

Sommaire

Introduction

Chapitre 01 Revue de littérature

1.1	Généralité	4
1.1.1	Conduites de transport du fluide	5
1.1.2	Réservoirs remplis de fluide	6
1.1.3	Plaques immergées	7
1.2	Bref historique sur les vibrations des plaques	9
1.3	Plaque composite à rigidité variable (CSRV)	10
1.4	Interaction fluide-structure	12
1.5	Objectif et motivation de la thèse	16

Chapitre 02 Composite stratifiée à rigidité variable

2.1	Introduction	17
2.2	Matériaux composites à rigidité variable (CSRV)	19
2.2.1	Concept théorique des fibres curvilignes	20
2.2.2	Méthode de fabrication des fibres curvilignes	23
2.3	Conclusion	24

Chapitre 03 Théories des plaques composites stratifiées à rigidité variable

3.1	Théorie des plaques	26
3.1.1	Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	27
3.1.2	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)	28
3.1.3	Théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur	28
3.2	Champs de déplacements	31
3.3	Relations déformations-déplacements:	32
3.4	Relation contraintes-déformations	32
3.4.1	Fibre parabolique :	34
3.4.2	Fibre hyperbolique :	35
3.5	Energie de déformation	36
3.6	Energie cinétique	36
3.7	Equations du mouvement	37

Chapitre 04 Modélisation du fluide

4.1	Formulation du fluide	38
-----	-----------------------------	----

4.1.1	Les conditions aux limites d'interface fluide-plaque	41
4.1.1.1	Plaque-fluide avec une surface libre	41
4.1.1.2	Plaque-fluide avec une paroi rigide.....	42
4.1.1.3	Plaque totalement immergée.....	43
Chapitre 05 Application de la version-p de MEF à la modélisation du système fluide-structure		
5.1	Introduction	44
5.2	Version-p de la MEF.....	45
5.2.1	Polynômes de Legendre	45
5.2.2	Modes-Bulle	46
5.3	Fonction de formes hiérarchiques pour un élément rectangulaire	47
5.4	Détermination de la matrice masse	50
5.5	Détermination de la matrice de rigidité.....	52
5.6	Modélisation du fluide par un élément- p	60
5.7	Equations du mouvement de la plaque CSRV.....	60
5.8	Equations du mouvement de couplage fluide-plaque	60
Chapitre 06 Organisation de la programmation		
6.1	Introduction	61
6.2	Organisation de la programmation.....	62
6.2.1	Fichier des données	62
6.2.1.1	Paramètres de la structure, du fluide et de la version p de la MEF.....	62
6.2.1.2	Calcul des intégrales	63
6.2.2	Programme de calcul.....	63
6.2.2.1	Calcul des matrices de rigidité, masse (fluide-plaque).....	63
6.2.2.2	Introduction des conditions aux limites.....	63
6.2.2.3	Calcul des fréquences propres	64
6.2.2.4	Calcul de la matrice [A]	64
6.2.3	Fichier de sortie	65
Chapitre 07 Résultats et interprétations		
7.1	Convergence et validation	67
7.1.1	Plaques composites stratifiées à rigidité constante (CSRC)	68
7.2	Plaque composite stratifiée à rigidité variable (CSRV) : cas de fibres paraboliques.....	78
7.2.1	Etude paramétrique des plaques CSRV (fibre parabolique)	81
7.3	Plaque composite stratifié à rigidité variable (CSRV) : Cas de fibres hyperboliques.....	87

7.3.1	Etude paramétrique des plaques CSRV : Cas de fibre hyperbolique	97
7.4	Plaques immergées dans un fluide	105
7.4.1	Plaques (CSRV) immergées dans un fluide.....	107

Conclusion et perspectives

Bibliographie

Liste des Figures

Fig. 7. 1 Convergence des cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque rectangulaire stratifiée symétrique à quatre couches, simplement appuyée ($ah = 10$)	71
Fig. 7. 2 Convergence des cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque rectangulaire stratifiée antisymétrique à trois couches, encastrée ($ah = 5$)	71
Fig. 7. 3 Convergence des cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque rectangulaire stratifiée antisymétrique à trois couches, encastrée ($ah = 10$)	72
Fig. 7. 4 Convergence des cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque rectangulaire stratifiée symétrique à quatre couches, encastrée ($ah = 5$)	72
Fig. 7. 5 Configuration de la plaque VSCL avec fibre parabolique	78
Fig. 7. 6 Convergence des trois premiers paramètres dans le cas d'une plaque Stratifiée avec des fibres parabolique carrée, EEEE, $\Gamma=1.3$	79
Fig. 7. 7 Convergence des trois premiers paramètres dans le cas d'une plaque Stratifiée avec des fibres parabolique carrée, SSSS, $\Gamma=1.2$	80
Fig. 7. 8 Convergence des trois premiers paramètres dans le cas d'une plaque Stratifiée avec des fibres parabolique carrée, SFFC, $\Gamma=0.7$	80
Fig. 7. 9 Convergence des trois premiers paramètres dans le cas d'une plaque Stratifiée avec des fibres parabolique carrée, FCSC $\Gamma=1$	81
Fig. 7. 10 Cinq premiers modes d'une plaque CSRV avec l'orientation $\langle 0, T1 \rangle, \langle 0, -T1 \rangle, \langle 0, T1 \rangle_s$, EEEE, (1): $T_I = 10^\circ$ (2): $T_I = 30^\circ$ (3): $T_I = 50^\circ$, (4) : $T_I = 70^\circ$	85
Fig. 7. 11 Cinq premiers modes d'une plaque CSRV avec l'orientation $\langle 0, T1 \rangle, \langle 0, -T1 \rangle, \langle 0, T1 \rangle_s$, AAAA, (1): $T_I = 10^\circ$ (2): $T_I = 30^\circ$ (3): $T_I = 50^\circ$, (4) : $T_I = 70^\circ$	86
Fig. 7. 12 Configuration de la plaque VSCL avec fibre hyperbolique	87
Fig. 7. 13 Convergence des quatre premiers paramètres de fréquence d'une plaque CSRV, encastrée ($h = 0.01$)	89
Fig. 7. 14 Convergence des quatre premiers paramètres de fréquence d'une plaque CSRV, encastrée ($h = 0.04$)	89
Fig. 7. 15 Convergence des quatre premiers paramètres de fréquence d'une plaque CSRV, encastrée ($h = 0.06$)	90
Fig. 7. 16-Convergence des quatre premiers paramètres de fréquence d'une plaque CSRV, encastrée ($h = 0.1$)	90
Fig. 7. 17 Effet de $[\pm\langle T_\theta/T_I \rangle]_s$ sur les quatre premières modes d'une plaque avec des fibres curvilignes, (a) $[\pm\langle 60^\circ/-60^\circ \rangle]_s$, (b) $[\pm\langle 60^\circ/-30^\circ \rangle]_s$, (c) $[\pm\langle 60^\circ/0^\circ \rangle]_s$, (d) $[\pm\langle 60^\circ/30^\circ \rangle]_s$, (e) $[\pm\langle 60^\circ/60^\circ \rangle]_s$	104
Fig. 7. 18 Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque CSRV $[\pm\langle 30^\circ/10^\circ \rangle]_s$, EEEE, en fonction du rapport d'immersion ($h1/a$) et $h2 \gg a$, $h=0.01$	113
Fig. 7. 19 Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque CSRV $[\pm\langle 30^\circ/20^\circ \rangle]_s$, EEEE, en fonction du rapport d'immersion ($h1/a$) et $h2 \gg a$, $h=0.01$	113
Fig. 7. 20 Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque CSRV $[\pm\langle 30^\circ/30^\circ \rangle]_s$, EEEE, en fonction du rapport d'immersion ($h1/a$) et $h2 \gg a$, $h=0.0$	114
Fig. 7. 21 Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque CSRV $[\pm\langle 30^\circ/40^\circ \rangle]_s$, EEEE, en fonction du rapport d'immersion ($h1/a$) et $h2 \gg a$, $h=0.01$	114

Fig. 7. 22 Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque CSRV [$\pm<30^\circ/50^\circ>$] _s , EEEE, en fonction du rapport d'immersion ($h1/a$) et $h2 \gg a$, $h=0.01$ -----	115
Fig. 7. 23 Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque CSRV [$\pm<30^\circ/60^\circ>$] _s , EEEE, en fonction du rapport d'immersion ($h1/a$) et $h2 \gg a$, $h=0.01$ -----	115
Fig. 7. 24 Quatre premiers modes d'une plaque CSRV, EEEE avec l'orientation [$\pm<60^\circ/-60^\circ>$] _s (1) dans l'air (2) : $h1/a=0.1$ (3) : $h1/a=0.3$, (4) : $h1/a=0.5$ -----	116
Fig. 7. 25 Quatre premiers modes d'une plaque CSRV, EEEE avec l'orientation [$\pm<60^\circ/-30^\circ>$] _s (1) : dans l'air (2) : $h1/a=0.1$ (3) : $h1/a=0.3$, (4) : $h1/a=0.5$. -----	117
Fig. 7. 26 Quatre premiers modes d'une plaque CSRV, EEEE avec l'orientation [$\pm<60^\circ/30^\circ>$] _s (1) : dans l'air (2) : $h1/a=0.1$ (3) : $h1/a=0.3$, (4) : $h1/a=0.5$.-----	118
Fig. 7. 27 Quatre premiers modes d'une plaque CSRV, EEEE avec l'orientation [$\pm<60^\circ/60^\circ>$] _s (1) : dans l'air (2) : $h1/a=0.1$ (3) : $h1/a=0.3$, (4) : $h1/a=0.5$ -----	119

Liste des Tableaux

Tableau 7. 1 Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences dans le cas d'une plaque composite stratifiée symétrique, simplement appuyée. (AAAA)-----	69
Tableau 7. 2 Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences dans le cas d'une plaque composite stratifiée antisymétrique, encastrée, $a/b=1$ -----	69
Tableau 7. 3 Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences dans le cas d'une plaque composite stratifiée antisymétrique, encastrée. $a/b=1$ -----	70
Tableau 7. 4 Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences dans le cas d'une plaque composite stratifiée antisymétrique, encastrée. $a/b=2$ -----	70
Tableau 7. 5 Comparaison de paramètres de fréquence fondamental pour une plaque carrée stratifiée antisymétrique à plusieurs couches, simplement appuyée AAAA avec $a/h=5$ -----	74
Tableau 7. 6 Comparaison de paramètres de fréquence fondamental pour une plaque carrée stratifiée antisymétrique à plusieurs couches, simplement appuyée AAAA avec $E_1/E_2=40$ -----	75
Tableau 7. 7 Comparaison de paramètres de fréquence fondamental pour une plaque carrée stratifiée antisymétrique à deux couches $(45^\circ/-45^\circ)_2$, simplement appuyée AAAA-----	76
Tableau 7. 8 Comparaison de paramètre de fréquence fondamental pour une plaque composite carrée a antisymétrique avec différent conditions aux limites, $E_1/E_2 =40$ -----	77
Tableau 7. 9 Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquences dans le cas d'une plaque CSRV avec différent condition aux limites-----	79
Tableau 7. 10 Effet de l'angle d'orientation des fibres T_1 sur le paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque CSRV, EEEE -----	82
Tableau 7. 11 Effet de l'angle d'orientation des fibres T1 sur le paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque CSRV, AAAA -----	82
Tableau 7. 12 Effet de l'angle d'orientation des fibres T_1 sur le paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque CSRV, ELLL -----	82
Tableau 7. 13 Effet de l'angle d'orientation des fibres T_1 sur le paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque CSRV, ELEL-----	82
Tableau 7. 14 Cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque CSRV, EEEE-----	83
Tableau 7. 15 Cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque CSRV, AAAA -----	83
Tableau 7. 16 Effet du rapport E_1/E_2 et le rapport a/h sur le paramètre de fréquence pour une plaque CSRV, EEEE -----	84
Tableau 7. 17 Effet du rapport E_1/E_2 et le rapport a/h sur le paramètre de fréquence pour une plaque CSRV, AAAA-----	84
Tableau 7. 18 Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquence dans le cas d'une plaque (CSRV) antisymétrique, encastrée-----	88
Tableau 7. 19 Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences pour une plaque CSRV, antisymétrique-----	91
Tableau 7. 20 Comparaison des six premiers paramètres de fréquence pour une plaque encastrée avec l'orientation des fibres curviligne antisymétrique -----	93
Tableau 7. 21 Comparaison des six premiers paramètres de fréquence pour une plaque CSRV encastré avec l'orientation $[<T_0/T_1>, -<T_0/T_1>, <T_0/T_1>]$ -----	94
Tableau 7. 22 Comparaison des trois premières fréquences pour une plaque encastré constitué des fibres curviligne symétrique et antisymétrique $[<T^l_0/T^l_1>, <T^l_0/T^2_1>]$ -----	95

Tableau 7. 23 Comparaison des trois premières fréquences pour une plaque CSRV, encadrée, symétrique et antisymétrique [$\langle T^1_0/T^1_1 \rangle, \langle T^1_0/T^2_1 \rangle, \langle T^1_0/T^3_1 \rangle$]	95
Tableau 7. 24 Comparaison de paramètres de fréquence fondamentale pour une plaque encadrée avec différent orientation des fibres curviligne et différent épaisseurs, [$\langle T_0/T_1 \rangle$], $T_0=10^\circ$	96
Tableau 7. 25 Comparaison de paramètre de fréquence fondamentale pour une plaque encadrée avec différent orientation des fibres curviligne et différent épaisseurs, [$\langle T_0/T_1 \rangle$], $T_1=10^\circ$	97
Tableau 7. 26 Effet du rapport du module d'élasticité E_1/E_2 sur le paramètre de fréquence d'une plaque CSRV carrée antisymétrique, AAAA	98
Tableau 7. 27 Effet du rapport du module d'élasticité E_1/E_2 sur le paramètre de fréquence d'une plaque carrée symétrique, AAAA	98
Tableau 7. 28 Effet du rapport E_1/E_2 sur le paramètre de fréquence d'une plaque encadrée antisymétrique	99
Tableau 7. 29 Effet du rapport E_1/E_2 sur le paramètre de fréquence d'une plaque encadrée symétrique	99
Tableau 7. 30 Les quatre premières fréquences naturelles d'une plaque CSRV symétrique avec différents conditions aux limites	100
Tableau 7. 31 Les quatre premières fréquences naturelles d'une plaque CSRV antisymétriques avec différents conditions aux limites	100
Tableau 7. 32 Effet du rapport E_1/E_2 et le rapport d'épaisseur a/h sur le paramètre de fréquence pour une plaque CSRV encadrée symétrique	101
Tableau 7. 33 Effet du rapport E_1/E_2 et le rapport d'épaisseur a/h sur le paramètre de fréquence pour une plaque CSRV encadrée antisymétrique	102
Tableau 7. 34 Effet du rapport E_1/E_2 et le rapport d'épaisseur a/h sur le paramètre de fréquence d'une plaque CSRV symétrique, AAAA	102
Tableau 7. 35 Effet du rapport E_1/E_2 et le rapport d'épaisseur a/h sur le paramètre de fréquence d'une plaque antisymétrique, AAAA	103
Tableau 7. 36 Comparaison des cinq premières fréquences (rd/s) d'une plaque isotrope ALAL, submergée dans l'eau.	105
Tableau 7. 37 Comparaison des trois premières fréquences (rd/s) d'une plaque ELLL submergée dans l'eau, en fonction (h_1/a) (h_1 variable and $h_2 \gg a$)	106
Tableau 7. 38 Comparaison des fréquences (Hz) d'une plaque composite immergée, LLLLE en graphite/epoxy avec huit couches $a=0.152m$, $b=0.076m$, $h=0.13 \times 10^{-3}m$, $h_1=0.076m$, $h_2=0.076m$	107
Tableau 7. 39 Effet de l'angle d'orientation T_1 sur le paramètre de fréquence d'une plaque CSRV symétrique immergé dans l'eau EEEE $\Omega = \omega \text{ aps/E2}$ $a=0.5m$, $b=0.5m$, $h=0.005m$, $E_1/E_2=24.028$, $G_{ij}/E_2=0.522$, $\nu_{12}=0.29$, $\rho=1 \text{ kg/m}^3$, $h_2 \gg a$, h_1 variable	108
Tableau 7. 40 Les trois fréquences naturelles (rad/s) d'une plaque CRSV antisymétrique immergée dans l'eau. $a=1m$, $b=1m$, $h=0.01m$, $E_1/E_2=40$, $G_{ij}/E_2=0.5$, $\nu_{12}=0.25$, $\rho=1540 \text{ kg/m}^3$, $h_2 \gg a$, h_1 variable	108
Tableau 7. 41 Effet des angles d'orientations T_1 et T_0 sur le fréquence (rad/s) d'une plaque CSRV symétrique immergée dans l'eau CFCF [$\pm \langle T_0/T_1 \rangle$], $T_0=30^\circ$ et [$\pm \langle T_0/T_1 \rangle$], $T_1=30^\circ$. $a=1m$, $b=1m$, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=4.21 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu_{12}=0.28$, $E_1=131.7 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, $E_2=9.86 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho=1600 \text{ kg/m}^3$, $h_2 \gg a$, h_1 variable.	109
Tableau 7. 42 Effet de l'angle d'orientation T_1 sur la fréquence fondamentale (rad/s) d'une plaque CSRV symétrique immergée dans l'eau ELEL	109
Tableau 7. 43 Effet de l'angle d'orientation T_1 sur la fréquence fondamentale (rad/s) d'une plaque CSRV antisymétrique immergée dans l'eau ELEL	110

Tableau 7. 44 Effet du rapport du module d'élasticité E_1/E_2 sur le paramètre de fréquence pour une plaque CSRV antisymétrique immergée dans l'eau, EEEE ($h_2 \gg a$, h_1 variable)-----	110
Tableau 7. 45 Effet du rapport du module d'élasticité E_1/E_2 sur le paramètre de fréquence pour une plaque CSRV antisymétrique immergée dans l'eau, AAAA ($h_2 \gg a$, h_1 variable)-----	111
Tableau 7. 46 Effet d'épaisseur h sur la fréquence naturelle pour une plaque CSRV symétrique immergée dans l'eau EEEE. $G_{12}=G_{13}=G_{23}=4.21 \times 10^9 N/m^2$, $\nu_{12}=0.28$, $E_1=131.7 \cdot 10^9 N/m^2$, $E_2=9.86 \cdot 10^9 N/m^2$, $\rho = 1600 kg/m^3$, $h_2 \gg a$, h_1 variable-----	111
Tableau 7. 47 Effet d'épaisseur h sur cinq premières fréquences natural (rad/s) pour une plaque CSRV symétrique immergée dans l'eau, EEEE $a=1$, $b=1$, $E_1 = 173 GPa$, $E_2 = 7.2 GPa$, $G_{ij}=3.76 GPa$, $\nu_{12} = 0.29$, $\rho=1540 kg/m^3$, $h_2 \gg a$, h_1 variable-----	112

Liste des symboles et abréviations

Liste des Symboles

G	. Module de cisaillement.
ν	. Coefficient de poisson.
E	Module de Young.
u	Déplacement longitudinale suivant x.
v	Déplacement longitudinale suivant y.
w	Déplacement transversale suivant z.
β_x	Rotation de la section droite par rapport à l'axe x.
β_y	Rotation de la section droite par rapport à l'axe y.
ϕ_x	Fonction paramétrée de gauchissement suivant l'axe x.
ϕ_y	Fonction paramétrée de gauchissement suivant l'axe y.
$\{\sigma\}^k$	Tenseur contrainte pour k ^{ième} couche orthotrope.
$\{\varepsilon\}^k$	Tenseur déformation pour k ^{ième} couche orthotrope
$[T]$	Matrice de transformation de base.
$[C]$	Matrice de constante élastique.
$[Q]$	Matrice de rigidité réduite transformée d'une k ^{ième} couche.
ρ	Densité.
θ	Angle d'orientation des fibres droite.
$\theta(x)$	Angle d'orientation des fibres curvilignes.
ϕ	Fonction potentielle de vitesse du fluide.
A	Constante de proportionnalité des fibres paraboliques.
a	Largeur de la plaque.
γ	Paramètre non dimensionnel des fibres paraboliques.
Ed	Energie de déformation.
Ec	Energie cinétique.
$[M]$	Matrice masse de la structure.

[Mf]	Matrice masse du fluide.
[Ks]	Matrice de rigidité de la structure.
[Ni]	Matrice des fonctions de forme.
(ξ, η)	Coordonnées locales.
(x, y)	Coordonnées cartésiennes.
$\{q\}$	Vecteur de déplacement généralisé.
Ω	Paramètre de fréquence.

Liste des abréviations

FEM	Méthode des éléments finis.
TSDT	Théorie de déformation de troisième ordre de déformation de cisaillement.
HSDT	Théorie de déformation d'ordre élevé de déformation de cisaillement.
CPT	Théorie classique des plaques.
FSDT	Théorie des plaques de premier ordre de déformation de cisaillement.
SSDT	Théorie de déformation d'ordre élevé sinus.
ESDPT	Théorie de déformation d'ordre élevé exponentiel.
HSDPT	Théorie de déformation d'ordre élevé hyperbolique.
CSRC	Composite stratifié à rigidité constante.
CSRV	Composite stratifié à rigidité variable.
AFP	Machine de placement automatisé des fibres curviligne.

Introduction

Les structures partiellement ou totalement en contact avec un fluide, en écoulement au repos représentent une grande importance dans de nombreuses applications techniques, notamment les canalisations flexibles transportant du fluide, les tubes d'échangeurs de chaleur, les réservoirs de stockage de liquide, les centrales nucléaires, aérospatiales et aéronautiques etc. Le phénomène de l'interaction fluide-structure se produit, quand la structure est en contact avec le fluide. Le déplacement structurel modifie le champ d'écoulement du fluide en présence de ce phénomène, ce qui peut affecter le comportement dynamique de la structure. Dans les problèmes d'interaction fluide-structure, le comportement vibratoire d'un solide couplé avec un fluide est différent de celui en contact de l'air. L'analyse de ce comportement est importante, car elle permet aux ingénieurs de sélectionner les paramètres structurels convenables avec l'environnement de travail, et aussi d'éviter les vibrations structurelles indésirables.

Les récents développements technologiques offrent aux concepteurs une plus grande gamme de matériaux, en fonction de leur application. Dans de nombreux cas, les matériaux composites montrent un choix préféré par rapport aux autres matériaux comme par exemple ; l'acier et l'aluminium, ce choix peut mieux répondre aux besoins de ces applications. L'utilisation des matériaux composites offre des avantages importants, tel que la résistance à la fatigue et à la corrosion, et ces matériaux sont aussi rigide et légère.

L'analyse vibratoire de l'interaction fluide-structure peut être effectuée en proposant un modèle théorique des plaques composites couplées avec un fluide, le fluide est considéré comme une pression exercée sur la plaque. La réponse fréquentielle de ce dernier est examinée en variant différents paramètres physiques et géométriques.

L'objectif principal de cette thèse est l'analyse dynamique des plaques composites stratifiées à rigidité variable (CSRV) avec des fibres curvilignes, en se basant sur la théorie d'ordre élevé HSDT C^0 (Higher order shear deformation theory). La modélisation est faite par la version- p de la méthode des éléments finis, en adoptant des fonctions de forme polynomiales de type C^0 . L'autre objectif de ce travail est d'étudier l'influence du fluide sur le comportement vibratoire d'une plaque CSRV avec des fibres curvilignes. L'étude est faite en

variant différents paramètres; le rapport d'immersion, l'épaisseur de la plaque, le rapport d'élasticité, les conditions aux limites et la configuration des stratifiées.

Le travail de cette thèse est divisé en sept chapitres:

Après une introduction générale sur le thème d'interaction fluide structure, leurs propriétés, ainsi que leurs domaines d'application, le premier chapitre sera consacré à une revue bibliographique qui décrit les développements et les recherches dans le domaine des vibrations des plaques composite à rigidité constante et rigidité variable ainsi que le domaine des plaques immergées avec différentes théories et différentes méthodes.

Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter quelques notions générales concernant les matériaux composites stratifiés à rigidité variable (CSRV) avec les méthodes de fabrication.

Le troisième chapitre sera dédié à un rappel sur les théories et les différents modèles d'éléments finis qui servent à l'analyse du comportement des plaques composites. Une description détaillée de la formulation du modèle des plaques CSRV avec des fibres paraboliques et hyperboliques, en choisissant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDTC⁰. Les formulations de l'énergie cinétique et de déformation de la plaque CSRV qui expriment l'équation du mouvement sont déterminées à la fin de ce chapitre.

La modélisation du fluide est présentée dans le quatrième chapitre. La fonction potentielle de vitesse et l'équation de Bernoulli sont utilisées pour déterminer la pression exercée sur la plaque avec différentes positions de la plaque en interaction avec le fluide.

Le cinquième chapitre est consacré à la modélisation numérique du système fluide-structure pour obtenir les matrices de rigidité et de masse, en utilisant un élément-p rectangulaire, à quatre nœuds et quatre côtés, avec sept degrés de liberté par nœud. Finalement, nous allons déterminer l'équation de mouvement du système liquide-solide à partir du couplage fluide-structure.

Dans le sixième chapitre, on va détailler les différentes étapes du programme de calcul des fréquences propres et des modes propres du système fluide- plaque.

Dans le dernier chapitre, nous exposons les résultats obtenus par notre programme avec la version p de la méthode des éléments finis basée sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDT-C0, pour déterminer les fréquences propres. En premier lieu, une étude de convergence et comparaison est faite avec différentes théories et différentes conditions aux limites pour les plaques isotropes et composites à rigidité constante (fibres rectilignes). La deuxième partie est consacrée à la modélisation des plaques rectangulaires composites

stratifiées constituées de fibres curvilignes (hyperboliques et paraboliques) symétriques et antisymétriques avec différents angles d'orientation T_0 et T_1 . La troisième partie concerne la vibration des plaques composites à rigidité variable immergées dans un fluide avec différentes profondeurs d'immersions. Les résultats obtenus sont comparés avec les solutions disponibles dans la littérature.

Enfin, le travail se termine par une conclusion générale en résumant les résultats obtenus et par des perspectives qui peuvent être réalisées dans le même contexte au futur.

Chapitre 1

Etude bibliographique

L'objectif de ce chapitre est de donner un historique des différents types d'interaction fluide-structure suivant les domaines d'application. En outre, une revue bibliographique décrit les développements et les recherches dans les domaines de vibrations des plaques à rigidité constante, plaques composite à rigidité variable et enfin les plaques en interaction avec le fluide, et cela dans le but d'exposer le cadre général de la problématique traitée dans cette thèse. Le présent chapitre est finalisé par conclure l'objectif et la motivation de la thèse.

1.1 Généralité

On parle de l'interaction fluide-structure lorsqu'une structure vibrante dans un fluide, dans lequel l'écoulement du fluide provoque la déformation de la structure à travers les efforts transmis à l'interface. La variation de pression qui en résulte, induit sur le solide une force d'inertie qui agit comme une masse ajoutée fixée au système mécanique et qui se déplace avec lui solidairement. La modélisation du système se fait en couplant la dynamique de la structure et celle du fluide qui peut se faire en traitant le fluide et le solide séparément. La structure en question est rigide ou déformable et le fluide (en écoulement ou au repos) est autour ou à l'intérieur de la structure. Le couplage des deux éléments intervient au niveau de l'interface, entre les deux domaines par des conditions qui contraignent leurs mouvements relatifs de telle sorte que l'évolution de chacun des deux éléments dépend de celle de l'autre.

Afin de préserver et de mieux comprendre le comportement dynamique de ces structures en interaction avec le fluide, de nombreuses études ont été réalisées à partir des années 50. L'intérêt porté à ces études est focalisé sur l'analyse théorique et expérimentale des systèmes fluide-structure. L'analyse dynamique de ce type de phénomène nécessite un modèle capable

de prendre en compte les équations d'évolution du fluide et de la structure ; vient ensuite, la partie couplage où l'interaction qui doit permettre la traduction des échanges des efforts et de la cinématique du système global.

Les problèmes d'interaction fluide-structure sont disponibles dans divers domaines, à savoir : les conduites de transport du fluide, les réservoirs de stockage et les structures immergées dans les liquides.

1.1.1 Conduites de transport du fluide

La présence du fluide dans les conduites a une influence importante sur le comportement dynamique des conduites véhiculant des fluides (Fig. 1.1). Evidemment, les tuyaux peuvent être trouvés partout dans le transport de différents types de fluide, qu'ils soient utilisés dans les réacteurs, échangeurs de chaleur, les pipelines, les mines, les réseaux de ville ainsi que les tuyaux d'arrosage.



Fig. 1. 1 Canalisations dans une installation pétrolière

L'écoulement d'un fluide dans la conduite exerce des pressions sur ses parois, ce qui peut provoquer la courbure du tube dans des conditions d'écoulement définies. Cette déviation peut conduire à une instabilité structurelle de la conduite et devient sensible à la résonance, ce qui peut provoquer la rupture par fatigue.

La fréquence fondamentale naturelle d'un tuyau diminue généralement avec une vitesse croissante d'écoulement de fluide, c'est-à-dire, il existe certains cas où la diminution de cette fréquence naturelle est très importante.

Plusieurs auteurs ont mené leurs études sur le comportement dynamique des conduites transportant le fluide. Bourrieres, (1939) a effectué des investigations théoriques et expérimentales sur l'instabilité d'un tube contenant le liquide. Le problème a été réétudié par Feodoseev, (1951). Il a été étudié aussi en détail par Stein et Tobriner, (1970). La recherche dans ce domaine est très importante, elle touche plusieurs applications pratiques d'ingénierie tels que : les composants des réacteurs nucléaires Mote, (1976), les lignes d'alimentation de moteurs de fusée Robert, Blevins, (1977) et des systèmes de tuyauterie, Paidoussis, (1998).

1.1.2 Réservoirs remplis de fluide

Les réservoirs de stockage contenant des liquides organiques et non organiques sont des structures très répandues dans le domaine de l'industrie et des installations publiques. Ces équipements sont généralement utilisés dans de nombreuses applications industrielles comme le stockage des produits pétroliers (Fig. 1.2 et 1.3). Ils sont généralement installés à l'intérieur des bassins de confinement ou de rétention afin de contenir les déversements en cas de rupture du réservoir.

Lorsqu'un réservoir est partiellement rempli du liquide, la surface libre et l'effet de ballottement sont présents. La mise en mouvement du réservoir crée un mouvement de ballottement, ce mouvement produit des perturbations diverses: distribution de pressions dynamiques, formations de vagues, moment de flexion et cisaillement.



Fig. 1. 2 Réservoirs cylindrique de stockage des produits Pétroliers Liquides



Fig. 1. 3 Réservoirs sphérique de stockage des Gaz Pétrolier Liquide

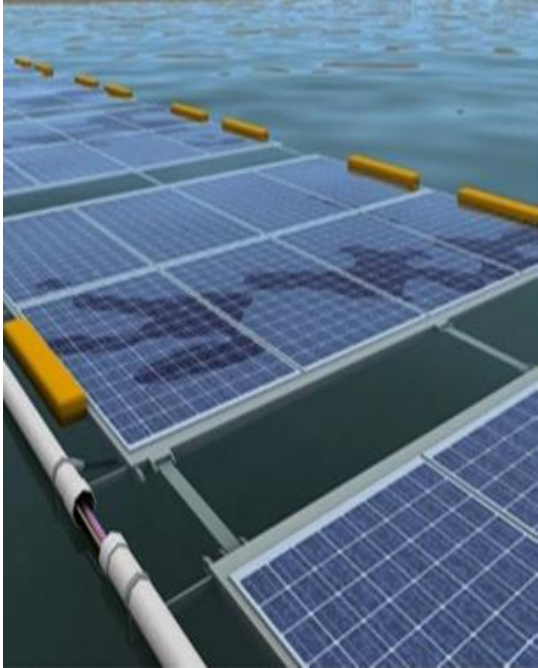
L'interaction fluide-structure peut considérablement modifier les caractéristiques dynamiques d'un réservoir flexible sous l'effet de la pression du fluide exercée sur la paroi. Les petits mouvements à la surface libre créent un ballonnement, ce dernier entraîne une diminution de la rigidité du réservoir et peut affecter la stabilité structurelle du système.

Le comportement dynamique des réservoirs à été étudié par plusieurs chercheurs pour améliorer la conception et les résistances des ces structure vis-à-vis de fortes excitations internes ou externes. L'analyse dynamique de ce type de structure est étudiée en utilisant des modèles théoriques qui prennent en compte l'effet de l'interaction fluide-structure. Il existe plusieurs méthodes pour étudier ce phénomène, Parmi lesquelles, on peut citer une approche qui consiste à représenter le liquide comme des masses ajoutées et réparties sur les parois des réservoirs. De nombreux auteurs ont proposé diverses méthodes pour étudier le mouvement du liquide dans le réservoir à des degrés divers d'approximation (Chen et *al.* (2005); Akyildiz et *al.* (2006); Livaoglu, (2008); Mitra et *al.* (2007); Liu et *al.* (2008)).

1.1.3 Plaques immergées

Les structure partiellement ou totalement immergée dans le fluide sont présentes dans divers domaines industriels, l'aérospatiale, nucléaire et navale, les structures des éoliens immergés en mer (Fig. 1.4.A), les panneaux photovoltaïques submergés (Fig. 1.4.B), les écrans flottants des réservoirs (Fig. 1.4.C)...etc., raison pour laquelle il est important d'étudier le

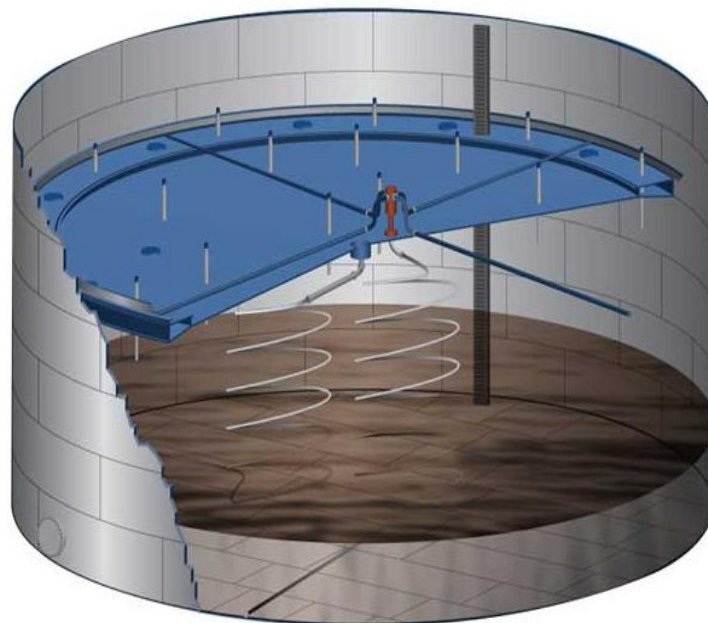
comportement dynamique de ce phénomène. L'immersion de la plaque dans le fluide crée une interaction « fluide-structure » qui se traduit par une augmentation de la masse ajoutée. Il est bien connu que les fréquences naturelles d'une plaque couplée avec le fluide diminuent de façon significative par rapport à celles qui vibrent dans l'air.



(A) Panneaux photovoltaïques submergés en eau



(B) Éolien flottant



(C) Ecran flottant d'un réservoir

Fig. 1. 4 Structures immergées

De nombreux chercheurs ont étudié la variation des fréquences naturelles lorsqu'une plaque est en contact avec le liquide. Il existe plusieurs travaux théoriques et expérimentaux qui étudient les caractéristiques dynamiques des plaques en interaction avec le fluide. (Lindholm et al. 1965; Muthuveerappan et al. 1979; Rao et al. 1993).

1.2 Bref historique sur les vibrations des plaques

Les structures composites stratifiées, en raison de leur résistance et de leur rigidité spécifiques élevées sont de plus en plus utilisées dans de nombreux domaines d'ingénierie : l'aérospatiale, marines, les industries automobile, civile et mécanique. Nombreuses études ont analysé le comportement vibratoire des plaques composites avec différents paramètres. L'analyse des plaques stratifiées a été lancée par Whitney, (1970), Whitney et Leissa, (1970), Reissner, (1972), Bert et Francis (1974), Bert et Mayberry, (1969), Noor, (1973), Reddy, (1984) et Whitney et Pagano, (1970).

