (5.2) est vraie jusqu'à l'ordre k, alors la récurrence (5.1) entraîne

$$\begin{aligned}
& q^{m\binom{k+1}{2}+\binom{n}{2}-\binom{n-1-k}{2}} z^{k+1} U_{n-k-1}\left(q^{mk+m-1-k}z, m\right) \\
= \; & q^{m\binom{k}{2}+\binom{n}{2}-\binom{n-k}{2}} q^k z^k \left(U_{n+1-k}\left(q^{mk-k}z, m\right) - U_{n-k}\left(q^{mk-k}z, m\right)\right), \\
= \; & q^{m\binom{k}{2}+\binom{n-1}{2}-\binom{n-1-k}{2}} z^k U_{n+1-k}\left(q^{mk-k}z, m\right) \\
& -q^{m\binom{k}{2}+\binom{n}{2}-\binom{n-k}{2}} q^k z^k U_{n-k}\left(q^{mk-k}z, m\right), \\
= \; & \sum_{j=0}^{k} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^j U_{n+1-k-j}(z, m) - q^k \sum_{j=0}^{k} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^j U_{n+k-j}(z, m), \\
= \; & \sum_{j=0}^{k} \left(q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q + q^k q^{\binom{j-1}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j-1 \end{bmatrix}_q \right) (-1)^j U_{n+k+1-j}(z, m), \\
= \; & \sum_{j=0}^{k+1} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^j U_{n+k+1-j}(z, m).
\end{aligned}$$

2) On procède par récurrence sur k, pour $k = 1$ on a la récurrence (5.3).

Si la relation (5.4) est vraie jusqu'à l'ordre k, alors la récurrence (5.3) entraîne

$$\begin{aligned}
& q^{m\binom{k+1}{2}} z^{k+1} U_{n-1-k}\left(q^{mk+m}z, m\right) \\
= \; & q^{m\binom{k}{2}} z^k \left(U_{n+1-k}\left(q^{mk-1}z, m\right) - U_{n-k}\left(q^{mk}z, m\right)\right), \\
= \; & q^k \sum_{j=0}^{k} q^{\binom{k-j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^j U_{n+1+k-j}\left(q^{j-1-k}z, m\right) - \\
& \sum_{j=0}^{k} q^{\binom{k-j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^j U_{n+k-j}\left(q^{j-k}z, m\right), \\
= \; & \sum_{j=0}^{k} \left(q^k q^{\binom{k-j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q + q^{\binom{k-j+1}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j-1 \end{bmatrix}_q \right) (-1)^j U_{n+k+1-j}\left(q^{j-1-k}z, m\right), \\
= \; & \sum_{j=0}^{k+1} q^{\binom{k-j+1}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^j U_{n+k+1-j}\left(q^{j-1-k}z, m\right).
\end{aligned}$$

$\square$

5.1.1 Les polynômes q-Lucas d'indices pairs en fonction des polynômes q-Fibonacci

Dans le chapitre troisième on a établi les deux identités suivantes

$$\mathbf{L}_{2n}(z,m) = 2\mathbf{F}_{2n+1}(z/q,m) - \mathbf{F}_{2n}(z,m), \tag{5.5}$$

$$\mathbb{L}_{2n}(z,m) = 2\mathbf{F}_{2n+1}(z,m) - \mathbf{F}_{2n}(z,m). \tag{5.6}$$

La première identité est un q-analogue de la relation (1.8) lié à la suite de polynômes $(\mathbf{L}_n(z,m))_n$, et la seconde identité est un q-analogue de la même relation lié à la suite de polynômes $(\mathbb{L}_n(z,m))_n$.

5.1.2 Les polynômes q-Fibonacci d'indices impairs en fonction des polynômes q-Lucas

La relation (1.9) admet deux q-analogues, le premier exprime les polynômes $\mathbf{F}_{2n+1}(z,m)$ en fonction du q-analogue de la suite de Lucas de première espèce, et le second exprime les polynômes $\mathbf{F}_{2n+1}(z,m)$ en fonction du q-analogue de la suite de Lucas de deuxième espèce, ces deux développements sont donnés par le théorème suivant.

Théorème 31 *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\begin{aligned} 2\mathbf{F}_{2n+1}\left(\frac{z}{q},m\right) &= \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n+k} \mathbf{L}_{2n-k}(z,m) + \\ &\quad 2\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} q^{\binom{k}{2}-2nj} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+j} \mathbf{L}_{2n-k}\left(q^{2j}z,m\right), \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{F}_{2n+1}(z,m) &= 2\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} q^{\binom{j-k}{2}-\binom{j}{2}+2nj} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+j} \mathbb{L}_{2n-k}\left(q^{k-2j}z,m\right) + \\ &\quad \sum_{k=0}^{n} q^{n(n-k)+\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k} \mathbb{L}_{2n-k}\left(q^{k-n}z,m\right). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Pour la preuve du théorème on a besoin du lemme suivant :

Lemme 32 *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\mathbf{F}_{2n+1}(z/q,m) = (-z)^n q^{(m+1)\binom{n}{2}} + \sum_{j=0}^{n-1} q^{(m+1)\binom{j}{2}} (-z)^j \mathbf{L}_{2(n-j)}\left(q^{mj+j}z,m\right), \tag{5.9}$$

$$\mathbf{F}_{2n+1}(z,m) = (-z)^n q^{\binom{n+1}{2}+m\binom{n}{2}} + \sum_{j=0}^{n-1} q^{j(2n-1)+(m-3)\binom{j}{2}} (-z)^j \mathbb{L}_{2(n-j)}\left(q^{mj-j}z,m\right) \tag{5.10}$$

Preuve. On procède par récurrence sur n, le cas $n = 1$ donne les deux relations

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_n(z,m) &= \mathbf{F}_{n+1}(z/q,m) + z\mathbf{F}_{n-1}(q^m z,m),\\
\mathbb{L}_n(z,m) &= \mathbf{F}_{n+1}(z,m) + q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(q^{m-1}z,m\right),
\end{aligned}$$

que l'on a déjà établi en (3.7) et (3.8).

Si les deux relations (5.9) et (5.10) sont vraies pour n, alors la relation (3.7) entraîne

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_{2n+3}\left(\frac{z}{q},m\right) = \mathbf{L}_{2n+2}(z,m) - z\mathbf{F}_{2n+1}(q^m z,m)\\
&= \mathbf{L}_{2n+2}(z,m) + (-z)^{n+1} q^{(m+1)\binom{n+1}{2}} - z\sum_{j=0}^{n-1} q^{(m+1)\binom{j}{2}} \left(-q^{m+1}z\right)^j \mathbf{L}_{2(n-j)}\left(q^{mj+j+m+1}z,m\right)\\
&= (-z)^{n+1} q^{(m+1)\binom{n+1}{2}} + \sum_{j=0}^{n} q^{(m+1)\binom{j}{2}} (-z)^j \mathbf{L}_{2(n+1-j)}\left(q^{mj+j}z,m\right).
\end{aligned}$$

Et la relation (3.8) entraîne

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_{2n+3}(z,m) = \mathbb{L}_{2n+2}(z,m) - q^{2n+1}z\mathbf{F}_{2n+1}\left(q^{m-1}z,m\right),\\
=\;& \mathbb{L}_{2n+2}(z,m) - q^{2n+1}z(-z)^n q^{\binom{n}{2}+m\binom{n+1}{2}} +\\
& q^{2n+1}z\sum_{j=0}^{n-1} q^{j(2n+1)+(m-3)\binom{j+1}{2}} (-z)^j \mathbb{L}_{2(n-j)}\left(q^{mj+m-1-j}z,m\right),\\
=\;& \mathbb{L}_{2n+2}(z,m) + (-z)^{n+1} q^{\binom{n+2}{2}+m\binom{n+1}{2}} -\\
& q^{2n+1}z\sum_{j=0}^{n-1} q^{j(2n+1)+(m-3)\binom{j+1}{2}} (-z)^j \mathbb{L}_{2(n-j)}\left(q^{mj+m-1-j}z,m\right),\\
=\;& (-z)^{n+1} q^{\binom{n+2}{2}+m\binom{n+1}{2}} + \sum_{j=0}^{n} q^{j(2n+1)+(m-3)\binom{j}{2}} (-z)^j \mathbb{L}_{2(n+1-j)}\left(q^{mj-j}z,m\right).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. □

Revenons maintenant à la preuve du Théorème 31.

Preuve. En remplaçant la suite $(U_n(z,m))_n$ par la suite $(\mathbf{L}_n(z,m))_n$ dans (5.2), pour $k = n$ respectivement $k = j$ avec la translation $n \to 2n - j$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbf{L}_{2n-k}(z,m) &= 2q^{(m+1)\binom{n}{2}} z^n,\\
\sum_{k=0}^{j} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbf{L}_{2n-k}\left(q^{2j}z,m\right) &= q^{(m+1)\binom{j}{2}+2nj} z^j \mathbf{L}_{2(n-j)}\left(q^{mj+j}z,m\right),
\end{aligned}$$

et en remplaçant la suite $(U_n(z,m))_n$ par la suite $(\mathbb{L}_n(z,m))_n$ dans (5.4), avec $k=n$ et $k=j$ respectivement, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbb{L}_{2n-k}\left(q^{k-n}z,m\right) &= 2q^{m\binom{n}{2}}z^n, \\ \sum_{k=0}^{j} q^{\binom{j-k}{2}} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbb{L}_{2n-k}\left(q^{k-2j}z,m\right) &= q^{(m-2)\binom{j}{2}-j}z^j\mathbb{L}_{2(n-j)}\left(q^{mj-j}z,m\right).\end{aligned}$$

En remplaçant ces identités dans les relations (5.9) et (5.10), on tire

$$\begin{aligned}2\mathbf{F}_{2n+1}\left(\frac{z}{q},m\right) &= \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n+k}\mathbf{L}_{2n-k}(z,m) + \\ &\quad 2\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j}\left(-q^{-2n}\right)^j q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbf{L}_{2n-k}\left(q^{2j}z,m\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}2\mathbf{F}_{2n+1}(z,m) &= \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{n-k}{2}+\binom{n+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n+k}\mathbb{L}_{2n-k}\left(q^{k-n}z,m\right) + \\ &\quad \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} q^{2nj}q^{\binom{j-k}{2}-\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+j}\mathbb{L}_{2n-k}\left(q^{k-2j}z,m\right).\end{aligned}$$

□

5.1.3 Les polynômes q-Fibonacci d'indices pairs en fonction des polynômes q-Fibonacci d'indices inferieurs

La suite de polynômes $(\mathbf{F}_n(z,m))_n$ vérifie deux récurrences dont chacune nous conduit à un q-analogue de la relation (1.10) comme le montre le théorème suivant :

Théorème 33 *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\mathbf{F}_{2n}(z,m) = \sum_{j=1}^{n} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^{j+1}\mathbf{F}_{2n-j}(z,m), \tag{5.11}$$

$$\mathbf{F}_{2n}(z,m) = \sum_{j=1}^{n} q^{\binom{n-j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^{j+1}\mathbf{F}_{2n-j}\left(q^j z,m\right). \tag{5.12}$$

Preuve. Pour $k=n$ et $U_n(z)=\mathbf{F}_n(z)$, les relations (5.2) et (5.4) deviennent respectivement

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^j \mathbf{F}_{2n-j}(z,m) &= q^{m\binom{k}{2}+\binom{n}{2}}z^n\mathbf{F}_0\left(q^{mn-n}z,m\right)=0, \\ \sum_{j=0}^{n} q^{\binom{n-j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^j \mathbf{F}_{2n-j}\left(q^{j-n}z,m\right) &= q^{m\binom{n}{2}}z^n\mathbf{F}_0\left(q^{mn}z,m\right)=0.\end{aligned}$$

En faisant sortir le terme $\mathbf{F}_{2n}(z,m)$ on tire le résultat. □

5.1.4 Les polynômes q-Lucas d'indices impairs en fonction des polynômes q-Fibonacci

Pour chacune des suites $(\mathbf{L}_n(z,m))_n$ et $(\mathbb{L}_n(z,m))_n$ on établit deux q-analogues de la relation (1.11) donnés par le résultat suivant :

Théorème 34 *Pour tout $n \geq 1$, le développement du terme $\mathbf{L}_{2n-1}(z,m)$ en fonction des termes de la suite $(\mathbf{F}_n(z,m))_n$ est donné par*

$$\mathbf{L}_{2n-1}(z,m) = 2\sum_{j=1}^{n} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^{j+1} \mathbf{F}_{2n-j}(z/q,m) - \mathbf{F}_{2n-1}(z,m), \tag{5.13}$$

$$\mathbf{L}_{2n-1}(z,m) = 2\sum_{j=1}^{n} q^{\binom{n-j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^{j+1} \mathbf{F}_{2n-j}\left(q^{j-1}z,m\right) - \mathbf{F}_{2n-1}(z,m). \tag{5.14}$$

Et le développement du terme $\mathbf{L}_{2n-1}(z,m)$ en fonction des termes de la suite $(\mathbf{F}_n(z,m))_n$ est donné par

$$\mathbb{L}_{2n-1}(z,m) = 2\sum_{j=1}^{n} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^{j+1} \mathbf{F}_{2n-j}(z,m) - \mathbf{F}_{2n-1}(z,m), \tag{5.15}$$

$$\mathbb{L}_{2n-1}(z,m) = 2\sum_{j=1}^{n} q^{\binom{n-j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^{j+1} \mathbf{F}_{2n-j}\left(q^{j}z,m\right) - \mathbf{F}_{2n-1}(z,m). \tag{5.16}$$

Preuve. Dans l'égalité

$$\mathbf{L}_{2n-1}(z,m) = 2\mathbf{F}_{2n}(z/q,m) - \mathbf{F}_{2n-1}(z,m),$$

si on remplace le terme $\mathbf{F}_{2n}(z/q,m)$ par son développement donné par chacune des relations (5.11) et (5.12), on tire les deux identités (5.13) et (5.14). On déduit aussi les deux identités (5.15) et (5.16) en remplaçant le terme $\mathbf{F}_{2n}(z,m)$ par son développement donné par chacune des relations (5.11) et (5.12) dans l'égalité

$$\mathbb{L}_{2n-1}(z,m) = 2\mathbf{F}_{2n}(z,m) - \mathbf{F}_{2n-1}(z,m).$$

□

5.1.5 Les polynômes q-Lucas d'indices impairs en fonction des polynômes q-Lucas d'indices inferieurs

La relation (1.12) admet un q-analogue par apport au q-analogue de la suite de Lucas de première espèce et par rapport au q-analogue de la suite de Lucas de deuxième espèce, les deux cas sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 35 *Pour tout* $n \geq 1$, *on a*

$$2\mathbf{L}_{2n-1}(z,m) = \sum_{k=1}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+1} q^{k+1} \left(1 + \frac{[n-k]_q}{[n]_q}\right) \mathbf{L}_{2n-2-k}(z,m), \tag{5.17}$$

$$2\mathbb{L}_{2n-1}(z,m) = \sum_{k=1}^{n} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+1} q^{1-n} \left(1 + q^k \frac{[n-k]_q}{[k]_q}\right) \mathbb{L}_{2n-1-k}\left(q^k z, m\right) \tag{5.18}$$

Preuve. En remplaçant $U_n(z,m)$ respectivement par $\mathbf{L}_{n-1}(z,m)$ et $\mathbf{L}_n(z,m)$ dans la relation (5.2), on obtient pour $k = n-1$;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbf{L}_{2n-2-k}(z,m) &= 2z^{n-1} q^{m\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{2}}, \\ \sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbf{L}_{2n-1-k}(z,m) &= z^{n-1} q^{m\binom{n-1}{2}+\binom{n}{2}}. \end{aligned}$$

Par suite

$$q^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbf{L}_{2n-2-k}(z,m) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbf{L}_{2n-1-k}(z,m).$$

Donc

$$\begin{aligned} & 2\mathbf{L}_{2n-1}(z,m) \\ = \; & q^{n-1} \sum_{k=1}^{n} q^{\binom{k-1}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q (-1)^{k+1} \mathbf{L}_{2n-1-k}(z,m) - 2 \sum_{k=1}^{n-1} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbf{L}_{2n-1-k}(z,m), \\ = \; & \sum_{k=1}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-q)^{k+1} \left(q^{n-k} \frac{[k]_q}{[n]_q} + 2 \frac{[n-k]_q}{[n]_q}\right) \mathbf{L}_{2n-1-k}(z,m), \\ = \; & \sum_{k=1}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-q)^{k+1} \left(1 + \frac{[n-k]_q}{[n]_q}\right) \mathbf{L}_{2n-2-k}(z,m). \end{aligned}$$

De la même façon, en remplaçant $U_n(z,m)$ respectivement par $\mathbb{L}_{n-1}(z,m)$ et $\mathbb{L}_n(z,m)$ dans (5.4), on tire pour $k = n-1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{n-1-k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbb{L}_{2n-2-k}\left(q^{k+2-n} z, m\right) &= 2q^{m\binom{n-1}{2}} (qz)^{n-1}, \\ \sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{n-1-k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbb{L}_{2n-1-k}\left(q^{k+1-n} z, m\right) &= q^{m\binom{n-1}{2}} z^{n-1}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
&2\sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{n-1-k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbb{L}_{2n-1-k}\left(q^{k+1-n}z, m\right) \\
= \;& q^{1-n}\sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{n-1-k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbb{L}_{2n-2-k}\left(q^{k+2-n}z, m\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&2\mathbb{L}_{2n-1}\left(q^{1-n}z, m\right) \\
= \;& q^{1-n}\sum_{k=1}^{n} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q (-1)^{k+1} \mathbb{L}_{2n-1-k}\left(q^{k+1-n}z, m\right) \\
& -2\sum_{k=1}^{n-1} q^{\binom{n-1-k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbb{L}_{2n-1-k}\left(q^{k+1-n}z, m\right), \\
= \;& \sum_{k=1}^{n} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+1} q^{1-n} \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} + 2q^k \frac{[n-k]_q}{[n]_q}\right) \mathbb{L}_{2n-1-k}\left(q^{k+1-n}z, m\right), \\
= \;& \sum_{k=1}^{n} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+1} q^{1-n} \left(1 + q^k \frac{[n-k]_q}{[k]_q}\right) \mathbb{L}_{2n-1-k}\left(q^{k+1-n}z, m\right).
\end{aligned}$$

□

5.1.6 Les polynômes q-Fibonacci d'indices pairs en fonction des polynômes q-Lucas

La relation (1.13) admet un premier q-analogue en fonction du q-analogue de la suite de Lucas de première espèce, et un deuxième q-analogue en fonction du q-analogue de la suite de Lucas de deuxième espèce.