L'étude des vibrations des plaques composites stratifiées est importante dans la conception mécanique. Les vibrations donnent une perte d'énergie, qui peut affecter la stabilité dynamique du système et créer des bruits indésirables dans les dispositifs mécaniques en cours de fonctionnement. La théorie de Kirchhoff (1850A, 1850b) est la première théorie qui a été utilisée pour l'analyse des plaques composites stratifiées, elle est reconnue sous le nom de la théorie des plaques classiques (classical plate theory). L'hypothèse de cette théorie stipule que la section droite reste plane est perpendiculaire à la ligne moyenne après la déformation, et l'effet de cisaillement transversal est négligeable. Les rotations dépendent des déplacements transversaux, donc cette théorie exige la continuité du champ des déplacements qui doivent être représentés par des fonctions de forme $C1$.

Une étude détaillée sur les plaques anisotropes en utilisant la théorie CLPT a été présentée par Lekhnitskii, (1957). Les théories des plaques stratifiées qui sont basées sur l'hypothèse de Kirchhoff ont été développées par Pister et Dong, (1959), Stavsky, (1961), Whitney et Larissa, (1969) et Whitney, (1969) ; ces travaux ont été résumés par Aston et Whitney, (1970).

Afin de surmonter la limitation de la théorie de Kirchhoff, la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (first order shear deformation theory FSDT) a été développée par Reissner-Mindlin, (1944, 1945). Cette théorie est bien utilisée pour les plaques modérément épaisses, car l'effet de cisaillement transversal est pris en compte et représenté par un facteur

de correction dans le but de corriger l'erreur de la répartition des contraintes réelles. Mindlin, (1951) a développé un facteur de correction des contraintes pour les plaques isotropes. Whitney et Pagano, (1970), Yang et al. (1966) et Reissner (1984) ont étendu la théorie de FSDT pour l'analyse des plaques composite, en adoptant un facteur de correction de cisaillement de 5/6.

Plusieurs travaux ont été faits pour améliorer les limites d'utilisation de la théorie du premier ordre, en proposant la théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement (High order shear deformation theory HSDT). Cette théorie est basée sur la distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque, afin d'obtenir une meilleure représentation des déformations et des contraintes de cisaillement.

Levinson, (1980) a proposé une nouvelle formulation en utilisant les équations de la théorie du premier ordre avec le champ de déplacement d'ordre supérieur. Ensuite, en 1984 Reddy a développé une nouvelle théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement. Cette théorie inclut un champ de déplacement satisfaisant aux conditions de zéro de déformation de cisaillement transversal, elle est basée sur l'hypothèse de la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque. Elle est connue sous le nom de la théorie de troisième ordre de déformation de cisaillement (TSDT). Reddy et Phan, (1985) ont utilisé cette théorie pour étudier le flambage et la vibration des plaques orthotrope. Nayak et al. (2002,2004) ont examiné les vibrations libres des plaques composites sandwich, en utilisant la méthode des éléments finis et la théorie TSDT.

Les modèles raffinés de la théorie HSDT ont été développés par nombreux chercheurs : Reddy, (1990b), Noor et Burton, (1990a), Kant et Swaminathan, (2002), Shimpi, (2002), Swaminathan et Patil, (2007), Thai et Kim, (2010, 2011) et Hadji *et al.* (2011).

Shankaras et al., (1992, 1996) ont proposé une théorie raffinée de HSDT avec une continuité des déplacements généralisés C0 (C0-HSDT) en se basant sur la théorie de Reddy (TSDT). Chien H. Thai et al., (2012) ont utilisé le même modèle pour examiner les vibrations libres et le flambage des plaques composites de différentes formes par la méthode des éléments finis. Ils ont comparé leurs résultats avec la solution du modèle FSDT.

1.3 Plaque composite à rigidité variable (CSRV)

Un matériau composite est un assemblage de plusieurs matériaux. Cet assemblage résulte une structure avec des comportements mécaniques élevés (rigidité et résistance élevés).

Il existe deux modèles de structures en composites; des structures composites stratifiées et des structures composites sandwich. Les composites stratifiées sont formés par empilement des couches, chaque couche est composé par de matrice et des fibres renforcées droites. L'angle d'orientation des fibres est orienté de manière différente afin de donner des résistances et des rigidités dans différentes directions. Les composites stratifiée à fibre droite sont appelés des composites stratifiés à rigidité constante (CSRC) dont les fibres sont constantes au long de la stratifiée. Les composites stratifiée à rigidité variable (CSRV) peuvent être réalisés en utilisant des fibres de forme curviligne. On trouve plusieurs travaux qui ont investigués l'effet des plaques CSRV avec différentes problèmes mécaniques.

Hyer et Lee, (1991) ont étudié la résistance au flambage d'une plaque avec un trou constitué des fibres curvilignes au lieu des fibres rectilignes. Gürdal et Olmedo (1993) ont examiné l'effet de variation d'angle de fibre curviligne sur un panneau élastique. Waldhart, (1996) a étudié le flambage d'une plaque composite à rigidité variable (CSRV) soumise à des charges uni-axiales. Gurdal et *al.* (2008) ont présenté une étude sur le flambage d'un panneau à rigidité variable par deux cas : Le premier cas suppose une variation de la rigidité dans la direction de chargement, par contre le deuxième est perpendiculaire à la charge appliquée, avec une amélioration de deux méthodes. Honda et *al.*, (2008) ont utilisé la méthode de Ritz basée sur la théorie des plaques minces, pour déterminer les fréquences et les modes propres d'une plaque rectangulaire composite renforcées par des fibres paraboliques. Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats de la méthode des éléments finis MEF. Ils ont montré les avantages des fibres paraboliques par rapport aux fibres traditionnelles. Akhavan et Ribeiro, (2011) ont fait une analyse de la vibration libre d'une plaque rectangulaire composite avec des fibres curvilignes (CSRV). La théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) et la version- p de la méthode des éléments finis sont utilisées pour calculer les fréquences naturelles et les modes propres. Ils ont montré l'effet de l'utilisation des fibres curvilignes par rapport aux fibres rectilignes sur les fréquences propres. Ribeiro et *al.* (2012) ont présenté les vibrations, linéaire et non linéaire des plaques rectangulaires (CRSV) symétriques, en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre et la version p de la méthode des éléments finis. Les équations différentielles de mouvement non linéaire sont résolues par la méthode de Newmark.

Honda et *al.* (2012) ont présenté des fibres de forme arbitraire à l'aide des fonctions B-splines et ont analysé les fréquences et les modes propres d'une plaque composite stratifiées

constituée des fibres paraboliques. Houmat, (2013) a développé un élément fini hiérarchique basé sur la théorie des plaques minces et a examiné le comportement linéaire et non linéaire des plaques rectangulaires composites (CSRV) dans le cas symétrique et antisymétriques. Les résultats montrent que les composites antisymétriques produisent des fréquences fondamentales linéaires et non linéaires légèrement inférieurs à celles des composites symétriques. Yazdani, et *al.* (2014) ont appliqué la méthode des éléments finis hiérarchique avec la théorie de plusieurs couches (zig-zag) pour étudier les vibrations, linéaire et non linéaire des plaques composite CRSV. Les résultats montrent que les plaques CSRV donnent une meilleure performance par rapport aux plaques CSRC. Yazdani et Ribeiro, (2014, 2015) ont étudié la vibration des plaques composites CSRV antisymétriques en utilisant la théorie de plusieurs couches et la version p de la MEF. Ils ont conclu que cette théorie présente une différence significative par rapport à d'autres théories. L'effet d'épaisseur de la plaque et l'angle d'orientation des fibres curvilignes sur les fréquences et les modes sont analysés. Houmat, (2015) a étudié la vibration non linéaire d'une plaque quadrilatérale symétrique « CSRV » avec des fibres curvilignes. Il a montré l'effet de la variation de l'angle d'inclinaison de la plaque sur les fréquences et les modes propres avec différent angles d'orientations des fibres. Hachemi et *al.* (2017) ont étudié le comportement vibratoire d'une plaque composite CSRV avec ouvertures. La formulation du problème est résolue numériquement en utilisant la méthode des éléments finis hiérarchique basée sur la théorie du premier ordre.

1.4 Interaction fluide-structure

La présence du fluide dans un système mécanique a une influence importante sur le comportement dynamique de la structure et cause une chute significative de la fréquence naturelle et qui aussi peut influencer la stabilité du système.

L'interaction fluide-structure est un phénomène qui traduit les effets réciproques de deux milieux continus, fluide et solide. Le couplage de ces derniers est imposé par un ensemble de conditions qui contraignent leurs mouvements relatifs de telle sorte que l'évolution de chaque milieu dépend de celle de l'autre.

Parmi les interactions ; nous citons :

- Cas d'interaction à surface libre engendré par l'apparition des phénomènes oscillatoires avec des implications divers : formation des vagues, moment de flexion et cisaillement,....etc. La modélisation de ce dernier se fait par couplage direct et indirect :

- Direct c'est-à-dire, la même variable de la structure et fluide couplé : déplacement-déplacement, vitesse-vitesse et pression-pression (Fig. 1.5).

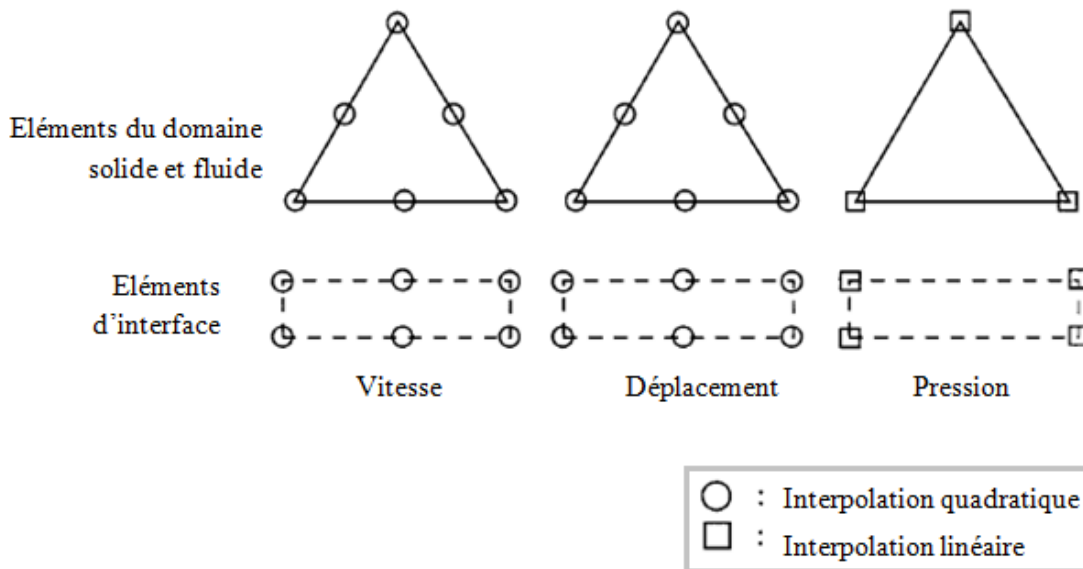


Fig. 1. 5 Méthodes de couplage

- Indirect : Le couplage se fait par deux variables différentes du système solide-liquide, par exemple déplacement-pression.
- Cas d'interaction où il n'y a pas un mouvement relatif du fluide par rapport au solide et la modélisation de ce dernier se fait par couplage faible. Ce cas correspond à notre étude.

L'étude du comportement dynamique des plaques en contact avec le fluide montrent que les fréquences naturelles sont diminuées de façon significative par rapport à ceux de l'air. Diverses méthodes ont été appliquées pour résoudre le problème des plaques immergées dans un liquide, telles que les méthodes analytiques (Bauer 1981; Soedel 1994), les méthodes semi-analytiques (Cheung et al 1985; Amabili et al 1996) et les méthodes numériques (Hylarides et Virus, 1982; Marcus, 1978). Rayleigh, (1877) a fait une étude analytique sur l'augmentation de l'inertie d'un disque vibrant. Lamb, (1920) a présenté une analyse vibratoire d'une plaque circulaire placée dans une ouverture de paroi plane infiniment rigide en contact avec l'eau. Le fluide a été modélisé par la fonction potentielle de la vitesse. La méthode de Rayleigh a été utilisée pour calculer le premier mode de la plaque en flexion. Le travail de Lamb a été étendu par Peake et Thurston, (1954) dans le cas de la vibration des plaques circulaires, pour deux conditions aux limites différentes (Appuyées et Encastrée).

Dowell et Voss, (1963) ont estimé l'effet de la charge du fluide sur les fréquences naturelles d'une plaque rectangulaire en contact avec le fluide. Ils ont trouvé que le fluide agit comme un ressort en se fixant la masse additionnelle sur la plaque.

L'application de la procédure de la méthode des éléments finis aux problèmes d'interaction fluide-structure pour trouver les fréquences naturelles et les modes a été réalisée pour la première fois par Zienkiewicz et *al.* (1965). Zienkiewicz et Newton, (1965) ont modélisé l'effet du fluide sous forme d'une pression exercée sur une structure, en employant la méthode des éléments finis. Chowdhury, (1972) a utilisé la même méthode pour analyser la vibration libre d'une plaque rectangulaire isotrope immergée dans un fluide parfait. Il a comparé les résultats obtenus avec les résultats expérimentaux. Marcus, (1978) a appliqué la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel NASTRAN pour simuler la vibration des plaques isotropes immergées. Il a déterminé les fréquences propres avec différent cas de submersion de la plaque dans le fluide. Fu et Price, (1987) ont analysé la vibration libre des plaques partiellement ou totalement immergées dans un liquide, en adoptant différentes positions de la plaque (verticale et horizontale). Kwak et Kim, (1991) ont étudié l'effet du fluide sur le comportement dynamique des plaques circulaires pour des différents conditions aux limites (Encastree, Appuis et libre). Ils ont constaté que les fréquences naturelles de la plaque couplée avec le fluide sont influencées par les conditions aux limites (encastree et appuyées). Le même problème a été développé par Amabili *et al.* (1995). Soedel, (1994) a examiné la vibration libre et forcée d'une plaque rectangulaire immergée dans un réservoir rempli par du liquide. Kwak, (1996) a utilisé la méthode de Rayleigh Ritz combinée avec la fonction de Green, pour calculer les facteurs incrémentaux adimensionnels de la masse virtuelle ajoutée NAVMI (non-dimensionalized added virtual mass incremental) des plaques rectangulaires sollicitées par l'eau dans un domaine infini. Haddara et Cao, (1996) ont étudié la réponse dynamique des plaques horizontales vibrantes dans l'air et du liquide par deux solutions; expérimentales et analytiques. Ils ont montré l'effet de la profondeur de submersion sur les fréquences propres, en comparant les résultats analytiques avec les résultats expérimentaux. Meylan, (1997) et Lindholm et *al.*, (1965, 1998) ont réalisé des tests expérimentaux en montrant le comportement dynamique des plaques en contact avec l'eau et l'air. Sharbonneau, (1999) a présenté une analyse vibratoire des plaques minces isotropes rectangulaires dans l'air et le fluide, en examinant avec différents paramètres (conditions aux limites et profondeur de la submersion). Il a représenté la pression du fluide exercée sur la structure par une masse ajoutée. Cheung, et Zhou, (2000) ont calculé les fréquences naturelles

d'une plaque mince rectangulaire placée dans le fond rigide du réservoir. L'effet de la surface libre du fluide n'a pas été considéré. La solution analytique a été basée sur la méthode de développement en série de Fourier et la méthode de Ritz. Liang et *al.* (2000) ont présenté une étude analytique et numérique pour déterminer les fréquences et les modes d'une plaque immergée. Pal et *al.* (2001) ont appliqué la méthode des éléments finis pour étudier l'analyse dynamique d'une plaque composite couplée avec le fluide. L'effet de l'amortissement visqueux n'est pas considéré dans cette analyse. Ergin et Ugurlu, (2003) ont déterminé les fréquences et les modes propres d'une plaque verticale isotrope partiellement immergée. Hoon et Kwi-Ja, (2005) ont utilisé la méthode analytique et la méthode de Rayleigh-Ritz pour étudier la vibration d'une plaque circulaire immergée dans un fluide. La vibration libre des plaques annulaires couplées avec un fluide ont été analysées par Kyeong-HoonJeong, (2006). Ils ont constaté que les fréquences naturelles diminuent avec l'augmentation de la compressibilité du fluide. Kerboua et *al.* (2008) ont étudié la vibration libre d'une plaque rectangulaire immergée dans un fluide et flottante sur sa surface libre, en se basant sur la méthode des éléments fins et la théorie classique des plaques minces. Afin d'exprimer la pression du fluide agissant sur la plaque, le fluide a été modélisé par la fonction de potentiel de la vitesse et l'équation de Bernoulli. Hosseini et *al.* (2010) ont utilisé la théorie du premier ordre (FSDT) avec la méthode de Ritz pour examiner la vibration d'une plaque verticale en interaction avec le fluide. Ils ont déterminé l'expression du mouvement du fluide par la méthode de séparation des variables et la méthode de séries de Fourier. Hosseini et *al.* (2012) ont analysé la vibration libre d'une plaque rectangulaire horizontale, soit immergée dans un fluide ou flottant sur sa surface libre. La plaque a été modélisée analytiquement par la théorie de Mindlin. La fonction potentielle de vitesse et l'équation de Bernoulli sont utilisées pour exprimer la pression du fluide appliquée sur la plaque. Ils ont montré l'effet de profondeur de la submersion, l'épaisseur de la plaque et les conditions aux limites sur les fréquences et les modes propres. Khorshid et Farhadi, (2013) ont utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz pour analyser la vibration d'une plaque composite stratifiée, partiellement immergée dans un liquide. Ils ont montré l'influence des différents paramètres physiques et géométriques sur les fréquences naturelles. Motley et *al.* (2013) ont étudié l'effet du fluide sur le comportement vibratoire d'une plaque composite. Ils ont constaté que la masse ajoutée réduit de manière significative les fréquences naturelles en fonction de la profondeur relative de submersion. Serduoun et *al.* (2015) ont présenté l'analyse vibratoire d'une plaque composite stratifiée et sandwich couplée avec un fluide, en se basant sur la théorie de Reddy (HSDT-C1) et la

version P de la méthode des éléments finis. La fonction potentielle de vitesse et l'équation de Bernoulli ont été utilisées pour obtenir la pression du fluide appliquée sur la surface libre de la plaque. Une étude paramétrique détaillée a été faite pour montrer l'influence de la profondeur de submersion et les conditions aux limites sur les fréquences propres.

1.5 Objectif et motivation de la thèse

L'objectif de cette thèse est l'analyse de la vibration libre d'une plaque composite stratifiée à rigidité variable (CSRV) composée de deux fibres curvilignes : parabolique et hyperbolique.

La version- p de la méthode des éléments finis basée sur la théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement HSDT C_0 (Shankara et Iyengar, 1992, 1996) est présentée comme une méthode d'analyse pour déterminer le comportement dynamique des plaques composites à rigidité variable. Cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur.

Le second objectif de cette thèse est d'étudier l'influence de l'interaction fluide-structure sur le comportement vibratoire d'une plaque à rigidité variable, constituée des fibres hyperboliques (Bendahmane et *al.* 2019). La fonction de potentielle de vitesse et l'équation de Bernoulli sont employées pour obtenir la pression du fluide exercée sur la plaque. Les fréquences et les modes propres sont examinés avec différents paramètres : l'angle d'orientation des fibres curviligne, le rapport d'élasticité, l'épaisseur de la plaque, la profondeur d'immersion et les conditions aux limites. Les résultats obtenus sont comparés à ceux des solutions disponibles dans la littérature.

Chapitre 2

Composite stratifié à rigidité variable

Ce chapitre donne une généralité sur les matériaux composite, ainsi qu'un aperçu sur les méthodes de fabrication des matériaux composites stratifiés à rigidité variable (CSRV).

2.1 Introduction

Les matériaux composites renforcés de fibres sont actuellement très répandus par rapport aux matériaux conventionnels dans plusieurs domaines, tels que l'aérospatiale, la construction, le transport maritime et les articles de sport. Un matériau composite peut être généralement défini comme un matériau constitué d'un mélange d'au moins de deux composants, montrant des propriétés physiques et chimiques différentes.

Les composites stratifiés à rigidité constante CSRC sont constitués de plusieurs plis composites. Chaque pli a des propriétés, l'épaisseur et l'angle d'orientation de fibre qui reste constant tout au long du stratifié. Ces matériaux offrent des propriétés mécaniques très importantes, à savoir : la résistance à la fatigue, la rigidité élevée et la flexibilité à la conception.

Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues ; fibres coupées, fibres courtes,...etc. (Fig. 2.1). Parmi les composites les plus convoités, on notera les sandwichs et stratifiés.

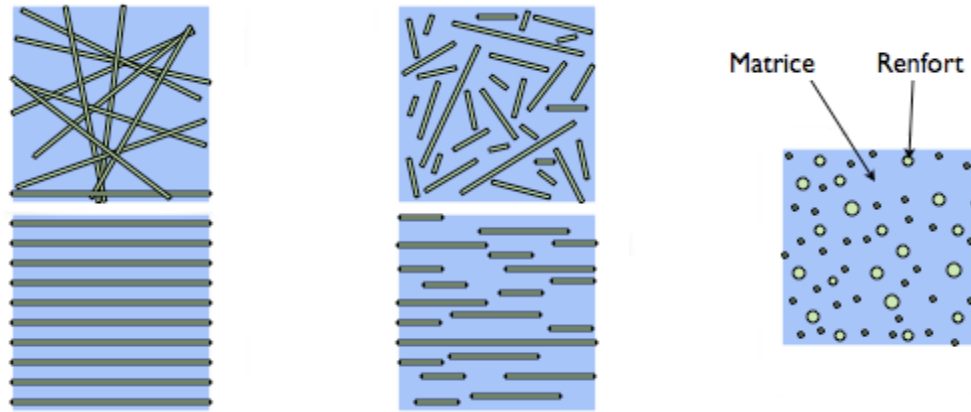


Fig. 2. 1 Matériaux composites avec différentes fibres; longues, courte

Les plaques sandwichs : Ces structures se composent de trois couches principales, dont les caractéristiques mécaniques sont différentes. Deux peaux fines très rigides, caractérisées par une grande résistance à la compression et à la traction. Entre ces deux peaux, il y a une couche épaisse dite âme, caractérisée par une résistance aux efforts de cisaillement (Fig. 2.2).



Fig. 2. 2 Plaque en sandwich

La plaque composite stratifiée est très courante dans de nombreux domaines de l'ingénierie tels que, les industries de l'aérospatiale, le génie civil et le génie maritime. Les stratifiés sont constitués des couches (plis) successives de renforts ou l'empilement de plusieurs plis de différentes orientations. Deux types sont distingués (Fig. 2.3) :

Stratifiés symétriques : Les plis sont disposés symétriquement par rapport au plan moyen passant par le milieu de l'épaisseur du stratifié et sont utilisés afin d'éliminer le couplage entre membrane et flexion (Nombre de couches pair).

Stratifiés antisymétriques : sont utilisés dans les cas de nécessité du couplage entre membrane et flexion. Ils sont constitués de couches en nombre impair.

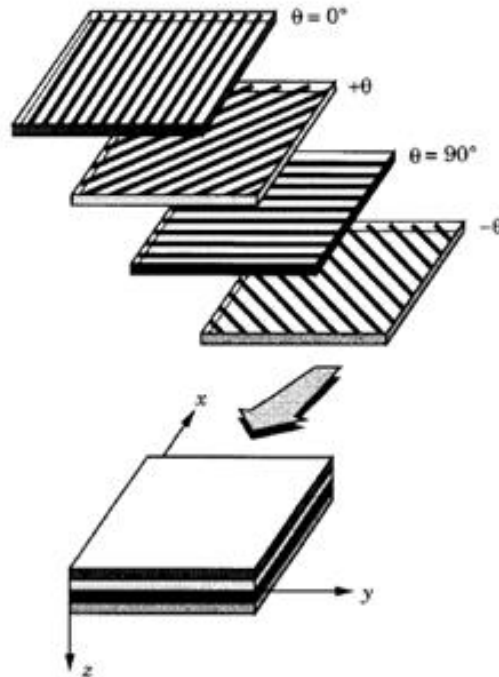


Fig. 2. 3 Stratifié avec différentes orientations de fibres (Reddy, 2004)

L'utilisation de matériaux composites dans l'industrie de haute technologie tels que les domaines aéronautiques, aérospatiales, navals,...etc oblige les chercheurs à améliorer ces matériaux afin d'obtenir des propriétés plus élevées (rigidité élevée et résistance élevée) avec un faible poids. Les composites stratifiés à rigidité variable CSRV sont développés pour améliorer des propriétés par rapport aux matériaux composites à rigidité constante. Le CSRV sont différents aux CSRC en faisant varier l'orientation des fibres au long du stratifié. La conception des stratifiés à rigidité variable peut être adaptée à un large éventail d'applications potentielles par rapport aux stratifiés à rigidité constante.

2.2 Matériaux composites à rigidité variable (CSRV)

Le CSRV est créé par deux approches principales : la variation de fraction volumique des fibres et la variation d'angles d'orientation des fibres curvilignes.

La première approche de CSRV consiste à varier la fraction volumique des fibres dans le stratifié, possédant des fibres droites parallèles et espacées. Comme illustre la figure (2.4) (Houmat, 2012), les fibres sont distribuées de façon plus dense dans la bande centrale suivant l'axe x, où la rigidité est variée par rapport d'une zone à une autre. Leissa et Martin, (1990) ont utilisé cette approche et ont remarqué que la charge de flambage et la fréquence

fondamentale ont été respectivement augmentées de 38% et 21% par rapport aux stratifiés à rigidité constante.

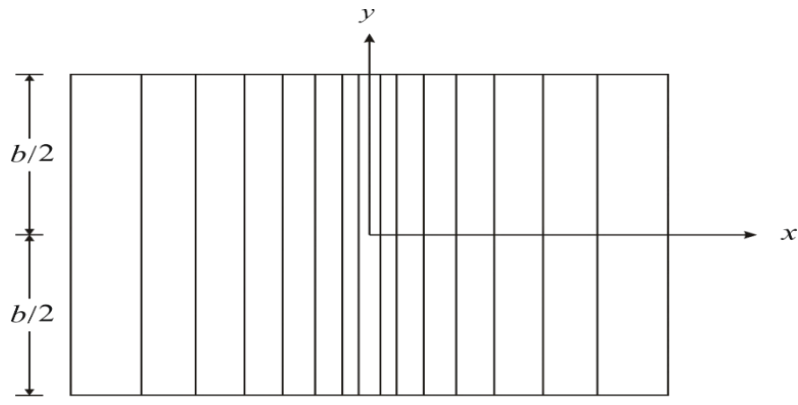


Fig. 2. 4 Plaque composite avec un espacement variable des fibres

La deuxième approche de création CSRV consiste à varier l'angle d'orientation de fibre tout au long d'un stratifié (Fig. 2.5). Les principaux avantages de la deuxième approche se résument par l'augmentation de la rigidité et la résistance structurelle en modifiant seulement l'angle d'orientation des fibres, l'obtention d'une structure légère et résistante tout en gardant les caractéristiques géométriques de la structure (sans augmentation de poids). Cette dernière approche offre une flexibilité à la conception des structures.

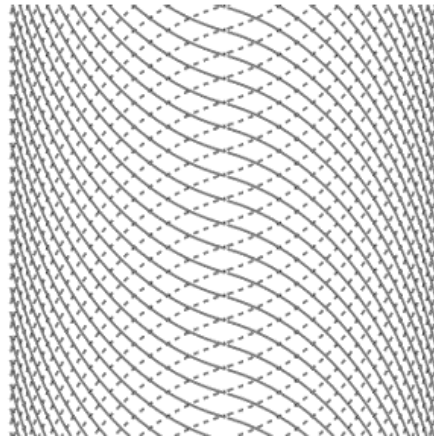


Fig. 2. 5 Orientation des fibres curvilignes

2.2.1 Concept théorique des fibres curvilignes

La première définition des fibres curvilignes a été proposée par Gürdal et Olmedo, (1993a). Ils ont définis le chemin de fibre comme variant linéairement selon les axes x ou y et ont prouvé que la charge de flambage est augmentée jusqu'à 80%, en comparant aux meilleurs modèles des fibres droites. Les fibres curvilignes sont identifiées par un ensemble de

paramètres dans une expression mathématique prédéfinie (Tatting et Gürdal, 2001). Le chemin de fibre curviligne peut être défini par l'orientation des fibres pour n'importe quel point des coordonnées de stratifié. Ceci est accompli en déterminant d'abord un chemin de référence (Gürdal et al. 2005).

Il y a plusieurs façons de faire varier l'angle de la fibre, une variation linéaire de l'orientation de la fibre telle que proposée par Tatting et al. (2008). Ils ont défini la formulation de chemin de fibre pour qu'elle varie linéairement le long d'un axe x' défini arbitrairement. L'angle de fibre $\theta(x')$ est défini comme suit :

$$\theta(x') = \begin{cases} \phi + \frac{2}{a}(T_1 - T_0)x' + T_0 - 2(T_0 - T_1), & \text{pour } -a \leq x' \leq -\frac{a}{2} \\ \phi + \frac{2}{a}(T_0 - T_1)x' + T_0, & \text{pour } -\frac{a}{2} \leq x' \leq 0 \\ \phi + \frac{2}{a}(T_1 - T_0)x' + T_0, & \text{pour } 0 \leq x' \leq \frac{a}{2} \\ \phi + \frac{2}{a}(T_0 - T_1)x' + T_0 - 2(T_0 - T_1), & \text{pour } \frac{a}{2} \leq x' \leq a \end{cases} \quad (2.1)$$

où, $x' = r \cos \phi + x \sin \phi$

La fibre chemine de l'angle d'orientation T_0 au point A au point B à une distance d , où l'angle d'orientation varie linéairement à T_1 . La distance d est appelée longueur caractéristique (Fig. 2.6). L'axe de coordonnée locale x' est tourné de l'angle ϕ par rapport à l'axe de coordonnée global x . Finalement, tous les chemins des fibres curvilignes peuvent être définis par $\phi(T_0, T_1)$.

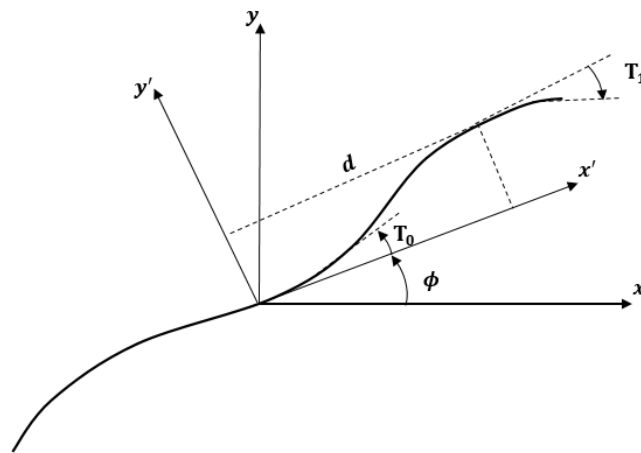


Fig. 2. 6 Paramètres du chemin de référence de fibre curviligne

Les trois formes des fibres curvilignes avec le sens positive ou négative de l'angle d'orientation $[+T_1]$ et $[-T_1]$ sont présentés par Honda et Narita (2012), ces formes sont, paraboliques, cubiques et hyperboliques (Fig. 2.7 (a-c)).

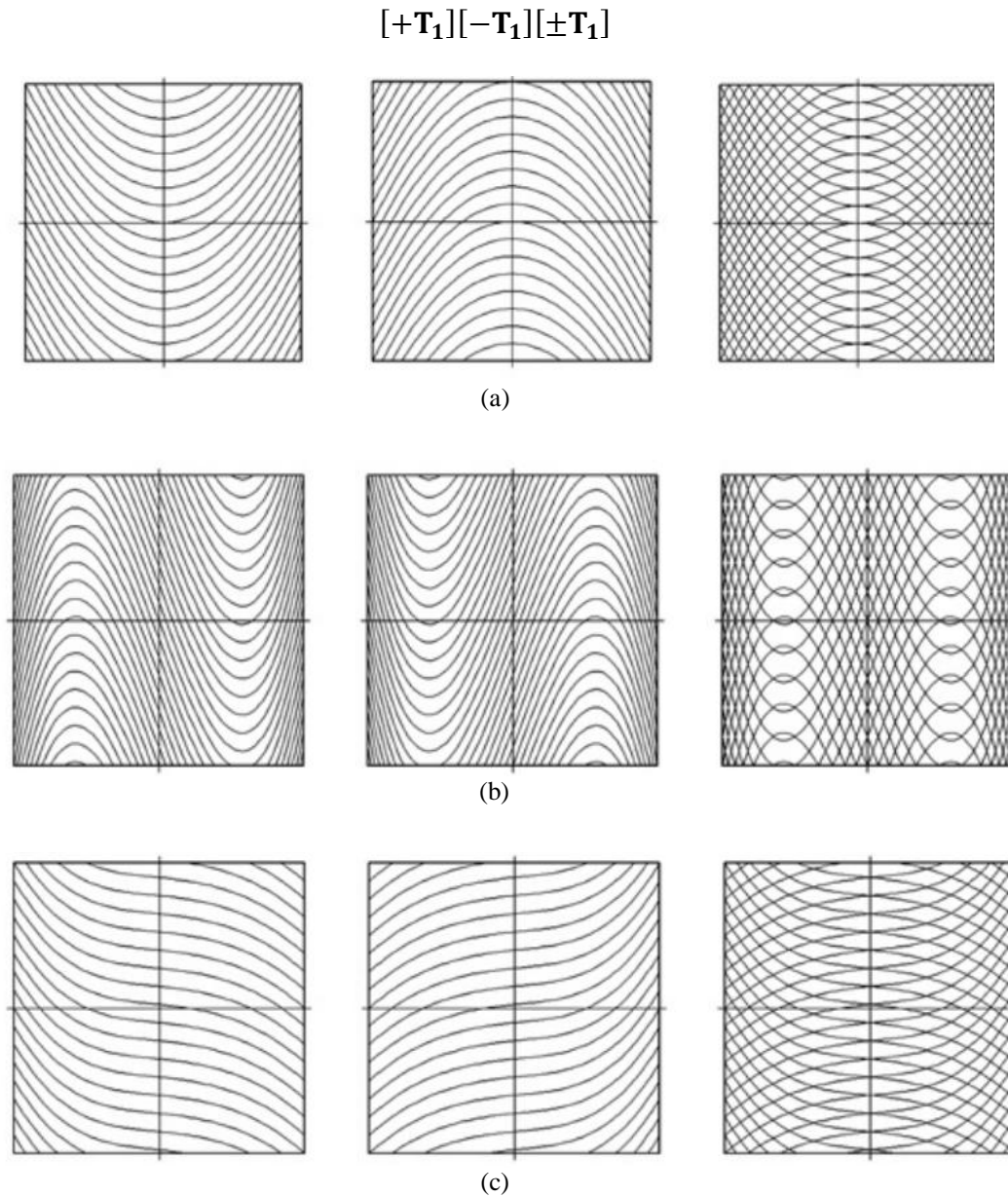


Fig. 2. 7 Plaques avec des fibres de forme ;
(a) parabolique, (b) cubique et (c) hyperbolique (Honda et Narita 2012)

2.2.2 Méthode de fabrication des fibres curvilignes

Les techniques de fabrication des composites stratifiées sont manuelles, comme les méthodes de moulage au contact, moulage par projection simultanée et l'enroulement filamentaire. Ces méthodes sont généralement utilisées dans la réalisation des fibres droites et comportent plusieurs limitations en ce qui concerne la fabrication de pièces aéronautiques.

Le développement de nouveau processus de placement automatique des fibres (Automated Fiber Placement, AFP) a donné la possibilité de réaliser des structures en composite à fibre curviligne. Cette technique a été proposée à la fin des années 1970 (Grant and Martin, 2003). Le principe du processus d'AFP est très similaire à celui de l'enroulement filamentaire, mais il a été créé dans le but de surmonter les limitations liées à ce dernier.

La machine AFP (Fig. 2.8) est un robot caractérisé par plusieurs axes de mouvement, permettant de se déplacer facilement dans toutes les directions de l'espace. Cette machine est contrôlée par un système de programmation hors-ligne (OLP) (Marouene, 2015). Ce dernier prend en considération de nombreux éléments, tels que : la représentation spatiale des solides, le rendu graphique des objets, la détection des collisions, la planification de parcours et la simulation dynamique (Olsen and Craig, 1993).



Fig. 2. 8 Machine de placement automatisé des fibres (AFP)

Les principaux éléments des machines AFP sont cités par Dirk et co-équipier (2012) :

- Tête de placement (Fig. 2.9).
- Plateforme de la machine automatisée.
- Contrôleur électronique et un logiciel.