Théorème 36 *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\begin{aligned}
2\mathbf{F}_{2n}\left(\frac{z}{q}, m\right) = \;& \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+1} q^{k+1} \left(1 + \frac{[n-k]_q}{[n]_q}\right) \mathbf{L}_{2n-2-k}(z, m) + \\
& \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n-1+k} \mathbf{L}_{2n-2-k}(qz, m) + \\
& \sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{j} q^{\binom{k}{2}-2nj-2j} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+j} \mathbf{L}_{2n-2-k}\left(q^{2j+1}z, m\right),
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} 2\mathbf{F}_{2n}(z,m) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+1} q^{1-n} \left(1 + q^k \frac{[n-k]_q}{[k]_q}\right) \mathbb{L}_{2n-1-k}\left(q^k z, m\right) + \\ & \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} q^{(n-1)(n-k)+\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n-1+k} \mathbb{L}_{2n-2-k}\left(q^{k+1-n} z, m\right) + \\ & \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} q^{\binom{j-k}{2}-\binom{j}{2}+2nj-2j} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+j} \mathbb{L}_{2n-2-k}\left(q^{k-2j} z, m\right). \end{aligned}$$

Preuve. Les identités (5.5) et (5.6) entraînent respectivement

$$\begin{aligned} 2\mathbf{F}_{2n}\left(\frac{z}{q}, m\right) &= \mathbf{L}_{2n-1}(z,m) + \mathbf{F}_{2n-1}(z,m), \\ 2\mathbf{F}_{2n}(z,m) &= \mathbb{L}_{2n-1}(z,m) + \mathbf{F}_{2n-1}(z,m). \end{aligned}$$

En remplaçant chacun des termes $\mathbf{F}_{2n-1}(z,m)$ et $\mathbf{L}_{2n-1}(z,m)$ par son développement donné respectivement par les formules (5.7) et (5.17), on tire la première identité du théorème, et on déduit la seconde identité en remplaçant chacun des termes $\mathbf{F}_{2n-1}(z,m)$ et $\mathbb{L}_{2n-1}(z,m)$ par son développement donné respectivement par les formules (5.8) et (5.18). □

Remarque 37 *Les résultats obtenus ci dessus restent les mêmes pour l'approche de Carlitz et pour l'approche de Cigler puisque on a trouvé des développements dont les coefficients ne dépendent pas du paramètre m.*

5.2 Le challenge de Prodinger

Le travail présenté dans la partie précédente a pour origine un travail initié par Prodinger [41] qui a obtenu partiellement des résultats analogues avec les polynômes $\mathbf{F}_n(z,0)$ et $\mathbf{Luc}_n(z,0)$. Ce travail est complété par [6].

Dans cette section on utilise les polynômes $\mathbf{Luc}_n(x,y,m)$ au lieu des polynômes $\mathbf{L}_n(x,y,m)$ et $\mathbb{L}_n(x,y,m)$ pour obtenir des résultats similaires aux résultats de la section précédente. Ainsi on généralise à la fois les résultats de Prodinger [41] et nos travaux antérieurs [6] pour m quelconque.

5.2.1 Développements des polynômes $\mathbf{Luc}_n(z,m)$.

Théorème 38 *1) Comme un q-analogue de l'identité (1.8) on a la relation*

$$\mathbf{Luc}_{2n}(z,m) = \mathbf{F}_{2n+1}(z,m) + \mathbf{F}_{2n+1}\left(\frac{z}{q}, m\right) - \mathbf{F}_{2n}(z,m). \tag{5.19}$$

2) Chacune des deux relations suivante est un q-analogue de l'identité (1.11)

$$\mathbf{Luc}_{2n-1}(z,m) = \sum_{j=1}^{n} q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^{j+1} \left(\mathbf{F}_{2n-j}(z,m) + \mathbf{F}_{2n-j}\left(\frac{z}{q},m\right)\right) - \mathbf{F}_{2n-1}(z,m),$$

$$\mathbf{Luc}_{2n-1}(z,m) = \sum_{j=1}^{n} q^{\binom{n-j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^{j+1} \left(\mathbf{F}_{2n-j}\left(q^j z,m\right) + \mathbf{F}_{2n-j}\left(q^{j-1}z,m\right)\right) - \mathbf{F}_{2n-1}(z,m).$$

3) Le polynôme $\mathbf{Luc}_n(z,m)$ *satisfait une relation q-analogue de l'identité (1.12)*

$$\mathbf{Luc}_{2n-1}(z,m) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{q^{\binom{k}{2}}}{1+q^{n-1}} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \right) \mathbf{Luc}_{2n-1-k}(z,m).$$

Preuve. 1) On montre d'une façon plus générale que pour tout $n \geq 0$;

$$\mathbf{Luc}_n(z,m) = \mathbf{F}_{n+1}(z,m) + \mathbf{F}_{n+1}\left(\frac{z}{q},m\right) - \mathbf{F}_n(z,m). \tag{5.20}$$

En effet,

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}_{n+1}(z,m) + \mathbf{F}_{n+1}\left(\frac{z}{q},m\right) - \mathbf{F}_n(z,m) \\ = & \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \left(q^k+1\right) z^k - \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1-k \\ k \end{bmatrix}_q z^k \\ = & \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \left(q^k + 1 - q^k \frac{[n-2k]_q}{[n-k]_q} \right) z^k \\ = & \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \frac{[n]_q}{[n-k]_q} z^k \\ = & \mathbf{Luc}_n(z,m). \end{aligned}$$

2) En remplaçant chacun des termes $\mathbf{F}_{2n}(z,m)$ et $\mathbf{F}_{2n}(z/q,m)$ par son développement donné par la relation (5.11), dans l'identité (5.19) on montre la première relation. On obtient la deuxième relation en remplaçant chacun des termes $\mathbf{F}_{2n}(z,m)$ et $\mathbf{F}_{2n}(z/q,m)$ par son développement donné par la relation (5.12), dans l'identité (5.19).

3) Considérons l'operateur T_k défini par

$$T_k(U_n(z)) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i q^{\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q U_{n+k-i}(z).$$

D'après la relation (5.2)

$$T_k(\mathbf{F}_n(z,m)) = q^{m\binom{k}{2}+\binom{n}{2}-\binom{n-k}{2}} z^k \mathbf{F}_{n-k}\left(q^{mk-k}z,m\right).$$

Comme

$$\mathbf{Luc}_n(z,m) = \mathbf{F}_{n+1}(z,m) + \mathbf{F}_{n+1}\left(\frac{z}{q}, m\right) - \mathbf{F}_n(z,m),$$

alors

$$\begin{aligned} T_n(\mathbf{Luc}_{n-1}(z)) &= T_n\left(\mathbf{F}_n(z) + \mathbf{F}_n\left(\frac{z}{q}\right) - \mathbf{F}_{n-1}(z)\right) \\ &= T_n(\mathbf{F}_n(z)) + T_n\left(\mathbf{F}_n\left(\frac{z}{q}\right)\right) - T_n(\mathbf{F}_{n-1}(z)) \\ &= 0 + 0 - \frac{1}{z}T_n\left(\mathbf{F}_{n+1}\left(\frac{z}{q}\right) - \mathbf{F}_n(z)\right) \\ &= -q^{\binom{n}{2}}(z)^{n-1}\mathbf{F}_1\left(\frac{z}{q^{n+1}}\right) + 0 \\ &= -q^{\binom{n}{2}}z^{n-1}, \end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} T_{n-1}(\mathbf{Luc}_n(z)) &= T_{n-1}\left(\mathbf{F}_{n+1}(z) + \mathbf{F}_{n+1}\left(\frac{z}{q}\right) - \mathbf{F}_n(z)\right) \\ &= T_{n-1}(\mathbf{F}_{n+1}(z)) + T_{n-1}\left(\mathbf{F}_{n+1}\left(\frac{z}{q}\right)\right) - T_{n-1}(\mathbf{F}_n(z)) \\ &= q^{\binom{n+1}{2}-1}z^{n-1}\mathbf{F}_2\left(\frac{z}{q^{n-1}}\right) + q^{\binom{n+1}{2}-1}\left(\frac{z}{q}\right)^{n-1}\mathbf{F}_2\left(\frac{z}{q^n}\right) - q^{\binom{n}{2}}z^{n-1}\mathbf{F}_1\left(\frac{z}{q^{n-1}}\right) \\ &= q^{\binom{n+1}{2}-1}z^{n-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$q^{n-1}T_n(\mathbf{Luc}_{n-1}(z)) + T_{n-1}(\mathbf{Luc}_n(z)) = 0,$$

ou encore

$$q^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i q^{\binom{i}{2}}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q \mathbf{Luc}_{2n-1-i}(z) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i q^{\binom{i}{2}}\begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}_q \mathbf{Luc}_{2n-1-i}(z) = 0.$$

D'où on tire

$$\left(1+q^{n-1}\right)\mathbf{Luc}(z)_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}q^{\binom{k}{2}}\left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q\right)\mathbf{Luc}_{2n-1-k}(z).$$

□

5.2.2 Différents développements des polynômes $\mathbf{F}_n(z,m)$ en fonction des polynômes $\mathbf{Luc}_n(z,m)$

Pour obtenir un q-analogue de l'identité (1.9) il suffit de remplacer n par $2n$ dans le résultat suivant qui nous donne un q-analogue de l'identité (1.13) en changeant n en $2n-1$.

Théorème 39 *Pour tout* $n \geq 0$,

$$(1-q^n)\,\mathbf{F}_{n+1}(z) = \mathbf{Luc}_n(qz) - q^n \mathbf{Luc}_n(z). \tag{5.21}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{Luc}_n(qz) - q^n\mathbf{Luc}_n(z) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \left(q^k - q^n\right) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q (1-q^n)\, z^k \\
&= (1-q^n)\,\mathbf{F}_{n+1}(z).
\end{aligned}$$

□

Remarque 40 *Le dernier théorème donne* $0 = 0$ *(tautologie) quand* $q = 1$, *mais en divisant les deux membres de l'égalité (5.21) par* $1 - q$ *on obtient la relation* $V_n(z) = U_{n+1}(z) + zU_{n-1}(z)$ *lorsque* q *tend vers 1.*

5.3 Développements duaux entre les q-analogues des polynômes de Lucas

Dans les deux premières sections de ce chapitre on a établi les développements de q-analogues des polynômes de Fibonacci $\mathbf{F}_n(z,m)$ en fonction des q-analogues des polynômes de Lucas $\mathbf{L}_n(z,m)$, $\mathbb{L}_n(z,m)$ et $\mathbf{Luc}_n(z,m)$. Dans cette section on utilisera ces derniers pour déduire des développements entre les polynômes $\mathbf{L}_n(z,m)$, $\mathbb{L}_n(z,m)$ et $\mathbf{Luc}_n(z,m)$.

Les identités (3.9), (3.10) et (5.20) entraînent les relations

$$\mathbf{L}_n(z,m) - \mathbb{L}_n(z,m) = 2\mathbf{F}_{n+1}(z/q,m) - 2\mathbf{F}_{n+1}(z,m), \tag{5.22}$$

$$2\mathbf{Luc}_n(z,m) = \mathbf{L}_n(z,m) + \mathbb{L}_n(z,m). \tag{5.23}$$

En remplaçant les développement des termes $\mathbf{F}_{n+1}(z/q,m)$ et $\mathbf{F}_{n+1}(z,m)$ en fonction des q-analogues des polynômes de Lucas dans (5.22) puis dans (5.23), on déduit les développements traités dans les paragraphes suivants.

5.3.1 Le développements des polynômes $\mathbf{L}_n(z,m)$ et $\mathbf{Luc}_n(z,m)$ en fonction des polynômes $\mathbb{L}_n(z,m)$

Le second développement donné par les Théorèmes 31 et 36 remplacé respectivement dans la relation (5.22) et dans la relation (5.23) nous conduit aux identités suivantes :

Pour tout $n \geq 0$, et en posant $\mathbb{D}_n(z,m) = \mathbb{L}_n(z/q,m) - \mathbb{L}_n(z,m)$, on a :

1) Expression des termes d'indices impaires du q-analogue de la suite de Lucas de première espèce en fonction du q-analogue des polynômes de Lucas de deuxième espèce

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_{2n-1}(z,m) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+1} q^{1-n} \left(1 + q^k \frac{[n-k]_q}{[k]_q}\right) \mathbb{D}_{2n-1-k}\left(q^k z, m\right) + \\
&\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} q^{(n-1)(n-k)+\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n-1+k} \mathbb{D}_{2n-2-k}\left(q^{k+1-n} z, m\right) + \\
&\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} q^{\binom{j-k}{2}-\binom{j}{2}+2nj-2j} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+j} \mathbb{D}_{2n-2-k}\left(q^{k-2j} z, m\right) + \mathbb{L}_{2n-1}(z,m).
\end{aligned}$$

2) Expression des termes d'indices paires du q-analogue de la suite de Lucas de première espèce en fonction du q-analogue des polynômes de Lucas de deuxième espèce

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_{2n}(z,m) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{n-k}{2}+\binom{n+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n+k} \mathbb{D}_{2n-k}\left(q^{k-n} z, m\right) + \mathbb{L}_{2n}(z,m) + \\
&\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} q^{2nj} q^{\binom{j-k}{2}-\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+j} \mathbb{D}_{2n-k}\left(q^{k-2j} z, m\right) + \mathbb{L}_{2n}(z,m).
\end{aligned}$$

3) Expression des termes d'indices impaires du q-analogue de la suite de Lucas proposée par Cigler en fonction du q-analogue des polynômes de Lucas de deuxième espèce

$$\begin{aligned}
&2\mathbf{Luc}_{2n-1}(z,m) \\
= \;&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+1} q^{1-n} \left(1 + q^k \frac{[n-k]_q}{[k]_q}\right) \mathbb{D}_{2n-1-k}\left(q^k z, m\right) + \\
&\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} q^{(n-1)(n-k)+\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n-1+k} \mathbb{D}_{2n-2-k}\left(q^{k+1-n} z, m\right) + \\
&\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} q^{\binom{j-k}{2}-\binom{j}{2}+2nj-2j} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+j} \mathbb{D}_{2n-2-k}\left(q^{k-2j} z, m\right) + 2\mathbb{L}_{2n-1}(z,m).
\end{aligned}$$

4) Expression des termes d'indices paires du q-analogue de la suite de Lucas proposée par Cigler en fonction du q-analogue des polynômes de Lucas de deuxième espèce

$$\begin{aligned}
&2\mathbf{Luc}_{2n}(z,m) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{n-k}{2}+\binom{n+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n+k} \mathbb{D}_{2n-k}\left(q^{k-n} z, m\right) + \mathbb{L}_{2n}(z,m) + \\
&\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} q^{2nj} q^{\binom{j-k}{2}-\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+j} \mathbb{D}_{2n-k}\left(q^{k-2j} z, m\right) + 2\mathbb{L}_{2n}(z,m).
\end{aligned}$$

5.3.2 Le développement des polynômes $\mathbb{L}_n(z,m)$ et $\mathbf{Luc}_n(z,m)$ en fonction des polynômes $\mathbf{L}_n(z,m)$

Le premier développement donné par les Théorèmes 31 et 36 remplacé respectivement dans la relation (5.22) et dans la relation (5.23) nous conduit aux identités suivantes :

Pour tout $n \geq 0$, et en posant $\mathbf{D}_n(z,m) = \mathbf{L}_n(qz,m) - \mathbf{L}_n(z,m)$, on a :

1) Expression des termes d'indices impaires du q-analogue de la suite de Lucas de deuxième espèce en fonction du q-analogue des polynômes de Lucas de première espèce

$$\mathbb{L}_{2n-1}(z,m) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+1} q^{k+1} \left(1 + \frac{[n-k]_q}{[n]_q}\right) \mathbf{D}_{2n-2-k}(z,m) +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n-1+k} \mathbf{D}_{2n-2-k}(qz,m) + \mathbf{L}_{2n-1}(z,m) +$$
$$\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{j} q^{\binom{k}{2}-2nj-2j} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+j} \mathbf{D}_{2n-2-k}\left(q^{2j+1}z,m\right).$$

2) Expression des termes d'indices paires du q-analogue de la suite de Lucas de deuxième espèce en fonction du q-analogue des polynômes de Lucas de première espèce

$$\mathbb{L}_{2n}(z,m) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n+k} \mathbf{D}_{2n-k}(z,m) + \mathbf{L}_{2n}(z,m) +$$
$$2\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} \left(-q^{-2n}\right)^j q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbf{D}_{2n-k}\left(q^{2j}z,m\right),$$

3) Expression des termes d'indices impaires du q-analogue de la suite de Lucas proposée par Cigler en fonction du q-analogue des polynômes de Lucas de première espèce

$$2\mathbf{Luc}_{2n-1}(z,m) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+1} q^{k+1} \left(1 + \frac{[n-k]_q}{[n]_q}\right) \mathbf{D}_{2n-2-k}(z,m) +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n-1+k} \mathbf{D}_{2n-2-k}(qz,m) + 2\mathbf{L}_{2n-1}(z,m) +$$
$$\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{j} q^{\binom{k}{2}-2nj-2j} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{k+j} \mathbf{D}_{2n-2-k}\left(q^{2j+1}z,m\right).$$

4) Expression des termes d'indices paires du q-analogue de la suite de Lucas proposée par

Cigler en fonction du q-analogue des polynômes de Lucas de première espèce

$$2\mathbf{Luc}_{2n}(z,m) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n+k} \mathbf{D}_{2n-k}(z,m) + 2\mathbf{L}_{2n}(z,m) +$$
$$2\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} \left(-q^{-2n}\right)^j q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \mathbf{D}_{2n-k}\left(q^{2j}z,m\right).$$

5.3.3 Le développement des polynômes $\mathbf{L}_n(z,m)$ et $\mathbb{L}_n(z,m)$ en fonction des polynômes $\mathbf{Luc}_n(z,m)$

Les identités (5.21) (5.22), et (5.23) entraînent les développements des termes du q-analogue de la suite de Lucas de première espèce en fonction du q-analogue des polyômes de Lucas proposé par Cigler :

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\left(1-q^{2n-1}\right)\mathbf{L}_{2n-1}(z,m) = 2\mathbf{Luc}_{2n-1}(z) - q^{2n-1}\mathbf{Luc}_{2n-1}\left(\frac{z}{q}\right) - \mathbf{Luc}_{2n-1}(qz),$$
$$\left(1-q^{2n}\right)\mathbf{L}_{2n}(z,m) = 2\mathbf{Luc}_{2n}(z) - q^{2n}\mathbf{Luc}_{2n}\left(\frac{z}{q}\right) - \mathbf{Luc}_{2n}(qz).$$

et les identités (5.21) (5.22), et (5.23) entraînent les développements des termes du q-analogue de la suite de Lucas de deuxième espèce en fonction du q-analogue des polyômes de Lucas proposé par Cigler :

Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\left(1-q^{2n-1}\right)\mathbb{L}_{2n-1}(z,m) = \mathbf{Luc}_{2n-1}(qz) - 2q^{2n-1}\mathbf{Luc}_{2n-1}(z) + q^{2n-1}\mathbf{Luc}_{2n-1}\left(\frac{z}{q}\right).$$

et

$$\left(1-q^{n}\right)\mathbb{L}_{2n}(z,m) = \mathbf{Luc}_{2n}(qz) - 2q^{2n}\mathbf{Luc}_{2n}(z) + q^{2n}\mathbf{Luc}_{2n}\left(\frac{z}{q}\right).$$

Avec ce chapitre, on conclut la première partie de notre travail en établissant le q-analogue des propriétés qu'on a citées dans le premier chapitre sur les polynômes de Fibonacci et les polynômes de Lucas. Pour le chapitre qui suit, on passe au q-analogue des polynômes de Fibonacci et de Lucas généralisés.

Chapitre 6

Le q-analogue des polynômes de Fibonacci et de Lucas généralisés

Soit r un entier naturel, x et y deux indéterminées. La suite r-Fibonacci, de terme général

$$U_{n+1}^{(r)}(x,y)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor}\binom{n-rk}{k}x^{n-(r+1)k}y^{k}$$

que l'on a présenté dans le premier chapitre généralise la suite de Fibonacci selon l'orde de récurrence, elle satisfait la relation

$$\begin{cases} U_0^{(r)}(x,y)=0, \quad U_k^{(r)}(x,y)=x^{k-1}, \quad (1\leq k\leq r),\\ U_{n+1}^{(r)}(x,y)=xU_n^{(r)}(x,y)+yU_{n-r}^{(r)}(x,y), \quad (n\geq r).\end{cases}$$

Dans ce chapitre, on propose un q-analogue de la suite r-Fibonacci, on donne la forme explicite et les relations de récurrence pour une généralisation de l'approche unificatrice des polynômes q-Fibonacci et des polynômes q-Lucas, pour des rafinement plus élaborés une extension de l'approche de Carlitz et une extension de l'approche de Cigler seront traitées idépendament dans le but de généraliser certains propriétés telles que les relations (2.14) et (2.21).

6.1 Approche unificatrice pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci et des polynômes de Lucas généralisés

La définition ci-dessous est inspirée par la généralisation proposée par Belbachir [3] et l'approche unificatrice pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci et de Lucas suggérée par Cigler [26].

Définition 41 *On définit le q-analogue des polynômes r-Fibonacci par la formule explicite*

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,m)=\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,m,q)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{m\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q z^k \quad \textit{avec} \quad \mathbf{F}_0^{(r)}(z,m)=0. \quad (6.1)$$

Pour $r=1$ et $m=1$, on retrouve le q-analogue des polynômes de Fibonacci proposé par Carlitz.

Pour $r=1$ et $m=0$, on retrouve le q-analogue des polynômes de Fibonacci proposé par Cigler.

Pour $r=1$ on retrouve la proposition unificatrice du q-analogue des polynômes de Fibonacci. Par ailleurs les deux relations de récurrence satisfaites par les polynômes $\mathbf{F}_n(z,m)$ sont généralisées dans le résultat suivant.

Théorème 42 *Les polynômes $\mathbf{F}_n^{(r)}(z,m)$ satisfont les deux relations de récurrence :*

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,m) = \mathbf{F}_n^{(r)}(z,m)+q^{n-r}z\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}\left(q^{m-r}z,m\right), \quad (6.2)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,m) = \mathbf{F}_n^{(r)}(qz,m)+qz\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}\left(q^{m+1}z,m\right), \quad (6.3)$$

avec $\mathbf{F}_0^{(r)}(z,m)=0,\ \mathbf{F}_1^{(r)}(z,m)=1,\dots,\ \mathbf{F}_r^{(r)}(z,m)=1.$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_n^{(r)}(z,m)+q^{n-r}z\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}\left(q^{m-r}z,m\right)\\
=&\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{m\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_q z^k+q^{n-r}\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{m\binom{k-1}{2}+\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k-1 \end{bmatrix}_q \left(q^{m-r}\right)^{k-1}z^k\\
=&\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{m\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}}\left(\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_q+q^{n-(r+1)k}\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k-1 \end{bmatrix}_q\right)z^k\\
=&\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_n^{(r)}(qz,m)+qz\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}\left(q^{m+1}z,m\right)\\
=&\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{m\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_q (qz)^k+q\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{m\binom{k-1}{2}+\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k-1 \end{bmatrix}_q \left(q^{m+1}\right)^{k-1}z^k\\
=&\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{m\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}}\left(q^k\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_q+\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k-1 \end{bmatrix}_q\right)z^k\\
=&\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,m).
\end{aligned}$$

□

Remarque 43 *Il est facile de voir que les deux prolongements aux indices négatifs des polynômes $\mathbf{F}_n^{(r)}(z,m)$ obtenus par les récurrences (6.2) et (6.3) coïncident, et on étudiera ce prolongement pour le cas particulier $m=0$.*

Comme "suite compagnon" au q-analogue des polynômes r-Fibonacci, inspiré par les relations (3.1) et (3.2) on suggère la définition suivante :

Définition 44 *On définit le q-analogue des polynômes r-Lucas de première espèce par la forme explicite*

$$\mathbf{L}_{n+1}^{(r)}(z,m) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{(m+1)\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q \left(1+\frac{[k]_q}{[n-rk]_q}\right) z^k, \tag{6.4}$$

et on définit le q-analogue des polynômes r-Lucas de deuxième espèce par la forme explicite

$$\mathbb{L}_{n+1}^{(r)}(z,m) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{(m+1)\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q \left(1+q^{n-(r+1)k}\frac{[k]_q}{[n-rk]_q}\right) z^k, \tag{6.5}$$

avec $\mathbf{L}_0^{(r)}(z,m) = \mathbb{L}_0^{(r)}(z,m) = 2$.

Avec cette définition, on établit des relations qui expriment le q-analogue des polynômes r-Lucas en fonction du q-analogue des polynômes r-Fibonacci et leurs relations duales.

Proposition 45 *Le q-analogue des polynômes r-Fibonacci et le q-analogue des polynômes r-Lucas satisfont les identités suivantes*

1) Pour m, n et r des entiers positifs, le q-analogue des polynômes r-Lucas s'expriment en fonction du q-analogue des polynômes r-Fibonacci par

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_n^{(r)}(z,m) &= \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}\left(\frac{z}{q},m\right) + z\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}(q^m z,m), & (6.6)\\ \mathbb{L}_n^{(r)}(z,m) &= \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,m) + q^{n-r}z\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}\left(q^{m-r}z,m\right), & (6.7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_n^{(r)}(z,m) &= 2\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}\left(\frac{z}{q},m\right) - \mathbf{F}_n^{(r)}(z,m), & (6.8)\\ \mathbb{L}_n^{(r)}(z,m) &= 2\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,m) - \mathbf{F}_n^{(r)}(z,m), & (6.9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_n^{(r)}(z,m) &= \mathbf{F}_n^{(r)}(z,m) + 2z\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}(q^m z,m), & (6.10)\\ \mathbb{L}_n^{(r)}(z,m) &= \mathbf{F}_n^{(r)}(z,m) + 2q^{n-r}z\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}\left(q^{m-r}z,m\right). & (6.11)\end{aligned}$$

2) Pour m, n et r des entiers positifs, le q-analogue des polynômes r-Fibonacci s'expriment en fonction du q-analogue des polynômes r-Lucas par

$$\mathbf{F}_{n}^{(r)}(z,m)+\left(2+\frac{2}{q}\right)z\mathbf{F}_{n-r+1}^{(r)}\left(q^{m-1}z,m\right) = \mathbf{L}_{n+1}^{(r)}\left(\frac{z}{q},m\right)+z\mathbf{L}_{n-r}^{(r)}\left(q^{m}z,m\right), \quad (6.12)$$
$$\mathbf{F}_{n}^{(r)}(z,m)+2(1+q)q^{n-r}z\mathbf{F}_{n-r+1}^{(r)}\left(q^{m-r}z,m\right) = \mathbb{L}_{n+1}^{(r)}(z,m)+q^{n-r}z\mathbb{L}_{n-r}^{(r)}\left(q^{m-r}z,m\right) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{F}_{n}^{(r)}(z,m)+\frac{4}{q}z\mathbf{F}_{n-r+1}^{(r)}\left(q^{m-1}z,m\right) = 2\mathbf{L}_{n+1}^{(r)}\left(\frac{z}{q},m\right)-\mathbf{L}_{n}^{(r)}(z,m), \quad (6.14)$$
$$\mathbf{F}_{n}^{(r)}(z,m)+4q^{n-r+1}z\mathbf{F}_{n-r+1}^{(r)}\left(q^{m-r}z,m\right) = 2\mathbb{L}_{n+1}^{(r)}(z,m)-\mathbb{L}_{n}^{(r)}(z,m), \quad (6.15)$$

$$\mathbf{F}_{n}^{(r)}(z,m)+4z\mathbf{F}_{n-r+1}^{(r)}\left(q^{m-1}z,m\right) = \mathbf{L}_{n}^{(r)}(z,m)+2z\mathbf{L}_{n-r}^{(r)}\left(q^{m}z,m\right), \quad (6.16)$$
$$\mathbf{F}_{n}^{(r)}(z,m)+\frac{4}{q}q^{n-r+1}z\mathbf{F}_{n-r+1}^{(r)}\left(q^{m-r}z,m\right) = \mathbb{L}_{n}^{(r)}(z,m)+2q^{n-r}z\mathbb{L}_{n-r}^{(r)}\left(q^{m-r}z,m\right). \quad (6.17)$$

Preuve. Montrons les deux premières identités.

Par définition

$$\mathbf{L}_{n}^{(r)}(z,m) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-rk\\k\end{bmatrix}_q z^k+\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-rk\\k\end{bmatrix}_q \frac{[k]_q}{[n-rk]_q}z^k,$$
$$\mathbb{L}_{n}^{(r)}(z,m) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-rk\\k\end{bmatrix}_q z^k+\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-rk\\k\end{bmatrix}_q q^{n-(r+1)k}\frac{[k]_q}{[n-rk]_q}z^k,$$

donc

$$\mathbf{L}_{n}^{(r)}(z,m) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}_q \left(\frac{z}{q}\right)^k+\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-rk-1\\k-1\end{bmatrix}_q z^k,$$
$$\mathbb{L}_{n}^{(r)}(z,m) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}_q z^k+\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-rk-1\\k-1\end{bmatrix}_q q^{n-(r+1)k}z^k,$$

d'où

$$\mathbf{L}_{n}^{(r)}(z,m) = \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}\left(\frac{z}{q},m\right)+z\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-(r+1)-rk\\k\end{bmatrix}_q z^k,$$
$$\mathbb{L}_{n}^{(r)}(z,m) = \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,m)+z\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+2}{2}+m\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-(r+1)-rk\\k\end{bmatrix}_q q^{n-(r+1)(k+1)}z^k,$$

ou encore

$$\mathbf{L}_{n}^{(r)}(z,m) = \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}\left(\frac{z}{q},m\right)+z\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-2-k\\k\end{bmatrix}_q (q^m z)^k,$$
$$\mathbb{L}_{n}^{(r)}(z,m) = \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,m)+q^{n-r}z\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-2-k\\k\end{bmatrix}_q \left(q^{m-r}z\right)^k.$$

Ce qui termine la preuve des identités (6.6) et (6.7). En ce qui concerne les identités (6.8), (6.9), (6.10) et (6.11) on les déduit en utilisant les relations de récurrence (6.2) et (6.3). Pour le reste des identités, il suffit de voir que les identités (6.10) et (6.8) entraînent les identités (6.12), (6.14) et (6.16) et que les identités (6.11) et (6.9) entraînent les identités (6.13), (6.15) et (6.17). $\square$

Remarquant que la suite de polynômes $\left(\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z/q,m)\right)_n$ vérifie une relation de récurrence de type (6.2) et que la suite $\left(\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,m)\right)_n$ vérifie une relation de récurrence de type (6.3), on déduit des deux identité (6.8) et (6.9) les relations de récurrence de q-analogue des polynômes r-Lucas données par le résultat suivant :

Théorème 46 *Le polynôme $\mathbf{L}_n^{(r)}(z,m)$ satisfait la relation de récurrence*

$$\mathbf{L}_{n+1}^{(r)}(z,m)=\mathbf{L}_n^{(r)}(z,m)+q^{n-r}z\mathbf{L}_{n-r}^{(r)}\left(q^{m-r}z,m\right), \tag{6.18}$$

et le polynôme $\mathbb{L}_n^{(r)}(z,m)$ satisfait la relation de récurrence

$$\mathbb{L}_{n+1}^{(r)}(z,m)=\mathbb{L}_n^{(r)}(qz,m)+qz\mathbb{L}_{n-r}^{(r)}\left(q^{m+1}z,m\right). \tag{6.19}$$

6.2 Extension de l'approche de Carlitz et représentation matricielle

Pour le cas particulier $r=1$, en remplaçant le paramètre m par la valeur 1 dans l'approche unificatrice pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci, on obtient l'approche de Carlitz qui permet de généraliser l'identité (2.13) par l'évaluation du produit matriciel

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ q^n z & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ q^{n-1} z & \mathbf{1}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ z & \mathbf{1}\end{pmatrix}, \text{ (voir la relation (2.14).}$$

Dans cette section, on spécifie le cas $m=r$, qui est une généralisation de l'identité (2.14). Ceci donne un sens tout particulier à l'extension de l'approche unificatrice pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci et la "valorise" d'un autre point de vue.