Fig. 2. 9 Tête de placement de machine AFP (Marouene, 2015)

La technologie AFP est utilisée actuellement par plusieurs grandes compagnies d'aéronautiques (Evans 1998). La compagnie Boeing a bénéficié de la machine de placement automatisé des fibres d'Ingersoll, pour fabriquer les sections 44 et 46 du fuselage de l'avion Boeing 787 Dreamliner. Dans le même contexte, la compagnie Airbus utilise la même technologie à la fabrication des fuselages de l'avion A350 – XWB.

2.3 Conclusion

Nous avons conclu que les avantages donnés par les composites à rigidité variable sont meilleures que les composites à rigidité constante. À cet effet, nous avons analysé le comportement vibratoire de l'interaction fluide-structure en proposant un modèle d'une plaque composite stratifiée à rigidité variable, couplée avec un fluide.

Chapitre 3

Théorie des plaques composites à rigidité variable

Dans le présent chapitre, la formulation d'une plaque composite stratifiée constituée des fibres rectilignes et curvilignes (hyperbolique, parabolique) basée sur la théorie d'Ordre élève (HSDT-C0) est présentée. Cette théorie est caractérisée par la distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque, l'énergie de la déformation et l'énergie cinétique de la plaque composite à rigidité variable sont déterminées. Une vue générale sur l'évolution des théories des plaques composites est présentée au début.

3.1 Théorie des plaques

Les plaques composites stratifiées sont considérées comme un élément de structure possédant une dimension (l'épaisseur) plus faible relativement par rapport aux deux autres dimensions. L'utilisation de ce modèle de structure est préférable dans la plupart des applications liées à l'analyse des structures composites. Ce type de géométrie permet de simplifier le problème tridimensionnel (3D) à un problème bidimensionnel (2D).

Afin de résoudre les problèmes des plaques composites dans le domaine élastique, il est nécessaire de favoriser la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la plaque ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

Dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque sont présentés.

3.1.1 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

La théorie classique des plaques stratifiées est basée sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff de contraintes planes et les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. Une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire indéformable avant et après déformation, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse (Fig. 3.4). Reddy, (1997), (1999), (2004).

Le champ de déplacement de la théorie classique s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

u_0 , v_0 et w_0 , sont les composantes des déplacements dans le plan moyen.

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ désignent les rotations dues à la flexion dans les deux directions y et x respectivement.

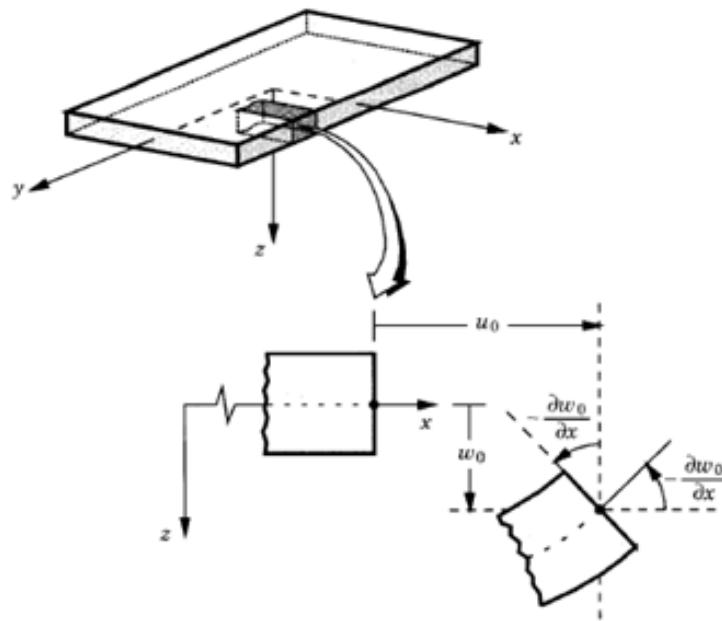


Fig. 3. 1 Géométries déformées et non déformées d'une plaque sous l'hypothèse de Love-Kirchhoff (Reddy, 2004)

3.1.2 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre peut être considérée comme une amélioration par rapport à la théorie classique (CLPT), en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse par l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement. La conséquence de cette hypothèse est qu'une section droite reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne à cause de l'effet du cisaillement transverse (Fig. 3.2). Reissner, (1945); Mindlin, (1951).

Le champ de déplacement La théorie (FSDT) est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

u_0 , v_0 et w_0 : Sont les composantes des déplacements dans le plan moyen.

ϕ_x et ϕ_y : les rotations autour des deux directions y et x , respectivement

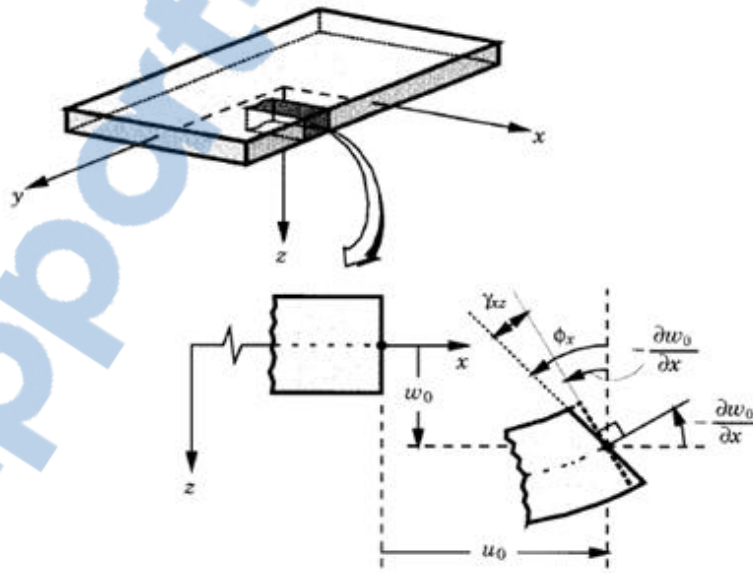


Fig. 3.2 Géométries déformées et non déformées d'une plaque sous l'hypothèse de la théorie (FSDT) (Reddy, 2004)

3.1.3 Théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur

La théorie d'ordre supérieur est proposée dans le but d'améliorer les limites rencontrées dans les deux théories précédentes CLPT et FSDT. Celle-ci adopte une variation cubique des

champs déplacement au long de l'épaisseur afin d'obtenir une meilleure représentation des déformations et des contraintes de cisaillement transverse. Cette théorie n'exige pas de facteur de correction et permet de représenter le gauchissement de la section après la déformation (Fig. 3.3).

Selon les hypothèses de Reddy (1997, 1999), le champ des déplacements s'écrit :

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z \phi_x(x,y) - f(z) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \\
 v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z \phi_y(x,y) - f(z) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) \\
 w(x,y,z) &= w_0(x,y)
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Où, $f(z) = 4z^3/3h^2$ est la fonction de la distribution non linéaire des déformations de cisaillement transverse.

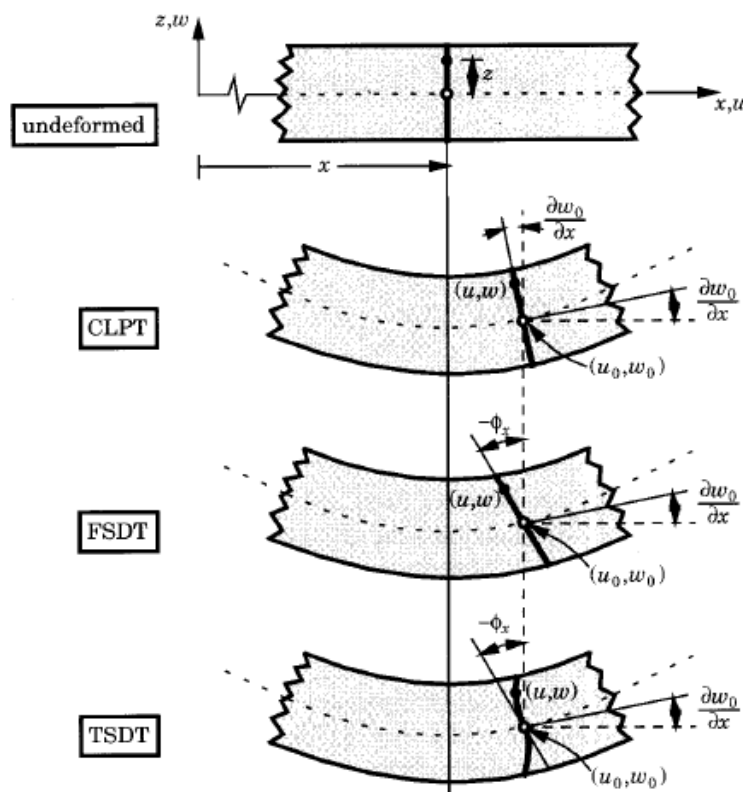


Fig. 3. 3 Géométries déformées et non déformées d'une plaque sous l'hypothèse de la théorie (TSDT) (Reddy, 2004)

Plusieurs auteurs ont utilisé cette théorie de Reddy pour développer la fonction $f(z)$ de la distribution non linéaire des déformations et des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur, pour créer les différents modèles de la théorie d'ordre élevé. Parmi ces théories : TSDT, SSDT, ESDPT, HSDPT, HSDT.

Touratier (1991) a utilisé une fonction sinusoïdale qui est différente des autres modèles d'ordre supérieur, puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale.

Le champ de déplacement du modèle sinus (SSDT) est donné par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Où,

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (3.5)$$

Karama et al. (2003) ont proposé une fonction exponentiel s'écrit comme suite :

$$f(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (3.6)$$

Cette théorie est connue sous le nom la théorie d'ordre élevé exponentiel (ESDPT).

Ait Atmane et al. (2010) ont proposé une fonction hyperbolique qui s'écrit comme suit :

$$f(z) = \frac{1}{[\cos(\pi/2) - 1]} \left(z \cos(\pi/2) - \frac{h}{\pi} \sin h \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right) \quad (3.7)$$

Cette théorie est ainsi connue sous le nom de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé hyperbolique (HSDPT).

Shankaras (1991, 1996) à proposé une théorie raffinée de HSDT avec une continuité des déplacements généralisés C_0 (C_0 -HSDT) en se basant sur la théorie de reddy TSDT telle que :

$$\phi_x = \partial w_0 / \partial x \text{ et } \phi_y = \partial w_0 / \partial y.$$

Chien H. Thai et al (2012) ont utilisé le modèle de Shankaras, (1991) pour une étude de flambages des plaques composites stratifiées.

3.2 Champs de déplacements

Conformément à la théorie de cisaillement d'ordre élevé HSDT de Shankaras, (1991, 1996), considérant une plaque stratifiée rectangulaire épaisse constituée de n plis orientés différemment de dimensions a , b et h (Fig. 3.4). Les composantes de déplacement u , v et w dans les directions x , y , et z de la plaque peuvent être exprimées en fonction des composantes de déplacement du plan moyen u_0 , v_0 et w_0 , les rotations autour des axes y et x , respectivement β_x et β_y et les fonction de gauchissement ϕ_x et ϕ_y .

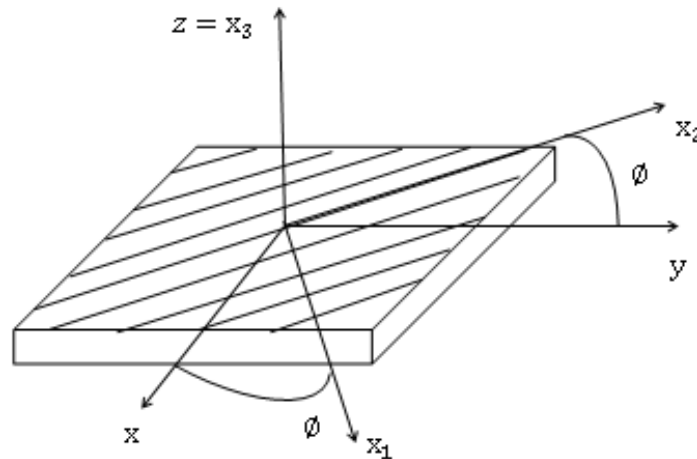


Fig. 3. 4 Représentation de la plaque composite stratifiée avec l'orientation des fibres

Le champ de déplacement de cette théorie s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + (z - f(z))\beta_x(x, y) - f(z)\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + (z - f(z))\beta_y(x, y) - f(z)\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.8)$$

u_0, v_0 : Les déplacements membranaires de la plaque composite.

w_0 : Le déplacement transversal due à la flexion de la plaque.

β_x, β_y : Les rotations autour des deux directions y et x , respectivement.

ϕ_x, ϕ_y : Les fonctions de gauchissement suivant les deux axes x et y de la plaque, respectivement.

Où,

$$f(z) = \frac{4z^3}{3h^2} \quad \text{et} \quad f'(z) = \frac{4z^2}{h^2}$$

$f(z)$: Fonction de distribution des contraintes de cisaillement le long de l'épaisseur de la plaque

$f'(z)$: représente la dérivée première de $f(z)$ par rapport à z , tel que :

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

3.3 Relations déformations-déplacements:

La relation "déformations-déplacements" de la théorie HSDT-C0 peuvent être écrites sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + (z - f(z)) \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + (z - f(z)) \frac{\partial \beta_y}{\partial y} - f(z) \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + (z - f(z)) \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + (z - f(z)) \frac{\partial \beta_y}{\partial x} - f(z) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} - f'(z)(\beta_x + \phi_x) + \beta_x \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} - f'(z)(\beta_y + \phi_y) + \beta_y\end{aligned}\quad (3.9)$$

3.4 Relation contraintes-déformations

Nous considérons les relations linéaires entre les contraintes et les déformations (loi de Hooke généralisée). Pour les matériaux composites, la relation liant les contraintes aux déformations s'écrit :

$$\{\sigma\}^k = [Q]^k \{\varepsilon\}^k$$

Avec:

$$[Q]^k = [T]^k [C]^k [T]^{T^k}$$

et,

$$[C]^k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}^k \quad (3.10)$$

Où, les constantes de la matrice élastique sont exprimées en fonctions du module d'élasticité longitudinal et transversal (E_1, E_2), les coefficients de Poisson ($\nu_{1,2}, \nu_{2,1}$) et les modules de cisaillement ($G_{1,2}, G_{1,3}, G_{2,3}$), et sont donnés par :

$$C_{11} = \frac{E_1}{(1 - \nu_{1,2}\nu_{2,1})}$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{1,2}E_1}{(1 - \nu_{1,2}\nu_{2,1})}$$

$$C_{22} = \frac{E_2}{(1 - \nu_{1,2}\nu_{2,1})}$$

$$C_{21} = C_{12}, \quad C_{33} = G_{1,2}, \quad C_{44} = G_{2,3}, \quad C_{55} = G_{1,3}$$

Avec, la matrice de transformation donnée par :

$$[T]^k = \begin{bmatrix} \cos(\theta)^2 & \sin(\theta)^2 & -2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta)^2 & \cos(\theta)^2 & 2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^k \quad (3.11)$$

Où, $[Q]^k$ est la matrice de rigidité réduite transformée d'une $k^{\text{ième}}$ couche, écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11}(x) & Q_{12}(x) & Q_{13}(x) & 0 & 0 \\ Q_{21}(x) & Q_{22}(x) & Q_{23}(x) & 0 & 0 \\ Q_{31}(x) & Q_{32}(x) & Q_{33}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}(x) \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^k \quad (3.12)$$

Le stratifié composite CSRV avec des fibres curvilignes est utilisé dans cette étude, dans laquelle l'angle d'orientation des fibres θ est défini comme une fonction qui varie linéairement, en fonction de la valeur x . Cela implique que la matrice $[Q]^k$ n'est pas constante et devient en fonction de x . Dans cette étude, on considère que la variation des fibres est parabolique et hyperbolique comme montre les figures (3.5) et (3.6) respectivement.

3.4.1 Fibre parabolique :

La fonction de variation de fibre parabolique (Honda et al. 2008) est donnée par la formule suivante :

$$f(x) = A \left(x + \frac{a}{2} \right) \left(x - \frac{a}{2} \right) = A \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \quad (3.13)$$

L'angle d'orientation de fibre (x) est donné par la première dérivée de la fonction (x).

$$\theta(x) = \tan^{-1} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) = \tan^{-1}(2Ax) \quad (3.14)$$

L'angle d'orientation des fibres varie de façon linéaire entre deux angles le long de l'axe des abscisses x . Le premier des deux angles, T_0 , est l'angle d'orientation des fibres au centre de la plaque. Le deuxième angle, T_1 , est l'angle d'orientation des fibres à une distance $a/2$ à partir du centre de la plaque. La configuration de l'orientation des fibres est indiquée dans cette étude par $[<T_0, T_1>]$:

$$T_0 = 0$$

$$T_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) = \tan^{-1}(2Ax) \quad \text{avec} \quad x = \frac{a}{2}$$

$$\gamma = \frac{B}{a/2} = A \frac{a}{2} \quad \text{avec} \quad A = \gamma \frac{2}{a}$$

$$T_1 = \tan^{-1}(2\gamma)$$

A : La constante de proportionnalité.

B : Le petit rayon de parabole.

γ : Un paramètre non dimensionnel

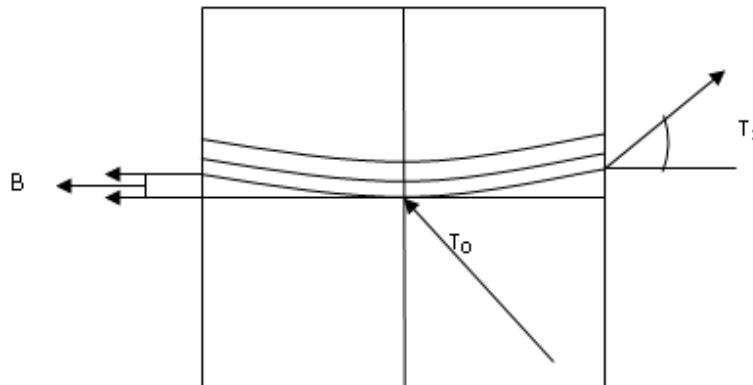


Fig. 3. 5 Orientation des fibres parabolique de la plaque CSRV

3.4.2 Fibre hyperbolique :

La fonction de variation de fibre hyperbolique (Pedro Ribeiro et al. 2011) est exprimée comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{2(T_1 - T_0)} \left\{ -\ln[\cos(T_0)] + \ln \left[\cos \left(T_0 - \frac{2(T_1 - T_0)}{a} x \right) \right] \right\} & \text{for } -\frac{a}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{a}{2(T_1 - T_0)} \left\{ \ln[\cos(T_0)] - \ln \left[\cos \left(T_0 + \frac{2(T_1 - T_0)}{a} x \right) \right] \right\} & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \end{cases} \quad (3.15)$$

L'orientation $\theta(x)$ de la fibre hyperbolique peut être exprimée en fonction de T_0 , T_1 , et x par :

$$\theta(x) = \arctan \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) = \begin{cases} -\frac{2}{a} (T_1 - T_0)x + T_0 & \text{for } -\frac{a}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{2}{a} (T_1 - T_0)x + T_0 & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \end{cases} \quad (3.16)$$

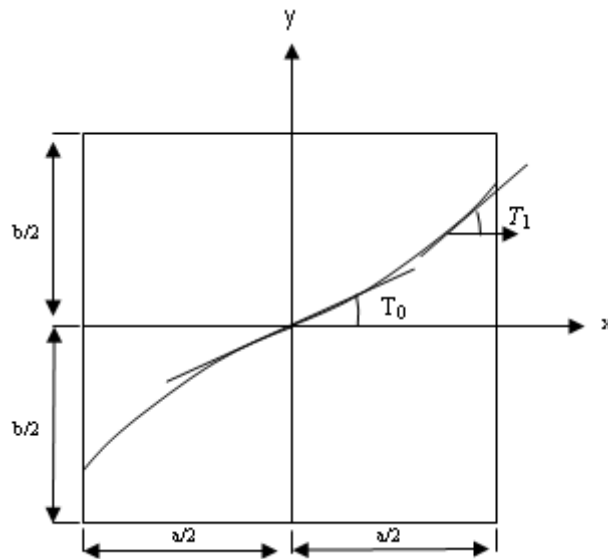


Fig. 3. 6 Orientation des fibres hyperbolique de la plaque CSRV

Les éléments de la matrice $[Q]^k$ s'écrit:

$$Q_{11}(x) = C_{11} \cos^4 \theta(x) + 2(C_{12} + 2C_{33}) \cos^2 \theta(x) \sin^2 \theta(x) + C_{22} \sin^4 \theta(x)$$

$$Q_{12}(x) = C_{12}(\cos^4 \theta(x) + \sin^4 \theta(x)) + (C_{11} + C_{22} - 4C_{33}) \cos^2 \theta(x) \sin^2 \theta(x)$$

$$Q_{13}(x) = (C_{11} - C_{12} - 2C_{33}) \cos^3 \theta(x) \sin \theta(x) + (C_{12} - C_{22} + 2C_{33}) \cos \theta(x) \sin^3 \theta(x)$$

$$-Q_{22}(x) = C_{11} \sin^4 \theta(x) + (2C_{1,2} + 4C_{3,3}) \cos^2 \theta(x) \sin^2 \theta(x) + C_{22} \cos^2 \theta(x)$$

$$\begin{aligned}
Q_{23}(x) &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{33}) \cos \theta(x) \sin^3 \theta(x) + (C_{12} - C_{22} + 2C_{33}) \cos^3 \theta(x) \sin \theta(x) \\
Q_{33}(x) &= (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{33}) \cos^2 \theta(x) \sin^2 \theta(x) + C_{33} (\cos^4 \theta(x) + \sin^4 \theta(x)) \\
Q_{44}(x) &= C_{44} \cos^2 \theta(x) + C_{55} \sin^2 \theta(x) \\
Q_{45}(x) &= (C_{55} - C_{44}) \cdot (\cos \theta(x) \sin \theta(x)) \\
Q_{55}(x) &= C_{44} \sin^2 \theta(x) + C_{55} \cos^2 \theta(x)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

3.5 Energie de déformation

L'expression de l'énergie de déformation d'une plaque s'écrit en coordonnées cartésiennes:

$$Ed = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz \tag{3.18}$$

n : Nombre de couche

En substituant de l'équation (3.12) dans (3.18),

$$\begin{aligned}
Ed = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} & (Q_{11}(x) \varepsilon_{xx}^2 + Q_{22}(x) \varepsilon_{yy}^2 + 2Q_{12}(x) \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xx} + Q_{33}(x) \gamma_{xy}^2 \\
& + 2Q_{13}(x) \gamma_{xy} \varepsilon_{xx} + 2Q_{23}(x) \gamma_{xy} \varepsilon_{yy} + Q_{44} \gamma_{xz}^2 + Q_{55} \gamma_{yz}^2) dx dy dz
\end{aligned} \tag{3.19}$$

3.6 Energie cinétique

L'expression de l'énergie cinétique d'une plaque stratifiée composite à rigidité variable associée au champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned}
Ec = \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} & \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right. \\
& + 2(z - f(z)) \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial t} \right) \right] \\
& - 2f(z) \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right) \right] \\
& + (f(z)^2 - 2zf(z) + z^2) \left[\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial t} \right)^2 \right] \\
& + 2(f(z)^2 - zf(z)) \left[\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right) \right] \\
& \left. + f(z)^2 \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right) dx dy dz
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Où, ρ est la masse volumique

3.7 Equations du mouvement

Les équations de Lagrange sont appliquées pour la détermination des équations différentielles du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial (\dot{q}_i)} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial (q_i)} + \frac{\partial E_d}{\partial (q_i)} = 0 \quad (3.21)$$

La substitution des équations (3.9), (3.10) et (3.11) dans l'équation (3.12) mène à l'équation sous la forme matricielle suivante :

$$[M]\{\ddot{q}_i\} + [K]\{q_i\} = 0 \quad (3.22)$$

[M] : Matrice masse.

[K]: Matrice de rigidité.

{q}: Vecteur coordonnées généralisés.

Chapitre 4

Modélisation du fluide

L'objectif de ce chapitre est de présenter la formulation du fluide, pour déterminer l'influence de ce dernier sur le comportement vibratoire de la plaque avec différentes positions d'interface fluide-structure (plaques partiellement ou totalement immergées). Le fluide est modélisé par la fonction de potentiel de vitesse et l'équation de Bernoulli, qui sont adoptées pour exprimer la pression du fluide agissant sur la plaque avec une variation de niveau du fluide.

4.1 Formulation du fluide

Le fluide engendre des forces sur la surface de la plaque immergée l'obligeant à se déplacer. Ce mouvement va simultanément affecter les conditions de l'écoulement. Les plaques en contact avec le fluide sont généralement couplés par un certain nombre de conditions cinématiques et dynamiques. Les petites perturbations en élasticité linéaire des plaques induisent le déplacement au niveau de l'interface et par conséquent, le changement de champ d'écoulement du fluide qui est supposé rester en contact solidaire avec le solide. A l'interface, les particules fluides et solides ont le même mouvement, car le fluide adhère parfaitement au solide qui peut se traduire par une diminution de la rigidité et une augmentation de la masse du système connu sous le nom de masse ajoutée.

Pour établir le modèle mathématique qui décrit l'interaction fluide-plaque, on considère les hypothèses suivantes :

Le fluide est non visqueux, incompressible et irrotationnel.

Le mouvement relatif du fluide par rapport à la plaque est négligeable.

La propriété d'écoulement irrotationnel nous permet d'utiliser la fonction potentielle de vitesse. Cette fonction du fluide est désignée par $\phi(x, y, z, t)$ en coordonnées spatiales x, y, z et du temps t . Prenant en compte l'incompressibilité du fluide, alors que la fonction ϕ satisfait à l'équation de Laplace dans tout le domaine fluide. Cette relation est exprimée dans le système de coordonnées cartésien, de la manière suivante :

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

La pression du fluide agissant sur la plaque qui correspond aux conditions limites du fluide sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque est exprimée en utilisant l'équation de Bernoulli.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left(\rho \frac{1}{2} v^2 + p + \rho g z \right) = 0 \quad (4.2)$$

L'hypothèse de petits mouvements du fluide en négligeant ($v^2 = 0$) devant les autres termes :

$$P|_{z=\frac{h}{2}} = -\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\frac{h}{2}} \quad (4.3)$$

$$P|_{z=-\frac{h}{2}} = -\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=-\frac{h}{2}} \quad (4.4)$$

Dans notre modèle, le couplage du à l'interaction fluide-structure est pris en compte en considérant la condition de non glissement au niveau de l'interface. Cette condition ignore le mouvement relatif du fluide par rapport la plaque de sorte que, la composante de la vitesse du fluide sur la surface de la plaque doit correspondre au taux de variation instantané du déplacement de la plaque dans la direction transversale.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\frac{h}{2}} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{h}{2}} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.6)$$

La résolution de l'équation de la fonction potentielle de la vitesse se fait par la relation de séparation variable comme suit :

$$\phi(x, y, z, t) = F(z) S(x, y, z, t) \quad (4.7)$$

$F(z)$: Fonction à variable z , $S(x, y, z, t)$: fonction à deux variable x, y

En substituant les équations (4.5) et (4.6) dans (4.7), on obtient :

$$S(x, y, z, t) = \frac{1}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=\frac{h}{2}}} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.8)$$

$$S(x, y, z, t) = \frac{1}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=-\frac{h}{2}}} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.9)$$

La substitution des équations (4.8) et (4.9) dans (4.7) donne :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{F(z)}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=\frac{h}{2}}} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.10)$$

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{F(z)}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=-\frac{h}{2}}} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.11)$$

En remplaçant l'équation (4.10) et (4.11) dans l'équation de Laplace (4.1), nous obtenons la forme d'une équation différentielle du second ordre.

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} - \mu_f^2 F(z) \quad (4.12)$$

$$\text{Avec, } \mu_f = \pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

La relation de μ_f est donnée par (Kerboua, 2008).

L'équation (4.12) est une équation différentielle du second ordre, sa solution générale peut être représentée comme suit;

$$F(z) = A_1 e^{\mu_f z} + A_2 e^{-\mu_f z} \quad (4.13)$$

A_1 et A_2 sont des constantes.

En introduisant l'équation (4.13) dans (4.11) et (4.10), on obtient les expressions suivantes :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{(A_1 e^{\mu_f z} + A_2 e^{-\mu_f z})}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=\frac{h}{2}}} \frac{\partial w}{\partial t} \tag{4.14}$$

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{(A_1 e^{\mu_f z} + A_2 e^{-\mu_f z})}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=-\frac{h}{2}}} \frac{\partial w}{\partial t} \tag{4.15}$$

4.1.1 Les conditions aux limites d'interface fluide-plaque

La fonction potentielle de la vitesse du fluide varie en fonction des conditions aux limites à l'interface fluide-structure afin de déterminer les constantes inconnues et la pression du fluide exercée sur la plaque avec différentes positions : plaque-fluide avec une surface libre, paroi rigide, plaque totalement immergée où la condition d'imperméabilité pris en compte.

4.1.1.1 Plaque-fluide avec une surface libre

En supposant que les perturbations dues au mouvement de la surface libre du fluide sont négligeables, la condition suivante peut être appliquée à la surface libre du fluide. Il existe une relation entre cette condition et la fonction de potentiel de la manière suivante (Fig.4.1), telle que :

$$\left. \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=h_1+\frac{h}{2}} = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=h_1+\frac{h}{2}} \tag{4.16}$$

g, est l'accélération due à la gravité

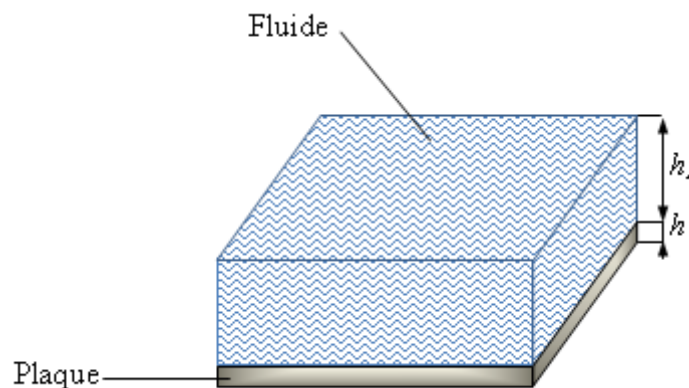


Fig. 4. 1 Plaque-fluide avec une surface libre

La combinaison des équations (4.5) ou (4.6), (4.14) ou (4.15) et (4.16) mène à l'expression de la fonction potentielle suivante :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{\mu_f} \left[\frac{e^{\mu_f z} + C e^{-\mu_f(z-2h_1)}}{1 - C e^{2\mu_f h_1}} \right] \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.17)$$

Où,

$$C = \frac{(\rho_f \mu_f - \omega^2)}{(\rho_f \mu_f + \omega^2)}$$

C tend vers -1.

La pression dynamique du fluide au niveau d'interface fluide-structure donnée par l'introduction de l'équation (4.17) dans (4.3) ou (4.4) :

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu_f} \left[\frac{1 + C e^{2\mu_f h_1}}{1 - C e^{2\mu_f h_1}} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z_{f1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.18)$$

4.1.1.2 Plaque-fluide avec une paroi rigide

La condition aux limites à l'interface plaque-fluide représentée sur la figure (4.2) a été étudiée par Lamb (Lamb, 1920) et désignée sous la condition de fréquence nulle. Cette condition aux limites de paroi rigide et donnée par l'expression suivante :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-h_1} = 0 \quad (4.19)$$

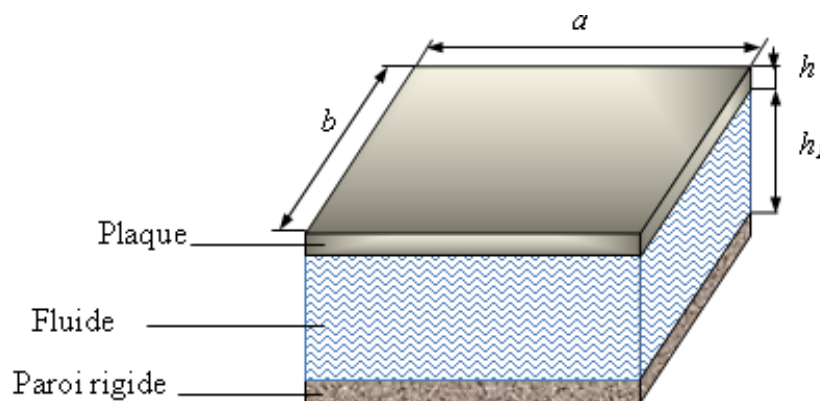


Fig. 4. 2 Fluide délimitée par une paroi rigide et une plaque flottante

En introduisant les équations (4.14) ou (4.15) dans la relation (4.19), nous obtenons la fonction potentielle, telle que :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{\mu_f} \left[\frac{e^{\mu_f(z-2h_1)} + e^{-\mu_f z}}{e^{2\mu_f h_1} - 1} \right] \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.20)$$

La pression dynamique pour ce cas est déterminée comme suite :

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu_f} \left[\frac{e^{-2\mu_f h_1} + 1}{e^{-2\mu_f h_1} - 1} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z_{f2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.21)$$

4.1.1.3 Plaque totalement immergée

Dans le cas d'une plaque totalement immergée (Fig. 4.3), la pression totale sera une combinaison des pressions qui correspondent aux conditions aux limites du fluide au niveau des deux surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu_f} \left[\frac{1 + C e^{2\mu_f h_1}}{1 - C e^{2\mu_f h_1}} + \frac{e^{-2\mu_f h_2} + 1}{e^{-2\mu_f h_2} - 1} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z_{f3} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.21)$$

$$P = Z_{fi} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.22)$$

Z_{fi} est un coefficient dépendant des conditions aux limites

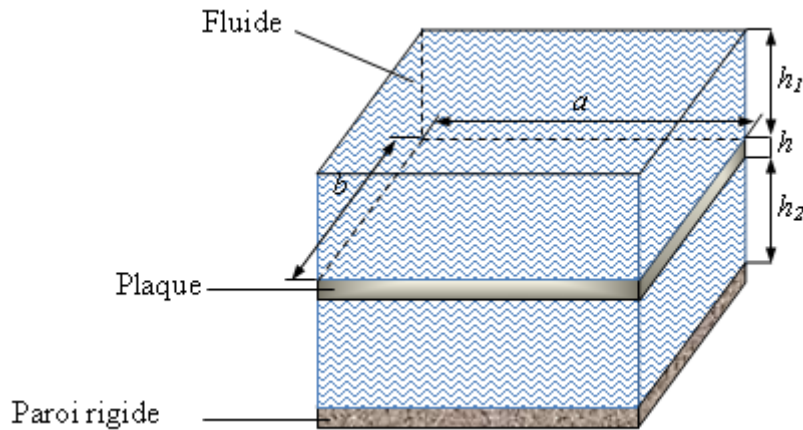


Fig. 4. 3 Plaques totalement immergés dans un fluide

Chapitre 5

Application de la version-p de la MEF à la modélisation du système fluide- structure

Ce chapitre est consacré à la modélisation des plaques composites à rigidité variable (CSRV) immergées dans un fluide. La plaque est modélisée par un élément-p rectangulaire à quatre nœuds avec sept degrés de liberté par nœud. Le fluide est analysé par une pression exercée sur la plaque qui est considérée comme une masse ajoutée. Les fonctions de formes hiérarchiques utilisées dans la version-p sont de familles polynomiales de type C^0 . Dans la dernière partie, l'équation de Lagrange est appliquée sur l'énergie cinétique et de déformation du système (fluide-plaque) afin d'obtenir les équations du mouvement sous forme matricielle.

5.1 Introduction

L'étude de vibration des plaques nécessite l'utilisation des méthodes approximatives comme les différences finies, les volumes finis et les éléments finis. Dans cette section, nous utilisons la version p de la méthode des éléments finis avec les fonctions des formes polynomiales.

La plaque est modélisée par un élément hiérarchique à deux dimensions (rectangulaire) et à quatre nœuds avec sept degrés de liberté par nœud $(u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y, \phi_x, \phi_y)$, représenté sur la figure (5.1).

5.2 Version-p de la MEF

La méthode-p désigne une stratégie de contrôle de l'erreur qui consiste à faire varier le degré d'interpolation des éléments tout en conservant leur taille. Elle s'oppose à la méthode-h qui consiste à faire varier la taille des éléments tout en conservant leur degré d'interpolation. On parle également de version-h ou -p de la méthode des éléments finis.