6.2.1 Le cas des polynômes de Fibonacci

Pour le cas particulier $m=r$ les relations de récurrences (6.2) et (6.3) deviennent respectivement

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,r) &= \mathbf{F}_n^{(r)}(z,r)+q^{n-r}z\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}(z,r), \\ \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,r) &= \mathbf{F}_n^{(r)}(qz,r)+qz\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}\left(q^{r+1}z,r\right),\end{aligned}$$

ce qui veut dire que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{n-r+1}^{(r)}(z,r) \\ \mathbf{F}_{n-r+2}^{(r)}(z,r) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,r) \end{pmatrix} = C_r\left(q^{n-r}z\right) \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{n-r}^{(r)}(z,r) \\ \mathbf{F}_{n-r+1}^{(r)}(z,r) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{n}^{(r)}(z,r) \end{pmatrix},$$

avec la matrice carrée de type $r+1$

$$C_r(z) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ z & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les relations (2.13) et (2.14) sont généralisées par le résultat suivant :

Théorème 47 *Avec les polynômes* $\mathbf{F}_n^{(r)}(z,r)$ *on obtient l'expression*

$$\begin{aligned} & C_r\left(q^{n-r}z\right)\cdots C_r\left(q^{2-r}z\right)C_r\left(q^{1-r}z\right) \\ = & \begin{pmatrix} q^{r-1}z\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}(qz,r) & \cdots & z\mathbf{F}_{n-2r+1}^{(r)}(q^r z,r) & \mathbf{F}_{n+1-r}^{(r)}(z,r) \\ q^{r-1}z\mathbf{F}_{n+1-r}^{(r)}(qz,r) & \cdots & z\mathbf{F}_{n-2r+2}^{(r)}(q^r z,r) & \mathbf{F}_{n+2-r}^{(r)}(z,r) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q^{r-1}z\mathbf{F}_{n}^{(r)}(qz,r) & \cdots & z\mathbf{F}_{n-r+1}^{(r)}(q^r z,r) & \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,r) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.20}$$

Preuve. Il suffit de procéder par récurrence sur n en calculant $\mathbf{F}_{-1}^{(r)}(z,r)$, $\mathbf{F}_{-2}^{(r)}(z,r)$ et $\mathbf{F}_{2-2r}^{(r)}(z,r)$.
□

La relation (2.14) entraîne l'identité

$$\mathbf{F}_{n+l}(z,1) - \mathbf{F}_l(q^n z,1)\,\mathbf{F}_{n+1}(z,1) = q^n z\mathbf{F}_{l-1}\left(q^{n+1}z,1\right)\mathbf{F}_n(z,1), \tag{6.21}$$

satisfaite par le q-analogue des polynômes de Fibonacci proposé par Carlitz.

Comme application de ce théorème on généralise l'identité (6.21) pour les polynômes $\mathbf{F}_n^{(r)}(z,r)$.

Corollaire 48 *Pour des entiers positifs l, n et r, on a*

$$\mathbf{F}_{n+l}^{(r)}(z,r)-\mathbf{F}_{l}^{(r)}(q^{n}z,r)\,\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,r)=\sum_{j=1}^{r}q^{n+r-j}z\mathbf{F}_{l-j}^{(r)}\left(q^{n+j}z,r\right)\mathbf{F}_{n-(r-j)}^{(r)}(z,r).$$

Preuve. Posons

$$M_{n}(z,r)=C_{r}\left(q^{n-r}z\right)\cdots C_{r}\left(q^{2-r}z\right)C_{r}\left(q^{1-r}z\right).$$

D'après la relation (6.20) on a

$$M_{l+n}(z,r)=\begin{pmatrix} q^{r-1}z\mathbf{F}_{l+n-r}^{(r)}(qz,r) & \cdots & z\mathbf{F}_{l+n-2r+1}^{(r)}(q^{r}z,r) & \mathbf{F}_{l+n+1-r}^{(r)}(z,r)\\ q^{r-1}z\mathbf{F}_{l+n+1-r}^{(r)}(qz,r) & \cdots & z\mathbf{F}_{l+n-2r+2}^{(r)}(q^{r}z,r) & \mathbf{F}_{l+n+2-r}^{(r)}(z,r)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ q^{r-1}z\mathbf{F}_{l+n}^{(r)}(qz,r) & \cdots & z\mathbf{F}_{l+n-r+1}^{(r)}(q^{r}z,r) & \mathbf{F}_{l+n+1}^{(r)}(z,r)\end{pmatrix},$$

$$M_{l}(q^{n}z,r)=\begin{pmatrix} q^{n+r-1}z\mathbf{F}_{l-r}^{(r)}(q^{n+1}z,r) & \cdots & q^{n}z\mathbf{F}_{l-2r+1}^{(r)}(q^{r+n}z,r) & \mathbf{F}_{l+1-r}^{(r)}(q^{n}z,r)\\ q^{n+r-1}z\mathbf{F}_{l+1-r}^{(r)}(q^{n+1}z,r) & \cdots & q^{n}z\mathbf{F}_{l-2r+2}^{(r)}(q^{r+n}z,r) & \mathbf{F}_{l+2-r}^{(r)}(q^{n}z,r)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ q^{n+r-1}z\mathbf{F}_{l}^{(r)}(q^{n+1}z,r) & \cdots & q^{n}z\mathbf{F}_{l-r+1}^{(r)}(q^{r+n}z,r) & \mathbf{F}_{l+1}^{(r)}(q^{n}z,r)\end{pmatrix},$$

et

$$M_{n}(z,r)=\begin{pmatrix} q^{r-1}z\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}(qz,r) & \cdots & z\mathbf{F}_{n-2r+1}^{(r)}(q^{r}z,r) & \mathbf{F}_{n+1-r}^{(r)}(z,r)\\ q^{r-1}z\mathbf{F}_{n+1-r}^{(r)}(qz,r) & \cdots & z\mathbf{F}_{n-2r+2}^{(r)}(q^{r}z,r) & \mathbf{F}_{n+2-r}^{(r)}(z,r)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ q^{r-1}z\mathbf{F}_{n}^{(r)}(qz,r) & \cdots & z\mathbf{F}_{n-r+1}^{(r)}(q^{r}z,r) & \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,r)\end{pmatrix}.$$

Avec l'égalité

$$M_{n+l}(z,r)=M_{l}(q^{n}z,r)\,M_{n}(z,r),$$

le terme $\mathbf{F}_{n+l}^{(r)}(z)$ est égal au produit de la $r^{ème}$ ligne de $M_{m}(q^{n}z,r)$ avec la $(r+1)^{ème}$ colonne de $M_{n}(z,r)$. □

6.2.2 Le cas des polynômes de Lucas

En remplaçant m par 1 dans les formes explicites (6.4) et (6.5), on généralise, pour r quelconque, le q-analogue des polynômes de Lucas de première espèce et le q-analogue des polynômes de Lucas de deuxième espèce associés à l'approche de Carlitz.

Considérons maintenant la suite de polynômes définie, pour $r\geq 1$ et $n\geq 0$, par

$$\mathbf{Luc}_{n}^{(r)}(z)=tr\left(M_{n}(z,r)\right).$$

La forme explicite des polynômes $\mathbf{Luc}_n^{(r)}(z)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbf{Luc}_n^{(r)}(z,r) &= \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,r) + \sum_{j=1}^{r} q^{r-j} z \mathbf{F}_{n-r}^{(r)}\left(q^j z, r\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{(r+1)\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q \left(q^k + \sum_{j=0}^{r-1} q^{j(2-k)} \frac{[k]_q}{[n-rk]_q} \right) z^k.\end{aligned}$$

avec $\mathbf{Luc}_0^{(r)}(z,r) = r+1$.

Pour $r = 1$, on retrouve le q-analogue des polynômes de Lucas donnée par Cigler avec l'approche de Carlitz,

$$\mathbf{Luc}_n^{(1)}(z) = \mathbf{Luc}_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q^{2\binom{k}{2}} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q z^k.$$

Remarque 49 *La suite de polynômes* $\left(\mathbf{Luc}_n^{(r)}(z)\right)_{n\geq 0}$ *ne vérifie, ni une récurrence de type (6.2), ni une récurrence de type (6.3).*

6.3 Extension de l'approche de Cigler

6.3.1 Le cas des polynômes de Fibonacci

Pour le cas particulier $m = 0$, on revient au cas des polynômes bivariés (voir l'égalité (2.17)). Soient les polynômes

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,0) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-(r+1)k} y^k, \tag{6.22}$$

avec $\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,0) = 0$.

En utilisant la relation

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,0) = x^n \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}\left(\frac{y}{x^{r+1}}, 0\right), \tag{6.23}$$

chacune des relations de récurrence (6.2) et (6.3) nous conduit respectivement aux relations de récurrence suivantes :

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,0) = x\mathbf{F}_n^{(r)}(x,y,0) + q^{n-r} y \mathbf{F}_{n-r}^{(r)}\left(x, q^{-r}y, 0\right), \tag{6.24}$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,0) = x\mathbf{F}_n^{(r)}(x,qy,0) + qy\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}(x,qy,0). \tag{6.25}$$

On se propose de donner la forme explicite du prolongement aux indices négatifs de l'extension de l'approche de Cigler pour le q-analogue des polynômes r-Fibonacci.

Théorème 50 *Soient n et r deux entiers strictement positifs et considérons la division euclidienne $n = rl + t$ avec $0 \leq t < r$. Le prolongement aux indices négatifs du q-analogue des polynômes r-Fibonacci est donné par la forme explicite*

$$\mathbf{F}_{-n}^{(r)}(x,y,0) = \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1) \rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}} \begin{bmatrix} l-k-1 \\ t+rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-1-t-(r+1)k} y^{k-l}.$$

Avant la preuve calculons pour $r = 3$ les termes $\mathbf{F}_n^{(3)}(x,y,0)$, pour $-9 \leq n \leq 8$. Par définition on a

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}_0^{(3)}(x,y,0) = 0, & \mathbf{F}_1^{(3)}(x,y,0) = 1, & \mathbf{F}_2^{(3)}(x,y,0) = x, \\ \mathbf{F}_3^{(3)}(x,y,0) = x^2, & \mathbf{F}_4^{(3)}(x,y,0) = x^3, & \mathbf{F}_5^{(3)}(x,y,0) = x^4 + y, \\ \mathbf{F}_6^{(3)}(x,y,0) = x^5 + [2]_q xy, & \mathbf{F}_7^{(3)}(x,y,0) = x^6 + [3]_q x^2 y, & \mathbf{F}_8^{(3)}(x,y,0) = x^7 + [4]_q x^3 y. \end{array}$$

D'apés ce dernier théorème

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}_{-1}^{(3)}(x,y,0) = 0, & \mathbf{F}_{-2}^{(3)}(x,y,0) = 0, & \mathbf{F}_{-3}^{(3)}(x,y,0) = 1/y, \\ \mathbf{F}_{-4}^{(3)}(x,y,0) = 0, & \mathbf{F}_{-5}^{(3)}(x,y,0) = 0, & \mathbf{F}_{-6}^{(3)}(x,y,0) = -x/y^2, \\ \mathbf{F}_{-7}^{(3)}(x,y,0) = q/y^2, & \mathbf{F}_{-8}^{(3)}(x,y,0) = 0, & \mathbf{F}_{-9}^{(r)}(x,y,0) = x^2/y^3. \end{array}$$

On remarque que les termes $\mathbf{F}_n^{(3)}(x,y,0)$, pour $-9 \leq n \leq 8$, satisfont les deux relations de récurrence (6.24) et (6.25)

Preuve. Pour $n = rl + t \geq 0$ avec $0 \leq t < r$, posons

$$S_{-n}(x,y) = \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1) \rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}} \begin{bmatrix} l-k-1 \\ t+rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-1-t-(r+1)k} y^{k-l}.$$

Par convention, les éléments $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ sont nuls pour $k < 0$ ou $k > n$, donc, pour $0 \leq i < r$,

$$S_{-i}(x,y) = 0,$$

et

$$S_{-r}(x,y) = 1.$$

D'autre part, en utilisant l'une des relations de récurrence (6.24) ou (6.25) on trouve, pour $0 \leq i < r$,

$$\mathbf{F}_{-i}^{(r)}(x,y,0) = 0$$

et

$$\mathbf{F}_{-r}^{(r)}(x,y,0) = 1.$$

Ainsi les deux suites $\left(\mathbf{F}_{-n}^{(r)}(x,y,0)\right)_{n\geq 0}$ et $(S_n(x,y))_{n\geq 0}$ coïncident si elles vérifient ensembles l'une des relations de récurrence (6.24) et (6.25).

En effet, la suite $(S_n(x,y))_{n\geq 0}$ vérifie la récurrence (6.24). Cela se démontre en considérant les deux cas suivants :

a) Pour $n = rl + t$ avec $0 < t < r$ on a

$$\begin{aligned}
& xS_{-n}(x,y) + q^{-n-r}yS_{-n-r}(x,y/q^r) \\
= {} & x\sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}} \begin{bmatrix} l-k-1 \\ t+rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-1-t-(r+1)k}\, y^{k-l} \\
& + q^{-n-r}y\sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}} \begin{bmatrix} l-k \\ t+rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k} (y/q^r)^{k-l-1} \\
= {} & -\sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}} \begin{bmatrix} l-k-1 \\ t+rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l} \\
& + \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}} \begin{bmatrix} l-k \\ t+rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l} q^{-t-rk} \\
= {} & -\sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}} \begin{bmatrix} l-k-1 \\ t+rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l} \\
& + \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk}{2}} \begin{bmatrix} l-k \\ t+rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l} \\
= {} & \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk}{2}} \left(-q^{t+rk} \begin{bmatrix} l-k-1 \\ t+rk \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} l-k \\ t+rk \end{bmatrix}_q \right) (-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l} \\
= {} & \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{r\binom{t+rk}{2}} \begin{bmatrix} l-1-k \\ t-1+rk \end{bmatrix}_q x^{l-t-(r+1)k} y^{k-l} \\
= {} & S_{-n+1}(x,y).
\end{aligned}$$

b) Pour $n = rl$ on a

$$\begin{aligned}
& xS_{-n}(x,y) + q^{-n-r} y S_{-n-r}(x, y/q^r) \\
= \; & x \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1) \rfloor} q^{\binom{rk+1}{2}} \begin{bmatrix} l-k-1 \\ rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-1-(r+1)k} y^{k-l} \\
& + q^{-n-r} y \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1) \rfloor} q^{\binom{rk+1}{2}} \begin{bmatrix} l-k \\ rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-(r+1)k} (y/q^r)^{k-l-1} \\
= \; & - \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1) \rfloor} q^{\binom{rk+1}{2}} \begin{bmatrix} l-k-1 \\ rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-(r+1)k} y^{k-l} \\
& + \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1) \rfloor} q^{\binom{rk+1}{2}} \begin{bmatrix} l-k \\ t+rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-(r+1)k} y^{k-l} q^{-rk} \\
= \; & - \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1) \rfloor} q^{\binom{rk+1}{2}} \begin{bmatrix} l-k-1 \\ rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-(r+1)k} y^{k-l} \\
& + \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1) \rfloor} q^{\binom{rk}{2}} \begin{bmatrix} l-k \\ rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-(r+1)k} y^{k-l} \\
= \; & \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1) \rfloor} q^{\binom{rk}{2}} \left(-q^{rk} \begin{bmatrix} l-k-1 \\ rk \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} l-k \\ rk \end{bmatrix}_q \right) (-x)^{l-(r+1)k} y^{k-l} \\
= \; & \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1) \rfloor} q^{r\binom{rk}{2}} \begin{bmatrix} l-1-k \\ r-1+r(k-1) \end{bmatrix}_q x^{l-(r+1)k} y^{k-l} \\
= \; & \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1) \rfloor} q^{r\binom{r+rk}{2}} \begin{bmatrix} l-2-k \\ r-1+rk \end{bmatrix}_q x^{l-r-1-(r+1)k} y^{k+1-l} \\
= \; & S_{-n+1}(x,y).
\end{aligned}$$

□

6.3.2 Le cas des polynômes de Lucas

Notons par $\mathbf{L}_n^{(r)}(x,y,0,q)$ et $\mathbb{L}_n^{(r)}(x,y,0,q)$ respectivement le q-analogue des polynômes bivariés de Lucas généralisés de première espèce et le q-analogue des polynômes bivariés de Lucas généralisés de deuxième espèce associés aux polynômes bivariés $\mathbf{F}_n^{(r)}(x,y,0,q)$ définis respectivement, pour $n > 0$, par les formes explicites.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_n^{(r)}(x,y,0) \; &:= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q \left(1 + \frac{[k]_q}{[n-rk]_q} \right) x^{n-(r+1)k} y^k, \\
\mathbb{L}_n^{(r)}(x,y,0) \; &:= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q \left(1 + q^{n-(r+1)k} \frac{[k]_q}{[n-rk]_q} \right) x^{n-(r+1)k} y^k,
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{L}_n^{(r)}(x,y,0) = \mathbb{L}_n^{(r)}(x,y,0) = 2$.