Dans l'interpolation de type P les fonctions d'interpolations doivent être construites avec des simples fonctions polynomiales qui ont certaines propriétés d'orthogonalité. Elles doivent aussi être *hiérarchiques*, c'est-à-dire que les fonctions d'interpolation polynomiales de degré p doivent être contenues dans les fonctions d'interpolation polynomiales de degré $p+1$.

Les fonctions des nœuds externes gardent les mêmes valeurs que dans l'interpolation linéaire, mais les fonctions des nœuds des côtés et les fonctions des nœuds internes appelées *modes internes* où *modes bulle*, sont données en fonction de $g_j(x)$ qui est définie en fonction des *Polynômes de Legendre*. Le nombre de nœuds dépend alors du degré j du polynôme.

5.2.1 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre orthogonaux $P_j(x)$ définis entre $[-1,1]$ sont donné par :

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5.1)$$

Ils sont solutions de l'équation différentielle suivante pour $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Les propriétés de polynômes sont données comme suit :

1) Orthogonalité :

$$(P_n, P_j) = \int_{-1}^{+1} P_i(x) P_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq j \\ \frac{2}{2n + 1} & \text{si } n = j \end{cases} \quad (5.3)$$

2) Symétrie :

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad (5.4)$$

3) Formule de récurrence :

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x) \quad n = 1,2,3, \dots \quad (5.5)$$

4) Normalisation :

$$P_n(1) = 1$$

5) Encadrement :

$$|P_n(x)| \leq 1 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

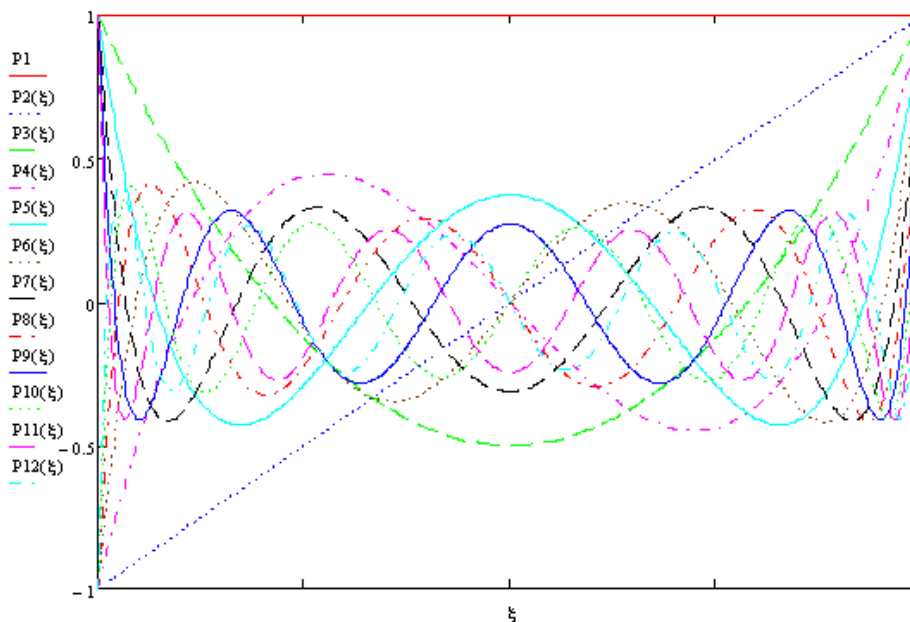


Fig. 5.1 Douze premières fonctions de polynômes de Legendre

5.2.2 Modes-Bulle

A partir des polynômes de Legendre, il est possible de construire un ensemble de modes bulle définis comme suit :

$$g_j(x) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^x P_{j-1}(t) dt \quad j = 1,2,3 \dots \quad (5.6)$$

Avec,

$$\frac{dg_j(x)}{dx} = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} P_{j-1}(x) \quad (5.7)$$

et,

$$g_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} (P_j(x) - P_{j-2}(x)) \quad (5.8)$$

Les propriétés de modes-bulle :

1) Nullité aux extrémités :

$$g_j(-1) = g_j(1) = 0 \quad j = 2, 3, \dots \quad (5.9)$$

2) Orthogonalité des dérivées premières:

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial g_i(x)}{\partial x} \frac{\partial g_j(x)}{\partial x} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.10)$$

3) Symétrie :

$$g_j(-x) = (-1)^j g_j(x) \quad (5.11)$$

4) Nullité des intégrales de degré impair :

$$\int_{-1}^1 g_j(x) dx = 0 \quad j = 3, 5, 7, \dots \quad (5.12)$$

5.3 Fonction de formes hiérarchiques pour un élément rectangulaire

Les fonctions de formes hiérarchiques d'un élément rectangulaire sont définies à partir des polynômes de Legendre et classées en trois catégories : les fonctions aux nœuds externes, de coté et des fonctions interne.

Fonction de forme nodales :

$$\text{Nœud 1 : } N^{n1}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \quad (5.13)$$

$$\text{Nœud 2 : } N^{n2}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \quad (5.14)$$

$$\text{Nœud 3 : } N^{n3}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \quad (5.15)$$

$$\text{Nœud 4 : } N^{n4}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \quad (5.16)$$

Fonctions de forme des côtés :

$$\text{Côté 1 : } N_i^{c1}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)g_i(\xi) \quad i = 3, \dots, p \quad (5.17)$$

$$\text{Côté 2 : } N_i^{c2}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)g_i(\eta) \quad i = 3, \dots, p \quad (5.18)$$

$$\text{Côté 3 : } N_i^{c3}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)g_i(\xi) \quad i = 3, \dots, p \quad (5.19)$$

$$\text{Côté 4 : } N_i^{c4}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)g_i(\eta) \quad i = 3, \dots, p \quad (5.20)$$

Fonctions de forme internes :

$$N_k^{int}(\xi, \eta) = g_i(\xi) g_j(\eta) \quad k = 1, \dots, \frac{1}{2}(p - 2)(p - 3) \quad (5.21)$$

$$\text{Avec : } i, j = 2, \dots, p - 2; i + j = 4, \dots, p \text{ et } p \geq 4 \quad (5.22)$$

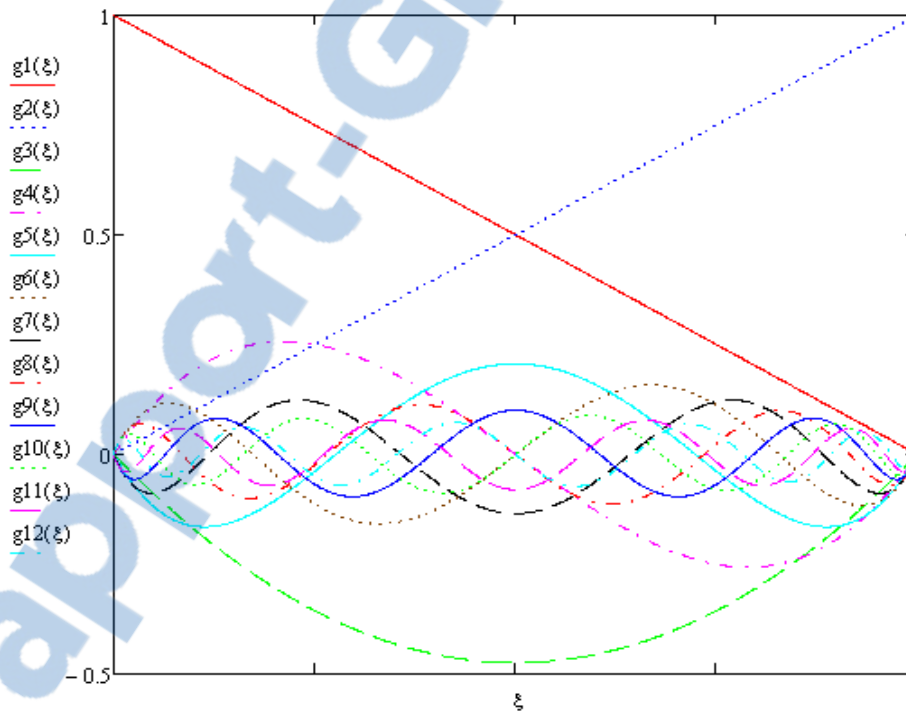


Fig. 5. 2 Douze premières fonctions de forme hiérarchiques polynomiales

Dans notre modèle de la théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT), les rotations ne dépendent pas des déplacements transversaux, donc le type d'élément sélectionné est une continuité C0.

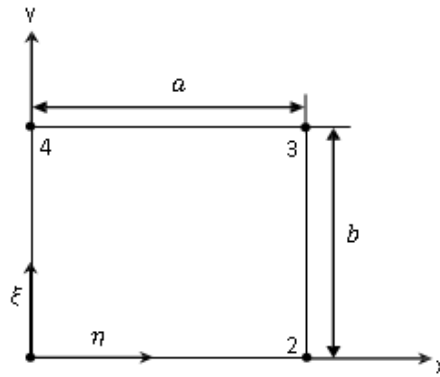


Fig. 5. 3 Élément-p utilisé pour l'analyse des vibrations libres des plaques stratifiées

Pour le déplacement et la rotation de la plaque rectangulaire, nous avons les approximations suivantes:

$$u_0(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^P N_m(\xi, \eta) q_{u_m}(t)$$

$$v_0(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^P N_m(\xi, \eta) q_{v_m}(t)$$

$$w_0(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^P N_m(\xi, \eta) q_{w_m}(t)$$

$$\beta_x(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^P N_m(\xi, \eta) q_{\beta_{x_m}}(t)$$

$$\beta_y(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^P N_m(\xi, \eta) q_{\beta_{y_m}}(t)$$

$$\phi_x(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^P N_m(\xi, \eta) q_{\phi_{x_m}}(t)$$

$$\phi_y(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^P N_m(\xi, \eta) q_{\phi_{y_m}}(t)$$

Où,

$$\xi = (2x/a) \quad \text{et} \quad \eta = (2y/b)$$

Les symboles ξ et η représentent les coordonnées locales et $N_m(\xi, \eta)$ les fonctions de forme polynomiales.

Le déplacement peut être exprimé sous forme de matrice :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \beta_x \\ \beta_y \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = [N]\{q\} \quad (5.23)$$

[N] est la matrice des fonctions de forme donnée par :

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_u] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [N_v] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [N_w] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [N_{\beta_x}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [N_{\beta_y}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [N_{\phi_x}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [N_{\phi_y}] \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Où,

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \\ q_{\beta_x} \\ q_{\beta_y} \\ q_{\phi_x} \\ q_{\phi_y} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

$q_u, q_v, q_w, q_{\beta_x}, q_{\beta_y}, q_{\phi_x}$ et q_{ϕ_y} sont les déplacements généralisés

5.4 Détermination de la matrice masse

L'expression de l'énergie cinétique associée au champ de déplacement de la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) est donnée par :

$$\begin{aligned}
Ec = & \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right. \\
& + 2(z - f(z)) \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial t} \right) \right] \\
& - 2f(z) \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right) \right] \\
& + (f(z)^2 - 2zf(z) + z^2) \left[\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial t} \right)^2 \right] \\
& + 2(f(z)^2 - zf(z)) \left[\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right) \right] \\
& \left. + f(z)^2 \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right) dx dy dz \tag{5.26}
\end{aligned}$$

$[M]$: La matrice masse de l'élément- P , écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
[M] = & \\
& \begin{bmatrix} [M_{uu}] & 0 & 0 & [M_{u\beta_x}] & 0 & [M_{u\phi_x}] & 0 \\ 0 & [M_{vv}] & 0 & 0 & [M_{v\beta_y}] & 0 & [M_{v\phi_y}] \\ 0 & 0 & [M_{ww}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [M_{u\beta_x}]^T & 0 & 0 & [M_{\beta_x\beta_x}] & 0 & [M_{\beta_x\phi_x}] & 0 \\ 0 & [M_{v\beta_y}]^T & 0 & 0 & [M_{\beta_y\beta_y}] & 0 & [M_{\beta_y\phi_y}] \\ [M_{u\phi_x}]^T & 0 & 0 & [M_{\beta_x\phi_x}]^T & 0 & [M_{\phi_x}] & 0 \\ 0 & [M_{v\phi_y}]^T & 0 & 0 & [M_{\beta_y\phi_y}]^T & 0 & [M_{\phi_y}] \end{bmatrix} \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Les composantes de la matrice masse sont données par :

$$[M_{uu}] = \rho A \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

$$[M_{u\beta_x}] = \rho 2(B - D) \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

$$[M_{u\phi_x}] = \rho 2(-D) \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

$$[M_{vv}] = \rho A \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

$$[M_{v\beta_y}] = \rho 2(B - D) \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

$$[M_{v\phi_y}] = \rho 2(-D) \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

$$[M_{ww}] = \rho A \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

$$[M_{\beta_x\beta_x}] = \rho (E - 2F + I) \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

$$[M_{\beta_x\phi_x}] = \rho 2(E - F) \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

$$[M_{\beta_y\beta_y}] = \rho (E - 2F + I) \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

$$[M_{\beta_y\phi_y}] = \rho 2(E - F) \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

$$[M_{\phi_x}] = \rho (E) \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

$$[M_{\phi_y}] = \rho (E) \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta$$

(5.28)

5.5 Détermination de la matrice de rigidité

L'expression de l'énergie de déformation associée au champ de déplacement de la théorie de déformation de Cisaillement d'ordre Supérieur (HSST) est donnée par :

$$Ed = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} A \left[Q_{11}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right]$$

$$+ 2A \left[Q_{12}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& +2(B-D) \left[Q_{11}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] \\
& +2(B-D) \left[Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + Q_{12}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] \\
& +(-2D) \left[Q_{11}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \right. \\
& \quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] \\
& +(-2D) \left[Q_{12}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] \\
& + Q_{22}(\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\
& +2(B-D) \left[Q_{12}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] \\
& +2(B-D) \left[Q_{22}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] \\
& +(-2D) \left[Q_{12}(\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] \\
& +(-2D) \left[Q_{22}(\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Q_{44}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + Q_{55}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + Q_{45}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
& + 2 \left[Q_{45}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} B_x \right) - H Q_{45}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} B_x \right) - H Q_{55}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} B_x \right) + Q_{55}(\xi) \left(B_x \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \\
& + 2 \left[-H Q_{44}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} B_y \right) - H Q_{45}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} B_y \right) + Q_{44}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} B_y \right) + Q_{45}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} B_y \right) \right] \\
& - 2H \left[Q_{45}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \phi_x \right) + Q_{55}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \phi_x \right) \right] \\
& - 2H \left[Q_{44}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \phi_y \right) + Q_{45}(\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \phi_y \right) \right] \\
& + (E - 2F + I) \left[Q_{11}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \right)^2 + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \right] + (L - 2H + A) Q_{55}(\xi) B_x^2 \\
& + 2(E - 2F + I) \left[Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + Q_{12}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \right] + 2(L - 2H + A) Q_{45}(\xi) B_x B_y \\
& + 2(E - F) \left[Q_{11}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \right. \\
& \quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] + 2(L - H) Q_{55}(\xi) B_x \phi_x \\
& + 2(E - F) \left[Q_{12}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] + 2(L - H) Q_{45}(\xi) B_x \phi_y \\
& + (E - 2F + I) \left[Q_{22}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \right)^2 + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \right] + (L - 2H + A) Q_{44}(\xi) B_y^2 \\
& + 2(E - F) \left[Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + Q_{12}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] + 2(L - H) Q_{45}(\xi) B_y \phi_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+2(E - F) \left[Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + Q_{22}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right. \\
 &\quad \left. + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] + 2(L - H) Q_{44}(\xi) B_y \phi_y \\
 &+E \left[Q_{11}(\xi) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] \\
 &\quad + L Q_{55}(\xi) \phi_x^2 \\
 &+2E \left[Q_{12}(\xi) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + Q_{13}(\xi) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] \\
 &\quad + 2L Q_{45}(\xi) \phi_x \phi_y \\
 &+E \left[Q_{22}(\xi) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 + Q_{33}(\xi) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + Q_{23}(\xi) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] \\
 &\quad + L Q_{44}(\xi) \phi_y^2) dx dy
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

[K] : La matrice de rigidité de l'élément-P est exprimée comme suit :

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & 0 & [K_{u\beta_x}] & [K_{u\beta_y}] & [K_{u\phi_x}] & [K_{u\phi_y}] \\ [K_{uv}]^T & [K_{vv}] & 0 & [K_{v\beta_x}] & [K_{v\beta_y}] & [K_{v\phi_x}] & [K_{v\phi_y}] \\ 0 & 0 & [K_{ww}] & [K_{w\beta_x}] & [K_{w\beta_y}] & [K_{w\phi_x}] & [K_{w\phi_y}] \\ [K_{u\beta_x}]^T & [K_{v\beta_x}]^T & [K_{w\beta_x}]^T & [K_{\beta_x\beta_x}] & [K_{\beta_x\beta_y}] & [K_{\beta_x\phi_x}] & [K_{\beta_x\phi_y}] \\ [K_{u\beta_y}]^T & [K_{v\beta_y}]^T & [K_{w\beta_y}]^T & [K_{\beta_x\beta_y}] & [K_{\beta_y\beta_y}] & [K_{\beta_y\phi_x}] & [M_{\beta_y\phi_y}] \\ [K_{u\phi_x}]^T & [K_{v\phi_x}]^T & [K_{w\phi_x}]^T & [K_{\beta_x\phi_x}] & [K_{\beta_y\phi_x}] & [K_{\phi_x}] & [K_{\phi_x\phi_y}] \\ [K_{u\phi_y}]^T & [K_{v\phi_y}]^T & [K_{w\phi_y}]^T & [K_{\beta_x\phi_y}] & [K_{\beta_y\phi_y}] & [K_{\phi_x\phi_y}] & [M_{\phi_y}] \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

Les composantes de la matrice de rigidité sont données par :

$$\begin{aligned}
 [K_{uu}] = A \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 &\left[\frac{b}{a} Q_{11}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + \frac{a}{b} Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right. \\
 &\left. + Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

$$[K_{uv}] = 2A \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[Q_{12}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + \frac{b}{a} Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + \frac{a}{b} Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta$$

$$[K_{u\beta_x}] = 2(B-D) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{b}{a} Q_{11}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + \frac{a}{b} Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta$$

$$[K_{u\beta_y}] = 2(B-D) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{b}{a} Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + Q_{12}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + \frac{a}{b} Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta$$

$$[K_{u\phi_x}] = (-2D) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{b}{a} Q_{11}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + \frac{a}{b} Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta$$

$$[K_{u\phi_y}] = (-2D) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[Q_{12}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + \frac{b}{a} Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + \frac{a}{b} Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta$$

$$[K_{vv}] = A \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{a}{b} Q_{22}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + \frac{b}{a} Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta$$

$$[K_{v\beta_x}] = 2(B-D) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[Q_{12}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + \frac{b}{a} Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + \frac{a}{b} Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned} [K_{v\beta_y}] = & 2(B - D) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{a}{b} Q_{22}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N]}{\partial\eta} + Q_{23}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N]}{\partial\eta} \right. \\ & \left. + Q_{23}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N]}{\partial\xi} + \frac{b}{a} Q_{33}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N]}{\partial\xi} \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_{v\phi_x}] = & (-2D) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[Q_{12}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N]}{\partial\xi} + \frac{b}{a} Q_{13}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N]}{\partial\xi} \right. \\ & \left. + \frac{a}{b} Q_{23}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N]}{\partial\eta} + Q_{33}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N]}{\partial\eta} \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_{v\phi_y}] = & (-2D) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{a}{b} Q_{22}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N]}{\partial\eta} + Q_{23}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N]}{\partial\xi} + Q_{23}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N]}{\partial\eta} \right. \\ & \left. + \frac{b}{a} Q_{33}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N]}{\partial\xi} \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_{ww}] = & A \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{a}{b} Q_{44}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N]}{\partial\eta} + \frac{b}{a} Q_{55}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N]}{\partial\xi} + Q_{45}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} \frac{\partial[N]}{\partial\eta} \right. \\ & \left. + Q_{45}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} \frac{\partial[N]}{\partial\xi} \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_{w\beta_x}] = & 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[Q_{45}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} [N] + Q_{55}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} [N] - HQ_{45}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} [N] \right. \\ & \left. - HQ_{55}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} [N] \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_{w\beta_y}] = & 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[Q_{44}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} [N] + Q_{45}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} [N] - HQ_{44}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} [N] \right. \\ & \left. - HQ_{45}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} [N] \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$[K_{w\phi_x}] = (-2H) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[Q_{45}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} [N] + Q_{55}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} [N] \right] d\xi d\eta$$

$$[K_{w\phi_y}] = (-2H) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[Q_{44}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\eta} [N] + Q_{45}(\xi) \frac{\partial[N]^T}{\partial\xi} [N] \right] d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned}
[K_{\beta_x \beta_x}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(E - 2F + I) \left(\frac{b}{a} Q_{11}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a}{b} Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{ab}{2} (L - 2H + A) Q_{55}(\xi) [N]^T [N] \right] d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\beta_x \beta_y}] &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(E - 2F + I) \left(\frac{b}{a} Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + Q_{12}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a}{b} Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{ab}{2} (L - 2H + A) Q_{45}(\xi) [N]^T [N] \right] d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\beta_x \phi_x}] &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(E - F) \left(\frac{b}{a} Q_{11}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + \frac{a}{b} Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{ab}{2} (L - H) Q_{55}(\xi) [N]^T [N] \right] d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\beta_x \phi_y}] &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(E - F) \left(Q_{12}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + \frac{b}{a} Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a}{b} Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{ab}{2} (L - H) Q_{45}(\xi) [N]^T [N] \right] d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\beta_y \beta_y}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(E - 2F + I) \left(\frac{a}{b} Q_{22}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + \frac{b}{a} Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{ab}{2} (L - 2H + A) Q_{44}(\xi) [N]^T [N] \right] d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{\beta_y \phi_x}] &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(E - F) \left(\frac{b}{a} Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + Q_{12}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{a}{b} Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a b}{2} (L - H) Q_{45}(\xi) [N]^T [N] \right] d\xi d\eta \\
 \\
 [K_{\beta_y \phi_y}] &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(E - F) \left(Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + \frac{a}{b} Q_{22}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + \frac{b}{a} Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a b}{2} (L - H) Q_{44}(\xi) [N]^T [N] \right] d\xi d\eta \\
 \\
 [K_{\phi_x}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(E) \left(\frac{b}{a} Q_{11}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + \frac{a}{b} Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right) + \frac{a b}{2} (L) Q_{55}(\xi) [N]^T [N] \right] d\xi d\eta \\
 \\
 [K_{\phi_x \phi_y}] &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(E) \left(Q_{12}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + \frac{b}{a} Q_{13}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{a}{b} Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a b}{2} (L) Q_{45}(\xi) [N]^T [N] \right] d\xi d\eta \\
 \\
 [K_{\phi_y}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(E) \left(\frac{a}{b} Q_{22}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} + \frac{b}{a} Q_{33}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} + Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \xi} \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + Q_{23}(\xi) \frac{\partial [N]^T}{\partial \eta} \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \right) + \frac{a b}{2} (L) Q_{44}(\xi) [N]^T [N] \right] d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

(5.32)

Avec,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz B = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz D = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z) dz E = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z)^2 dz F = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z f(z) dz H \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz L = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial f(z)^2}{\partial z} dz S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz \end{aligned}$$

5.6 Modélisation du fluide par un élément-p

La méthode de l'élément fini hiérarchique est utilisée pour calculer la pression de fluide exercée sur la plaque par un vecteur de force qui peut être exprimée par la relation suivante :

$$\{F_P\} = \int [N]^T \{P\} dx dy \quad (5.33)$$

[N] : La matrice de fonctions de forme hiérarchique

{P} : Le vecteur de la pression appliquée par le fluide sur la plaque

La pression dynamique est définie comme étant la masse ajoutée par la relation suivante :

$$[M_f] = Z_{fi} \frac{a b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] d\xi d\eta \quad (5.34)$$

Z_{fi} : Le coefficient dépend de conditions à l'interface fluide- plaque

5.7 Equations du mouvement de la plaque CSRV

L'équation de Lagrange est utilisée pour le cas de la vibration libre :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial (\dot{q}_i)} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial (q_i)} + \frac{\partial E_d}{\partial (q_i)} = 0 \quad (5.35)$$

L'équation du mouvement de la plaque possède la forme suivante :

$$[M_s] \{\ddot{q}_i\} + [K_s] \{q_i\} = 0 \quad (5.36)$$

5.8 Equations du mouvement de couplage fluide-plaque

L'équation du mouvement d'une plaque rectangulaire immergée dans le liquide sous forme de matrice peut être représentée comme suit :

$$[[M_s] - [M_f]] \{\ddot{q}_i\} + [K_s] \{q_i\} = 0 \quad (5.37)$$

Chapitre 6

Organisation de la programmation

Dans le présent chapitre, les étapes nécessaires de l'élaboration du programme de calcul sont élaborées. Le code de calcul est écrit en langage Matchad, il traduit la théorie HCDT C^0 et la version-p de la méthode des éléments finis. Ce dernier permettra de déterminer les fréquences et les modes propres d'une plaque composite à rigidité variable, immergée dans un fluide suivant les différentes conditions aux limites et les différents paramètres physiques et géométriques.

6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, une formulation de la version-p de la méthode des éléments finis (MEF) appliquée à l'étude dynamique d'une plaque CSRV immergée d'un fluide a été faite. Un programme écrit sous Matchad est élaboré, il est réparti en deux parties, dont sa première est destinée à l'analyse des vibrations des plaques stratifiées composites à rigidité variable et sa deuxième partie est utilisée pour l'analyse des interactions fluide-structure. Le matériel utilisé pour la programmation est un micro-ordinateur avec un processeur Core Duo et de 2Go de la capacité de RAM.

Ce programme comporte :

- Fichiers d'entrée.
- Programme de calcul.
- Fichier de sortie.

6.2 Organisation de la programmation

La figure (6.1) illustre les différentes parties du programme dédiées pour le calcul des valeurs propres et les vecteurs propres du comportement du système fluide-structure.

L'algorithme principal est composé des étapes suivantes :

- Lecture des données et de tous les paramètres physiques et géométriques nécessaires de la plaque et du fluide.
- Les paramètres de la MEF.
- Intégration numérique.
- Calcul des matrices de rigidité et de la masse de structure : $[M_s]$, $[K_s]$.
- Calcul de la matrices de masse ajoutée du fluide : $[M_f]$.
- Couplage fluide-structure.
- Applications des conditions aux limites.
- Formulation de la matrice $[A]$.
- Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de l'équation de mouvement système fluide structure.

6.2.1 Fichier des données

L'analyse de la vibration libre d'une plaque CSRV immergée dans un fluide nécessite l'introduction des données. Deux fichiers de données sont élaborés : Un fichier dans lequel toutes les données nécessaires pour le calcul des valeurs propres et vecteurs propres (Paramètres physiques et géométriques de la plaque ainsi que du fluide, paramètres de la version p de la méthode des éléments finis MEF) et un fichier contenant les valeurs des intégrales numériques pour déterminer la matrice de masse et de rigidité du fluide et de la plaque.

6.2.1.1 Paramètres de la structure, du fluide et de la version p de la MEF

Les paramètres physiques et géométriques de la structure et du fluide, sont résumées comme suit :

- Modules d'élasticité E_1 , E_2 .
- Modules de cisaillement $G_{1.2}$, $G_{2.3}$, $G_{1.3}$.
- Coefficients de poisson $\nu_{1.2}$, $\nu_{2.1}$.
- Densité ρ ainsi que l'angle d'orientation des fibres T_0 et T_1 .

- Le nombre des couches n .
- L'épaisseur de la plaque h .
- Longueur de la plaque a .
- Largeur de la plaque b .
- Masse volumique du fluide ρ_f .
- Niveau du fluide h_f .

Les paramètres de la méthode des éléments finis hiérarchique :

- Fonctions de forme de la version- p de la méthode des éléments finis $N(x,y)$.
- Degré du polynôme des fonctions de forme p .

6.2.1.2 Calcul des intégrales

Les intégrales sont déterminées par un calcul symbolique à l'aide de logiciel MATCHAD afin de déterminer les matrices de rigidité, les matrices masse ($[M_s]$, $[K_s]$, $[M_f]$) de la structure et du fluide qui sont stockées dans des fichiers des données.

6.2.2 Programme de calcul

Le programme élaboré suivant l'organigramme de la figure (6.1), permet de déterminer les fréquences propres de la plaque CSRV en interaction avec le fluide à partir des fichiers d'entrées.

6.2.2.1 Calcul des matrices de rigidité, masse (fluide-plaque)

Le sous-programme est réalisé pour calculer la matrice masse, la matrice de rigidité de la structure et la matrice masse du fluide.

$[M_s]$: Matrice masse de la plaque.

$[M_f]$: Matrice masse du fluide.

$[K_s]$: Matrice de rigidité de la plaque.

6.2.2.2 Introduction des conditions aux limites

L'application des conditions aux limites par l'élimination des lignes et des colonnes dans la matrice masse et de rigidité du système fluide-plaque correspond aux déplacements fixés. La structure est modélisée par la théorie HSDT C0 qui contient sept (07) degrés de liberté par nœud. Chaque degré de liberté des nœuds ou des bords peut prendre deux valeurs : 1 ou 0. La valeur 1 signifie qu'il y'a un déplacement et 0 signifié que le degré de liberté est fixe.

Les degrés de libertés de la théorie HSDT C0 sont :

- u_0 : Déplacement suivant l'axe x.
- v_0 : Déplacement suivant l'axe y.
- w_0 : Déplacement suivant l'axe z.
- β_x : Rotation de la section droite autour de l'axe x.
- β_y : Rotation de la section droite autour de l'axe y.
- ϕ_x : fonction de gauchissement suivant l'axe x.
- ϕ_y : fonction de gauchissement suivant l'axe y.

6.2.2.3 Calcul des fréquences propres

Une fois les matrices de rigidité et de masse formées après l'application des conditions aux limites, les paramètres de fréquence sont obtenues en résolvant l'équation suivant :

$$\left[[M_s] - [M_f] \right] \{\ddot{q}\} + [K_s] \{q\} = 0 \quad (6.1)$$

On écrit la solution générale de l'équation (6.1) sous la forme :

$$\{q\} = \{Q\} \cdot \exp(\lambda t) \quad (6.2)$$

Avec,

$$\lambda = i \omega$$

λ : est la solution de l'équation suivante :

$$\left([K_s] + \lambda \left[[M_s] - [M_f] \right] \right) \{Q\} = 0 \quad (6.3)$$

Une transformation du problème (6.3) en un problème standard est réalisée :

$$([A] - \omega^2 [I])\{Q\} = 0 \quad (6.4)$$

ω : Les fréquences propres.

$\{Q\}$: Les vecteurs propres.

6.2.2.4 Calcul de la matrice [A]

Pour déterminer les valeurs et les vecteurs propres on passe par les transformations suivantes :

La matrice masse $[M_s] - [M_f]$ est une matrice symétrique donc la matrice $[A]$ peut être décomposée en utilisant la méthode de cholesky de la manière suivante :

$$[M_s] - [M_f] = [L][L]^T \quad (6.5)$$

Où, $[L]$ est la matrice triangulaire inférieure.

En substituant (6.5) dans (6.4) :

$$([L]^{-T}[L]^{-1}[K] - \omega^2 [I]\{Q\}) = 0 \quad (6.6)$$

$[I]$ est la matrice-identité.

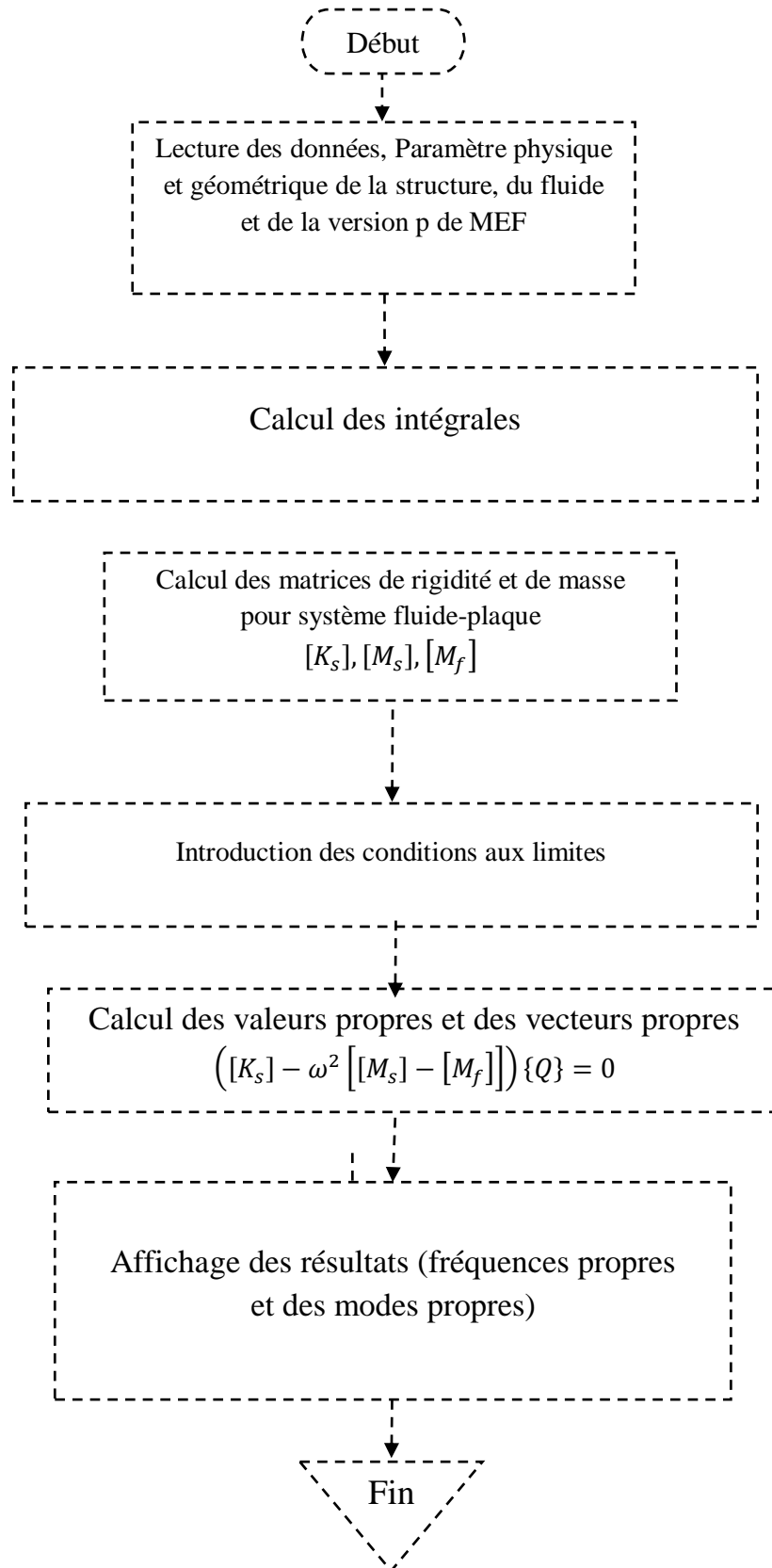
et,

$$[A] = [L]^{-T}[L]^{-1}[K] \quad (6.7)$$

La matrice $[A]$ est une matrice symétrique, donc la méthode **QR** peut être appliquée.

6.2.3 Fichier de sortie

Les fréquences et les modes propres de la plaque composite à rigidité variable (CSRV) en interaction avec le fluide sont obtenus par le programme et sont stockés dans un fichier de sortie.

**Fig. 6. 1** Organigramme global du programme

Chapitre 7

Résultats et interprétations

Dans ce chapitre, nous exposons les résultats obtenus par notre programme avec la version P de la méthode des éléments finis, basée sur la théorie d'ordre supérieure HSDT-C0 afin d'obtenir les fréquences propres. En premier lieu, une étude de convergence et de comparaison est faite avec différentes théories et différentes conditions aux limites pour les plaques isotropes et composites à rigidité constante (fibres rectilignes). La deuxième partie est consacrée à la modélisation des plaques rectangulaires composites stratifiées constituées des fibres curvilignes (hyperboliques et paraboliques) symétriques et antisymétriques avec différents angles T_0 et T_1 . La troisième partie est consacrée à la vibration des plaques composites à rigidité variable immergées dans un fluide avec les différentes profondeurs d'immersions. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions obtenues analytiquement et celles obtenues par d'autres modèles d'éléments finis de la littérature.

7.1 Convergence et validation

Afin d'assurer la précision des résultats de notre modèle (HSDT-C⁰) basé sur un élément-p rectangulaire. La convergence et la précision souhaitées sont obtenues en augmentant l'ordre polynomial des fonctions de forme hiérarchiques. L'étude de convergence et la validation sont faites avec les cas suivants, plaque stratifiée à rigidité constante (CSRC) et plaque stratifiée composite à rigidité variable (CSRV). Après chaque comparaison, une étude paramétrique est réalisée pour analyser le comportement vibratoire des plaques CSRV avec des fibres paraboliques et hyperboliques, tout en employant les différents paramètres. Dans le cas de

l'interaction fluide-structure, une étude de validation des plaques isotropes, composites couplées avec le fluide est menée. Nous avons examiné l'effet vibratoire des plaques CSRV couplés avec le fluide, en utilisant des fibres hyperboliques. Ce dernier est réalisé avec différents cas de submersion. Les fréquences propres sont déterminées avec différents paramètres physiques et géométriques. Les résultats obtenus avec le présent modèle sont comparés avec les solutions disponibles dans la littérature.

7.1.1 Plaques composites stratifiées à rigidité constante (CSRC)

Dans la première partie, une étude de convergence et de comparaison est réalisée pour une plaque carrée CSRC. Deux configurations de stratifié symétrique (0/90/90/0) et antisymétrique (0/90/0) sont considérées. Les paramètres de fréquence Ω sont déterminés en utilisant les conditions aux limites, encadrée et simplement appuyée, avec deux rapports d'épaisseur de $a/h=5$ et $b/h=10$. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions trouvées dans la littérature et qui traitent le même problème avec différentes théories.

Le tableau (7.1) présente la variation des valeurs des cinq premiers paramètres d'une plaque $\Omega = (\omega a^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$ rectangulaire à quatre couches avec $a/h=10$, $G_{12}=7.17GPa$, $G_{13}=7.17GPa$, $G_{23}=2.87GPa$, $\nu_{12}=0.28$, $E_1=181GPa$, $E_2=10.3GPa$. Les résultats sont comparés avec la théorie tridimensionnelle-3D (Kulkarni et al. 2008), les modèles d'ordre élevé HSDT (Neeraj Grover et al. 2013) et TOT (Kulkarni et al. 2008). Ils montrent une bonne convergence avec ces solutions.

Les tableaux (7.2-4) présentent la convergence des cinq premiers paramètres de fréquence

$$\Omega = (\omega b^2/\pi^2) \sqrt{\frac{\rho h}{E_2 h^3 / 12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}}$$

d'une plaque carrée stratifiée avec $b/h=5$, $b/h=10$, $E_1/E_2=40$, $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\nu_{12}=0.25$, $\rho=1$ et sont comparés avec Ferreira et al. (2006).

D'après les résultats des tableaux (7.1-4), on remarque que le modèle utilisé donne des résultats très satisfaisants en termes de rapidité et de convergence, où les résultats sont en excellent accord avec les solutions disponibles dans la littérature (Erreur relative de 10^{-3}).

Tableau 7. 1 Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences dans le cas d'une plaque composite stratifiée symétrique, simplement appuyée. (AAAA)

Angle d'orientation	p	Mode				
		1	2	3	4	5
(0°/90°/90°/0°)	4	11.6867	24.5740	31.8227	38.8720	100.0478
	8	11.3912	21.3566	28.8637	34.7224	37.9510
	9	11.3912	21.3565	28.8636	34.7222	37.7944
	10	11.3912	21.3564	28.8635	34.7221	37.7906
	11	11.3912	21.3564	28.8635	34.7221	37.7891
	12	11.3912	21.3564	28.8635	34.7221	37.7890
	(Neeraj Grover et <i>al.</i> 2013)	11.3462	21.2816	28.6483	34.4962	37.6610
	(Kulkarni et <i>al.</i> 2008)	11.2981	21.2529	28.3362	34.2444	37.5751
	(Kulkarni et <i>al.</i> 2008)	11.2857	21.3772	28.3239	34.1788	38.2535
	(Kulkarni et <i>al.</i> 2008)	11.4121	21.3602	28.9828	34.7299	37.8238

Tableau 7. 2 Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences dans le cas d'une plaque composite stratifiée antisymétrique, encastrée, $a/b=1$

Angle d'orientation	P	Mode				
		1	2	3	4	5
(0°/90°/0°)	4	4.8705	8.5402	8.7822	11.2461	21.2017
	6	4.5156	6.5395	7.8210	8.0432	9.3729
	8	4.5144	6.5105	8.0364	9.3487	9.4272
	10	4.5141	6.508	8.0361	9.347	9.394
	11	4.5141	6.508	8.0361	9.3469	9.3929
	12	4.5141	6.508	8.0361	9.3469	9.3929
	FSDT (Ferreira et <i>al.</i> 2006)	4.5141	6.508	8.0361	9.3468	9.3929

Tableau 7. 3 Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences dans le cas d'une plaque composite stratifiée antisymétrique, encastrée. $a/b=1$

Angle d'orientation	P	Mode				
		1	2	3	4	5
(0°/90°/0°)	4	8.7653	16.7753	16.9107	22.1515	42.4035
	6	7.4762	10.3386	14.2743	16.0554	20.1736
	8	7.4736	10.2642	14.2455	15.0463	15.9884
	10	7.4729	10.2565	14.2442	14.9464	15.9822
	11	7.4729	10.2552	14.2441	14.9387	15.9813
	12	7.4728	10.2549	14.2441	14.937	15.9811
	FSDT (Ferreira et al. 2006)	7.4727	10.2544	14.2440	14.9363	15.9807

Tableau 7. 4 Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences dans le cas d'une plaque composite stratifiée antisymétrique, encastrée. $a/b=2$

Angle d'orientation	P	Mode				
		1	2	3	4	5
(0°/90°/90°/0°)	4	3.4404	4.9952	7.8118	8.6139	15.0427
	6	2.9705	4.2652	5.5783	6.3974	6.5834
	8	2.9686	4.2582	5.544	6.0377	6.3649
	10	2.9682	4.2577	5.5413	6.0229	6.3625
	11	2.9682	4.2577	5.5412	6.0227	6.3623
	12	2.9682	4.2577	5.5411	6.0227	6.3623
	FSDT (Ferreira et al. 2006)	2.9679	4.2575	5.5406	6.0225	6.362

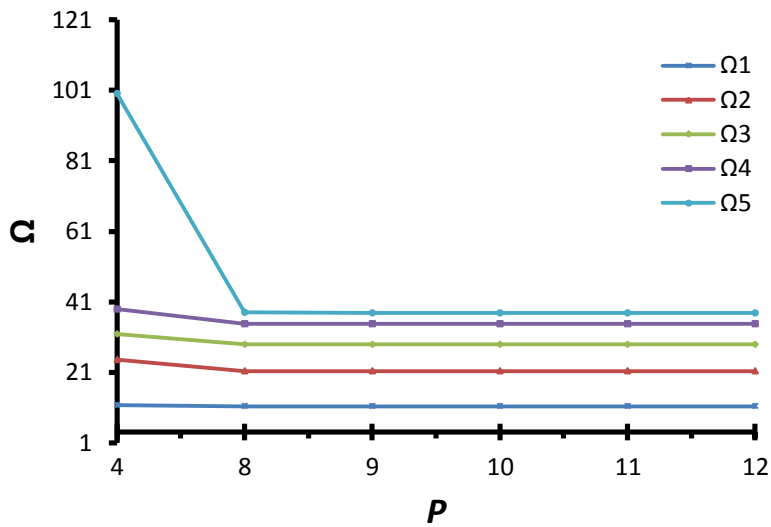


Fig. 7. 1 Convergence des cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque rectangulaire stratifiée symétrique à quatre couches, simplement appuyée ($a/h = 10$)

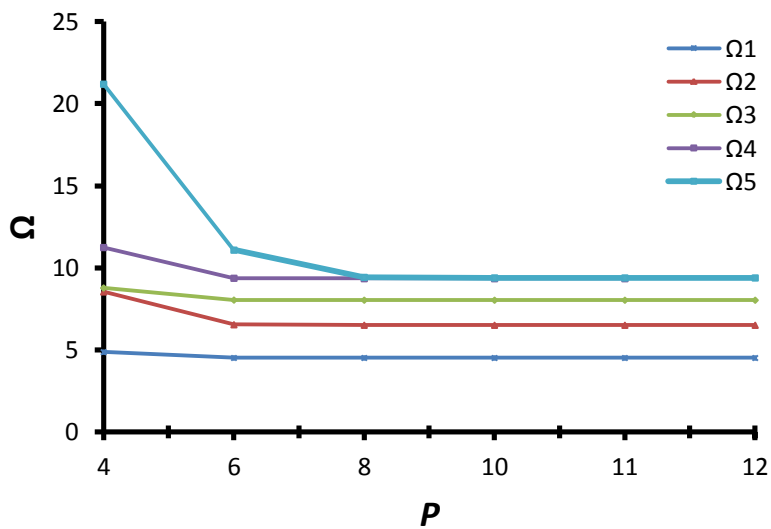


Fig. 7. 2 Convergence des cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque rectangulaire stratifiée antisymétrique à trois couches, encadrée ($a/h = 5$)

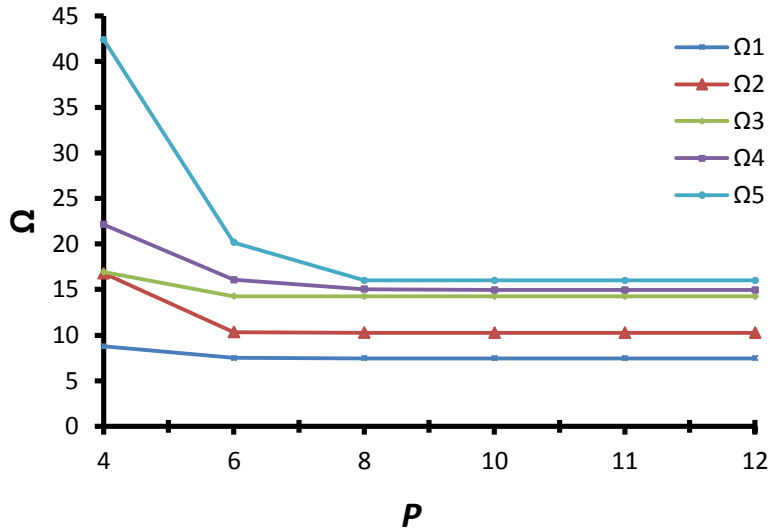


Fig. 7. 3 Convergence des cinq premiers paramètres de fréquence d’une plaque rectangulaire stratifiée antisymétrique à trois couches, encastrée ($a/h = 10$)

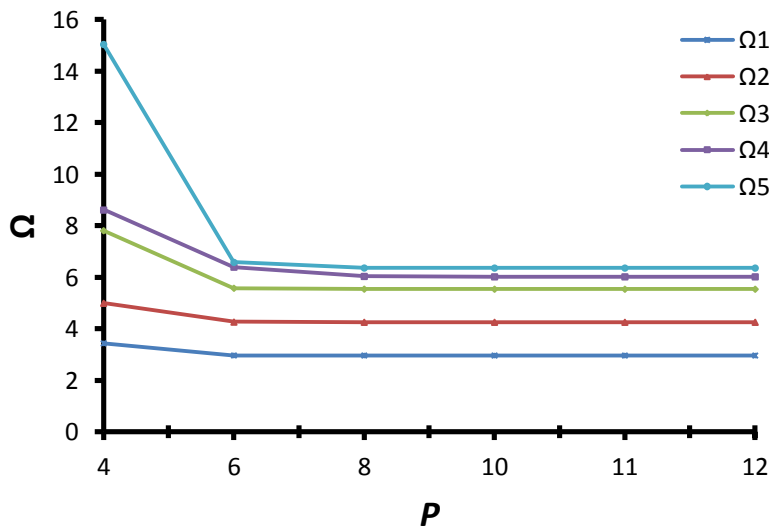


Fig. 7. 4 Convergence des cinq premiers paramètres de fréquence d’une plaque rectangulaire stratifiée symétrique à quatre couches, encastrée ($a/h = 5$)

Les figures (7.1-4) montrent clairement que les résultats convergent rapidement avec un degré de polynôme d'interpolation P égale à 12.

Afin de bien justifier l'exactitude de notre modèle, une série de comparaison avec les solutions disponibles est présentée dans la partie suivante.

On considère une plaque stratifiée antisymétrique carrée simplement appuyée avec différents rapports d'épaisseur sur la longueur $a/h=(2, 4, 10, 20, 50, 100)$ et de $E_1/E_2=(3, 10, 20, 30, 40)$ récapitulés dans les tableaux (7.5-7). Quatre types de stratifications croisées, dont lesquelles, deux couches $(0/90)_1$ jusqu'à dix couches $(0/90)_5$ avec un autre type d'orientation $(45/-45)$, ont été étudiés. Le paramètre de fréquence utilisé est : $\Omega = (\omega b^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$.

Les résultats obtenus sont comparés aux solutions exactes de Noor (1973) et avec la solution des éléments finis TSDT (Reddy, 1997), FSDT (Whitney et al. 1970), HSDT (Swaminathan et al. 2008) et les modèles raffinés RT1 et RT2 (Thai et al. 2010). Les propriétés mécaniques du matériau utilisé sont : $G_{12}/E_2=0.6$, $G_{13}/E_2=0.6$, $G_{23}/E_2=0.5$, $\nu_{12}=0.25$.

Les résultats obtenus sont en concordance avec les solutions existantes dans la littérature. On remarque que les résultats des solutions de TSDT et de RT1 sont identiques, alors que les présents résultats sont identiques avec le modèle RT2.

Tableau 7. 5 Comparaison de paramètres de fréquence fondamentale pour une plaque carrée stratifiée antisymétrique à plusieurs couches, simplement appuyée AAAA avec $a/h=5$

Couches	Méthode	E_1/E_2				
		3	10	20	30	40
$(0^\circ/90^\circ)_1$	Exc. (Noor 1973)	6.2578	6.9845	7.6745	8.1763	8.5625
	TSDT (Reddy, 1997)	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	FSDT (Whitney et al 1970)	6.2085	6.9392	7.7060	8.3211	8.8333
	RT1 (Thai et al 2010)	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	RT2 (Thai et al 2010)	6.2167	6.9836	7.8011	8.4646	9.0227
	Présente	6.2167	6.9836	7.8011	8.4646	9.0227
$(0^\circ/90^\circ)_2$	Exc. (Noor 1973)	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6789
	TSDT (Reddy, 1997)	6.5008	8.1854	9.6265	10.5348	11.1716
	FSDT (Whitney et al 1970)	6.5043	8.2246	9.6885	10.6198	11.2708
	RT1 (Thai et al 2010)	6.5008	8.1854	9.6265	10.5348	11.1716
	RT2 (Thai et al 2010)	6.5008	8.1949	9.6252	10.5334	11.1705
	Présente	6.5008	8.1949	9.6252	10.5334	11.1705
$(0^\circ/90^\circ)_3$	Exc. (Noor 1973)	6.6100	8.4143	9.8398	10.6958	11.2728
	TSDT (Reddy, 1997)	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
	FSDT (Whitney et al 1970)	6.5569	8.4183	9.9427	10.8828	11.5264
	RT1 (Thai et al 2010)	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
	RT1 (Thai et al 2010)	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5009
	Présente	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5009
$(0^\circ/90^\circ)_5$	Exc. (Noor 1973)	6.6458	8.5625	10.0843	10.0027	11.6245
	TSDT (Reddy, 1997)	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	FSDT (Whitney et al 1970)	6.5837	8.5132	10.0638	11.0058	11.6444
	RT1 (Thai et al 2010)	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	RT2 (Thai et al 2010)	6.5842	8.5126	10.0671	11.0186	11.6705
	Présente	6.5842	8.5126	10.0671	11.0186	11.6705

Tableau 7. 6 Comparaison de paramètres de fréquence fondamental pour une plaque carrée stratifiée antisymétrique à plusieurs couches, simplement appuyée AAAA avec $E_1/E_2=40$

Couches	Méthode	a/h					
		2	4	10	20	50	100
$(0^\circ/90^\circ)_1$	CLPT (Thai et al 2010)	8.6067	10.4244	11.1537	11.2693	11.3023	11.3070
	TSDT (Reddy, 1997)	5.7170	8.3546	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
	FSDT (Whitney et al 1970)	5.2104	8.0349	10.4731	11.0779	11.2705	11.2990
	RT1 (Thai et al 2010)	5.7170	8.3546	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
	RT2 (Thai et al 2010)	5.5017	8.2651	10.5480	11.0997	11.2742	11.2999
	Présente	5.5017	8.2651	10.5480	11.0997	11.2742	11.2999
$(0^\circ/90^\circ)_2$	CLPT (Thai et al 2010)	14.1036	16.3395	17.1448	17.2682	17.3032	17.3082
	TSDT (Reddy, 1997)	5.7546	9.7357	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
	FSDT (Whitney et al 1970)	5.6656	9.8148	14.9214	16.6008	17.1899	17.2796
	RT1 (Thai et al 2010)	5.7546	9.7357	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
	RT2 (Thai et al 2010)	5.7240	9.7357	14.8433	16.5719	17.1847	17.2783
	Présente	5.7240	9.7357	14.8433	16.5719	17.1847	17.2783
$(0^\circ/90^\circ)_3$	CLPT (Thai et al 2010)	15.0895	17.2676	18.0461	18.1652	18.1990	18.2038
	TSDT (Reddy, 1997)	5.8741	9.9878	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
	FSDT (Whitney et al 1970)	5.6992	9.9852	15.5010	17.3926	18.0673	18.1706
	RT1 (Thai et al 2010)	5.8741	9.9878	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
	RT2 (Thai et al 2010)	5.8180	9.9855	15.4627	17.3769	18.0643	18.1698
	Présente	5.8180	9.9855	15.4627	17.3769	18.0643	18.1698
$(0^\circ/90^\circ)_5$	CLPT (Thai et al 2010)	15.6064	17.7314	18.4916	18.6080	18.6410	18.6457
	TSDT (Reddy, 1997)	5.9524	10.1241	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
	FSDT (Whitney et al 1970)	5.7140	10.062	15.7790	17.7800	18.4995	18.6100
	RT1 (Thai et al 2010)	5.9524	10.1241	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
	RT2 (Thai et al 2010)	5.8721	10.1167	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
	Présente	5.8721	10.1167	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097

Tableau 7.7 Comparaison de paramètres de fréquence fondamentale pour une plaque carrée stratifiée antisymétrique à deux couches $(45^\circ/-45^\circ)_2$, simplement appuyée AAAA.

Couches	E_1/E_2	Méthode	a/h				
			4	10	20	50	100
$(45^\circ/-45^\circ)_2$	3	CLPT (Thai et al 2010)	6.9251	7.2699	7.3228	7.3378	7.3400
		HSDT(Swaminathan et al. 2008)	6.1223	7.1056	7.3001	7.3583	7.3666
		TSDT (Reddy, 1997)	6.0861	7.0739	7.2705	7.3290	7.3378
		FSDT (Whitney et al 1970)	6.0665	7.0700	7.2694	7.3291	7.3378
		RT1 (Thai et al 2010)	6.0861	7.0739	7.2705	7.3290	7.3378
		RT2 (Thai et al 2010)	6.0852	7.0738	7.2704	7.3293	7.3378
		Présente	6.0852	7.0738	7.2704	7.3293	7.3378
	10	CLPT (Thai et al 2010)	8.7950	9.3444	9.4304	9.4548	9.4583
		HSDT (Swaminathan et al. 2008)	7.2647	8.9893	9.3265	9.4377	9.5123
		TSDT (Reddy, 1997)	7.3470	8.9660	9.3266	9.4377	9.4540
		FSDT (Whitney et al 1970)	7.2169	8.9324	9.3173	9.4362	9.4537
		RT1 (Thai et al 2010)	7.3470	8.9660	9.3266	9.4377	9.4540
		RT2 (Thai et al 2010)	7.3259	8.9621	9.3255	9.4376	9.4540
		Présente	7.3259	8.9621	9.3255	9.4376	9.4540
	20	CLPT (Thai et al 2010)	10.6314	11.3406	11.4525	11.4844	11.4889
HSDT (Swaminathan et al. 2008)		8.0490	10.6412	11.2975	11.5074	11.5385	
TSDT (Reddy, 1997)		8.4152	10.7151	11.2772	11.4553	11.4816	
FSDT (Whitney et al 1970)		8.1185	10.6265	11.2517	11.4511	11.4806	
RT1 (Thai et al 2010)		8.4152	10.7151	11.2772	11.4553	11.4816	
RT2 (Thai et al 2010)		8.3396	10.6985	11.2727	11.4546	11.4815	
Présente		8.3396	10.6985	11.2727	11.4546	11.4815	
30	CLPT (Thai et al 2010)	12.1586	12.9888	13.1203	13.1577	13.1631	
	HSDT(Swaminathan et al. 2008)	8.5212	11.8926	12.8422	13.1566	13.2035	
	TSDT (Reddy, 1997)	9.1752	12.0971	12.8659	13.1153	13.1524	
	FSDT (Whitney et al 1970)	8.7213	11.9456	12.8208	13.1077	13.1505	
	RT1 (Thai et al 2010)	9.1752	12.0971	12.8659	13.1153	13.1524	
	RT2 (Thai et al 2010)	9.0342	12.0625	12.8563	13.1138	13.1520	
Présente	9.0342	12.0625	12.8563	13.1138	13.1520		

Dans le tableau (7.8), l'effet du rapport d'épaisseur et les conditions aux limites sur les paramètres de fréquences Ω d'une plaque composite antisymétrique ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) est pris en considération. Les propriétés mécaniques du matériau sont les mêmes propriétés des tableaux (7.5-7). L'augmentation du (rapport de dimensions) b/h diminue le paramètre de fréquence à une vitesse qui dépend des conditions aux limites. Un bon accord est obtenu en comparant les résultats actuels avec les résultats des différentes théories présentées dans la littérature : CLPT (Hadian et *al.* 1993), LD4 (Lorenzo Dozio, 2014), ED3 (Lorenzo Dozio, 2014) et TSDT (Hadian et *al.* 1993).

Tableau 7. 8 Comparaison de paramètre de fréquence fondamental pour une plaque composite carrée a antisymétrique avec diffèrent conditions aux limites, $E_1/E_2 = 40$

Couches	b/h	Méthode	Conditions aux limites					
			AAAA	AEAA	AEAE	ALAL	AAAL	AEAL
(0°/90°/0°)	50	CLPT (Hadian et <i>al.</i> 1993)	18.891	28.498	40.740	4.438	5.076	8.269
		LD4 (Lorenzo Dozio, 2014)	18.641	27.484	38.203	4.453	5.078	8.203
		ED3 (Lorenzo Dozio, 2014)	18.641	27.484	38.203	4.453	5.078	8.203
		TSDT (Hadian et <i>al.</i> 1993)	18.641	27.496	38.231	4.451	5.065	8.216
		Présente	18.641	27.572	39.682	4.451	5.068	8.244
	20	LD4 (Lorenzo Dozio, 2014)	17.483	23.578	29.993	4.413	5.018	7.973
		ED3 (Lorenzo Dozio, 2014)	17.488	23.588	30.018	4.423	5.023	7.978
		TSDT (Hadian et <i>al.</i> 1993)	17.483	23.652	30.208	4.422	5.024	7.890
		Présente	17.483	22.938	31.365	4.421	5.026	7.985
	10	LD4 (Lorenzo Dozio, 2014)	14.696	17.197	19.811	4.289	4.868	7.297
		ED3 (Lorenzo Dozio, 2014)	14.711	17.226	19.858	4.319	4.893	7.317
		TSDT (Hadian et <i>al.</i> 1993)	14.702	17.427	20.315	4.322	4.895	7.335
Présente		14.701	17.220	21.337	4.316	4.891	7.316	
5	LD4 (Lorenzo Dozio, 2014)	10.232	10.749	11.510	3.894	4.408	5.851	
	ED3 (Lorenzo Dozio, 2014)	10.269	10.808	11.593	3.978	4.477	5.911	
	TSDT (Hadian et <i>al.</i> 1993)	10.263	11.156	12.333	3.987	4.483	5.975	
	Présente	10.253	10.598	12.886	3.969	4.469	5.908	

7.2 Plaque composite stratifiée à rigidité variable (CSRV) : cas de fibres paraboliques

Dans cette section, une étude de convergence et de validation est donnée pour les plaques composites à rigidité variable (CSRV), constituée des fibres paraboliques. La configuration de la plaque est adoptée par l'orientation $[< T_0, T_1 >]$ dans laquelle T_0 l'angle d'orientation des fibres au centre de la plaque est toujours égale zéro, T_1 est l'angle d'orientation des fibres à une distance $a/2$ à partir du centre de la plaque (figure 7.5).

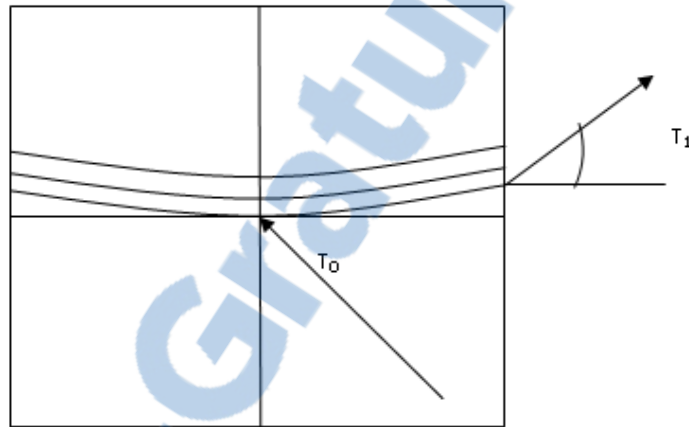


Fig. 7. 5 Configuration de la plaque CSRV avec fibre parabolique

Afin d'évaluer les performances de notre théorie HSĐT C_0 avec la version p de la méthode des éléments finis, en termes de précision et de convergence, le tableau (7.9) donne une comparaison des trois premiers paramètres de fréquences d'une plaque CSRV avec différentes conditions aux limites (EEEE AAAA ALLE LEAE).

Où,

E : encastrée.

A : appuyée simple.

L : libre.

Le paramètre de fréquence utilisé est $\Omega = (\omega a^2/h)\sqrt{\rho/D}$ avec $D = E_1 h^3/12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$.

Les propriétés mécaniques et géométriques de la plaque sont : $a/b=1$, $h=0.001m$, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=7.1.10^9 N/m^2$, $\nu_{12}=0.30$, $E_1=138.10^9 N/m^2$, $E_2=8.96.10^9 N/m^2$.

Les résultats obtenus comparés avec la solution de Rayleigh-Ritz et la théorie de CPT (Honda et al. 2008), montrent que la solution converge rapidement avec un degré de fonctions de forme polynomiale $P=12$. Un très bon accord peut être observé.

Tableau 7. 9 Convergence et comparaison des trois premiers paramètres de fréquences dans le cas d'une plaque CSRV avec différent condition aux limites

Condition aux limites	Γ	Mode	P					CLPT (Honda et al. 2008)
			6	8	9	11	12	
EEEE	1.3	1	81.96	71.62	70.86	70.78	70.76	-
		2	155.97	136.53	134.57	134.23	134.18	134.2
		3	159.42	139.17	139.09	136.00	136.00	-
AAAA	1.2	1	46.85	45.53	45.38	45.28	45.25	-
		2	99.20	96.78	96.33	96.20	96.16	96.21
		3	105.37	99.63	99.57	98.56	98.56	-
ALLE	0.7	1	8.33	8.19	8.17	8.15	8.14	-
		2	30.15	29.69	29.64	29.58	29.58	-
		3	74.73	72.07	71.55	71.28	71.26	71.34
LEAE	1	1	56.59	46.67	45.12	45	44.93	-
		2	86.37	73.49	71.91	71.7	71.61	-
		3	145.43	123.45	121.31	121.12	121.07	121.1

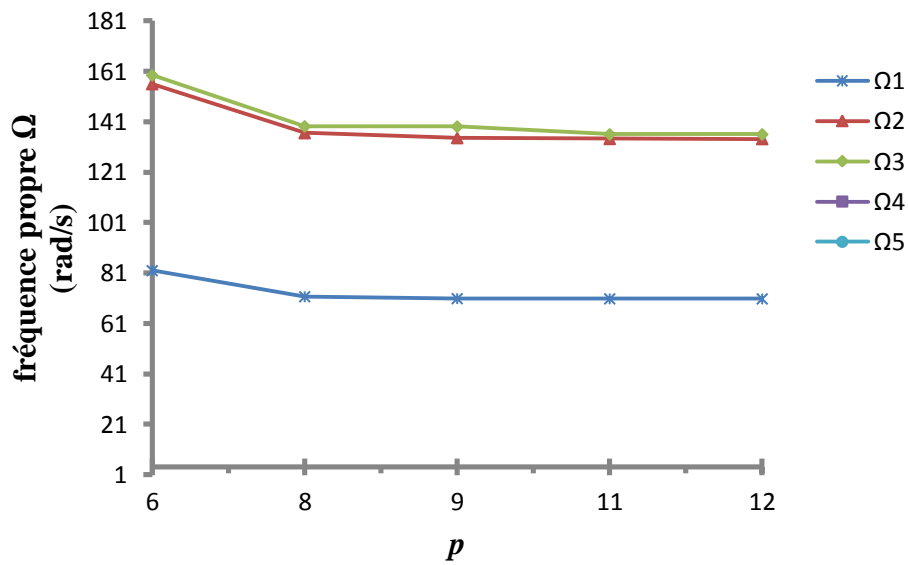


Fig. 7. 6 Convergence des trois premiers paramètres dans le cas d'une plaque Stratifiée avec des fibres parabolique carrée, EEEE, $\Gamma=1.3$

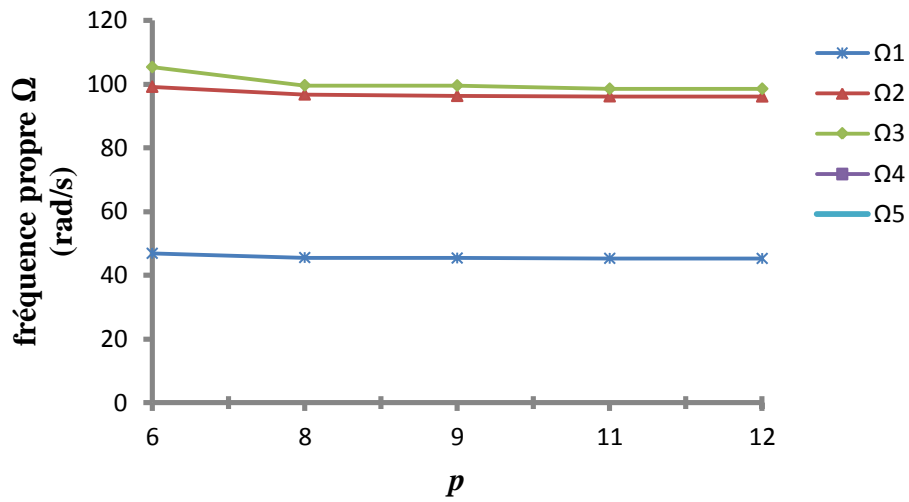


Fig. 7.7 Convergence des trois premiers paramètres dans le cas d'une plaque Stratifiée avec des fibres parabolique carrée, AAAA, $\Gamma=1.2$

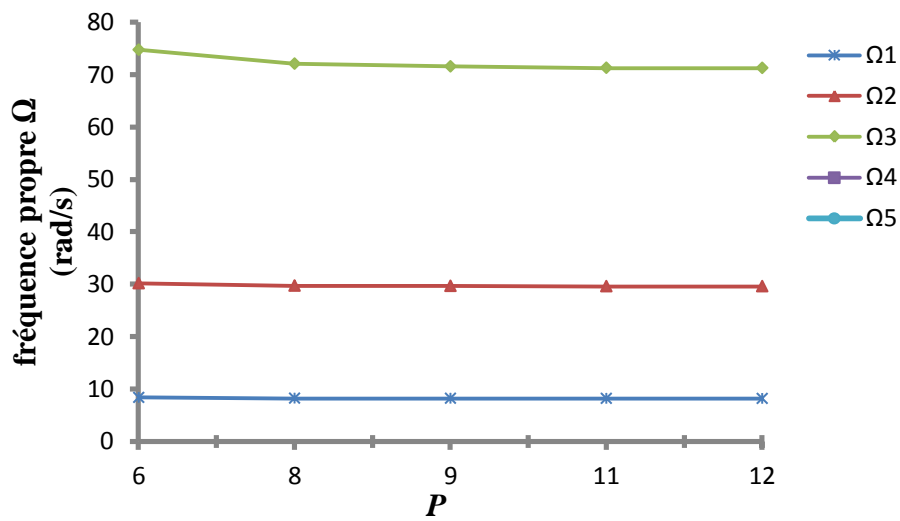


Fig. 7.8 Convergence des trois premiers paramètres dans le cas d'une plaque Stratifiée avec des fibres parabolique carrée, ALLE, $\Gamma=0.7$

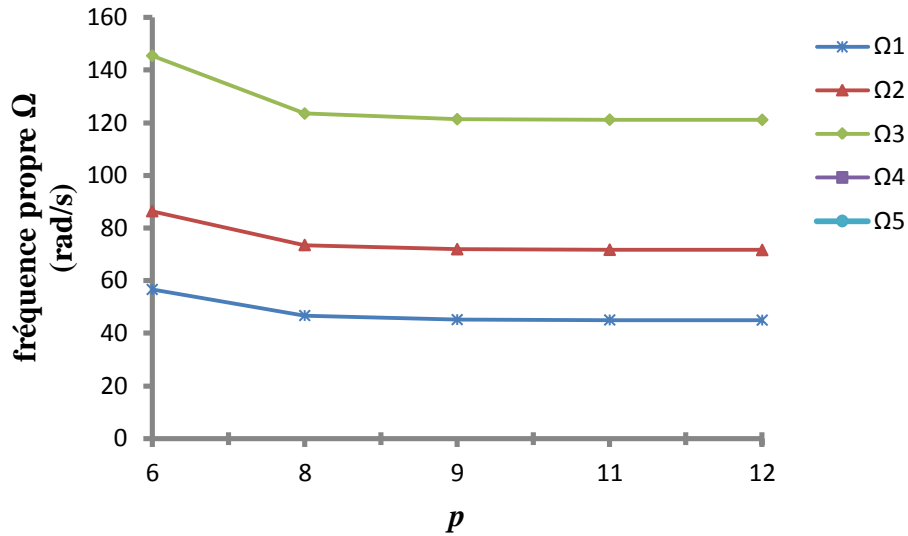


Fig. 7. 9 Convergence des trois premiers paramètres dans le cas d'une plaque Stratifiée avec des fibres parabolique carrée, LEAE, $\Gamma=1$

7.2.1 Etude paramétrique des plaques CSRV (fibre parabolique)

Afin d'étudier les effets des différents paramètres de la plaque CSRV à fibre parabolique, on a examiné l'effet des paramètres de fréquence et les modes propres, en considérant l'angle d'orientation T_1 , le rapport d'épaisseur, l'effet d'orthotropie E_1/E_2 et les conditions aux limites. Les résultats sont présentés dans les tableaux (7.10-17).

Les résultats sont donnés avec le paramètre de fréquence exprimé en fonction de la pulsation propre : $\Omega = (\omega a^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$.

Les tableaux (7.10), (7.13) présentent respectivement les résultats d'une plaque à rigidité variable avec différentes conditions aux limites EEEE, AAAA, ELLL et ELEL. Les propriétés mécaniques sont celles du tableau (7.9) avec une épaisseur de $h=0.1m$.

Trois types de stratifications à rigidité variable sont adoptées : une couche [$< 0, T_1 >$], deux couches [$< 0, T_1 >$, $< 0, -T_1 >$] et trois couches [$< 0, T_1 >$, $< 0, -T_1 >$, $< 0, T_1 >$], où l'angle T_1 est varié de 10° jusqu'à 70° avec un incrément de 10° .

Les résultats obtenus montrent que la fréquence fondamentale augmente lorsque l'angle d'orientation T_1 augmente, par contre dans le cas EEEE la fréquence diminue avec l'augmentation de T_1 . Il est remarqué aussi que le premier cas EEEE est caractérisé par une rigidité plus grande que les trois cas AAAA, ELLL et ELEL.