Avec les relations

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_n^{(r)}(x,y,0) &= x^n \mathbf{L}_n^{(r)}\left(\frac{y}{x^{r+1}},0\right), \\ \mathbb{L}_n^{(r)}(x,y,0) &= x^n \mathbb{L}_n^{(r)}\left(\frac{y}{x^{r+1}},0\right),\end{aligned}$$

chacune des relations (6.8) et (6.9), devient respectivement

$$\mathbf{L}_n^{(r)}(x,y,0) = 2\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y/q,0) - x\mathbf{F}_n^{(r)}(x,y,0), \tag{6.26}$$

$$\mathbb{L}_n^{(r)}(x,y,0) = 2\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,0) - x\mathbf{F}_n^{(r)}(x,y,0), \tag{6.27}$$

de plus, le fait que la suite $\left(\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y/q,0)\right)_{n\geq 0}$ vérifie une récurrence de type (6.24) entraîne que la suite $\left(\mathbf{L}_n^{(r)}(x,y,0)\right)_{n\geq 0}$ vérifie une récurrence de type (6.24), et le fait que la suite $\left(\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,0)\right)_{n\geq 0}$ vérifie une récurrence de type (6.25) entraîne que la suite $\left(\mathbb{L}_n^{(r)}(x,y,0)\right)_{n\geq 0}$ vérifie une récurrence de type (6.25). Ainsi chacune des suites $\left(\mathbf{L}_n^{(r)}(x,y,0)\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\mathbb{L}_n^{(r)}(x,y,0)\right)_{n\geq 0}$ est prolongeable aux indices négatifs, ce qui nous permet de considérer ces deux suites sur $\mathbb{Z}$.

Pour caractériser le prolongement des suites $\left(\mathbf{L}_n^{(r)}(x,y,0)\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\mathbb{L}_n^{(r)}(x,y,0)\right)_{n\geq 0}$ aux indices négatifs, on utilise la proposition suivante :

Proposition 51 *La suite* $\left(\mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y/q,0)\right)_{n\geq 0}$ *vérifie une relation de récurrence de type (6.24), et la suite* $\left(\mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y,0)\right)_{n\geq 0}$ *vérifie une relation de récurrence de type (6.25).*

Preuve. En posant $a_{-n}(x,y) = \mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y/q,0)$ et $b_{-n}(x,y) = \mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y,0)$ on a

$$\begin{aligned}xa_{-n}(x,y) + q^{-n-r}ya_{-n-r}(x,y/q^r) &= x\mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y/q,0) + q^{-n-r}y\mathbf{F}_{-n-r+1}^{(r)}\left(x,y/q^{r+1},0\right) \\ &= x\mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y/q,0) + q^{-n-r+1}\frac{y}{q}\mathbf{F}_{-n-r+1}^{(r)}\left(x,y/q^{r+1},0\right) \\ &= \mathbf{F}_{-n+2}^{(r)}(x,y/q,0) \\ &= a_{-n+1}(x,y),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}xb_{-n}(x,y) + yb_{-n-r}(x,y) &= x\mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y,0) + y\mathbf{F}_{-n-r+1}^{(r)}(x,y,0) \\ &= \mathbf{F}_{-n+2}^{(r)}(x,y/q^r,0) \\ &= b_{-n+1}(x,y).\end{aligned}$$

□

Avec cette proposition et le fait que l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence de type (6.24) ou de type (6.25) est stable par multiplication par x. Les relations (6.26) et (6.27) entraînent le résultat suivant.

Théorème 52 *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{n}^{(r)}(x,y,0) &= 2\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y/q,0) - x\mathbf{F}_{n}^{(r)}(x,y,0),\\ \mathbb{L}_{n}^{(r)}(x,y,0) &= 2\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,0) - x\mathbf{F}_{n}^{(r)}(x,y,0).\end{aligned}$$

Comme conséquence de ce dernier Théorème, on donne la forme explicite des termes $\mathbf{L}_{n}^{(r)}(x,y,0)$ et $\mathbb{L}_{n}^{(r)}(x,y,0)$ pour les indices négatifs.

Théorème 53 *Soient n et r deux entiers strictement positifs et soit $n = rl + t$ avec $0 \le t < r$. Le prolongement aux indices négatifs du q-analogue des polynômes r-Lucas de première et de deuxième espèce sont donnés respectivement par les formes explicites*

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{-n}^{(r)}(x,y,0) &= \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}}\left(1+q^{l-(r+1)k-t}\frac{[t-rk]_q}{[l-k]_q}\right)\begin{bmatrix} l-k \\ t+rk\end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l},\\ \mathbb{L}_{-n}^{(r)}(x,y,0) &= \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk}{2}}\left(1+\frac{[t-rk]_q}{[l-k]_q}\right)\begin{bmatrix} l-k \\ t+rk\end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l}.\end{aligned}$$

Preuve. Soit $n = rl + t > 0$ avec $0 \le t < r$, selon les valeurs de t on a les deux cas suivants :

Pour $t > 0$ on a

$$\begin{aligned}&\mathbf{L}_{-n}^{(r)}(x,y,0)\\ =\;& 2\mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y/q,0) - x\mathbf{F}_{-n}^{(r)}(x,y,0)\\ =\;& \mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y/q,0) + \sum_{k=0}^{\lfloor l/r+1\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}}\left(q^{l-(r+1)k-t}\begin{bmatrix} l-k-1 \\ t-1+rk\end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} l-k-1 \\ t+rk\end{bmatrix}_q\right)(-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l}\\ =\;& \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk}{2}+l-k}\begin{bmatrix} l-k-1 \\ t-1+rk\end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l} + \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}}\begin{bmatrix} l-k \\ t+rk\end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l}\\ =\;& \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk}{2}+l-k}\frac{[t-rk]_q}{[l-k]_q}\begin{bmatrix} l-k \\ t+rk\end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l}\\ &+ \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}}\begin{bmatrix} l-k \\ t+rk\end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l}\\ =\;& \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}}\left(1+q^{l-(r+1)k-t}\frac{[t-rk]_q}{[l-k]_q}\right)\begin{bmatrix} l-k \\ t+rk\end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k}\, y^{k-l},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathbb{L}_{-n}^{(r)}(x,y,0)\\
=\ & 2\mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y,0)-x\mathbf{F}_{-n}^{(r)}(x,y,0)\\
=\ & \mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y,0)+\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} q^{\binom{t+rk}{2}}\left(\begin{bmatrix} l-k-1\\ t-1+rk\end{bmatrix}_q + q^{t+rk}\begin{bmatrix} l-k-1\\ t+rk\end{bmatrix}_q\right)(-x)^{l-t-(r+1)k}\,y^{k-l}\\
=\ & \sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} q^{\binom{t+rk}{2}}\begin{bmatrix} l-k-1\\ t-1+rk\end{bmatrix}_q(-x)^{l-t-(r+1)k}\,y^{k-l}+\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} q^{\binom{t+rk}{2}}\begin{bmatrix} l-k\\ t+rk\end{bmatrix}_q(-x)^{l-t-(r+1)k}\,y^{k-l}\\
=\ & \sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} q^{\binom{t+rk}{2}}\frac{[t+rk]_q}{[l-k]_q}\begin{bmatrix} l-k\\ t+rk\end{bmatrix}_q(-x)^{l-t-(r+1)k}\,y^{k-l}+\sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}}\begin{bmatrix} l-k\\ t+rk\end{bmatrix}_q(-x)^{l-t-(r+1)k}\,y^{k-l}\\
=\ & \sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1\rfloor} q^{\binom{t+rk}{2}}\left(1+\frac{[t+rk]_q}{[l-k]_q}\right)\begin{bmatrix} l-k\\ t+rk\end{bmatrix}_q(-x)^{l-t-(r+1)k}\,y^{k-l}.
\end{aligned}$$

Pour $t=0$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_{-n}^{(r)}(x,y,0)\\
=\ & 2\mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y/q,0)-x\mathbf{F}_{-n}^{(r)}(x,y,0)\\
=\ & 2\sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{r(k+1)}{2}+l-k-1}\begin{bmatrix} l-k-2\\ r-1+rk\end{bmatrix}_q(-x)^{l-1-r-(r+1)k}\,y^{k-l+1}-x\mathbf{F}_{-n}^{(r)}(x,y,0)\\
=\ & 2\sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{rk}{2}+l-k}\begin{bmatrix} l-k-1\\ rk-1\end{bmatrix}_q(-x)^{l-(r+1)k}\,y^{k-l}-x\mathbf{F}_{-n}^{(r)}(x,y,0)\\
=\ & \mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y/q,0)+\sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{rk+1}{2}}\left(q^{l-(r+1)k}\begin{bmatrix} l-k-1\\ rk-1\end{bmatrix}_q+\begin{bmatrix} l-k-1\\ rk\end{bmatrix}_q\right)(-x)^{l-(r+1)k}\,y^{k-l}\\
=\ & \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{rk}{2}+l-k}\frac{[rk]_q}{[l-k]_q}\begin{bmatrix} l-k\\ rk\end{bmatrix}_q(-x)^{l-(r+1)k}\,y^{k-l}\\
&+\sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}}\begin{bmatrix} l-k\\ rk\end{bmatrix}_q(-x)^{l-(r+1)k}\,y^{k-l}\\
=\ & \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}}\left(1+q^{l-(r+1)k}\frac{[rk]_q}{[l-k]_q}\right)\begin{bmatrix} l-k\\ rk\end{bmatrix}_q(-x)^{l-(r+1)k}\,y^{k-l},
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{L}_{n}^{(r)}(x,y,0) \\
= \; & 2\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,0) - x\mathbf{F}_{n}^{(r)}(x,y,0) \\
= \; & 2\sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{r(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} l-k-2 \\ r-1+rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-1-r-(r+1)k} y^{k-l} - x\mathbf{F}_{n}^{(r)}(x,y,0) \\
= \; & 2\sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{rk}{2}} \begin{bmatrix} l-k-1 \\ rk-1 \end{bmatrix}_q (-x)^{l-(r+1)k} y^{k-l} - x\mathbf{F}_{n}^{(r)}(x,y,0) \\
= \; & \mathbf{F}_{-n+1}^{(r)}(x,y,0) + \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{rk}{2}} \left(\begin{bmatrix} l-k-1 \\ rk-1 \end{bmatrix}_q + q^{rk} \begin{bmatrix} l-k-1 \\ rk \end{bmatrix}_q \right) (-x)^{l-(r+1)k} y^{k-l} \\
= \; & \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{rk}{2}} \frac{[rk]_q}{[l-k]_q} \begin{bmatrix} l-k \\ rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-(r+1)k} y^{k-l} + \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{rk}{2}} \begin{bmatrix} l-k \\ rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-(r+1)k} y^{k-l} \\
= \; & \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{rk}{2}} \left(1 + \frac{[rk]_q}{[l-k]_q}\right) \begin{bmatrix} l-k \\ rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k} y^{k-l}.
\end{aligned}
$$

□

Remarque 54 *Sur $\mathbb{Z}$, la forme explicite du q-analogue des polynômes bivariés de Lucas généralisés de première espèce et la forme explicite du q-analogue des polynômes bivariés de Lucas généralisés de deuxième espèce sont données respectivement pour $n = rl + t > 0$ avec $0 \leq t < r$, par*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_{n}^{(r)}(x,y,0) &= \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q \left(1 + \frac{[k]_q}{[n-rk]_q}\right) x^{n-(r+1)k} y^{k}, \\
\mathbf{L}_{-n}^{(r)}(x,y,0) &= \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk+1}{2}} \left(1 + q^{l-(r+1)k-t} \frac{[t+rk]_q}{[l-k]_q}\right) \begin{bmatrix} l-k \\ t+rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k} y^{k-l},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{L}_{n}^{(r)}(x,y,0) &= \sum_{k=0}^{\lfloor l/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q \left(1 + q^{n-(r+1)k} \frac{[k]_q}{[n-rk]_q}\right) x^{n-(r+1)k} y^{k}, \\
\mathbb{L}_{-n}^{(r)}(x,y,0) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{t+rk}{2}} \left(1 + \frac{[t+rk]_q}{[l-k]_q}\right) \begin{bmatrix} l-k \\ t+rk \end{bmatrix}_q (-x)^{l-t-(r+1)k} y^{k-l}.
\end{aligned}
$$

6.4 Appendice

Dans le deuxième chapitre, on a considéré chacun des coefficients $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ et $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)}$ comme un q-analogue du coefficient binomial $\binom{n}{k}$. Dans cet appendice on explicite la liaison entre le triangle formé par les monômes $\left[{n \atop k}\right]_q^{(1)} z^k$ et le q-analogue de la suite de Fibonacci proposé par Cigler, ainsi que la liaison entre le triangle formé par les monômes $\left[{n \atop k}\right]_q z^k$ et le q-analogue de la suite de Fibonacci proposé par Carlitz.

Dans la littérature, plusieurs auteurs notent les nombres de Fibonacci par $f_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}$, c'est-à-dire que $f_n = F_{n+1}$. La notation que l'on a adoptée dans cette thèse, comme d'autres auteurs, a des avantages théoriques, comme le fait que F_{kn} est un multiple de F_n et le fait que $p\,\mathrm{gcd}\,(F_n, F_m) = F_{p\,\mathrm{gcd}(n,m)}$ ainsi que d'autres propriétés.

Pour le q-analogue de la suite de Fibonacci on a les deux cas suivants :

6.4.1 L'approche de Cigler

La définition proposé par Cigler peut être retrouvée avec la suite dont le terme général est donné par la somme des éléments diagonaux dans le triangle formé par les monômes $q^{\binom{k}{2}} \left[{n \atop k}\right]_q x^{n-k} y^k$. Il s'agit de la suite

$$\mathbf{Fib}_n(x, y, 0) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k} y^k,$$

qui satisfait les récurrences

$$\begin{aligned}
\mathbf{Fib}_{n+1}(x, y, 0) &= x\mathbf{Fib}_n(x, y, 0) + q^{n-1} y \mathbf{Fib}_{n-1}(x, y, 0), &(6.28)\\
\mathbf{Fib}_{n+1}(x, y, 0) &= x\mathbf{Fib}_n(x, y, 0) + y \mathbf{Fib}_{n+1}(qx, qy, 0), &(6.29)\\
\mathbf{Fib}_{n+1}(x, y, 0) &= x\mathbf{Fib}_n(x, qy, 0) + y \mathbf{Fib}_{n+1}(x, qy, 0). &(6.30)
\end{aligned}$$

Puisque l'ensemble des suites satisfaisant (6.28) n'est pas stable par translation d'indice, il est commode de poser (comme l'a fait Cigler)

$$\mathbf{F}_{n+1}(x, y, 0) = \mathbf{Fib}_n(x, qy, 0),$$

pour obtenir les récurrences suivantes

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{n+1}(x, y, 0) &= x\mathbf{F}_n(x, y, 0) + q^{n-1} y \mathbf{F}_{n-1}(x, y, 0), &(6.31)\\
\mathbf{F}_{n+1}(x, y, 0) &= x\mathbf{F}_n(x, y, 0) + qy \mathbf{F}_{n-1}(qx, qy, 0), &(6.32)\\
\mathbf{F}_{n+1}(x, y, 0) &= x\mathbf{F}_n(x, qy, 0) + qy \mathbf{F}_{n-1}(x, qy, 0). &(6.33)
\end{aligned}$$

Le tableau suivant montre la liaison entre le q-analogue de triangle de Pascal et l'approche de

Cigler pour le q-analogue de la suite de Fibonacci

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}_q^{(1)} & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_1(x,y,0) \\
 & & & & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x & & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_2(x,y,0) \\
 & & & \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^2 & + & \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_q^{(1)}y & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_3(x,y,0) \\
 & & \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^3 & + & \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}_q^{(1)}xy & & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_4(x,y,0) \\
 & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^4 & + & \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}_q^{(1)}x^2y & + & \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}_q^{(1)}y^2 & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_5(x,y,0) \\
\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^5 & + & \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_q^{(1)}x^3y & + & \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_q^{(1)}xy^2 & & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_6(x,y,0) \\
+ & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^4y & + & \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_q^{(1)}x^2y^2 & + & \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}_q^{(1)}y^3 & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_7(x,y,0) \\
\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^5y & + & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^3y^2 & + & \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_q^{(1)}xy^3 & & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_8(x,y,0) \\
+ & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^4y^2 & + & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^2y^2 & + & \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}_q^{(1)}y^4 & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_9(x,y,0)
\end{array}
$$

Figure 7 : Le q-analogue du triangle de Pascal et Le q-analogue de la suite de Fibonacci

De la même façon, en considérant une autre transversale du q-analogue du triangle de Pascal ; la direction $(1,r)$, la sommation des monômes $q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q x^{n-k}y^k$ donne la suite

$$\mathbf{Fib}_n^{(r)}(x,y,0)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-rk\\k\end{bmatrix}_q x^{n-(r+1)k}y^k,$$

ce qui nous amène à suggérer ce qui suit

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,0)=\mathbf{Fib}_n^{(r)}(x,qy,0).$$

Pour le cas particulier $r=2$ le tableau suivant montre la liaison entre le q-analogue de triangle de Pascal et la suite $\mathbf{Fib}_n^{(2)}(x,qy,0)$.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}_q^{(1)} & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_1^{(2)}(x,y,0) \\
 & & & & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x & & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_2^{(2)}(x,y,0) \\
 & & & \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^2 & + & & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_3^{(2)}(x,y,0) \\
 & & \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^3 & + & & \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_q^{(1)}y & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_4^{(2)}(x,y,0) \\
 & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^4 & + & & \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}_q^{(1)}xy & & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_5^{(2)}(x,y,0) \\
\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^5 & + & & \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}_q^{(1)}x^2y & & & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_6^{(2)}(x,y,0) \\
+ & & \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_q^{(1)}x^3y & + & & \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}_q^{(1)}y^2 & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_7^{(2)}(x,y,0) \\
 & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^4y & + & & \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_q^{(1)}xy^2 & & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_8^{(2)}(x,y,0) \\
\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^5y & + & & \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_q^{(1)}x^2y^2 & & & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_9^{(2)}(x,y,0) \\
 & & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^3y^2 & + & & \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}_q^{(1)}y^3 & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_{10}^{(2)}(x,y,0) \\
 & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^4y^2 & + & & \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_q^{(1)}xy^3 & & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_{11}^{(2)}(x,y,0) \\
\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^5y^2 & + & & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q^{(1)}x^2y^3 & & & \twoheadrightarrow & \mathbf{Fib}_{12}^{(2)}(x,y,0)
\end{array}
$$

Figure 8 : Le q-analogue du triangle de Pascal et Le q-analogue de la suite 2-Fibonacci

6.4.2 L'approche de Carlitz

Etant donnés deux operateurs X et Q tels que $QX = qXQ$, considérons l'operateur de Fibonacci suivant

$$\mathbf{Fib}_n(X,Q,1) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q X^{n-2k} Q^k,$$

le terme général de cette suite est donné par la somme des éléments diagonaux principaux dans le q-triangle de Pascal formé par les monômes (en tant qu'operateurs) $q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q X^{n-k} Q^k$.