Tableau 7. 10 Effet de l'angle d'orientation des fibres T_I sur le paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque CSRV, EEEE

Angle d'orientation	T_I						
	10	20	30	40	50	60	70
$[\langle 0, T_I \rangle]$	67.468	66.225	64.379	62.278	60.367	59.008	58.323
$[\langle 0, T_I \rangle, \langle 0, -T_I \rangle]$	66.256	63.215	60.511	58.354	56.715	55.67	55.437
$[\langle 0, T_I \rangle, \langle 0, -T_I \rangle, \langle 0, T_I \rangle]$	67.504	66.384	64.754	62.913	61.222	59.991	59.32

Tableau 7. 11 Effet de l'angle d'orientation des fibres T_I sur le paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque CSRV, AAAA

Angle d'orientation	T_I						
	10	20	30	40	50	60	70
$[\langle 0, T_I \rangle]$	40.549	41.044	41.803	42.617	43.048	42.365	40.029
$[\langle 0, T_I \rangle, \langle 0, -T_I \rangle]$	40.158	39.92	40.108	40.533	40.449	38.711	35.314
$[\langle 0, T_I \rangle, \langle 0, -T_I \rangle, \langle 0, T_I \rangle]$	40.632	41.358	42.428	43.545	44.195	43.61	41.171

Tableau 7. 12 Effet de l'angle d'orientation des fibres T_I sur le paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque CSRV, ELLL

Angle d'orientation	T_I						
	10	20	30	40	50	60	70
$[\langle 0, T_I \rangle]$	3.512	3.581	3.723	3.986	4.47	5.352	6.898
$[\langle 0, T_I \rangle, \langle 0, -T_I \rangle]$	3.514	3.588	3.755	4.083	4.68	5.687	7.265
$[\langle 0, T_I \rangle, \langle 0, -T_I \rangle, \langle 0, T_I \rangle]$	3.513	3.585	3.736	4.025	4.559	5.512	7.106

Tableau 7. 13 Effet de l'angle d'orientation des fibres T_I sur le paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque CSRV, ELEL

Angle d'orientation	T_I						
	10	20	30	40	50	60	70
$[\langle 0, T_I \rangle]$	21.711	22.169	23.161	25.027	28.241	33.434	41.234
$[\langle 0, T_I \rangle, \langle 0, -T_I \rangle]$	21.714	22.196	23.28	25.38	28.97	34.281	41.095
$[\langle 0, T_I \rangle, \langle 0, -T_I \rangle, \langle 0, T_I \rangle]$	21.715	22.199	23.274	25.349	28.937	34.502	42.244

Afin de mieux détailler ces comportements, on a calculé plusieurs modes avec d'autres orientations, deux couches [$\langle 0,45 \rangle$, $\langle 0,-45 \rangle$] et trois couches [$\langle 0,30 \rangle$, $\langle 0,-60 \rangle$, $\langle 0,30 \rangle$] présentées dans les tableaux (7.14), (7.15). Il a été conclu que la plaque *EEEE* est caractérisée par une rigidité plus grande que la plaque *AAAA*, Donc le même comportement des paramètres de fréquences a été obtenu ici avec l'augmentation de l'angle T_l . On constate que la rigidité de la plaque peut être augmentée par l'angle d'orientation des fibres.

Tableau 7. 14 Cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque CSRV, EEEE

Angle d'orientation	Mode				
	1	2	3	4	5
$\langle 0, 45 \rangle, \langle 0, -45 \rangle$	57.467	91.061	118.823	139.114	144.359
$\langle 0, 30 \rangle, \langle 0, -60 \rangle, \langle 0, 30 \rangle$	64.875	90.986	134.392	135.659	155.385

Tableau 7. 15 Cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque CSRV, AAAA

Angle d'orientation	Mode				
	1	2	3	4	5
$\langle 0, 45 \rangle, \langle 0, -45 \rangle$	40.623	73.601	100.278	109.916	118.803
$\langle 0, 30 \rangle, \langle 0, -60 \rangle, \langle 0, 30 \rangle$	42.588	68.876	110.838	115.244	135.326

Le dernier exemple concerne une plaque CSRV [$\langle 0, T_l \rangle, \langle 0, -T_l \rangle$], encadrée et simplement appuyée est indiquée dans les tableaux (7.16), (7.17) respectivement.

Les propriétés mécaniques du matériau utilisé dans ce cas sont les suivants : $G_{12}/E_2=0.6$, $G_{13}/E_2=0.6$, $G_{23}/E_2=0.5$, $\nu_{12}=0.25$, E_1/E_2 est variable.

Dans cet exemple, T_l est varié de 10° jusqu'à 70° , l'effet du rapport d'épaisseur ($a/h=10, 20, 50, 100$) ainsi que l'effet de l'orthotropie E_1/E_2 (3, 10, 30, 40) sont étudiés. Le paramètre de fréquence utilisé est $\Omega = \omega \cdot b^2/h \cdot \sqrt{\rho/E_2}$.

Les résultats obtenus montrent que l'augmentation du rapport d'élasticité produit un accroissement des paramètres de fréquence, l'augmentation du rapport a/h entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale, cela signifie clairement l'augmentation de la rigidité de la plaque. Les conditions aux limites ont aussi une influence importante aux bords de la plaque. L'augmentation de l'angle T_l provoque une augmentation ou une diminution de la fréquence et fait donc varier la rigidité de la plaque.

Tableau 7. 16 Effet du rapport E_1/E_2 et le rapport a/h sur le paramètre de fréquence pour une plaque CSRV, EEEE

E_1/E_2	a/h	T_1						
		10	20	30	40	50	60	70
3	10	12.633	12.441	12.192	11.945	11.743	11.615	11.6
	20	13.773	13.524	13.204	12.893	12.644	12.486	12.462
	50	14.169	13.898	13.553	13.22	12.954	12.786	12.757
	100	14.230	13.955	13.606	13.27	13.001	12.831	12.802
10	10	16.45	15.774	15.135	14.617	14.229	13.99	13.948
	20	19.703	18.438	17.311	16.458	15.862	15.508	15.434
	50	21.108	19.529	18.165	17.163	16.482	16.08	15.984
	100	21.338	19.705	18.301	17.275	16.581	16.172	16.072
20	10	18.614	17.809	17.167	16.663	16.277	16.024	15.929
	20	24.185	22.11	20.585	19.492	18.742	18.307	18.182
	50	27.156	24.164	22.093	20.683	19.76	19.239	19.085
	100	27.689	24.516	22.345	20.881	19.931	19.396	19.234
40	10	20.442	19.811	19.407	19.11	18.866	18.645	18.403
	20	28.9	26.35	24.71	23.563	22.788	22.311	22.029
	50	34.655	30.114	27.449	25.706	24.609	23.994	23.67
	100	35.829	30.818	27.94	26.086	24.936	24.297	23.957

Tableau 7. 17 Effet du rapport E_1/E_2 et le rapport a/h sur le paramètre de fréquence pour une plaque CSRV, AAAA

E_1/E_2	a/h	T_1						
		10	20	30	40	50	60	70
3	10	7.261	7.296	7.344	7.383	7.378	7.29	7.125
	20	7.474	7.513	7.566	7.611	7.608	7.514	7.335
	50	7.538	7.578	7.633	7.68	7.677	7.582	7.398
	100	7.547	7.587	7.643	7.69	7.687	7.592	7.408
10	10	9.787	9.785	9.881	10.033	10.065	9.697	8.923
	20	10.388	10.377	10.47	10.625	10.647	10.212	9.327
	50	10.581	10.567	10.66	10.817	10.836	10.378	9.455
	100	10.609	10.595	10.688	10.846	10.865	10.403	9.474
20	10	11.919	11.764	11.861	12.101	12.197	11.65	10.454
	20	13.174	12.911	12.938	13.157	13.225	12.521	11.084
	50	13.613	13.311	13.313	13.526	13.586	12.822	11.296
	100	13.68	13.373	13.371	13.583	13.643	12.869	11.329
40	10	14.285	14.006	14.207	14.613	14.86	14.165	12.583
	20	16.797	16.121	16.13	16.498	16.718	15.702	13.647
	50	17.816	16.956	16.872	17.226	17.445	16.279	14.03
	100	17.979	17.09	16.992	17.345	17.567	16.374	14.093

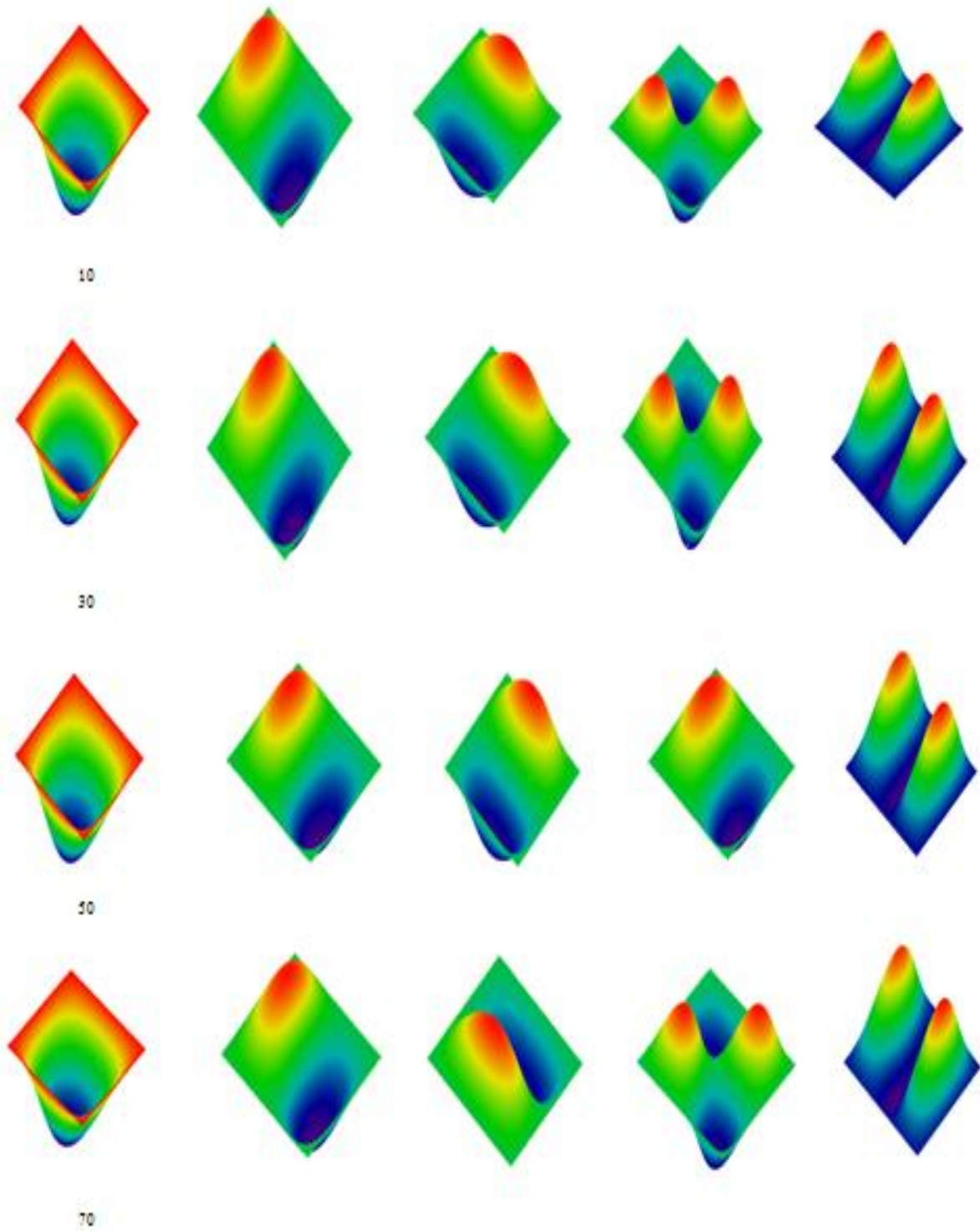


Fig. 7. 10 Cinq premiers modes d'une plaque CSRV avec l'orientation [$\langle 0, T_1 \rangle, \langle 0, -T_1 \rangle, \langle 0, T_1 \rangle$], EEEE, (1): $T_l= 10^\circ$ (2): $T_l= 30^\circ$ (3): $T_l= 50^\circ$, (4) : $T_l= 70^\circ$

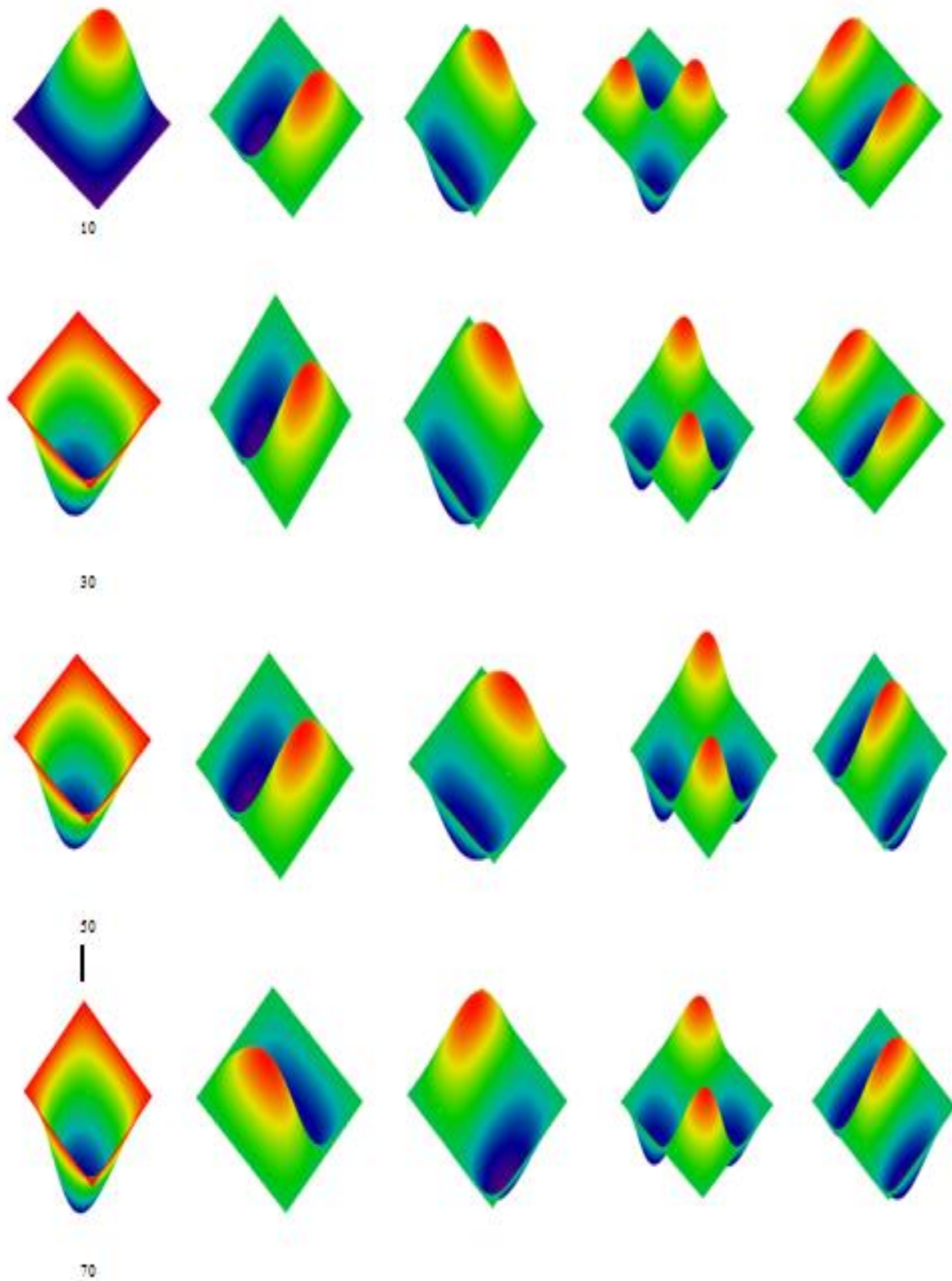


Fig. 7.11 Cinq premiers modes d'une plaque CSRV avec l'orientation $[\langle 0, T_1 \rangle, \langle 0, -T_1 \rangle, \langle 0, T_1 \rangle]$, AAAA, (1): $T_I = 10^\circ$ (2): $T_I = 30^\circ$ (3): $T_I = 50^\circ$, (4) : $T_I = 70^\circ$

Les figures (7.10-11) montrent les cinq premiers modes d'une plaque CSRV, avec des fibres paraboliques symétriques [$\langle 0, T_1 \rangle$, $\langle 0, -T_1 \rangle$, $\langle 0, T_1 \rangle$]_s, pour les conditions aux limites EEEE et AAAA respectivement. Les propriétés mécaniques de la plaque sont présentées dans l'exemple précédent avec un rapport d'épaisseur $a/h=10$ et le rapport $E_1/E_2=40$. L'apparition de déformations structurales de la plaque associées aux cinq premiers modes propres de vibration est constatée.

7.3 Plaque composite stratifié à rigidité variable (CSRV) : Cas de fibres hyperboliques

Dans la partie suivante, l'analyse vibratoire d'une plaque CSRV à fibre hyperbolique est étudiée. Une étude de convergence et de comparaison avec les résultats de la littérature est entamée, afin d'examiner l'exactitude et la précision des résultats. La convergence est obtenue toujours en faisant augmenter le degré P des fonctions de forme hiérarchiques polynomiales.

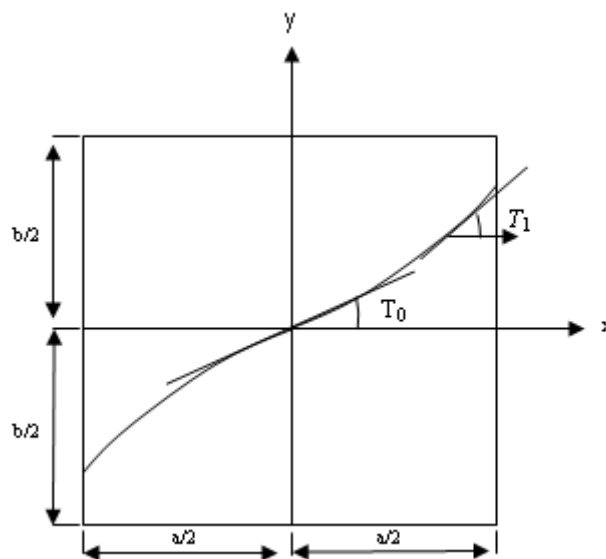


Fig. 7. 12 Configuration de la plaque CSRV avec fibre hyperbolique

Cette étude est faite pour calculer les quatre premiers paramètres de fréquence $\Omega = (\omega h) \sqrt{\rho/E_2}$ d'une plaque stratifiée à trois couches antisymétriques d'orientation [$\langle 10/40 \rangle$, $\langle -10/-40 \rangle$, $\langle 10/40 \rangle$], avec différentes épaisseurs $h=(0.01, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1)$, la condition aux limites appliquée est de type encastree. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont : $a=b=1m$, $E_1=131.7GPa$, $E_2=9.86GPa$, $G_{ij}=4.21GPa$, $\nu_{12} = 0.28$, $\rho=1600kg/m^3$.

Les figures (7.6-9) et les résultats du tableau (7.18) montrent que les quatre premiers paramètres de fréquence Ω convergent rapidement en utilisant douze (12) fonctions de forme hiérarchiques. Les résultats ont été comparés à ceux obtenus par la théorie de plusieurs couches layer-wise (Ribeiro et *al.* 2015), on voit clairement que les résultats ont une très grande concordance.

Tableau 7. 18 Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquence dans le cas d'une plaque (CSRV) antisymétrique, encastrée

h	P					LWT (Ribeiro et <i>al.</i> 2015)
	6	8	10	11	12	
0.01	0.0022	0.0022	0.0021	0.0021	0.0021	0.0022
	0.0033	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031
	0.0057	0.0049	0.0048	0.0047	0.0047	0.0048
	0.0069	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054
0.02	0.0086	0.0085	0.0085	0.0085	0.0085	0.0085
	0.0130	0.0124	0.0123	0.1023	0.0123	0.0124
	0.0218	0.0191	0.0187	0.0186	0.0186	0.0188.
	0.0262	0.0283	0.0209	0.0209	0.0209	0.0209
0.04	0.0322	0.0319	0.0318	0.0318	0.0318	0.0320
	0.0482	0.0467	0.0466	0.0466	0.0466	0.0468
	0.0763	0.0713	0.0700	0.0700	0.0699	0.0706
	0.0899	0.0743	0.0741	0.0741	0.0740	0.0753
0.06	0.0666	0.0660	0.0660	0.0659	0.0659	0.0664
	0.0994	0.0972	0.0971	0.0970	0.0970	0.0977
	0.1476	0.1447	0.1444	0.1443	0.1443	0.1461
	0.1722	0.1469	0.1448	0.1448	0.1447	0.1463
0.08	0.1079	0.1072	0.1071	0.1070	0.1070	0.1080
	0.1614	0.1589	0.1587	0.1586	0.1586	0.1601
	0.2264	0.2228	0.2225	0.2224	0.2224	0.2259
	0.2646	0.2378	0.2350	0.2348	0.2348	0.2379
0.1	0.1536	0.1527	0.1526	0.1526	0.1526	0.1543
	0.2310	0.2281	0.2278	0.2278	0.2278	0.2303
	0.3091	0.3051	0.3046	0.3045	0.3045	0.3098
	0.3633	0.3369	0.3345	0.3344	0.3343	0.3394

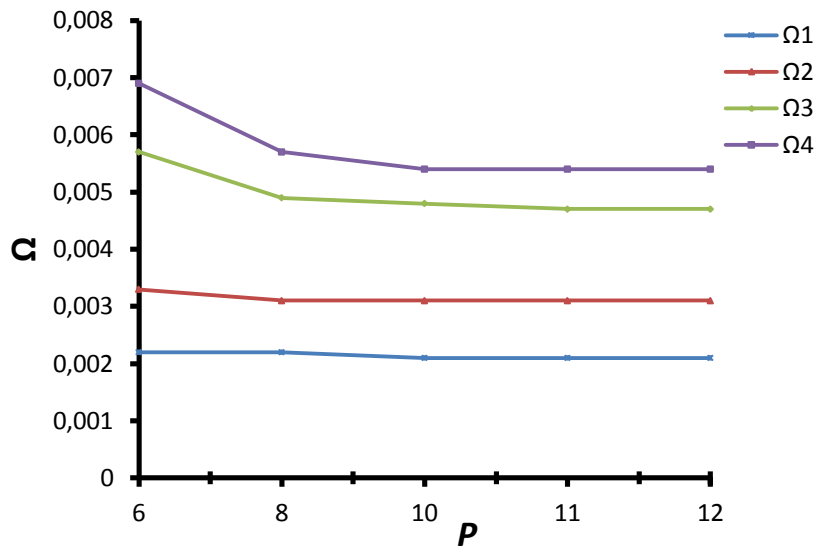


Fig. 7.13 Convergence des quatre premiers paramètres de fréquence d'une plaque CSRV, encadrée ($h = 0.01$)

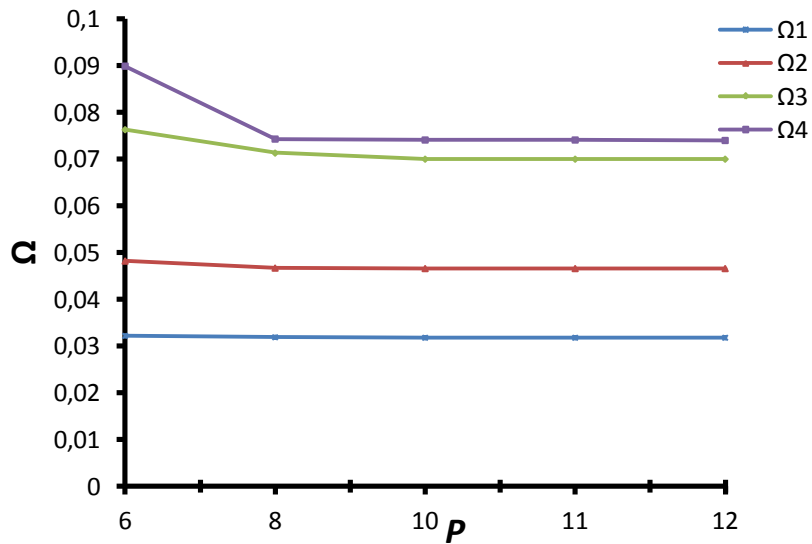


Fig. 7.14 Convergence des quatre premiers paramètres de fréquence d'une plaque CSRV, encadrée ($h = 0.04$)

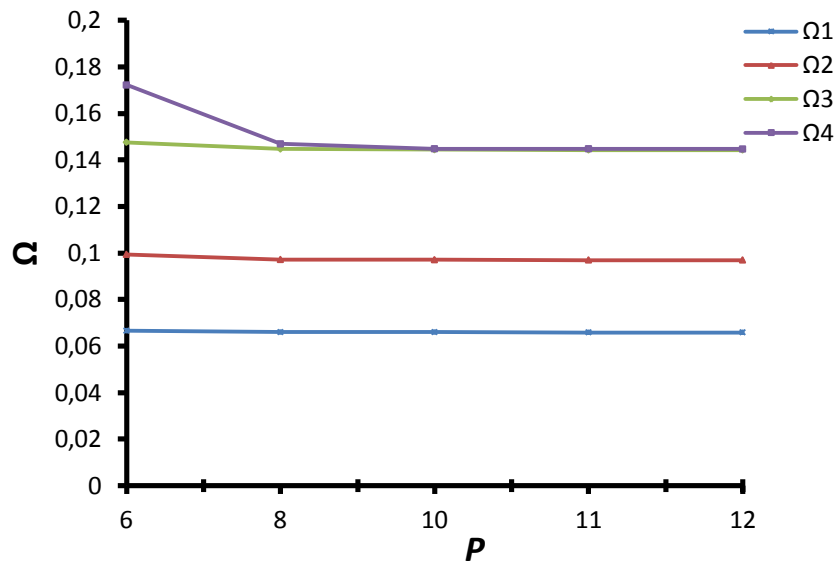


Fig. 7.15 Convergence des quatre premiers paramètres de fréquence d’une plaque CSRV, encadrée ($h = 0.06$)

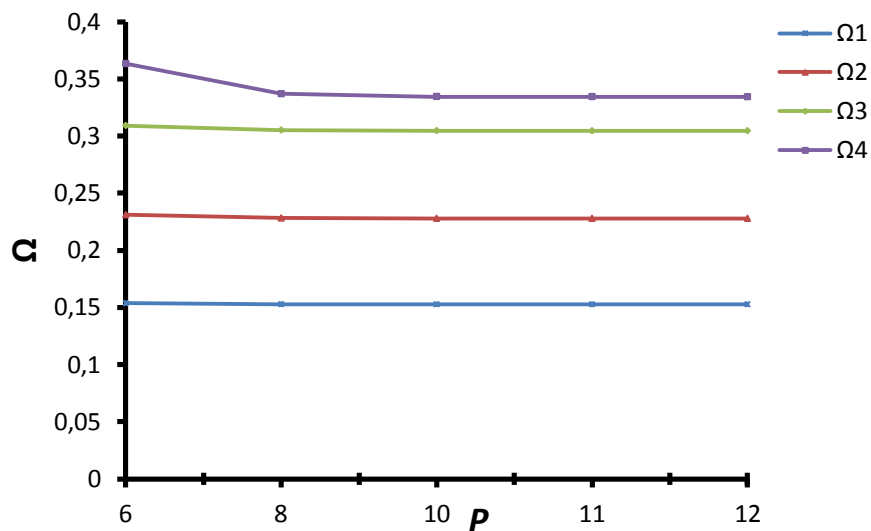


Fig. 7.16-Convergence des quatre premiers paramètres de fréquence d’une plaque CSRV, encadrée ($h = 0.1$)

Afin de mieux démontrer la validité de la présente méthode en utilisant des plaques CSRV avec des fibres hyperboliques, une étude de comparaison est faite entre le présent modèle et toutes les solutions trouvées. Les résultats des fréquences propres sont comparés aux théories de CLPT, FSDT, TSDT et Layer-wise. L’étude comparative s’effectue en faisant varier l’angle d’orientation des fibres hyperboliques, dans le cas symétrique et antisymétrique, l’épaisseur de la plaque (mince et épaisse) et les conditions aux limites.

Tableau 7. 19 Comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences pour une plaque CSRV, antisymétrique

Angle d'orientation	Méthode	Mode				
		1	2	3	4	5
[±<40°/10°>]	CLPT (Houmat, 2013)	0.320	-	-	-	-
	LWT (Ribeiro et al. 2014)	0.3167	0.4979	0.7417	0.7664	0.9362
	Présente	0.3166	0.4979	0.7413	0.7663	0.9360
[±<40°/20°>]	CLPT (Houmat, 2013)	0.312	-	-	-	-
	LWT (Ribeiro et al. 2014)	0.3093	0.5131	0.7050	0.8159	0.9317
	Présente	0.3093	0.5132	0.7049	0.8108	0.9319
[±<40°/30°>]	CLPT (Houmat, 2013)	0.303	-	-	-	-
	LWT (Ribeiro et al. 2014)	0.3005	0.5283	0.6635	0.8567	0.9260
	Présente	0.3005	0.5285	0.6637	0.8573	0.9267
[±<40°/40°>]	CLPT (Houmat, 2013)	0.293	-	-	-	-
	LWT (Ribeiro et al. 2014)	0.2904	0.5426	0.6174	0.9035	0.9177
	Présente	0.2905	0.5429	0.6176	0.9040	0.9184
[±<40°/50°>]	CLPT (Houmat, 2013)	0.282	-	-	-	-
	LWT (Ribeiro et al. 2014)	0.2800	0.5523	0.5669	0.9068	0.9417
	Présente	0.2801	0.5563	0.5689	0.9070	0.9490
[±<40°/60°>]	CLPT (Houmat, 2013)	0.273	-	-	-	-
	LWT (Ribeiro et al. 2014)	0.2706	0.5212	0.5689	0.8832	0.8928
	Présente	0.2707	0.5214	0.5692	0.8836	0.89435
[±<40°/70°>]	CLPT (Houmat, 2013)	0.265	-	-	-	-
	LWT (Ribeiro et al. 2014)	0.2636	0.4807	0.5822	0.7928	0.8804
	Présente	0.2637	0.4808	0.5824	0.7931	0.8808
[±<40°/80°>]	CLPT (Houmat, 2013)	0.262	-	-	-	-
	LWT (Ribeiro et al. 2014)	0.2599	0.4513	0.5967	0.7248	0.8723
	Présente	0.2599	0.4514	0.5969	0.7249	0.8727

Dans le tableau (7.19), l'angle d'orientation de la plaque CSRV antisymétrique est désigné par $[\pm\langle T_0 / T_1 \rangle]$, ou l'angle T_0 est égal à 40° et T_1 varie de 10° à 80° avec un incrément de 10° .

Le paramètre de fréquence utilisé est : $\Omega = (\omega a)\sqrt{\rho/E_2}$. Les propriétés mécaniques et géométriques de la plaque sont : $a=b=0.5m$, $E_1/E_2 = 24.028$, $G_{ij}/E_2 = 0.522$, $\nu_{12} = 0.29$, $\rho=1kgm^{-3}$.

La comparaison est faite avec les théories de la Layer-wise (Ribeiro et al. 2014) et CLPT (Houmat, 2013), les présents résultats sont en excellent accord avec ces solutions. En outre, on a observé que les cinq premiers paramètres de fréquence diminuent avec l'augmentation de l'angle T_1 .

Les tableaux (7.20-21) donnent les six premiers paramètres de fréquence $\Omega = (\omega h)\sqrt{\rho/E_2}$ d'une plaque épaisse à trois couches, avec différents angles d'orientation des fibres antisymétriques.

Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque sont : $a=b=1m$, $h=0.2m$, $E_1=138GPa$, $E_2 = 8.96GPa$, $G_{ij}=7.1GPa$, $\nu_{12}=0.30$, $\rho=1kgm^{-3}$.

Les résultats des trois premières fréquences d'une plaque CSRV carrée ($a=b=1$) et mince ($h=0.01m$) sont indiquées dans les tableaux (7.22-23). La plaque CSRV est considérée avec des configurations de stratifié antisymétrique de deux et trois couches.

Les propriétés mécaniques utilisées dans cet exemple sont les suivants: $E_1/E_2=40$, $G_{ij}/E_2=0.5$, $\nu_{12}=0.25$, $\rho=1540kgm^{-3}$.

Ces tableaux montrent clairement que les résultats obtenus par notre modèle HSĐT-C0 s'accordent bien avec la théorie de LWT (Ribeiro et al. 2015).

Tableau 7. 20 Comparaison des six premiers paramètres de fréquence pour une plaque encadrée avec l'orientation des fibres curviligne antisymétrique

Angle d'orientation	Méthode	Mode					
		1	2	3	4	5	6
[<15°/-15°>,<15°/-15°>,<15°/-45°>]	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5217	0.7600	0.8869	1.007	1.123	1.175
	Présente	0.5156	0.7504	0.8869	0.9903	1.1027	1.1551
[<15°/-15°>,<15°/-15°>,<15°/-60°>]	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5170	0.7638	0.9045	1.010	1.131	1.172
	Présente	0.5136	0.7555	0.9059	0.9988	1.1112	1.1565
[<15°/-15°>,<15°/-30°>,<15°/-45°>]	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5211	0.7600	0.8740	1.005	1.123	1.175
	Présente	0.5143	0.7502	0.8720	0.9879	1.1026	1.1550
[<15°/-15°>,<15°/-30°>,<15°/-45°>]	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5159	0.7637	0.8889	1.006	1.130	1.172
	Présente	0.5115	0.7549	0.8874	0.9933	1.1108	1.1557
[<15°/-15°>,<15°/-45°>,<15°/-45°>]	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5209	0.7605	0.8890	1.007	1.124	1.176
	Présente	0.5136	0.7505	0.8875	0.9895	1.1030	1.1557
[<15°/-15°>,<15°/-45°>,<15°/-60°>]	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5152	0.7641	0.8946	1.008	1.130	1.173
	Présente	0.5097	0.7550	0.8904	0.9959	1.1108	1.1558
[<15°/-15°>,<15°/-60°>,<15°/-45°>]	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5211	0.7612	0.9155	1.010	1.124	1.177
	Présente	0.5136	0.7511	0.9152	0.9942	1.1037	1.1568
[<15°/-15°>,<15°/-60°>,<15°/-60°>]	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5150	0.7646	0.9111	1.014	1.131	1.175
	Présente	0.5088	0.7554	0.9052	1.044	1.1112	1.1571

Tableau 7. 21 Comparaison des six premiers paramètres de fréquence pour une plaque CSRV encadré avec l'orientation [$\langle T_0/T_1 \rangle, -\langle T_0/T_1 \rangle, \langle T_0/T_1 \rangle$]

T_0	T_1	Méthode	Mode					
			1	2	3	4	5	6
0	-10	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5357	0.7525	0.8744	1.011	1.102	1.162
		Présente	0.5261	0.7412	0.8789	0.9895	1.0806	1.1402
	0	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5374	0.7518	0.8396	1.013	1.101	1.159
		Présente	0.5277	0.7405	0.8396	0.9915	1.0802	1.1377
	10	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5357	0.7525	0.8744	1.011	1.102	1.162
		Présente	0.5261	0.7412	0.8789	0.9895	1.0806	1.1402
20	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5311	0.7548	0.9552	1.005	1.103	1.169	
	Présente	0.5218	0.7436	0.9663	0.9837	1.0823	1.1476	
30	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5248	0.7589	0.9957	1.048	1.106	1.181	
	Présente	0.5162	0.7481	0.9750	1.0636	1.0855	1.1587	
40	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5180	0.7649	0.9840	1.110	1.132	1.195	
	Présente	0.5101	0.7543	0.9639	1.0897	1.1506	1.1721	
30	-10	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5405	0.7818	0.9192	1.014	1.129	1.215
		Présente	0.5311	0.7697	0.9332	0.9911	1.1064	1.1895
	0	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5423	0.7844	0.9563	1.008	1.123	1.220
		Présente	0.5330	0.7724	0.9666	0.9859	1.1014	1.1948
	10	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5407	0.7883	0.9979	1.057	1.119	1.230
		Présente	0.5317	0.7765	0.9774	1.0767	1.0988	1.2041
20	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5365	0.7934	0.9861	1.118	1.182	1.243	
	Présente	0.5281	0.7821	0.9668	1.0987	1.2114	1.2178	
30	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5308	0.7991	0.9731	1.118	1.260	1.288	
	Présente	0.5232	0.7886	0.9553	1.1003	1.2349	1.3202	
40	LWT (Ribeiro et al. 2015).	0.5248	0.8042	0.9602	1.118	1.278	1.353	
	Présente	0.5179	0.7944	0.9436	1.1022	1.2533	1.3844	

Tableau 7. 22 Comparaison des trois premières fréquences pour une plaque encadré constitué des fibres curviligne symétrique et antisymétrique [$\langle T^l_o/T^l_i \rangle, \langle T^l_o/T^2_i \rangle$]

Angle d'orientation	Méthode	Mode		
		1	2	3
[$\langle 10/20 \rangle, \langle 10/-20 \rangle$],	LWT (Ribeiro et al. 2014)	245.7	306.8	424.2
	Présente	244.3	305.5	417.9
[$\langle 10/20 \rangle, \langle 10/-10 \rangle$],	LWT (Ribeiro et al. 2014)	259.7	318.5	431.7
	Présente	258.6	317.4	424.4
[$\langle 10/20 \rangle, \langle 10/0 \rangle$],	LWT (Ribeiro et al. 2014)	279.9	334.5	443.4
	Présente	279.1	333.4	435.5
[$\langle 10/20 \rangle, \langle 10/10 \rangle$],	LWT (Ribeiro et al. 2014)	303.4	350.3	456.0
	Présente	302.4	349.0	446.8
[$\langle 10/20 \rangle, \langle 10/20 \rangle$],	LWT (Ribeiro et al. 2014)	310.1	354.9	463.1
	Présente	308.9	353.3	452.3
[$\langle 10/20 \rangle, \langle 10/30 \rangle$],	LWT (Ribeiro et al. 2014)	291.2	344.7	461.7
	Présente	290.1	343.1	451.0

Tableau 7. 23 Comparaison des trois premières fréquences pour une plaque CSRV, encadrée, symétrique et antisymétrique [$\langle T^l_o/T^l_i \rangle, \langle T^l_o/T^2_i \rangle, \langle T^l_o/T^3_i \rangle$]

Angle d'orientation	Méthode	Mode		
		1	2	3
20	LWT (Ribeiro et al. 2014)	309.1	354.3	463.0
	Présente	308.3	353.1	452.7
30	LWT (Ribeiro et al. 2014)	292.4	345.6	462.5
	Présente	291.5	344.2	451.5
10 20 30	LWT (Ribeiro et al. 2014)	269.1	333.3	459.4
	Présente	268.5	331.5	448.5
50	LWT (Ribeiro et al. 2014)	251.9	325.6	458.1
	Présente	250.4	323.0	447.8
60	LWT (Ribeiro et al. 2014)	242.3	322.0	459.6
	Présente	240.4	319.7	449.7

Dans les tableaux (7.24 -25), une autre étude comparative est conduite pour l'évaluation de notre modèle pour différente épaisseur h (0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1) et différents angles d'orientation des fibres T_0 et T_1 . Le paramètre de fréquence et les propriétés mécaniques sont celles utilisé dans le tableau (7.20). On constate que le paramètre de fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de l'angle d'orientation des fibres T_1 et T_0 . Ces résultats donnent un accroissement des fréquences en augmentant l'épaisseur h de 0,01 à 0,1. Les résultats trouvés montrent une excellente concordance avec ceux de Layer-wise pour les plaques minces et modérément épaisses.