Puisque la suite $\mathbf{Fib}_n(X,Q,1)$ satisfait les deux récurrences

$$\begin{aligned} \mathbf{Fib}_{n+1}(X,Q,1) &= X\mathbf{Fib}_n(X,Q,1) + Q\mathbf{Fib}_{n-1}(X,Q,1), \\ \mathbf{Fib}_{n+1}(X,Q,1) &= \mathbf{Fib}_n(X,Q,1)\,X + \mathbf{Fib}_{n-1}(X,Q,1)\,Q, \end{aligned}$$

nous déduisons l'identité matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q & X \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{Fib}_{n-1}(X,Q,1)\,Q & \mathbf{Fib}_n(X,Q,1) \\ \mathbf{Fib}_n(X,Q,1)\,Q & \mathbf{Fib}_{n+1}(X,Q,1) \end{pmatrix}. \tag{6.34}$$

En considérant l'opérateur $Z = X^{-2}Q$, on a

$$\mathbf{Fib}_n(X,Q,1) = X^n \mathbf{Fib}_n\left(X^{-2}Q,1\right) \quad \text{avec} \quad \mathbf{Fib}_n(z,1) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q q^{2\binom{k}{2}} z^k.$$

Pour des raisons de commodités, on propose, suivant l'approche de Carlitz, de définitir la suite de Fibonacci comme suit

$$\mathbf{F}_{n+1}(z,1) = \mathbf{Fib}_n(qz,1).$$

Pour la sommation le long de la transversale de direction $(1,r)$ dans le q-triangle de Pascal formé par les monômes $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q X^{n-k} Q^k$, on obtient la suite

$$\mathbf{Fib}_n^{(r)}(X,Q,1) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q X^{n-(r+1)k} Q^k,$$

qui satisfait les récurrences

$$\begin{aligned} \mathbf{Fib}_{n+1}^{(r)}(X,Q,1) &= X\mathbf{Fib}_n^{(r)}(X,Q,1) + Q\mathbf{Fib}_{nn-1}^{(r)}(X,Q,1), \\ \mathbf{Fib}_{nn+1}^{(r)}(X,Q,1) &= \mathbf{Fib}_{nn}^{(r)}(X,Q,1)\,X + \mathbf{Fib}_{n-r-1}^{(r)}(X,Q,1)\,Q. \end{aligned}$$

Par suite, la relation (6.34) est généralisée par

$$(C_r(X,Q))^n = \begin{pmatrix} \mathbf{Fib}_{n-r}^{(r)}(X,Q,1)\,Q & \cdots & \mathbf{Fib}_{n-2r+1}^{(r)}(X,Q,1)\,Q & \mathbf{Fib}_{n+1-r}^{(r)}(X,Q,1) \\ \mathbf{Fib}_{n+1-r}^{(r)}(X,Q,1)\,Q & \cdots & \mathbf{Fib}_{n-2r+2}^{(r)}(X,Q,1)\,Q & \mathbf{Fib}_{n+2-r}^{(r)}(X,Q,1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{Fib}_n^{(r)}(X,Q,1)\,Q & \cdots & \mathbf{Fib}_{n-r+1}^{(r)}(X,Q,1)\,Q & \mathbf{Fib}_{n+1}^{(r)}(X,Q,1) \end{pmatrix},$$

où $C_r(X,Q)$ est un operateur matriciel d'ordre $r+1$:

$$C_r(X,Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ Q & 0 & \cdots & 0 & X \end{pmatrix}.$$

En considérant l'opérateur $Z = X^{-(r+1)}Q$, on a

$$\mathbf{Fib}_n^{(r)}(X,Q,1) = X^n \mathbf{Fib}_n^{(r)}\left(X^{-(r+1)}Q,1\right) \quad \text{avec} \quad \mathbf{Fib}_n^{(r)}(z,1) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q q^{(r+1)\binom{k}{2}} z^k.$$

Signalons enfin que l'extension de l'approche de Carlitz pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci que l'on a présentée dans ce chapitre est inspirée de

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(z,1) = \mathbf{Fib}_n^{(r)}(qz,1).$$

La suite "multibonacci", qui généralise la suite de Fibonacci, s'exprime, par (1.17), en termes de coefficients *bi*^{s}*nomiaux . Après avoir introduit un* q-analogue des coefficients *bi*^{s}nomiaux *dans le chapitre suivant on utilisera ces derniers pour donner un* q-analogue de la suite "multibonacci" consideré comme *une autre généralisation de l'approche de Cigler pour le* q-analogue de la suite de Fibonacci.

Chapitre 7

Un q-analogue de la suite "multibonacci" et des coefficients *bi^{s}nomiaux*

Dans ce chapitre, on propose un q-analogue de la suite "multibonacci" $\left(\psi_n^{(s)}\right)_{n\geq 0}$ donnée par (voir le dernier paragraphe du premier chapitre)

$$\psi_n^{(s)} = \sum_{l=0}^{sm-r} \binom{n-l}{l}_s,$$

avec une forme explicite écrite en terme d'un q-analogue des coefficients *bi^{s}nomiaux. Notre approche pour le q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux est une alternative à* la définition proposée par Andrews et Baxter [1]. Elle nous permet de nous projeter sur l'approche de Cigler pour le q-analogue des polynômes de Fibonacci comme cas particulier.

En ce qui concerne le q-analogue des polynômes de Lucas que l'on a associé à la définition de Cigler, nous proposons une généralisation à la fin du chapitre.

7.1 Un q-analogue des coefficients *bi^{s}nomiaux*

7.1.1 Définition et caractérisation

Les coefficients *bi^{s}nomiaux* $\binom{n}{k}_s$ sont définis par la fonction génératrice

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^s\right)^n = \sum_{k=0}^{ns} \binom{n}{k}_s x^k. \tag{7.1}$$

Pour $a = \exp\left(i\frac{2\pi}{s+1}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
&\left(1+x+x^2+\cdots+x^s\right)^n \\
&= \left(\prod_{r=1}^{s}(x-a^r)\right)^n, \\
&= \prod_{r=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\left(-a^r\right)^{n-j}\right), \\
&= \sum_{k=0}^{ns}\left(\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k}\binom{n}{j_1}\binom{n}{j_2}\cdots\binom{n}{j_s}(-1)^{ns-k}a^{\sum_{r=1}^{s}r(n-j_r)}\right)x^k.
\end{aligned}$$

Par identification avec la relation (7.1), on obtient une nouvelle expression des coefficients *bi^{s}nomiaux*.

Théorème 55 *Les coefficients bi^{s}nomiaux s'expriment en termes de coefficients binomieaux comme suit*

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k}\binom{n}{j_1}\binom{n}{j_2}\cdots\binom{n}{j_s}(-1)^k a^{-\sum_{r=1}^{s}rj_r}. \tag{7.2}$$

Ce résultat nous suggère la définition suivante :

Définition 56 *On définit le q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux par*

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(s)} := \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k}\begin{bmatrix}n\\j_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n\\j_2\end{bmatrix}_q\cdots\begin{bmatrix}n\\j_s\end{bmatrix}_q q^{\sum_{r=1}^{s}\binom{j_r}{2}}(-1)^k a^{-\sum_{r=1}^{s}rj_r}.$$

Remarque 57 *Pour $s=1$ on retrouve le q-analogue du coefficient binomial $q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q$ qu'on a noté $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(1)}$ dans le deuxième chapitre (voir (2.6a) et (2.6b)).*

Avec l'identité (7.2), la définition que l'on propose pour le q-analogue des coefficients *bi^{s}nomiaux* semble plus naturelle. Elle nous permet d'obtenir un q-analogue de la relation (7.1).

Théorème 58 *Les coefficients $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(s)}$ satisfont la relation*

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+q^jz+\cdots+\left(q^jz\right)^s\right) = \sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(s)} z^k. \tag{7.3}$$

Preuve. Comme

$$\left(1+z+z^2+\cdots+z^s\right) = \prod_{j=1}^{s}\left(z-a^j\right) \quad \text{pour} \quad a = \exp\left(i\frac{2\pi}{s+1}\right),$$

alors

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+q^jz+\cdots+\left(q^jz\right)^s\right)=\prod_{r=1}^{s}\left(z-a^r\right)\left(qz-a^r\right)\left(q^2z-a^r\right)\cdots\left(q^{n-1}z-a^r\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{ns}\left(\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k}\begin{bmatrix}n\\j_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\j_2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}n\\j_s\end{bmatrix}q^{\sum_{r=1}^{s}\binom{j_r}{2}}\left(-1\right)^{ns-k}a^{\sum_{r=1}^{s}r(n-j_r)}\right)z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(s)}z^k.$$

□

7.1.2 Relations de récurrence

Pour le cas particulier $s=1$, on connait les deux récurrences satisfaites par les coefficients $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(1)}$,

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(1)} = q^k\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q^{(1)}+q^{k-1}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_q^{(1)},$$

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(1)} = \begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q^{(1)}+q^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_q^{(1)}.$$

Elles se généralisent en :

Théorème 59 *Le q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux satisfait les deux récurrences*

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^{s}q^{k-j}\begin{bmatrix}n-1\\k-j\end{bmatrix}_q^{(s)}, \tag{7.4}$$

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^{s}q^{(n-1)j}\begin{bmatrix}n-1\\k-j\end{bmatrix}_q^{(s)}. \tag{7.5}$$

Preuve. Avec l'identité (7.3) les deux relations

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+q^jz+\cdots+\left(q^jz\right)^s\right) = \left(1+z+\cdots+z^s\right)\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+q^{j+1}z+\cdots+\left(q^{j+1}z\right)^s\right),$$

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+q^jz+\cdots+\left(q^jz\right)^s\right) = \left(1+q^{n-1}z+\cdots+\left(q^{n-1}z\right)^s\right)\prod_{j=0}^{n-2}\left(1+q^jz+\cdots+\left(q^jz\right)^s\right),$$

deviennent respectivement

$$\sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(s)}z^k = \left(1+z+\cdots+z^s\right)\sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q^{(s)}\left(qz\right)^k,$$

$$\sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(s)}z^k = \left(1+q^{n-1}z+\cdots+\left(q^{n-1}z\right)^s\right)\sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q^{(s)}z^k,$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} z^k &= \sum_{k=0}^{ns} \left(\sum_{j=0}^{s} q^{k-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} \right) z^k, \\
\sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} z^k &= \sum_{k=0}^{ns} \left(\sum_{j=0}^{s} q^{(n-1)j} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} \right) z^k.
\end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat. □

De plus avec ce théorème on a donné deux q-analogues de la récurrence longitudinale, voir [13]

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j=0}^{s} \binom{n-1}{k-j}_s .$$

7.1.3 Généralisation du q-analogue de l'identité de Chu-Vandermonde

L'identité de Chu-Vandermonde

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j},$$

a un q-analogue (voir [29] et [35]) vérifié par les coefficients q-binomiaux, donné par

$$\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{(n-j)(k-j)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m \\ k-j \end{bmatrix}_q . \tag{7.6}$$

Dans [10], on a généralisé l'identité de Chu-Vandermonde aux coefficients $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q^{(s)}$ par le résultat suivant :

Théorème 60 *Le q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux satisfait la relation*

$$\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^{k} q^{n(k-j)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} m \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} .$$

Preuve. D'après la relation (7.3)

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{n-1} \left(1 + q^j z + \cdots + (q^j z)^s\right) &= \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} z^k, \\
\prod_{j=0}^{m-1} \left(1 + q^j z + \cdots + (q^j z)^s\right) &= \sum_{k=0}^{ms} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} z^k, \\
\prod_{j=0}^{n+m-1} \left(1 + q^j z + \cdots + (q^j z)^s\right) &= \sum_{k=0}^{(n+m)s} \begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} z^k.
\end{aligned}$$

Avec ces identités, l'égalité

$$\prod_{j=0}^{n+m-1}\left(1+q^{j}z+\cdots+\left(q^{j}z\right)^{s}\right)=\prod_{j=0}^{n-1}\left(1+q^{j}z+\cdots+\left(q^{j}z\right)^{s}\right)\prod_{j=0}^{m-1}\left(1+q^{n+j}z+\cdots+\left(q^{n+j}z\right)^{s}\right),$$

devient

$$\sum_{k=0}^{(n+m)s}\begin{bmatrix}n+m\\k\end{bmatrix}_q^{(s)}z^k=\left(\sum_{k=0}^{ns}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^{(s)}z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{ms}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}_q^{(s)}\left(q^nz\right)^k\right),$$

on conclut par identification. □

Remarque 61 *La relation (7.6) s'écrit*

$$\begin{bmatrix}n+m\\k\end{bmatrix}_q^{(1)}=\sum_{j=0}^{k}q^{n(k-j)}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q^{(1)}\begin{bmatrix}m\\k-j\end{bmatrix}_q^{(1)}.$$

Preuve. En effet

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}n+m\\k\end{bmatrix}_q^{(1)} &= q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n+m\\k\end{bmatrix}_q\\ &= q^{\binom{k}{2}}\sum_{j=0}^{k}q^{(n-j)(k-j)}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}m\\k-j\end{bmatrix}_q\\ &= \sum_{j=0}^{k}q^{n(k-j)}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q q^{\binom{k-j}{2}}\begin{bmatrix}m\\k-j\end{bmatrix}_q\\ &= \sum_{j=0}^{k}q^{n(k-j)}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q^{(1)}\begin{bmatrix}m\\k-j\end{bmatrix}_q^{(1)}.\end{aligned}$$

□

7.2 Un q-analogue de la suite "multibonacci"

Dans cette section, on va généralisé le q-analogue pour la suite "multibonacci" qui est une généralisation de la suite de Fibonacci comme suite récurrente linéaire d'ordre ≥ 3.