Tableau 7. 24 Comparaison de paramètres de fréquence fondamentale pour une plaque encasté avec différent orientation des fibres curviligne et différent épaisseurs, [$\langle T_0/T_1 \rangle$], $T_0 = 10^\circ$

h	Méthode	T_1				
		10	30	50	60	70
0.01	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.002448	0.002254	0.002011	0.001926	0.001882
	Présente	0.002447	0.002552	0.002005	0.001921	0.001878
0.02	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.009603	0.008857	0.007915	0.007594	0.007428
	Présente	0.009585	0.008830	0.007894	0.007574	0.007412
0.03	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.02095	0.01938	0.01740	0.01673	0.01639
	Présente	0.02087	0.01931	0.01734	0.01667	0.01634
0.04	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.03580	0.03325	0.03004	0.02897	0.02843
	Présente	0.03559	0.03306	0.02989	0.02883	0.02830
0.05	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.05332	0.04974	0.04531	0.04383	0.04310
	Présente	0.05300	0.04945	0.04506	0.04361	0.04289
0.06	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.07298	0.06842	0.06282	0.06098	0.06008
	Présente	0.07240	0.06792	0.06241	0.06060	0.05972
0.07	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.09421	0.08876	0.08215	0.08001	0.07898
	Présente	0.09330	0.08800	0.08153	0.07942	0.07842
0.08	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.1166	0.1104	0.1030	0.1006	0.9950
	Présente	0.1153	0.1093	0.1021	0.0998	0.09867
0.09	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.1399	0.1331	0.1250	0.1225	0.1214
	Présente	0.1382	0.1316	0.1238	0.1214	0.1202
0.1	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.1639	0.1566	0.1481	0.1455	0.1443
	Présente	0.1618	0.1547	0.1465	0.1440	0.1428

Tableau 7. 25 Comparaison de paramètre de fréquence fondamentale pour une plaque encastree avec diffèrent orientation des fibres curviligne et diffèrent épaisseurs, [T_0/T_1], $T_1=10^\circ$

h	Méthode	T_0				
		10	30	50	60	70
0.01	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.002448	0.002368	0.002323	0.002359	0.002446
	Présente	0.002447	0.002363	0.002310	0.002341	0.002428
0.02	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.009603	0.009298	0.009125	0.009258	0.009593
	Présente	0.009585	0.009274	0.009076	0.009198	0.009530
0.03	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.02095	0.02034	0.02000	0.02028	0.02099
	Présente	0.02087	0.02025	0.02000	0.02013	0.02083
0.04	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.03580	0.03486	0.03437	0.03486	0.03602
	Présente	0.03559	0.03464	0.03410	0.03454	0.03567
0.05	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.05332	0.05209	0.05153	0.05227	0.05393
	Présente	0.05300	0.05176	0.05110	0.05179	0.05340
0.06	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.07298	0.07154	0.07102	0.07205	0.07421
	Présente	0.07240	0.07098	0.07034	0.0713	0.07340
0.07	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.09421	0.09265	0.09228	0.09365	0.09632
	Présente	0.09330	0.09179	0.09130	0.09260	0.09515
0.08	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.1166	0.1150	0.1149	0.1167	0.1198
	Présente	0.1153	0.1138	0.1136	0.1152	0.1182
0.09	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.1399	0.1384	0.1387	0.1408	0.1444
	Présente	0.1382	0.1368	0.1369	0.1389	0.1424
0.1	LWT (Ribeiro et al. 2015)	0.1639	0.1625	0.1632	0.1658	0.1699
	Présente	0.1618	0.1604	0.1611	0.1635	0.1674

7.3.1 Etude paramétrique des plaques CSRV : Cas de fibre hyperbolique

Dans cette partie, nous allons examiner l'effet du paramètre de fréquence en variant les angles d'orientation T_0 et T_1 , le rapport du module d'élasticité, le rapport d'épaisseur et les conditions

aux limites (LLLL AEAE ALAL ELEL EEEE AAAA) d'une plaque CSRV avec des fibres hyperboliques symétriques et antisymétriques.

Le calcul des fréquences est réalisé pour un degré du polynôme $P=12$.

Les résultats des tableaux (7.26-29) concernent une plaque CSRV carrée, avec l'angle d'orientation symétrique $[\pm\langle 30^\circ/60^\circ \rangle]_s$ et antisymétrique $[\pm\langle 30^\circ/60^\circ \rangle]_2$. Afin de bien observer l'effet du comportement dynamique, le rapport d'élasticité E_1/E_2 est varié pour les plaques simplement appuyées (tableau 7.20 21) et encastées (tableau 7.22 23).

Le paramètre de fréquence utilisé est : $\Omega = \omega b^2 / h \sqrt{\rho/E_2}$. Les propriétés géométriques et physiques sont : $a/h=5$, $G_{12}/E_2=0.6$, $G_{13}/E_2=0.6$, $G_{23}/E_2=0.5$, $\nu_{12}=0.25$.

Les résultats obtenus montrent que l'augmentation du rapport d'élasticité E_1/E_2 de 3 à 40 produit un accroissement des paramètres de fréquence. Les paramètres de fréquence de la plaque CSRV sont influencés par les conditions aux limites.

Tableau 7. 26 Effet du rapport du module d'élasticité E_1/E_2 sur le paramètre de fréquence d'une plaque CSRV carrée antisymétrique, AAAA

Angle d'orientation	Mode	E_1/E_2				
		3	10	20	30	40
$[\pm\langle 30^\circ/60^\circ \rangle]_2$	1	6.899	9.516	11.152	12.020	12.570
	2	13.585	16.950	18.430	18.803	19.133
	3	13.724	17.461	18.758	19.693	20.301
	4	15.124	17.947	19.416	20.411	21.048
	5	15.310	23.902	27.344	28.339	28.966
	6	17.349	24.051	28.408	29.422	30.104

Tableau 7. 27 Effet du rapport du module d'élasticité E_1/E_2 sur le paramètre de fréquence d'une plaque carrée symétrique, AAAA

Angle d'orientation	Mode	E_1/E_2				
		3	10	20	30	40
$[\pm\langle 30^\circ/60^\circ \rangle]_s$	1	6.801	9.076	10.489	11.251	11.741
	2	13.743	16.152	17.606	18.380	18.879
	3	14.631	17.895	18.501	18.920	19.298
	4	14.632	17.975	19.432	20.183	20.654
	5	14.776	23.614	25.125	25.874	26.341
	6	17.351	24.607	27.685	28.422	28.908

Tableau 7. 28 Effet du rapport E_1/E_2 sur le paramètre de fréquence d'une plaque encadrée antisymétrique

Angle d'orientation	Mode	E_1/E_2				
		3	10	20	30	40
[$\pm<30^\circ/60^\circ>$] ₂	1	9.745	11.432	12.514	13.102	13.484
	2	16.905	19.096	20.453	21.200	21.700
	3	17.211	19.571	20.970	21.726	22.226
	4	23.352	26.493	28.127	28.958	29.491
	5	23.563	28.262	29.789	30.664	31.270
	6	23.622	29.609	31.283	32.176	32.763

Tableau 7. 29 Effet du rapport E_1/E_2 sur le paramètre de fréquence d'une plaque encadrée symétrique

Angle d'orientation	Mode	E_1/E_2				
		3	10	20	30	40
[$\pm<30^\circ/60^\circ>$] _s	1	9.694	11.122	11.968	12.425	12.724
	2	16.439	17.931	18.904	19.447	19.807
	3	17.447	19.622	20.737	21.317	21.693
	4	22.865	24.894	25.997	26.573	26.940
	5	23.579	27.746	28.865	29.475	29.885
	6	23.648	29.304	30.542	31.160	31.554

Les quatre premières fréquences naturelles sont déterminées pour une plaque CSRV de douze (12) couches symétriques et antisymétriques avec différents angles d'orientation des fibres et différentes conditions aux limites LLLL AEAE ALAL ELEL.

Les propriétés géométriques et mécaniques sont : $a=1m$ $b=1m$, $a/h=200$, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=4.21.10^9 GPa$, $\nu_{12}=0.28$, $E_1=131.7.10^9 GPa$, $E_2=9.86.10^9 GPa$, $\rho =1600 kgm^{-3}$. Les plaques symétrique et antisymétrique sont respectivement désignées par [$\pm<T_0/T_1>$]_{3s}, [$\pm<T_0/T_1>$]₆.

L'angle d'orientation de fibre T_0 est égal à 60° et l'angle d'orientation de fibre T_1 est augmenté de -60° à 90° avec un incrément de 30° .

Les tableaux (7.30-31) montrent l'effet de conditions aux limites sur le comportement vibratoire de la plaque CSRV. On remarque que dans le cas où la plaque est totalement libre ou libre à deux cotés, le système devient plus souple, c'est-à-dire que la rigidité de la plaque est moins importante et les fréquences propres sont plus petites par rapport aux autres conditions. On vérifie, comme prévu, que les fréquences varient avec la variation de l'angle d'orientation de fibre T_1 .

Tableau 7. 30 Les quatre premières fréquences naturelles d'une plaque CSRV symétrique avec différents conditions aux limites

Conditions aux limites	Mode	$[\pm<60^\circ/-60^\circ]>]_{3s}$	$[\pm<60^\circ/-30^\circ]>]_{3s}$	$[\pm<60^\circ/0^\circ]>]_{3s}$	$[\pm<60^\circ/30^\circ]>]_{3s}$	$[\pm<60^\circ/60^\circ]>]_{3s}$	$[\pm<60^\circ/90^\circ]>]_{3s}$
LLLL	1	94.97	85.64	82.68	79.18	82.52	83.65
	2	117.06	108.39	116.79	135.73	126.85	94.82
	3	183.33	169.21	166.44	181.17	220.20	179.38
	4	255.86	216.73	223.46	284.42	253.17	229.07
AEAE	1	215.02	267.21	289.35	262.47	212.23	177.11
	2	388.78	435.33	492.03	513.39	431.13	340.54
	3	644.39	703.24	684.78	582.62	512.53	501.57
	4	666.58	715.79	820.05	852.25	725.87	574.83
ALAL	1	49.72	45.39	50.57	65.85	93.20	119.18
	2	126.74	112.11	120.58	147.05	156.14	152.43
	3	209.83	183.84	203.10	271.33	301.58	222.79
	4	311.20	255.99	269.85	319.13	384.41	367.99
ELEL	1	123.79	107.57	118.44	155.38	220.02	269.59
	2	181.90	145.06	155.11	200.63	259.38	302.06
	3	340.02	282.42	306.47	378.05	382.93	341.92
	4	358.27	313.98	323.20	418.47	577.84	458.76

Tableau 7. 31 Les quatre premières fréquences naturelles d'une plaque CSRV antisymétriques avec différents conditions aux limites

Conditions aux limites	Mode	$[\pm<60^\circ/-60^\circ]>]_6$	$[\pm<60^\circ/-30^\circ]>]_6$	$[\pm<60^\circ/0^\circ]>]_6$	$[\pm<60^\circ/30^\circ]>]_6$	$[\pm<60^\circ/60^\circ]>]_6$	$[\pm<60^\circ/90^\circ]>]_6$
LLLL	1	95.02	85.63	82.68	79.19	82.57	83.71
	2	118.95	110.60	119.78	140.10	129.76	95.96
	3	181.86	167.28	163.69	177.22	217.36	180.39
	4	262.14	218.73	225.92	291.03	254.79	229.12
AEAE	1	215.08	266.90	289.36	262.39	212.61	177.11
	2	390.01	436.45	494.08	518.29	434.15	342.07
	3	642.29	699.67	682.34	577.52	509.93	499.46
	4	670.17	720.08	830.50	869.18	738.33	577.75
ALAL	1	49.70	45.36	50.48	65.69	92.89	118.86
	2	127.88	113.39	122.04	149.20	157.81	152.98
	3	209.99	183.53	202.36	269.56	306.39	223.52
	4	313.02	258.81	276.23	328.65	382.61	369.54
ELEL	1	124.09	107.55	118.35	155.17	219.22	268.41
	2	183.05	145.57	155.42	201.29	260.09	301.98
	3	341.03	282.58	306.35	381.29	384.79	342.20
	4	360.15	320.58	328.25	417.93	582.22	459.63

Dans les tableaux (7.32-35), nous allons examiner l'effet de paramètres de fréquence d'une plaque carrée CSRV, en variant le rapport du module d'élasticité, le rapport d'épaisseur, l'angle d'orientation des fibres et les conditions aux limites.

Le rapport d'épaisseur a/h est égale 10, 20, 50, 100. Le rapport E_1/E_2 est égale 3, 10, 20, 40.

Les propriétés mécaniques sont celles du tableau (7.26).

Les résultats montrent que le paramètre de fréquence fondamental augmente lorsque le rapport d'épaisseur et le rapport d'élasticité sont augmentés. On constate que, le paramètre de fréquence diminue avec l'augmentation de T_I de 0 à 90 et l'inverse se produit lorsque T_I varie de -60 à 0.

L'augmentation du rapport d'épaisseur et le rapport d'élasticité accroît la valeur de paramètre de fréquence et par conséquent fait augmenter la rigidité de la plaque.

Afin de montrer l'effet de l'angle d'orientation de la fibre $[\pm \langle T_0 / T_I \rangle]_s$ sur les modes propres d'une plaque CSRV, les quatre premières formes de mode sont présentées dans la Figure (7.17). L'angle d'orientation des fibres T_0 est fixé à 60° et T_I est varié de -60° jusqu'à 60° . Les propriétés mécaniques et géométriques utilisées sont : $a=b=1m$, $h=0,01m$, $E_1=131,7 \cdot 10^9 N/m^2$, $E_2=9,86 \cdot 10^9 N/m^2$, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=4,2110^9 N/m^2$, $\nu_{12}=0,28$, $\rho=1600 kg/m^3$.

On peut observer que les modes de la plaque sont influencés par l'angle d'orientation T_I à son bord.

Tableau 7. 32 Effet du rapport E_1/E_2 et le rapport d'épaisseur a/h sur le paramètre de fréquence pour une plaque CSRV encadrée symétrique

E_1/E_2	a/h	$[\pm \langle 60^\circ / -60^\circ \rangle]_s$	$[\pm \langle 60^\circ / -30^\circ \rangle]_s$	$[\pm \langle 60^\circ / 0^\circ \rangle]_s$	$[\pm \langle 60^\circ / 30^\circ \rangle]_s$	$[\pm \langle 60^\circ / 60^\circ \rangle]_s$	$[\pm \langle 60^\circ / 90^\circ \rangle]_s$
3	10	11.936	12.687	13.094	12.879	12.500	12.402
	20	12.905	13.832	14.346	14.096	13.625	13.491
	50	13.248	14.239	14.793	14.531	14.023	13.870
	100	13.302	14.302	14.863	14.599	14.085	13.928
10	10	14.786	16.505	17.441	17.025	16.272	16.083
	20	16.871	19.535	20.972	20.381	19.335	19.142
	50	17.778	20.908	22.581	21.905	20.682	20.460
	100	17.940	21.147	22.856	22.167	20.910	20.677
20	10	17.063	19.080	20.188	19.735	18.757	18.362
	20	20.552	24.341	26.322	25.568	24.181	23.874
	50	22.350	27.304	29.820	28.857	27.137	26.880
	100	22.711	27.883	30.492	29.490	27.690	27.428
40	10	19.600	21.610	22.764	22.316	21.091	20.331
	20	25.359	30.029	32.461	31.608	29.836	29.202
	50	28.999	36.218	39.765	38.467	36.145	35.783
	100	29.843	37.648	41.432	40.029	37.527	37.202

Tableau 7. 33 Effet du rapport E_1/E_2 et le rapport d'épaisseur a/h sur le paramètre de fréquence pour une plaque CSRV encastree antisymétrique

E_1/E_2	a/h	$[\pm<60^\circ/-60^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/-30^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/0^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/30^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/60^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/90^\circ>]_2$
3	10	11.991	12.737	13.130	12.880	12.491	12.398
	20	12.952	13.863	14.365	14.058	13.580	13.465
	50	13.289	14.259	14.803	14.478	13.964	13.836
	100	13.342	14.321	14.871	14.543	14.023	13.892
10	10	15.115	16.844	17.748	17.263	16.390	16.075
	20	17.208	19.814	21.263	20.421	19.207	18.923
	50	18.120	21.113	22.845	21.835	20.415	20.111
	100	18.281	21.334	23.114	22.077	20.618	20.305
20	10	17.680	19.709	20.754	20.334	19.172	18.458
	20	21.195	24.930	26.949	25.876	24.150	23.532
	50	23.014	27.735	30.425	28.914	26.730	26.136
	100	23.379	28.264	31.086	29.495	27.206	26.597
40	10	20.611	22.566	23.585	23.365	21.959	20.632
	20	26.445	31.078	33.519	32.424	30.182	28.909
	50	30.104	37.001	40.852	38.790	35.654	34.533
	100	30.959	38.306	42.501	40.221	36.817	35.685

Tableau 7. 34 Effet du rapport E_1/E_2 et le rapport d'épaisseur a/h sur le paramètre de fréquence d'une plaque CSRV symétrique, AAAA

E_1/E_2	a/h	$[\pm<60^\circ/-60^\circ>]_s$	$[\pm<60^\circ/-30^\circ>]_s$	$[\pm<60^\circ/0^\circ>]_s$	$[\pm<60^\circ/30^\circ>]_s$	$[\pm<60^\circ/60^\circ>]_s$	$[\pm<60^\circ/90^\circ>]_s$
3	10	7.418	7.297	7.335	7.551	7.507	7.266
	20	7.655	7.517	7.554	7.789	7.743	7.480
	50	7.727	7.585	7.620	7.862	7.815	7.545
	100	7.738	7.595	7.630	7.872	7.826	7.554
10	10	10.322	9.838	10.048	10.912	10.809	9.821
	20	11.082	10.495	10.697	11.682	11.552	10.405
	50	11.357	10.730	10.914	11.950	11.807	10.593
	100	11.402	10.768	10.947	11.994	11.848	10.621
20	10	12.658	11.991	12.320	13.593	13.505	12.046
	20	14.222	13.302	13.659	15.210	15.066	13.259
	50	14.878	13.871	14.161	15.841	15.658	13.685
	100	14.994	13.966	14.241	15.952	15.759	13.751
40	10	15.348	14.566	15.000	16.640	16.586	14.638
	20	18.398	17.190	17.694	19.919	19.781	17.161
	50	19.944	18.460	18.889	21.415	21.187	18.189
	100	20.247	18.703	19.096	21.698	21.445	18.356

Tableau 7. 35 Effet du rapport E_1/E_2 et le rapport d'épaisseur a/h sur le paramètre de fréquence d'une plaque antisymétrique, AAAA

E_1/E_2	a/h	$[\pm<60^\circ/-60^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/-30^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/0^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/30^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/60^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/90^\circ>]_2$
3	10	7.452	7.324	7.378	7.665	7.595	7.276
	20	7.681	7.540	7.595	7.902	7.830	7.488
	50	7.751	7.605	7.660	7.973	7.900	7.552
	100	7.761	7.614	7.670	7.983	7.911	7.561
10	10	10.570	10.039	10.314	11.558	11.304	9.864
	20	11.284	10.680	10.975	12.346	12.051	10.417
	50	11.541	10.907	11.195	12.603	12.293	10.592
	100	11.581	10.942	11.228	12.642	12.329	10.618
20	10	13.196	12.396	12.810	14.751	14.405	12.112
	20	14.641	13.701	14.202	16.452	16.011	13.231
	50	15.247	14.241	14.722	17.066	16.577	13.613
	100	15.351	14.330	14.803	17.161	16.663	13.671
40	10	16.368	15.303	15.759	18.382	17.965	14.759
	20	19.178	17.833	18.573	21.942	21.346	17.052
	50	20.582	19.108	19.828	23.442	22.724	17.947
	100	20.852	19.344	20.038	23.689	22.947	18.089

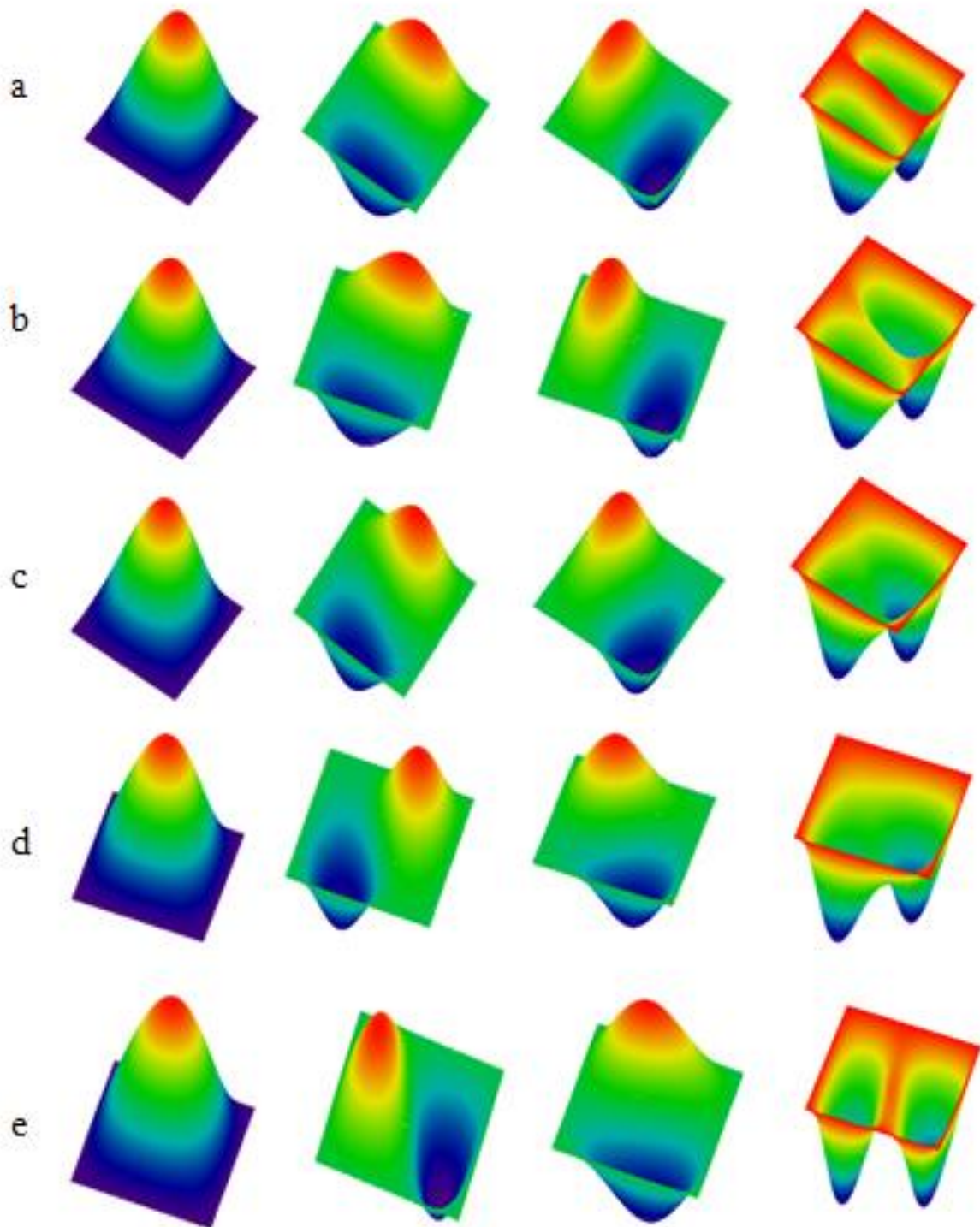


Fig. 7. 17 Effet de l'angle d'orientation $[\pm\langle T_\theta/T_l \rangle]_s$, sur les quatre premières modes d'une plaque avec des fibres curvilignes, (a) $[\pm\langle 60^\circ/-60^\circ \rangle]_s$, (b) $[\pm\langle 60^\circ/-30^\circ \rangle]_s$, (c) $[\pm\langle 60^\circ/0^\circ \rangle]_s$, (d) $[\pm\langle 60^\circ/30^\circ \rangle]_s$, (e) $[\pm\langle 60^\circ/60^\circ \rangle]_s$

7.4 Plaques immergées dans un fluide

Les cas traités de l'interaction fluide-structure sont très limités, de sorte que les travaux réalisés dans ce contexte sont focalisés sur l'interaction des plaques isotropes et composites couplés avec le fluide.

A cet effet, nous allons effectuer une étude de comparaison entre le modèle actuel et les solutions disponibles pour les cas des plaques isotropes et composites stratifiés à rigidité constante, immergée dans un fluide.

Les résultats obtenus par la présente méthode et qui sont récapitulés dans les tableaux (7.36-37) sont comparés aux différentes méthodes de la littérature; en l'occurrence (Kerboua et al. 2008), (Fu et Price, 1987) et (Serduoun et al. 2015) qui ont utilisé la méthode des éléments finis et l'approche expérimentale employée par (Haddara et al. 1996) et (Lindholm et al. 1965).

Les propriétés mécaniques et géométriques utilisés dans le tableau (7.36) sont :

$a = 0,20165m$, $b=0,655m$, $h=9,63 \times 10^{-3}m$, $E=207Gpa$, $\nu=0,3$, $\rho=7850kg/m^3$, $\rho_f=1000kg/m^3$ (masse volumique du fluide), profondeur d'immersion $h_1=h_2=0.4-h/2$.

Les caractéristiques mécaniques et physiques du tableau (7.37) sont : $a=b = 10m$, $h = 0,238m$, $E=206Gpa$, $\nu=0,3$, $\rho=7830kg/m^3$, rapport d'immersion $h_1/a=(0.05, 0.1, 0.3, 0.5)$.

Tableau 7. 36 Comparaison des cinq premières fréquences (rd/s) d'une plaque isotrope ALAL, submergée dans l'eau.

Méthode	Mode				
	1	2	3	4	5
Présente	32.402	130.576	144.961	295.439	311.528
TSDT (Serduoun et al. 2015)	32.410	130.70	145.51	295.95	312.61
CLPT (Kerboua et al. 2008),	31.28	126.40	141.78	285.98	304.57
EXP. (Haddara et al. 1996)	28.72	117.13	154.51	281.79	335.04

Tableau 7. 37 Comparaison des trois premières fréquences (rd/s) d'une plaque ELLL submergée dans l'eau, en fonction (h_1/a) (h_1 variable and $h_2 \gg a$)

h_1/a	Méthode	Mode		
		1	2	3
A l'air	CLPT (Kerboua et al. 2008),	12.93	31.69	79.37
	(Fu et Price, 1987)	12.94	31.69	79.37
	TSDT (Serduoun et al. 2015)	12.82	31.31	78.39
	Présente	12.80	31.17	78.20
0.05	CLPT (Kerboua et al. 2008),	8.60	21.09	52.92
	(Fu et Price, 1987)	8.95	23.10	55.7
	TSDT (Serduoun et al. 2015)	8.20	20.05	50.20
	Présente	8.20	19.98	50.15
0.1	CLPT (Kerboua et al. 2008),	8.17	20.05	50.32
	(Fu et Price, 1987)	8.04	21.54	53.23
	Présente	7.82	19.05	47.82
0.3	CLPT (Kerboua et al. 2008),	7.41	18.16	45.59
	(Fu et Price, 1987)	7.51	20.34	50.83
	Présente	7.11	17.31	43.46
0.5	CLPT (Kerboua et al. 2008),	7.00	17.16	42.98
	(Fu et Price, 1987)	7.35	20.19	50.11
	TSDT (Serduoun et al. 2015)	7.82	19.11	47.86
	EXP. (Lindholm et al. 1965).	6.56	19.66	45.32
	Présente	6.96	16.96	42.58

Le tableau (7.38) récapitule les résultats de l'étude de validation d'une plaque (CSRC) à huit couches symétriques $[45/-45/-45/45]_s$ immergées dans l'eau. Les fréquences sont examinées avec deux cas : plaque flottante sur la surface libre du fluide et plaque totalement immergée dans un fluide. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions de FSDT (Pal et al. 2001), CPT (Alireza, 2012) et TSDT Serduoun et al. (2015).

Les propriétés mécaniques de matériaux graphite-époxy utilisé dans cet exemple sont : $E_1=128 \text{ Gpa}$, $E_2=11 \text{ Gpa}$, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=4,48 \text{ Gpa}$, $\nu_{12}=0,25$, $\rho=1500 \text{ kg/m}^3$ et la densité du fluide $\rho_f=1000 \text{ kg/m}^3$.

D'après les résultats présentés dans les tableaux (7.36-38), on peut constater que la méthode actuelle est en très bon accord avec les solutions de la littérature pour les différents cas de figure : plaque composite et isotrope, immergée (dans l'eau) et non immergée (à l'air). On a

observé que les fréquences diminuent lorsque le rapport de profondeur d'immersion (h_l/a) est augmenté.

Tableau 7. 38 Comparaison des fréquences (Hz) d'une plaque composite immergée, LLLLE en graphite/epoxy avec huit couches $a=0.152m$, $b=0.076m$, $h=0.13 \times 10^{-3}m$, $h_l=0.076m$, $h_2=0.076m$

Mode	A l'air		Plaque en interaction avec fluide							
			plaque sur surface libre du fluide				Plaque totalement immergées dans le fluide			
	Présente	CPT Alireza, (2012)	Présente	CPT Alireza, (2012)	FSDT Pal et al. (2001)	TSDT Serduoun et al. (2015)	Présente	CPT Alireza, (2012)	FSDT Pal et al. (2001)	TSDT Serduoun et al. (2015)
1	31.88	31.69	5.95	6.01	5.94	6.02	8.26	8.35	813	8.38
2	190.74	189.60	35.58	35.95	-	-	-	-	-	-
3	226.74	226.24	42.3	42.91	-	-	-	-	-	-

7.4.1 Plaques (CSRV) immergées dans un fluide

Dans cette partie, nous effectuons une nouvelle investigation pour l'interaction fluide-structure. Cette étude concerne l'analyse de la vibration libre d'une plaque CSRV couplée avec le fluide. La plaque CSRV à fibres hyperboliques présente des caractéristiques mécaniques plus élevée que celle de la plaque CSRV à fibres paraboliques, car il caractérise par la variation de deux angles d'orientation T_0 et T_1 . A cette effet, nous allons choisi des fibres hyperboliques pour examiner ses performances vibratoires en immergeant la plaque CSRV dans un fluide. Les paramètres de fréquence sont déterminés avec différents paramètres : la profondeur d'immersion, l'angle d'orientation T_1 et T_0 , le rapport E_1/E_2 et le rapport d'épaisseur. L'effet de l'angle d'orientation T_0 et T_1 des fibres hyperboliques de la plaque CSRV immergée est présenté dans les tableaux (7.39-41) avec des résultats fréquentielles. La plaque CSRV immergée est examinée avec les rapports d'immersions h_l/a de 0.05, 0.1, 0.3, 0.5. Les propriétés mécaniques et géométriques sont indiquées dans chaque tableau.

Dans le tableau (7.41), l'angle d'orientation des fibres T_0 est fixé à 30° et le T_1 varie de 10° à 60° et l'inverse se faite dans les second cas ($T_1 = 30^\circ$ et T_0 varie). Dans le cas de la plaque ELEL, on constate que les fréquences propres augmentent avec l'augmentation de l'angle d'orientation [$\pm <T_0 / T_1>$] quel que soit le rapport d'immersion h_l/a . Par contre, comme montre les résultats du tableau (7.39), les fréquences diminuent lorsque T_1 augmente pour la

condition aux limites encastées. Les fréquences diminuent au fur et à mesure que le rapport h_1/a augmente, c'est-à-dire que la hauteur d'immersion augmente. Ceci est dû au fait que la surface immergée au fluide devient plus grande, d'où un effet d'inertie plus grand qui induit une masse ajoutée plus grande.