Définition 62 *Pour $s \geq 1$, on définit comme q-analogue de la suite "multibonacci" la suite de polynômes définie, pour $n \geq 0$, par*

$$\mathbf{F}_n^{(s)}(z)=\sum_{k=0}^{sm-r}q^k\begin{bmatrix}n-1-k\\k\end{bmatrix}_q^{(s)}z^k,$$

où $0 \leq r \leq s$ et $m(s+1)-r=n$. (m est donné par l'algorithme étendu de la division euclidienne)

Avec le cas particulier $q = z = 1$ on retrouve la caractérisation liée à la suite "multibonacci" $\left(\Phi_n^{(s)}\right)_{n\geq -s}$

$$\Phi_n^{(s)} = \sum_{k=0}^{sm-r} \binom{n-k}{k}_s ,$$

qui vérifie la récurrence

$$\begin{cases} \left(\Phi_0^{(s)}, \Phi_{-1}^{(s)}, \ldots, \Phi_{-s}^{(s)}\right) = (1, 0, 0, \ldots, 0)\,, \\ \\ \Phi_n^{(s)} = \Phi_{n-1}^{(s)} + \Phi_{n-2}^{(s)} + \cdots + \Phi_{n-s-1}^{(s)} \;\; (n \geq 1)\,, \end{cases}$$

dont la généralisation est donnée par le résultat suivant :

Théorème 63 *Le q-analogue de la suite "multibonacci" vérifie pour, $n \geq 0$, les récurrences*

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(z) = \sum_{j=0}^{s} \left(q^{n-j} z\right)^j \mathbf{F}_{n-j}^{(s)}\left(\frac{z}{q^j}\right), \tag{7.7}$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}\left(\frac{z}{q}\right) = \sum_{j=0}^{s} z^j \mathbf{F}_{n-j}^{(s)}(z)\,. \tag{7.8}$$

Preuve. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{s} z^j \mathbf{F}_{n-j}^{(s)}(z) &= \sum_{j=0}^{s} z^j \left(\sum_{k\geq 0} q^k \begin{bmatrix} n-1-j-k \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} z^k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{k\geq 0} q^k \begin{bmatrix} n-1-j-k \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} z^{k+j}\right) \\ &= \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{s} q^{k-j} \begin{bmatrix} n-1-k \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)}\right) z^k, \end{aligned}$$

qui devient par la récurrence (7.4)

$$\sum_{j=0}^{s} z^j \mathbf{F}_{n-j}^{(s)}(z) = \sum_{k\geq 0} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} z^k = \mathbf{F}_{n+1}^{(s)}\left(\frac{z}{q}\right).$$

D'autre part, on

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{s} \left(q^{n-j} z\right)^j \mathbf{F}_{n-j}^{(s)}\left(\frac{z}{q^j}\right) &= \sum_{j=0}^{s} \left(q^{n-j} z\right)^j \left(\sum_{k\geq 0} q^k \begin{bmatrix} n-1-j-k \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} \left(\frac{z}{q^j}\right)^k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{k\geq 0} q^{(n-j-k)j+k} \begin{bmatrix} n-1-j-k \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} z^{k+j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{k\geq 0} q^{(n-k)j+k-j} \begin{bmatrix} n-1-k \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} z^k\right) \\ &= \sum_{k\geq 0} q^k \left(\sum_{j=0}^{s} q^{(n-k-1)j} \begin{bmatrix} n-1-k \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)}\right) z^k, \end{aligned}$$

qui devient par la récurrence (7.5)

$$\sum_{j=0}^{s}\left(q^{n-j}z\right)^{j}\mathbf{F}_{n-j}^{(s)}\left(\frac{z}{q^{j}}\right)=\sum_{k\geq 0}q^{k}\begin{bmatrix}n-k\\ k\end{bmatrix}_{q}^{(s)}z^{k}=\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(z).$$

□

Pour $s=1$, on retrouve le q-analogue des polynômes de Fibonacci suggéré par Cigler

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(1)}(z)=\mathbf{F}_{n+1}(z,0)=\sum_{k\geq 0}q^{k}\begin{bmatrix}n-k\\ k\end{bmatrix}_{q}^{(1)}z^{k}.$$

Comme on retrouven en utilisant (7.4) et (7.5), les récurrences (2.19) et (2.20), pour $(x,y)=(1,z)$, données par

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1}(z,0)&=\mathbf{F}_{n}(z,0)+q^{n-1}z\mathbf{F}_{n-1}\left(\frac{z}{q},0\right),\\ \mathbf{F}_{n+1}\left(\frac{z}{q},0\right)&=\mathbf{F}_{n}(z,0)+z\mathbf{F}_{n-1}(z,0).\end{aligned}$$

7.3 Suites compagnons de la suite "q-multibonacci"

Comme suite compagnon de la suite $\mathbf{F}_{n}^{(s)}(z)$, considérons les suites $\mathbf{L}_{n}^{(s)}(z)$ et $\mathbb{L}_{n}^{(s)}(z)$ définies respectivement par les relations

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{n}^{(s)}(z)&=2\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}\left(\frac{z}{q}\right)-\mathbf{F}_{n}^{(s)}(z),\\ \mathbb{L}_{n}^{(s)}(z)&=2\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(z)-\mathbf{F}_{n}^{(s)}(z).\end{aligned}$$

Avec cette définition et les valeurs initiales suivantes

$$\left(\mathbf{F}_{2}^{(s)}(z),\mathbf{F}_{1}^{(s)}(z),\mathbf{F}_{0}^{(s)}(z),\ldots,\mathbf{F}_{-s+1}^{(s)}(z)\right)=(1,1,0,\ldots,0),$$

on déduit les valeurs initiales

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{L}_{1}^{(s)}(z),\mathbf{L}_{0}^{(s)}(z),\mathbf{L}_{-1}^{(s)}(z),\ldots,\mathbf{L}_{-s+1}^{(s)}(z)\right)&=(1,2,0,\ldots,0),\\ \left(\mathbb{L}_{1}^{(s)}(z),\mathbb{L}_{0}^{(s)}(z),\mathbb{L}_{-1}^{(s)}(z),\ldots,\mathbb{L}_{-s+1}^{(s)}(z)\right)&=(1,2,0,\ldots,0),\end{aligned}$$

et on montre le résultat suivant :

Théorème 64 *Les suites $\mathbf{L}_{n}^{(s)}(z)$ et $\mathbb{L}_{n}^{(s)}(z)$ vérifient respectivement les récurrences*

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{n+1}^{(s)}(z)&=\sum_{j=0}^{s}\left(q^{n-j}z\right)^{j}\mathbf{L}_{n-j}^{(s)}\left(\frac{z}{q^{j}}\right),\\ \mathbb{L}_{n+1}^{(s)}\left(\frac{z}{q}\right)&=\sum_{j=0}^{s}z^{j}\mathbb{L}_{n-j}^{(s)}(z).\end{aligned}$$

Preuve. Par définition

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{s}\left(q^{n-j}z\right)^{j}\mathbf{L}_{n-j}^{(s)}\left(\frac{z}{q^{j}}\right) &= \sum_{j=0}^{s}\left(q^{n-j}z\right)^{j}\left(2\mathbf{F}_{n-j+1}^{(s)}\left(\frac{z}{q^{j+1}}\right)-\mathbf{F}_{n-j}^{(s)}\left(\frac{z}{q^{j}}\right)\right)\\
&= 2\sum_{j=0}^{s}\left(q^{n+1-j}\frac{z}{q}\right)^{j}\mathbf{F}_{n+1-j}^{(s)}\left(\frac{z}{q^{j+1}}\right)-\sum_{j=0}^{s}\left(q^{n-j}z\right)^{j}\mathbf{F}_{n-j}^{(s)}\left(\frac{z}{q^{j}}\right)\\
&= 2\mathbf{F}_{n+2}^{(s)}\left(\frac{z}{q}\right)-\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}\left(z\right)\\
&= \mathbf{L}_{n+1}^{(s)}\left(z\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{s}z^{j}\mathbb{L}_{n-j}^{(s)}\left(z\right) &= \sum_{j=0}^{s}z^{j}\left(2\mathbf{F}_{n-j+1}^{(s)}\left(z\right)-\mathbf{F}_{n-j}^{(s)}\left(z\right)\right)\\
&= 2\sum_{j=0}^{s}z^{j}\mathbf{F}_{n-j+1}^{(s)}\left(z\right)-\sum_{j=0}^{s}z^{j}\mathbf{F}_{n-j}^{(s)}\left(z\right)\\
&= 2\mathbf{F}_{n+2}^{(s)}\left(z\right)-\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}\left(z\right)\\
&= \mathbb{L}_{n+1}^{(s)}\left(z\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 8

Le cas p, q-analogue

Les coefficients p, q-binomiaux sont introduits par Corcino [28] et repris et exploités par Shattuck [45] et Teşelean [43]. Dans ce chapitre, on exploite ces coefficients pour étendre les approches de Carlitz et de Cigler au cas p, q-analogue et pour introduire les coefficients p, q-bi^{s}nomiaux afin d'étudier la suite "p, q-multibonacci".

8.1 Les coefficients p, q-binomiaux

Considérons les notations

$$[n]_{p,q} := p^{n-1} + p^{n-2}q + \cdots + q^{n-1}, \quad [n]_{p,q}! := [1]_{p,q}[2]_{p,q} \cdots [n]_{p,q}, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} := \frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}![n-k]_{p,q}!},$$

avec la convention $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_{p,q} = 0$ pour $k < 0$ ou $k > n$.

Les coefficients p, q-binomiaux $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_{p,q}$ généralisent les coefficients q-binomiaux puisque $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_{1,q} = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_{q}$ et mettent en exergue une certaine symétrie dans les relations comme on le voit ci-dessous

$$\begin{aligned}
[n]_{p,q} &= p^{n-k}[k]_{p,q} + q^k[n-k]_{p,q}, \\
[n]_{p,q}! &= q^{\binom{n}{2}}[n]_{p/q}!, \\
[n]_{p,q} &= q^{n-1}[n]_{p/q}, \\
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} &= q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p/q}, && (8.1) \\
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} &= p^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q}, && (8.2) \\
\prod_{j=0}^{n-1} (p^j x + q^j y) &= \sum_{k=0}^{n} p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-k} y^k. && (8.3)
\end{aligned}$$

8.2 Les coefficients p,q-bi^{s}nomiaux

En s'inspirant de la définition des coefficients q-bi^{s}nomiaux, on suggère la définition suivante :

Définition 65 *Pour $s \geq 1$, on définit le p,q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux par*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix}_{p,q} \cdots \begin{bmatrix} n \\ j_s \end{bmatrix}_{p,q} q^{\sum_{r=1}^{s}\binom{j_r}{2}} p^{\sum_{r=1}^{s}\binom{n-j_r}{2}} (-1)^k \, a^{-\sum_{r=1}^{s} r j_r},$$

où $a = e^{i\frac{2\pi}{s+1}}$ et $i^2 = -1$.

Avec le cas particulier $p = 1$, on retrouve le q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux, et pour $s = 1$ on retrouve les coefficients $p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_{p,q}$ donnés en (8.3).

Cette définition nous permet de généraliser les relations (7.3) et (8.3).

Théorème 66 *Le p,q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux satisfait la relation*

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{t=0}^{s} \left(p^j x\right)^t \left(q^j y\right)^{s-t} \right) = \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} x^{ns-k} y^k. \tag{8.4}$$

Preuve. Pour $a = \exp\left(i\frac{2\pi}{s+1}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{t=0}^{s} \left(p^j x\right)^{s-t} \left(q^j y\right)^{t} \right) &= \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{l=1}^{s} \left(q^j y - a^l p^j x\right) \\
&= \prod_{l=1}^{s} \prod_{j=0}^{n-1} \left(q^j y - a^l p^j x\right) \\
&= \prod_{l=1}^{s} \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{n-j}{2}} q^{\binom{j}{2}} y^j \left(a^l x\right)^{n-j} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} x^{ns-k} y^k.
\end{aligned}$$

□

Avec les coefficients $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_{p,q}^{(1)} = p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_{p,q}$, la relation (8.1) devient

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(1)} = p^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q/p}^{(1)},$$

et se généralise, pour tout $s \geq 1$, à :

Corollaire 67 *Le p,q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux et le p/q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux sont liés par la formule*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} = p^{s\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q/p}^{(s)}.$$

Preuve. D'après la relation (8.4) on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{s} x^{ns-k} y^k &= \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{t=0}^{s} \left(p^j x\right)^{s-t} \left(q^j y\right)^t \right) \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} \left(\left(p^j x\right)^s \sum_{t=0}^{s} \left(\frac{q^j y}{p^j x} \right)^t \right) \\ &= x^{ns} p^{s\binom{n}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{t=0}^{s} \left(\frac{q^j y}{p^j x} \right)^t \right) \\ &= x^{ns} p^{s\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q/p}^{(s)} \left(\frac{x}{y} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{ns} p^{s\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q/p}^{(s)} x^{ns-k} y^k. \end{aligned}$$

□

Corollaire 68 *Le p,q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux satisfait les recurrences*

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} = \sum_{j=0}^{s} p^{n(s-j)} q^{nj} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}, \tag{8.5}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} = \sum_{j=0}^{s} p^{ns-k+j} q^{k-j} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}. \tag{8.6}$$

Preuve. D'après la relation (8.4), on a d'une part

$$\sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} x^{(n+1)s-k} y^k = \left(\sum_{t=0}^{s} \left(p^n x\right)^{s-t} \left(q^n y\right)^t \right) \left(\sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} x^{ns-k} y^k \right),$$

et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} x^{(n+1)s-k} y^k = \left(\sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} (px)^{ns-k} (qy)^k \right) \left(\sum_{t=0}^{s} x^{s-t} y^t \right),$$

par identification on obtient les deux récurrences. □

On donne à présent une généralisation du p,q-analogue de l'identité de Chu-Vandermonde.

Théorème 69 *Le p,q-analogue du coefficient bi^{s}nomial satisfait la relation*

$$\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{s} = \sum_{j=0}^{k} p^{n(k-i)} q^{n(k-i)} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_{p,q}^{s} \begin{bmatrix} n \\ k-i \end{bmatrix}_{p,q}^{s}.$$

Preuve. D'après la relation (8.4) on a

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{t=0}^{s} \left(p^j x\right)^t \left(q^j y\right)^{s-t} \right) &= \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{s} x^k y^{ns-k}, \\
\prod_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{t=0}^{s} \left(p^j x\right)^t \left(q^j y\right)^{s-t} \right) &= \sum_{k=0}^{ms} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{s} x^k y^{ms-k}, \\
\prod_{j=0}^{n+m-1} \left(\sum_{t=0}^{s} \left(p^j x\right)^t \left(q^j y\right)^{s-t} \right) &= \sum_{k=0}^{(n+m)s} \begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{s} x^k y^{(n+m)s-k}.
\end{aligned}$$

En remplaçant ces trois identités dans l'égalité

$$\prod_{j=0}^{n+m-1} \left(\sum_{t=0}^{s} \left(p^j x\right)^t \left(q^j y\right)^{s-t} \right) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{t=0}^{s} \left(p^j x\right)^t \left(q^j y\right)^{s-t} \right) \prod_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{t=0}^{s} \left(p^j x\right)^t \left(q^{n+j} y\right)^{s-t} \right),$$

on tire la relation

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{(n+m)s} \begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{s} x^k y^{(n+m)s-k} &= \left(\sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{s} x^k y^{ns-k} \right) \left(\sum_{k=0}^{ms} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{s} \left(p^n x\right)^k \left(q^n y\right)^{ms-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{(n+m)s} \left(\sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_{p,q}^{s} \begin{bmatrix} m \\ k-i \end{bmatrix}_{p,q}^{s} p^{n(k-i)} q^{n(k-i)} \right) x^k y^{(n+m)s-k}.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. □

8.3 La suite p,q-Fibonacci

Avec les coefficients p,q-binomiaux on obtient un p,q-analogue du triangle de Pascal, En s'inspirant de la définition de la suite de Fibonacci généralisée, on exploite les coefficients p,q-binomiaux pour définir la suite p,q-Fbonacci généralisée.

8.3.1 Un p,q-analogue associé à l'approche de Cigler

Considérons la suite $\left(\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q)\right)_{n\geq 0}$ définie par

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/r+1 \rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-(r+1)k} y^k,$$

avec $\mathbf{F}_0^{(r)}(x,y,p,q)=0$

Pour $p=1$ et $r=1$, on retrouve le q-analogue de la suite de Fibonacci donnée par Cigler.

Théorème 70 *Les polynômes $\mathbf{F}_n^{(r)}(x,y,p,q)$ vérifient les deux récurrences*

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q) = px\mathbf{F}_n^{(r)}(px,py,p,q)+qy\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}(qx,qy,p,q), \tag{8.7}$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q) = px\mathbf{F}_n^{(r)}(px,qy,p,q)+qy\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}(px,qy,p,q), \tag{8.8}$$

avec $\mathbf{F}_0^{(r)}(x,y,p,q)=0$, $\mathbf{F}_j^{(r)}(x,y,p,q)=x^{j-1}$ pour $j=1,2,...,r$.

Preuve. D'après la relation (8.2), on a

$$\begin{aligned}
& \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q) \\
= & \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \left(p^k \begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} + q^{n-(r+1)k} \begin{bmatrix} n-1-rk \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} \right) x^{n-(r+1)k} y^k \\
= & px \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q} (px)^{n-1-(r+1)k} (qy)^k + \\
& y \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)(k+1)}{2}} q^{\binom{k+2}{2}} q^{n-(r+1)(k+1)} \begin{bmatrix} n-r-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q} x^{n-r-1-(r+1)k} (qy)^k \\
= & px \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q} x^{n-1-(r+1)k} y^k + \\
& qy \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-r-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-r-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q} (qx)^{n-r-1-(r+1)k} (qy)^k \\
= & px\mathbf{F}_n^{(r)}(px,py,p,q)+qy\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}(qx,qy,p,q).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q) \\
= \ & \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k+1}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \left(q^k \begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} + p^{n-(r+1)k} \begin{bmatrix} n-1-rk \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} \right) x^{n-(r+1)k} y^k \\
= \ & px \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q} (px)^{n-1-(r+1)k} (qy)^k + \\
& y \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)(k+1)+1}{2}} q^{\binom{k+2}{2}} p^{n-(r+1)(k+1)} \begin{bmatrix} n-r-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-r-1-(r+1)k} y^k \\
= \ & px \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q} (px)^{n-1-(r+1)k} (qy)^k + \\
& qy \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-r-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-r-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q} (px)^{n-r-1-(r+1)k} (qy)^k \\
= \ & px\mathbf{F}_n^{(r)}(px,qy,p,q) + qy\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}(px,qy,p,q).
\end{aligned}
$$

□

Remarque 71 *1) Les récurrences (8.7) et (8.8) peuvent être écrites de la façon suivante :*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{p},p,q\right) &= x\mathbf{F}_n^{(r)}(x,y,p,q) + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-r} y\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}\left(x,\left(\frac{q}{p}\right)^{-r} y,p,q\right), \\
\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{q},p,q\right) &= x\mathbf{F}_n^{(r)}(x,y,p,q) + y\mathbf{F}_{n-r}^{(r)}(x,y,p,q).
\end{aligned}
$$

2) Pour $r=1$, les récurrences (8.7) et (8.8) deviennent

$$
\mathbf{F}_{n+1}(x,y,p,q) = p^n x\mathbf{F}_n\left(x,\frac{y}{p},p,q\right) + q^{n-1}y\mathbf{F}_{n-1}\left(x,\frac{y}{q},p,q\right), \tag{8.9}
$$

$$
\mathbf{F}_{n+1}(x,y,p,q) = px\mathbf{F}_n(px,qy,p,q) + qy\mathbf{F}_{n-r}(px,qy,p,q). \tag{8.10}
$$

8.3.2 La suite p,q-Lucas

La suite p,q-Fibonacci vérifie deux relations de récurrence. Par rapport à chacune de ces récurrences on définit un p,q-analogue de la suite de Lucas. Ainsi on obtient deux espèces de suite p,q-Lucas.

Définition 72 *La suite p,q-Lucas de première espèce et la suite p,q-Lucas de deuxième espèce* *sont définies respectivement par*

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_n^{(r)}(x,y,p,q) &: = 2\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{q},p,q\right) - x\mathbf{F}_n^{(r)}(x,y,p,q)\,, \\
\mathbb{L}_n^{(r)}(x,y,p,q) &: = 2\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{p},p,q\right) - x\mathbf{F}_n^{(r)}(x,y,p,q)\,.
\end{aligned}$$

Avec cette définition on peut déduire des relations duales entre la suite p,q-Fibonacci et la suite p,q-Lucas.

Pour $r = p = 1$, on retrouve les deux espèces de suites q-Lucas qu'on a associée à l'approche de Cigler, et les relations de récurrences (3.5) et (3.6) sont généralisées par le théorème suivant :

Théorème 73 *La suite p,q-Lucas de première espèce et la suite p,q-Lucas de deuxième espèce satisfont respectivement les récurrences*

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q) &= px\mathbf{L}_n^{(r)}(px,py,p,q) + qy\mathbf{L}_{n-r}^{(r)}(qx,qy,p,q)\,, \\
\mathbb{L}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q) &= px\mathbb{L}_n^{(r)}(px,qy,p,q) + qy\mathbb{L}_{n-r}^{(r)}(px,qy,p,q)\,.
\end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de remarquer que la suite $\left(\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x/p,y/q,p,q)\right)_{n\geq 0}$ satisfait une récurrence de type (8.7) et la suite $\left(\mathbf{F}_{n+1}^{(r)}(x/p,y/p,p,q)\right)_{n\geq 0}$ satisfait une récurrence de type (8.8). □

8.3.3 Un p,q-analogue de la suite "multibonacci"

Dans ce qui suit on exploite notre définition des coefficient p,q-bi^{s}nomiaux pour une approche du p,q-analogue de la suite "multibonacci".

Définition 74 *Pour $s \geq 1$, on définit comme p,q-analogue de la suite "multibonacci" la suite de polynômes définie, pour $n \geq 0$, par*

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y) := \sum_{k=0}^{sm-r} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} (px)^{sn-(s+1)k}(qy)^k\,,$$

où $0 \leq r \leq s$ et $m(s+1) - r = n$ (m est donné par l'algorithme étendu de la division euclidienne).

Théorème 75 *Le p,q-analogue de la suite "multibonacci" vérifie, pour $n \geq 0$, les relations de récurrence*

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y) &= \sum_{j=0}^{s} \left(p^{n-j}x\right)^{s-j}\left(q^{n-j}y\right)^j \mathbf{F}_{n-j}^{(s)}\left(x,\frac{y}{p^{s-j}q^j}\right), \\
\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y) &= \sum_{j=0}^{s} (px)^{s-j}(qy)^j\,\mathbf{F}_{n-j}^{(s)}(px,qy)\,.
\end{aligned}$$

Preuve. Avec les récurrences (8.5) et (8.6) on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y) &= \sum_{k=0}^{sm-r}\left(\sum_{j=0}^{s} p^{(n-k-1)(s-j)}q^{(n-k-1)j}\begin{bmatrix} n-1-k \\ k-j \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}\right)(px)^{sn-(s+1)k}(qy)^{k}, \\
\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y) &= \sum_{k=0}^{sm-r}\left(\sum_{j=0}^{s} p^{(n-k-1)s-k+j}q^{k-j}\begin{bmatrix} n-1-k \\ k-j \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}\right)(px)^{sn-(s+1)k}(qy)^{k}.
\end{aligned}$$

En changeant l'indice de sommation k par $k+j$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y) &= \sum_{j=0}^{s}\sum_{k=0}^{sm-r} p^{(n-k-j-1)(s-j)}q^{(n-k-j-1)j}\begin{bmatrix} n-1-k-j \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}(px)^{sn-(s+1)(k+j)}(qy)^{k+j}, \\
\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y) &= \sum_{j=0}^{s}\sum_{k=0}^{sm-r} p^{(n-k-j-1)s-k}q^{k}\begin{bmatrix} n-1-k-j \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}(px)^{sn-(s+1)(k+j)}(qy)^{k+j},
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y) &= \sum_{j=0}^{s}\left(p^{n-j}x\right)^{s-j}\left(q^{n-j}y\right)^{j}\sum_{k=0}^{sm-r} p^{-(s-j)k}q^{-kj}\begin{bmatrix} n-1-k-j \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}(px)^{s(n-1-j)-(s+1)k}(qy)^{k}, \\
\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y) &= \sum_{j=0}^{s}(px)^{s-j}(qy)^{j}\sum_{k=0}^{sm-r} p^{(n-k-j-1)s-k}q^{k}\begin{bmatrix} n-1-k-j \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}(px)^{s(n-1-j)-(s+1)k}(qy)^{k}.
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y) &= \sum_{j=0}^{s}\left(p^{n-j}x\right)^{s-j}\left(q^{n-j}y\right)^{j}\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}\left(x,\frac{y}{p^{s-j}q^{j}}\right), \\
\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(x,y) &= \sum_{j=0}^{s}(px)^{s-j}(qy)^{j}\mathbf{F}_{n+1}^{(s)}(px,qy).
\end{aligned}$$

□

Remarque 76 *Ce dernier théorème généralise d'une part les récurrences (7.7) et (7.8), et d'autre part les relations (8.9) et (8.10).*

Chapitre 9

Conclusion

Les suites de Fibonacci et de Lucas définies par leur interprétation combinatoire sont connues par les caractérisations suivantes :

1) Les suites de Fibonacci et de Lucas satisfont des relations de récurrence de mêmes types et d'ordre deux.

2) Les suites de Fibonacci et de Lucas sont liées à la puissance $n^{ième}$ d'une matrice.

3) Les suites de Fibonacci et de Lucas admettent des formes explicites de Binet.

4) Les suites de Fibonacci et de Lucas admettent des expressions via les coefficients binomiaux.

Dans la littérature les approches de Carlitz et de Cigler sont les principales définitions pour le q-analogue des suites de Fibonacci et de Lucas, cependant l'examen des quatre caracterisations citées ci-dessus pour le cas q-analogue, nous a conduit à faire les deux remarques suivantes :

1) Pour les approches de Carlitz et de Cigler, les relations de récurrence satisfaites par le q-analogue de la suite de Fibonacci et celles satisfaites par le q-analogue de la suites de Lucas ne sont pas de même type, ce qui a fait l'objet de la première partie de notre travail où on a associé à chacune de ces deux approches une nouvelle approche pour le q-analogue de la suites de Lucas, on a en conséquence, établi plus de propriétés.

2) Le q-analogue de la formule de Binet pour l'approche de Carlitz reste à établir, et voir si elle induit des liens entre la diagonalisation de la matrice $C(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 1 \end{pmatrix}$ et la diagonalisation du produit matriciel $C(q^{n-1}z) \cdots C(qz)\, C(z)$.

Dans la seconde partie de notre travail, on a introduit le q-analogue de la suite r-Fibonacci, et de la suite r-Lucas, avec lesquels on a généralisé plusieurs propriétés, mais il reste à étudier les points suivants :

1) Les suites obtenues par les différentes directions de sommation dans le triangle q-Pascal autres que la direction de sommation utilisée pour le q-analogue des suites r-Fibonacci, et r-Lucas.

2) La formule de Binet pour le q-analogue des suites r-Fibonacci, et r-Lucas.

La dérnière partie de notre travail traite du q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux et de la suite "multibonacci". L'approche proposée dans cette partie généralise l'approche de Cigler pour le q-analogue des suites de Fibonacci et de Lucas. Il serait interessant d'établir :

3) Un q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux ainsi qu'un q-analogue de la suite "multibonacci" lié à l'approche de Carlitz, pour les exploiter ensuite dans des identités liées aux matrices.

4) Un q-analogue des coefficients multinomiaux qui soit compatible avec le q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux et le q-analogue de la suite "multibonacci".

Les suites de Fibonacci et de Lucas sont liées à d'autres suites telles que les suites de Chebychev de première et de seconde espèce, les suites de Pell et de Pell-Lucas, et d'autres suites. Pour le cas q-analogue on trouve dans la litterature des approches pour les nombres de Stirling comme celle de Gould [31], des approches pour la fonction exponentielle comme celle de Gessel [30], des approches pour les nombres et les polynômes de Bernoulli comme celle de Carlitz [18].

Se pose alors naturellement la question de savoir s'il est possible d'unifier toutes ces approches dans une seule théorie globale !

Bibliographie

[1] G. E. Andrews and R. J. Baxter. Lattice gas generalization of the hard hexagon model. III. q-trinomial coefficients. *J. Statist. Phys.*, 47(3-4) :297–330, 1987.

[2] A. Bayad and Y. Hamahata. Identities involving two kinds of q-Euler polynomials and numbers. *J. Integer Seq.*, 15(4) :Article 12.4.6, 14, 2012.

[3] H. Belbachir. Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numériques. Thèse Doctorat d'Etat. U.S.T.H.B, 2008.

[4] H. Belbachir and F. Bencherif. On some properties of bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. *J. Integer Seq.*, 11(2) :Article 08.2.6, 10, 2008.

[5] H. Belbachir and A. Benmezai. Generalized Carlitz's approach of q-Fibonacci and q-Lucas polynomials.

[6] H. Belbachir and A. Benmezai. Expansion of Fibonacci and Lucas Polynomials : An Answer to Prodinger$'$s Question. *J. Integer Seq.*, 15(4) :Article 12.7.6, 14, 2012.

[7] H. Belbachir and A. Benmezai. An alternative approach to Cigler's q-Lucas polynomials. *Appl. Math. Comput.*, 226 :691–698, 2014.

[8] H. Belbachir and A. Benmezai. On the expansion of Fibonacci and Lucas polynomials, revisited. *Les Annales RECITS*, 1(01) :1–10, 2014.

[9] H. Belbachir and A. Benmezai. A q-analogue for bi^{s}nomial coefficients and generalized Fibonacci sequences. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 352(3) :167–171, 2014.

[10] H. Belbachir, A. Benmezai, and A. Bouyakoub. Generalized of Chu-Vandermonde identity.

[11] H. Belbachir, A. Benmezai, and A. Bouyakoub. On q-anlogue of Fibonacci and Lucas sequences.

[12] H. Belbachir, A. Benmezai, and A. Bouyakoub. The q-anlogue of a property of second order linear recurrence.

[13] H. Belbachir, S. Bouroubi, and A. Khelladi. Connection between ordinary multinomials, Fibonacci numbers, Bell polynomials and discrete uniform distribution. *Ann. Math. Inform.*, 35 :21–30, 2008.

[14] H. Belbachir and H. Harik. Determining Lucas identities according to Hosoya.

[15] H. Belbachir and H. Harik. Link between Hosoya index and Fibonacci numbers.

[16] A. T. Benjamin and J. J. Quinn. *Proofs that really count*, volume 27 of *The Dolciani Mathematical Expositions*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2003. The art of combinatorial proof.

[17] R. C. Bollinger. A note on Pascal-T triangles, multinomial coefficients, and Pascal pyramids. *Fibonacci Quart.*, 24(2) :140–144, 1986.

[18] L. Carlitz. q-Bernoulli numbers and polynomials. *Duke Math. J.*, 15 :987–1000, 1948.

[19] L. Carlitz. Fibonacci notes. III. q-Fibonacci numbers. *Fibonacci Quart.*, 12 :317–322, 1974.

[20] L. Carlitz. Fibonacci notes. IV. q-Fibonacci polynomials. *Fibonacci Quart.*, 13 :97–102, 1975.

[21] J. Cigler. A new class of q-Fibonacci polynomials. *Electron. J. Combin.*, 10 :Research Paper 19, 15 pp. (electronic), 2003.

[22] J. Cigler. q-Fibonacci polynomials. *Fibonacci Quart.*, 41(1) :31–40, 2003.

[23] J. Cigler. q-Fibonacci polynomials and the Rogers-Ramanujan identities. *Ann. Comb.*, 8(3) :269–285, 2004.

[24] J. Cigler. q-Fibonacci polynomials and q-Genocchi numbers. *ArXiv e-prints*, Aug. 2009.

[25] J. Cigler. q-Lucas polynomials and associated Rogers-Ramanujan type identities. *ArXiv e-prints*, July 2009.

[26] J. Cigler. Some beautiful q-analogues of Fibonacci and Lucas polynomials. *ArXiv e-prints*, Apr. 2011.

[27] J. Cigler and J. Zeng. A curious q-analogue of Hermite polynomials. *J. Combin. Theory Ser. A*, 118(1) :9–26, 2011.

[28] R. B. Corcino. On p, q-binomial coefficients. *Integers*, 8 :A29, 16, 2008.

[29] G. Gasper and M. Rahman. *Basic hypergeometric series*, volume 96 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2004. With a foreword by Richard Askey.

[30] I. M. Gessel. A q-analog of the exponential formula. *Discrete Math.*, 40(1) :69–80, 1982.

[31] H. W. Gould. The q-Stirling numbers of first and second kinds. *Duke Math. J.*, 28 :281–289, 1961.

[32] A. M. Goyt and D. Mathisen. Permutation statistics and q-Fibonacci numbers. *Electron. J. Combin.*, 16(1) :Research Paper 101, 15, 2009.

[33] A. M. Goyt and B. E. Sagan. Set partition statistics and q-Fibonacci numbers. *European J. Combin.*, 30(1) :230–245, 2009.

[34] V. J. W. Guo, F. Jouhet, and J. Zeng. Factors of alternating sums of products of binomial and q-binomial coefficients. *Acta Arith.*, 127(1) :17–31, 2007.

[35] C. Kassel. Quantum groups. In *Algebra and operator theory (Tashkent, 1997)*, pages 213–236. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[36] T. Koshy. *Fibonacci and Lucas numbers with applications.* Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience, New York, 2001.

[37] A. Lascoux and P. Pragacz. Bezoutians, Euclidean algorithm, and orthogonal polynomials. *Ann. Comb.*, 9(3) :301–319, 2005.

[38] N. I. Mahmudov. On a class of q-Bernoulli and q-Euler polynomials. *Adv. Difference Equ.*, pages 2013 :108, 11, 2013.

[39] N. I. Mahmudov and M. E. Keleshteri. On a class of generalized q-Bernoulli and q-Euler polynomials. *Adv. Difference Equ.*, pages 2013 :115, 10, 2013.

[40] H. Pan. Arithmetic properties of q-Fibonacci numbers and q-Pell numbers. *Discrete Math.*, 306(17) :2118–2127, 2006.

[41] H. Prodinger. On the expansion of Fibonacci and Lucas polynomials. *J. Integer Seq.*, 12(1) :Article 09.1.6, 5, 2009.

[42] I. Schur. Ein Beitrag zur Hilbertschen Theorie der vollstetigen quadratischen Formen. *Math. Z.*, 12(1) :287–297, 1922.

[43] M. Shattuck. On some relations satisfied by the p, q-binomial coefficient. *Šiauliai Math. Semin.*, 6(14) :69–84, 2011.

[44] C. Smith and V. E. Hoggatt, Jr. Generating functions of central values in generalized Pascal triangles. *Fibonacci Quart.*, 17(1) :58–67, 1979.

[45] G. Teşeleanu. New proofs for the P, Q-analogue of Chu-Vandermonde's identity. *Integers*, 13 :Paper No. A51, 11, 2013.

[46] S. Vajda. *Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section.* Ellis Horwood Series : Mathematics and its Applications. Ellis Horwood Ltd., Chichester ; Halsted Press [John Wiley & Sons, Inc.], New York, 1989. Theory and applications, With chapter XII by B. W. Conolly.

[47] J. Zeng. On some q-identities related to divisor functions. *Adv. in Appl. Math.*, 34(2) :313–315, 2005.