Tableau 7. 39 Effet de l'angle d'orientation T_1 sur le paramètre de fréquence d'une plaque CSRV symétrique immergé dans l'eau $EEEE \Omega = (\omega a) \sqrt{\rho_s/E_2}$ $a=0.5m, b=0.5m, h=0.005m, E_1/E_2= 24.028, G_{ij}/E_2 = 0.522, \nu_{12}=0.29, \rho = 1 \text{ kg/m}^3, h_2 \gg a, h_1 \text{ variable}$

Angle	À l'air	Plaque immergée dans l'eau			
	CLPT	Présente	$h_1/a=0.05$	$h_1/a=0.3$	$h_1/a=0.5$
$[\pm<40^\circ/10^\circ>]s$	0.318	0.322	0.003005	0.002426	0.002359
$[\pm<40^\circ/20^\circ>]s$	0.312	0.315	0.00297	0.002398	0.002332
$[\pm<40^\circ/30^\circ>]s$	0.303	0.306	0.002909	0.002348	0.002284
$[\pm<40^\circ/40^\circ>]s$	0.292	0.295	0.002833	0.002870	0.00224
$[\pm<40^\circ/50^\circ>]s$	0.282	0.284	0.002753	0.00222	0.002162
$[\pm<40^\circ/60^\circ>]s$	0.274	0.276	0.00268	0.002164	0.002105
$[\pm<40^\circ/70^\circ>]s$	0.268	0.270	0.002627	0.002121	0.002063

Tableau 7. 40 Les trois fréquences naturelles (rad/s) d'une plaque CRSV antisymétrique immergée dans l'eau. $a=1m, b=1m, h=0.01m, E_1/E_2=40, G_{ij}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25, \rho = 1540\text{kg/m}^3, h_2 \gg a, h_1 \text{ variable}$

Angle d'orientation	h_1/a	Méthode	Mode		
			1	2	3
$[\langle 10/20 \rangle, \langle 10/-10 \rangle]$	À l'air	LWT (Ribeiro et al. 2014)	259.7	318.5	431.7
		Présente	258.6	317.4	424.4
	0.05	87.7	134.8	222.3	
		0.1	81.8	125.9	208.6
		0.3	71.9	110.9	184.6
		0.5	70.1	108.1	180
$[\langle 10/20 \rangle, \langle 10/0 \rangle]$	À l'air	LWT (Ribeiro et al. 2014)	279.9	334.5	443.4
		Présente	279.1	333.4	435.5
	0.05	93.6	138.8	225.8	
		0.1	87.4	129.7	211.6
		0.3	76.8	114.2	187.1
		0.5	74.8	111.3	182.4
$[\langle 10/20 \rangle, \langle 10/10 \rangle]$	À l'air	LWT (Ribeiro et al. 2014)	303.4	350.3	456.0
		Présente	302.4	349.0	446.8
	0.05	100	142.9	229.8	
		0.1	93.3	133.5	215.3
		0.3	82	117.5	190.1
		0.5	79.9	114.5	185.4

Tableau 7. 41 Effet des angles d'orientations T_1 et T_0 sur la fréquence (rad/s) d'une plaque CSRV symétrique immergée dans l'eau ELEL $[\pm \langle T_0/T_1 \rangle]_s$, $T_0=30^\circ$ et $[\pm \langle T_0/T_1 \rangle]_2$, $T_1=30^\circ$. $a=1m$, $b=1m$, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=4.21.10^9 N/m^2$, $\nu_{12}=0.28$, $E_1=131.7.10^9 N/m^2$, $E_2=9.86.10^9 N/m^2$, $\rho=1600 kg/m^3$, $h_2 \gg a$, h_1 variable.

h_1/a	T_1					
	10°	20°	30°	40°	50°	60°
À l'air	173.91	182.60	198.55	224.23	260.29	305.14
0.1	59.34	62.81	68.46	77.04	88.75	103.2
0.3	52.25	55.32	60.3	67.85	78.16	90.87
0.5	50.92	53.91	58.77	66.13	76.17	88.55
h_1/a	T_0					
	10°	20°	30°	40°	50°	60°
À l'air	170.93	180.77	198.55	225.07	258.53	295.26
0.1	59.24	62.92	68.46	75.81	84.12	92.12
0.3	52.18	55.43	60.3	66.74	74.00	80.98
0.5	50.85	54.02	58.77	65.04	72.10	78.90

Les tableaux (7.42-43) montrent les paramètres de fréquence pour une plaque CSRV carrée à quatre couches symétriques et antisymétriques $[\pm \langle T_0 / T_1 \rangle]_s$, $[\pm \langle T_0 / T_1 \rangle]_2$, immergée dans l'eau. Afin de voir l'impact du taux d'immersion sur le comportement dynamique de la plaque CSRV, l'angle d'orientation T_1 est varié en utilisant la condition aux limites ELEL.

Les propriétés mécaniques et géométriques sont :

$$a=1m, \quad b=1m, \quad h=0.01m, \quad G_{12}=G_{13}=G_{23}=4.21.10^9 N/m^2, \quad \nu_{12}=0.28, \quad E_1=131.7.10^9 N/m^2, \quad E_2=9.86.10^9 N/m^2, \quad \rho=1600 kg/m^3, \quad h_2 \gg a \text{ et } h_1 \text{ variable.}$$

On constate que les fréquences diminuent lorsque T_1 augmente de -60° à 0° et à partir de $T_1=0^\circ$, les fréquences augmentent de manière significative jusqu'à 60° . Dans le cas des plaques immergées, l'augmentation de la profondeur d'immersion (h_1/a) évolue positivement la valeur de la masse ajoutée au système et diminuent automatiquement les fréquences.

Tableau 7. 42 Effet de l'angle d'orientation T_1 sur la fréquence fondamentale (rad/s) d'une plaque CSRV symétrique immergée dans l'eau ELEL

h_1/a	$[\pm \langle 60^\circ / -60^\circ \rangle]_s$	$[\pm \langle 60^\circ / -30^\circ \rangle]_s$	$[\pm \langle 60^\circ / 0^\circ \rangle]_s$	$[\pm \langle 60^\circ / 30^\circ \rangle]_s$	$[\pm \langle 60^\circ / 60^\circ \rangle]_s$
A l'air	234.62	210.15	230.75	295.26	421.10
0.1	77.71	67.00	72.46	92.12	129.01
0.3	68.38	58.91	63.70	80.98	113.42
0.5	66.63	57.40	62.06	78.90	110.50

Tableau 7. 43 Effet de l'angle d'orientation T_1 sur la fréquence fondamentale (rad/s) d'une plaque CSRV antisymétrique immergé dans l'eau ELEL

$h1/a$	$[\pm<60^\circ/-60^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/-30^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/0^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/30^\circ>]_2$	$[\pm<60^\circ/60^\circ>]_2$
A l'aire	241.38	210.00	229.40	293.39	409.21
0.1	82.26	69.12	74.67	95.54	130.2
0.3	72.42	60.8	65.67	84.03	114.49
0.5	70.57	59.24	63.98	81.87	111.55

Une autre étude est faite pour examiner l'effet du rapport d'élasticité E_1/E_2 avec les différentes profondeurs d'immersion. La plaque CSRV est constituée de trois couches antisymétriques [$<30/40>$, $<30/50>$, $<30/60>$], avec les conditions aux limites, encadrée et simplement appuyée. Les résultats obtenus sont résumés dans les tableaux (7.44-.45). Les propriétés mécanique et géométrique de la plaque : E_1/E_2 est varié, $G_{12}/E_2=0.6$, $G_{13}/E_2=0,6$, $G_{23}/E_2=0.5$, $\nu_{12}=0.25$ et le rapport d'épaisseur a/h est égal à 5, où $a/b = 1$. Le paramètre de fréquence utilisé dans cette étude est : $\Omega = \omega a^2/h \sqrt{\rho_s/E_2}$.

Les résultats obtenus montrent que l'augmentation de rapport E_1/E_2 de 3 à 40 provoque une augmentation de paramètre de fréquence. Le même comportement dynamique des fréquences par rapport à la profondeur d'immersion est observé, c'est-à-dire une masse ajoutée plus importante. Les résultats obtenus sont influencés par les conditions aux limites, par exemple, les fréquences de la plaque encadrée sont supérieures à celles obtenues dans le cas de la plaque simplement appuyée.

Tableau 7. 44 Effet du rapport du module d'élasticité E_1/E_2 sur le paramètre de fréquence pour une plaque CSRV antisymétrique immergée dans l'eau, EEEE ($h_2 \gg a$, $h1$ variable)

E_1/E_2	$h1/a$	Mode			
		1	2	3	4
10	A l'air	10.908	16.973	19.533	20.185
	0.1	0.42	0.787	0.881	1.172
	0.3	0.366	0.685	0.767	1.02
	0.5	0.356	0.666	0.746	0.992
20	A l'air	11.460	17.369	19.941	21.065
	0.1	0.437	0.798	0.914	1.184
	0.3	0.38	0.695	0.796	1.031
	0.5	0.37	0.676	0.774	1.003
40	A l'air	11.920	17.730	20.439	21.961
	0.1	0.451	0.81	0.94	1.195
	0.3	0.393	0.705	0.818	1.04
	0.5	0.382	0.686	0.796	1.012

Tableau 7. 45 Effet du rapport du module d'élasticité E_1/E_2 sur le paramètre de fréquence pour une plaque CSRV antisymétrique immergée dans l'eau, AAAA ($h \gg a$, h variable)

E_1/E_2	h/a	Mode			
		1	2	3	4
10	A l'air	8.559	14.823	15.342	15.552
	0.1	0.347	0.732	0.847	1.134
	0.3	0.302	0.638	0.737	0.987
	0.5	0.294	0.62	0.717	0.96
20	A l'air	9.607	15.339	15.473	16.128
	0.1	0.381	0.755	0.887	1.153
	0.3	0.331	0.657	0.773	1.004
	0.5	0.322	0.639	0.752	0.977
40	A l'air	10.504	15.570	15.640	16.806
	0.1	0.409	0.776	0.919	1.17
	0.3	0.356	0.675	0.8	1.019
	0.5	0.347	0.657	0.778	0.991

Tableau 7. 46 Effet d'épaisseur h sur la fréquence naturelle pour une plaque CSRV symétrique immergée dans l'eau, EEEE. $G_{12}=G_{13}=G_{23}=4.21 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu_{12}=0.28$, $E_1=131.7 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, $E_2=9.86 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$, $h \gg a$, h variable

h	h/a	$[\pm < 30^\circ / 10^\circ >]_s$	$[\pm < 30^\circ / 20^\circ >]_s$	$[\pm < 30^\circ / 30^\circ >]_s$	$[\pm < 30^\circ / 40^\circ >]_s$	$[\pm < 30^\circ / 50^\circ >]_s$	$[\pm < 30^\circ / 60^\circ >]_s$
0.01	A l'air	608.10	594.94	575.89	554.28	533.60	517.01
	0.1	203.11	200.26	195.65	190.09	184.49	179.79
	0.3	178.76	176.29	172.28	167.43	162.55	158.43
	0.5	174.19	171.78	167.89	163.17	158.42	154.41
0.05	A l'air	2655.04	2613.33	2550.29	2476.61	2403.91	2344.28
	0.1	1680.51	1661.02	1629.73	1591.54	1552.38	1519.04
	0.3	1527.61	1510.92	1483.72	1450.25	1415.65	1385.92
	0.5	1497.08	1480.90	1454.48	1421.91	693.34	1359.15
0.1	A l'air	4095.09	4070.08	4027.77	3973.49	3913.11	3856.61
	0.1	3141.73	3126.31	3099.92	3065.00	3024.72	2985.63
	0.3	2928.93	2915.98	2893.25	2862.61	2826.65	2791.19
	0.5	2884.09	2871.62	2849.61	2819.82	2784.73	2750.02
0.2	A l'air	5309.48	5314.04	6385.69	5305.60	5290.47	6370.42
	0.1	4630.76	4632.91	6052.95	4625.16	4612.77	6037.64
	0.3	4438.28	4440.35	5946.98	4433.60	4422.18	5931.81
	0.5	4395.17	4397.23	5922.15	4390.72	4379.52	5907.02

Tableau 7. 47 Effet d'épaisseur h sur cinq premières fréquences natural (rad/s) pour une plaque CSRV symétrique immergée dans l'eau, EEEE $a=1, b=1, E_1 = 173GPa, E_2 = 7.2GPa, G_{ij}=3.76GPa, \nu_{12} = 0.29, \rho=1540kg/m^3, h_2 \gg a, h_1$ variable

h	h_1/a	Méthode	Mode					
			1	2	3	4	5	
0.01	A l'air	TSDT	710.77	912.18	1335.49	1689.69	1836.71	
		LWT (Ribeiro et al. 2015)	711.10	912.46	1334.69	1689.63	1837.88	
		Présente	710.55	911.65	1334.46	1988.37	1834.24	
	0.05		240.507	408.154	643.323	770.018	854.447	
	0.1		224.446	381.673	603.874	725.720	806.201	
	0.3		197.280	336.434	534.924	645.145	719.700	
	0.5		192.191	327.907	521.761	629.499	702.839	
	0.1	A l'air	TSDT	4284.20	5761.83	8193.46	8247.32	9210.52
			LWT (Ribeiro et al. 2015)	4246.21	5719.16	8047.50	8172.03	9088.73
			Présente	4219.15	5683.17	7966.52	8112.59	9013.26
		0.05		3295.60	4898.04	6361.50	6855.63	8006.67
		0.1		3180.30	4800.21	6182.98	6696.47	7902.38
0.3			2952.32	4585.27	5832.08	6390.92	7622.81	
0.5			2904.67	4536.02	5758.78	6328.47	7549.12	

Dans le dernier exemple, nous avons étudié l'effet de l'épaisseur h de la plaque CSRV immergée dans un fluide, en variant la profondeur d'immersion et l'angle d'orientation des fibres. Les résultats du tableau (7.46) sont calculés en changeant le rapport d'épaisseur de 0,01 à 0,2. L'angle d'orientation des fibres T_0 est constant ($T_0=30^\circ$) et T_1 est varié de 10° à 60° avec un pas de 10° . La même étude a été réalisée en adoptant l'orientation des fibres de [$\langle 90/45 \rangle, \langle 60/30 \rangle \langle 90/45 \rangle$] et en utilisant les épaisseurs de 0,01 et 0,1 (tableau 7.47).

A travers ces exemples, on résulte que les fréquences augmentent avec l'augmentation de l'épaisseur, ce que signifie que la rigidité de la plaque augmente. L'effet d'inertie (masse ajoutée) provoque la diminution de la fréquence.

Les variations de fréquences propres en fonction du niveau du fluide pour différent d'angles d'orientation sont illustrées dans les figures (7.18-23). Le même matériau utilisé dans le tableau (7.46) est gardé. On constate que les fréquences propres diminuent avec l'augmentation du rapport d'immersion h_1/a quel que soit l'angle d'orientation.

Les figures (7.24-27) montrent les quatre premières modes d'une plaque CSRV symétrique [$\pm \langle 60^\circ/30^\circ \rangle$], pour deux cas différentes : plaque dans l'air et plaque en contact avec le fluide.

Les propriétés géométriques et physiques de la plaque sont : $a=1m$, $b=1m$, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=4,21.10^9 N/m^2$, $\nu_{12}=0,28$, $E_1=131,7.10^9 N/m^2$, $E_2=9,86.10^9 N/m^2$, $\rho=1600kg/m^3$.

On observe que les formes de mode de la plaque en contact avec le fluide, présentent des déformations importantes par rapport à celles dans l'air. La forme de mode de la plaque, en contact avec le fluide est influencée par la profondeur d'immersion h_l/a .

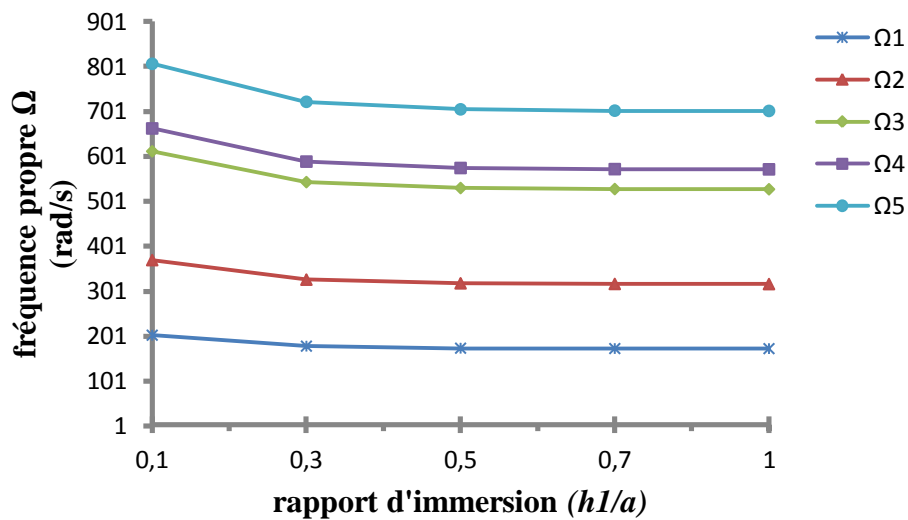


Fig. 7. 18 Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque CSRV [$\pm<30^\circ/10^\circ>$]_s, EEEE, en fonction du rapport d'immersion (h_l/a) et $h_2 \gg a$, $h=0.01$

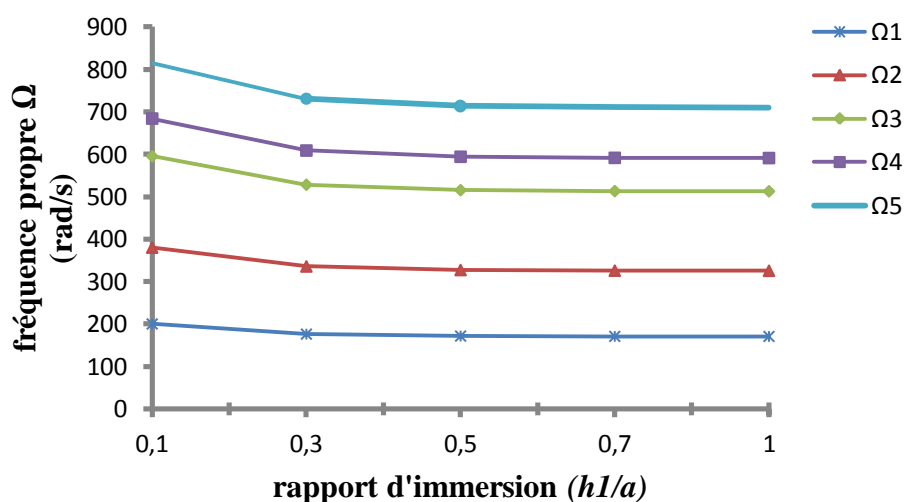


Fig. 7. 19 Variation de la fréquence propre (rd/s) d'une plaque CSRV [$\pm<30^\circ/20^\circ>$]_s, EEEE, en fonction du rapport d'immersion (h_l/a) et $h_2 \gg a$, $h=0.01$

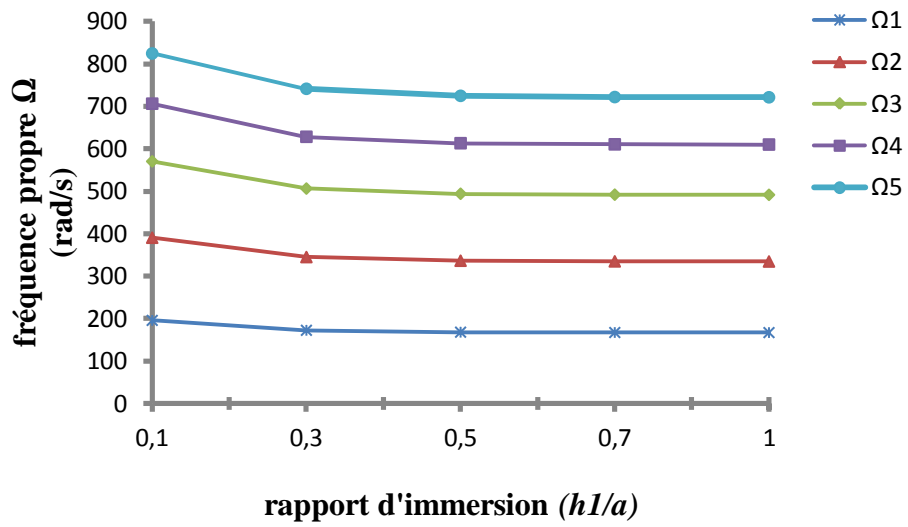


Fig. 7. 20 Variation de la fréquence propre (rd/s) d’une plaque CSRV [$\pm<30^\circ/30^\circ>$]_s, EEEE, en fonction du rapport d’immersion ($h1/a$) et $h2 \gg a$, $h=0.0$

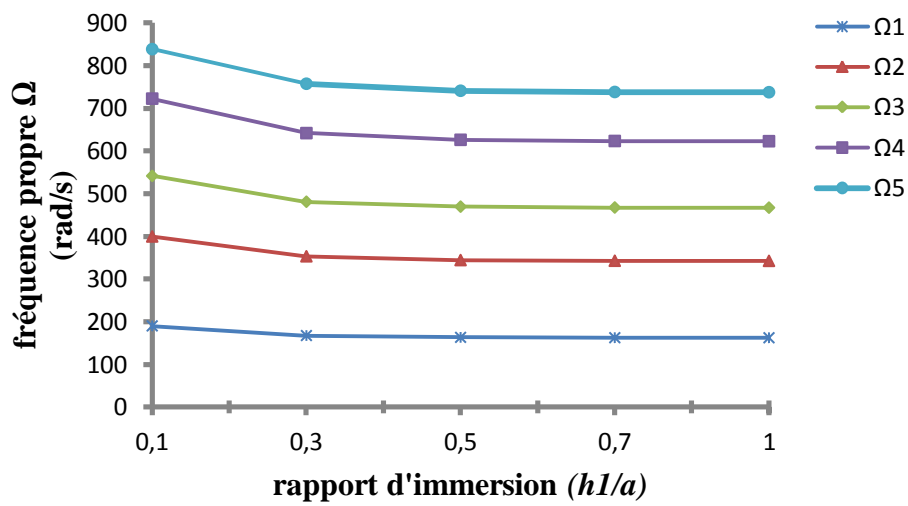


Fig. 7. 21 Variation de la fréquence propre (rd/s) d’une plaque CSRV [$\pm<30^\circ/40^\circ>$]_s, EEEE, en fonction du rapport d’immersion ($h1/a$) et $h2 \gg a$, $h=0.01$

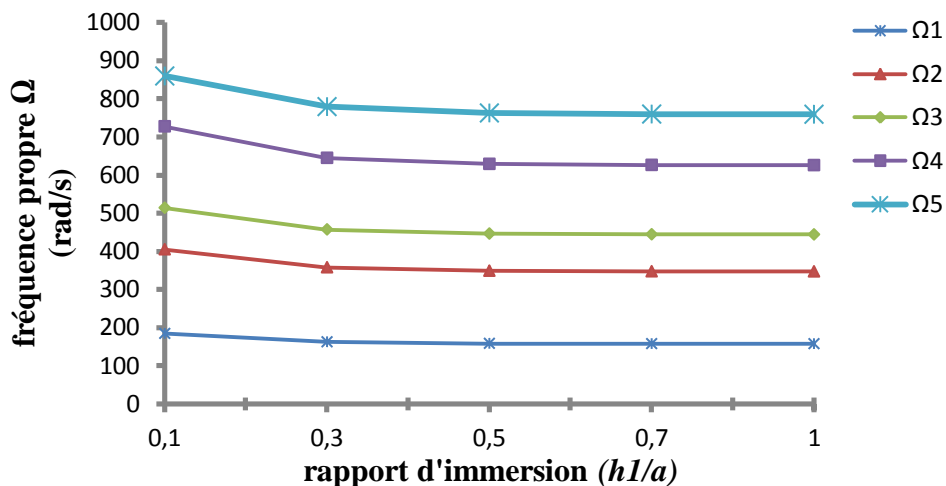


Fig. 7. 22 Variation de la fréquence propre (rd/s) d’une plaque CSRV [$\pm<30^\circ/50^\circ>$], EEEE, en fonction du rapport d’immersion ($h1/a$) et $h2 \gg a$, $h=0.01$

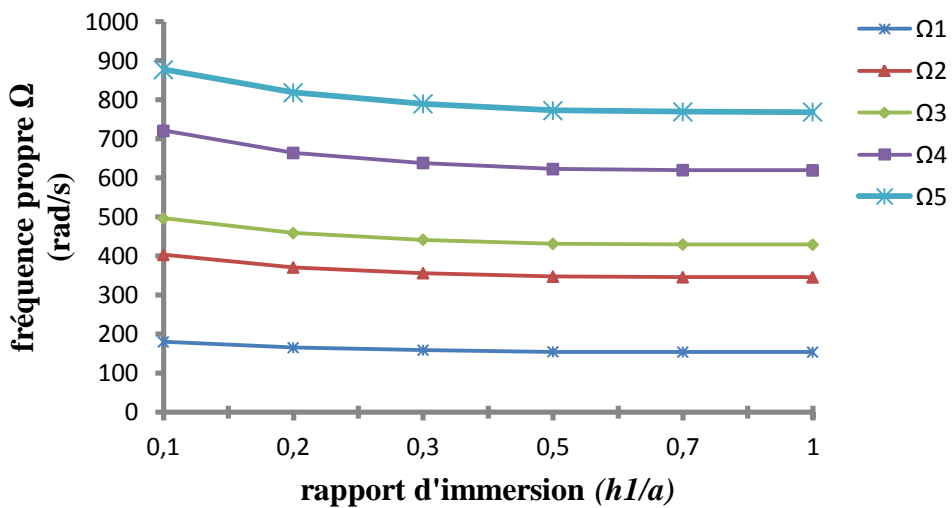


Fig. 7. 23 Variation de la fréquence propre (rd/s) d’une plaque CSRV [$\pm<30^\circ/60^\circ>$], EEEE, en fonction du rapport d’immersion ($h1/a$) et $h2 \gg a$, $h=0.01$

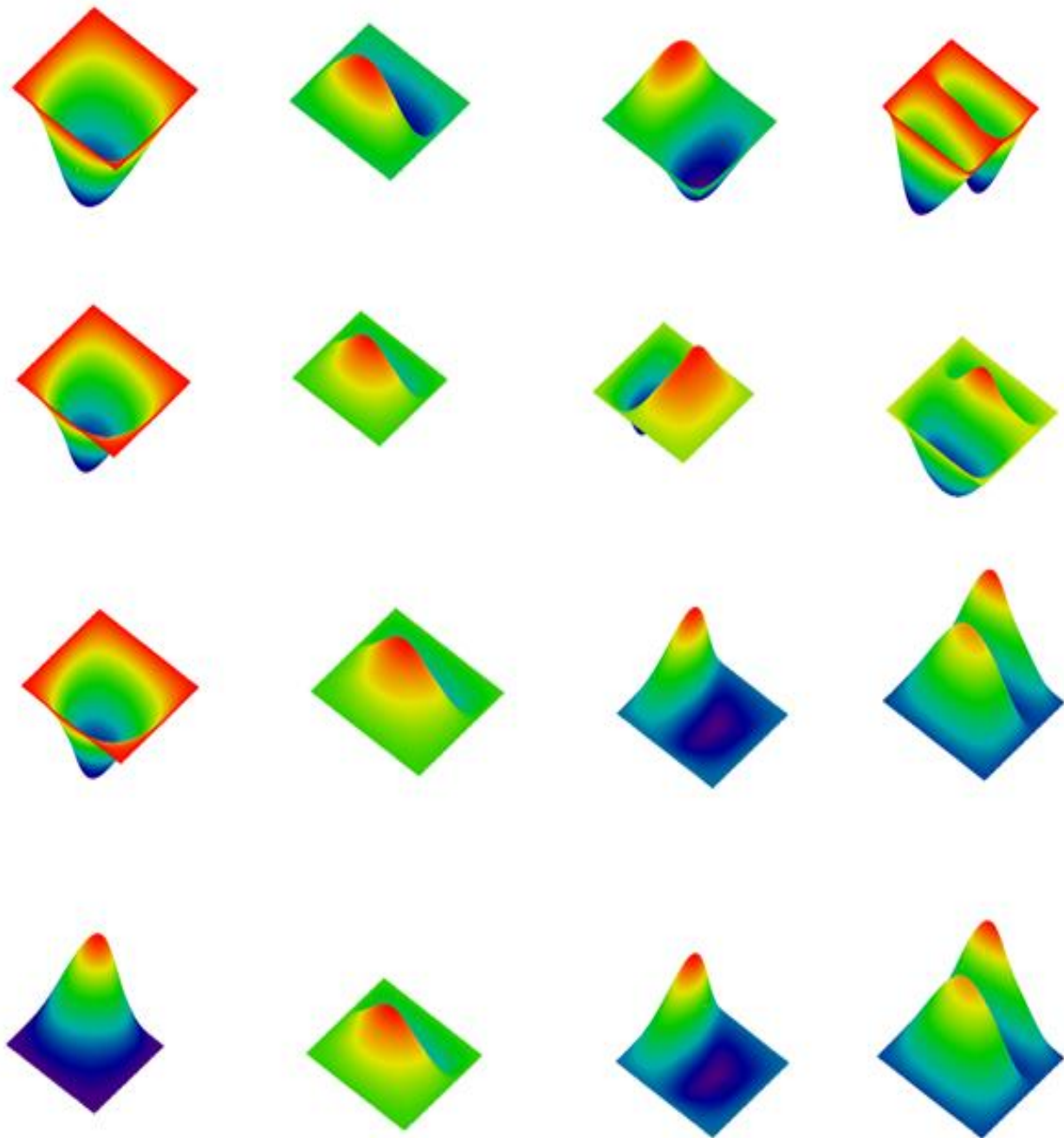


Fig. 7. 24 Quatre premiers modes d'une plaque CSRV, EEEE avec l'orientation $[\pm\langle 60^\circ/-60^\circ \rangle_s]$
 (1) dans l'air (2) : $h/a=0.1$ (3): $h/a=0.3$, (4) : $h/a=0.5$

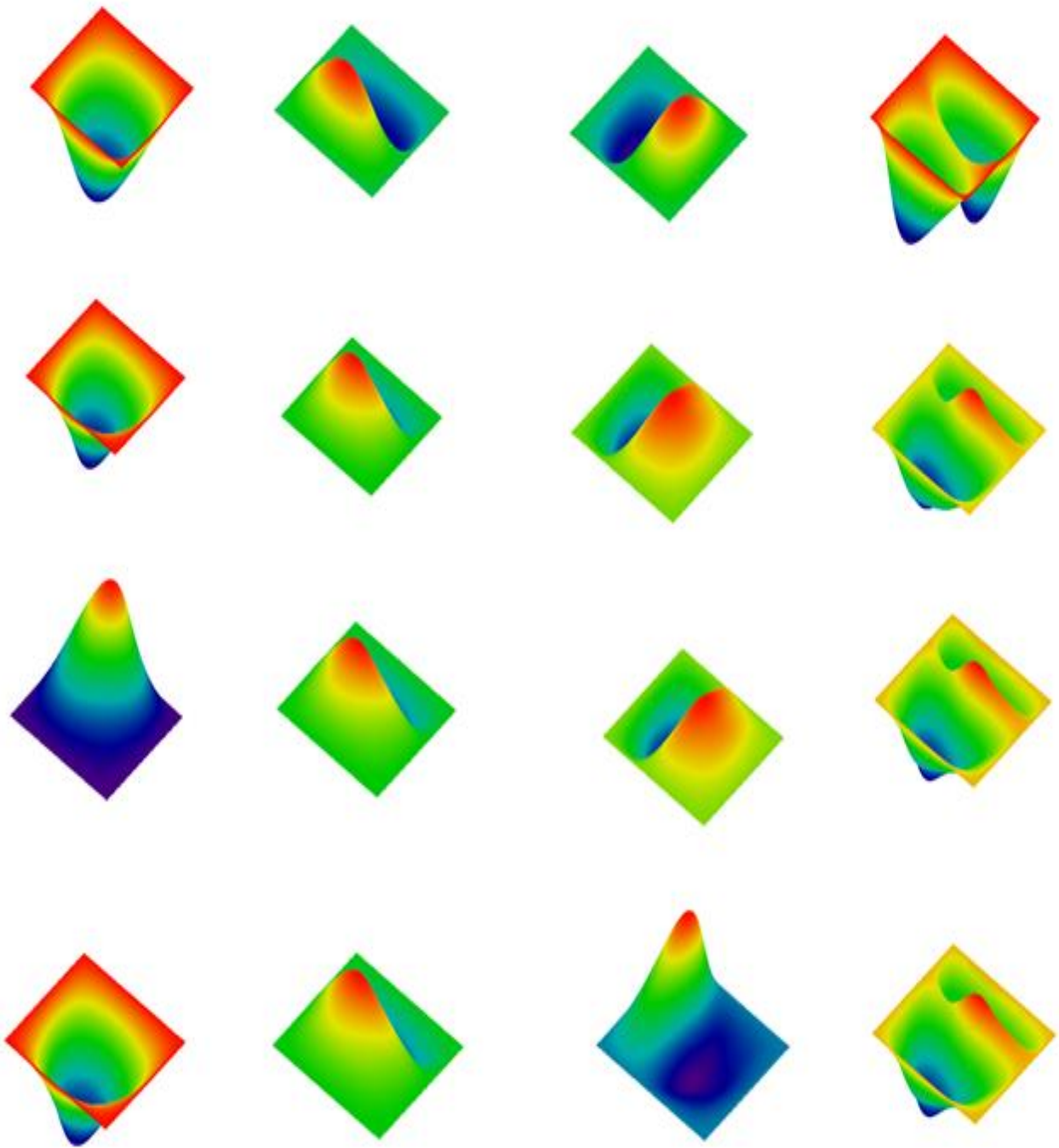


Fig. 7.25 Quatre premiers modes d'une plaque CSRV, EEEE avec l'orientation $[\pm\langle 60^\circ/-30^\circ \rangle]_s$
(1) : dans l'air (2) : $h/a=0.1$ (3) : $h/a=0.3$, (4) : $h/a=0.5$.

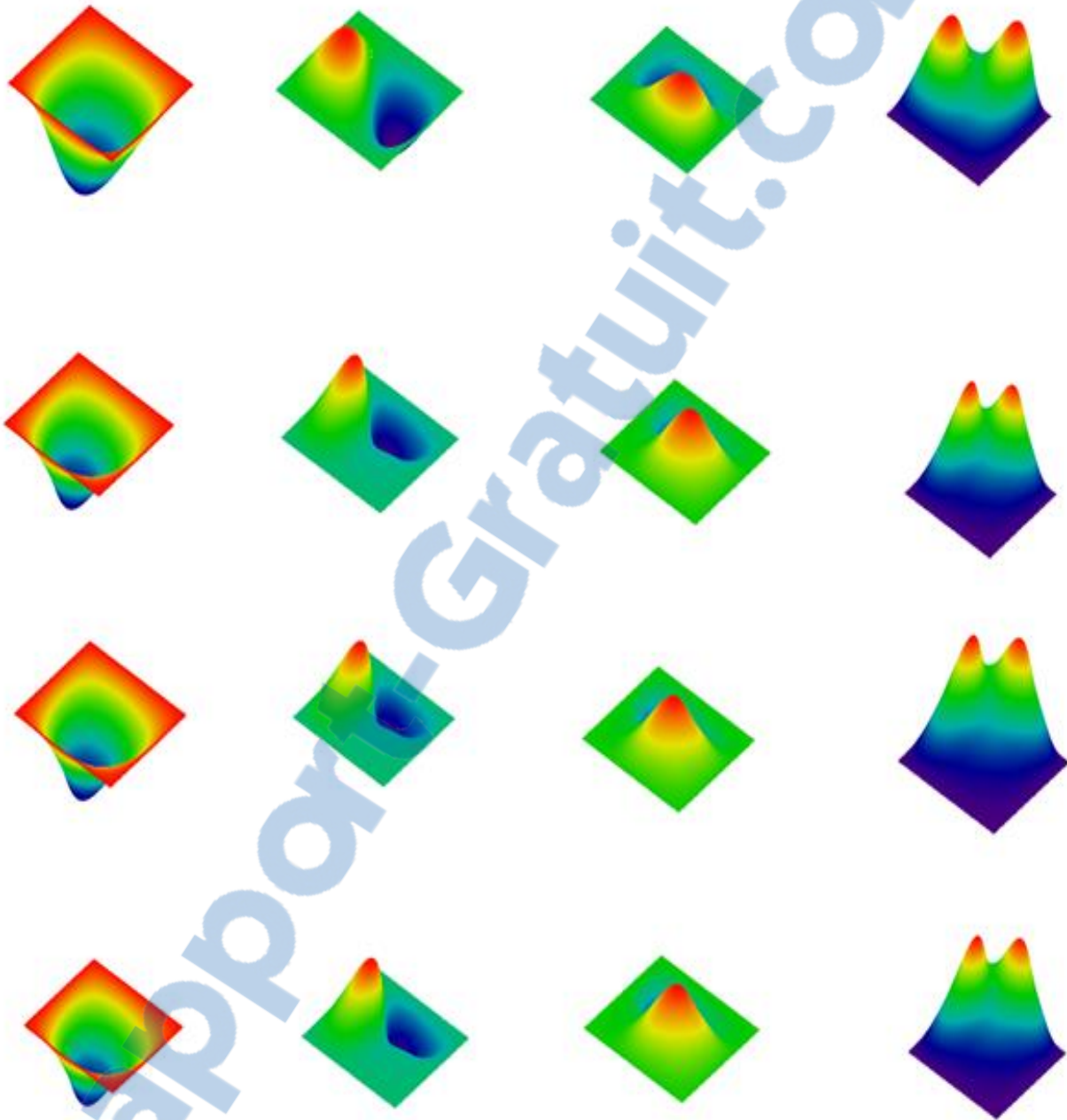


Fig. 7. 26 Quatre premiers modes d'une plaque CSRV, EEEE avec l'orientation $[\pm\langle 60^\circ/30^\circ \rangle]_s$
(1) : dans l'air (2) : $h/a=0.1$ (3) : $h/a=0.3$, (4) : $h/a=0.5$.

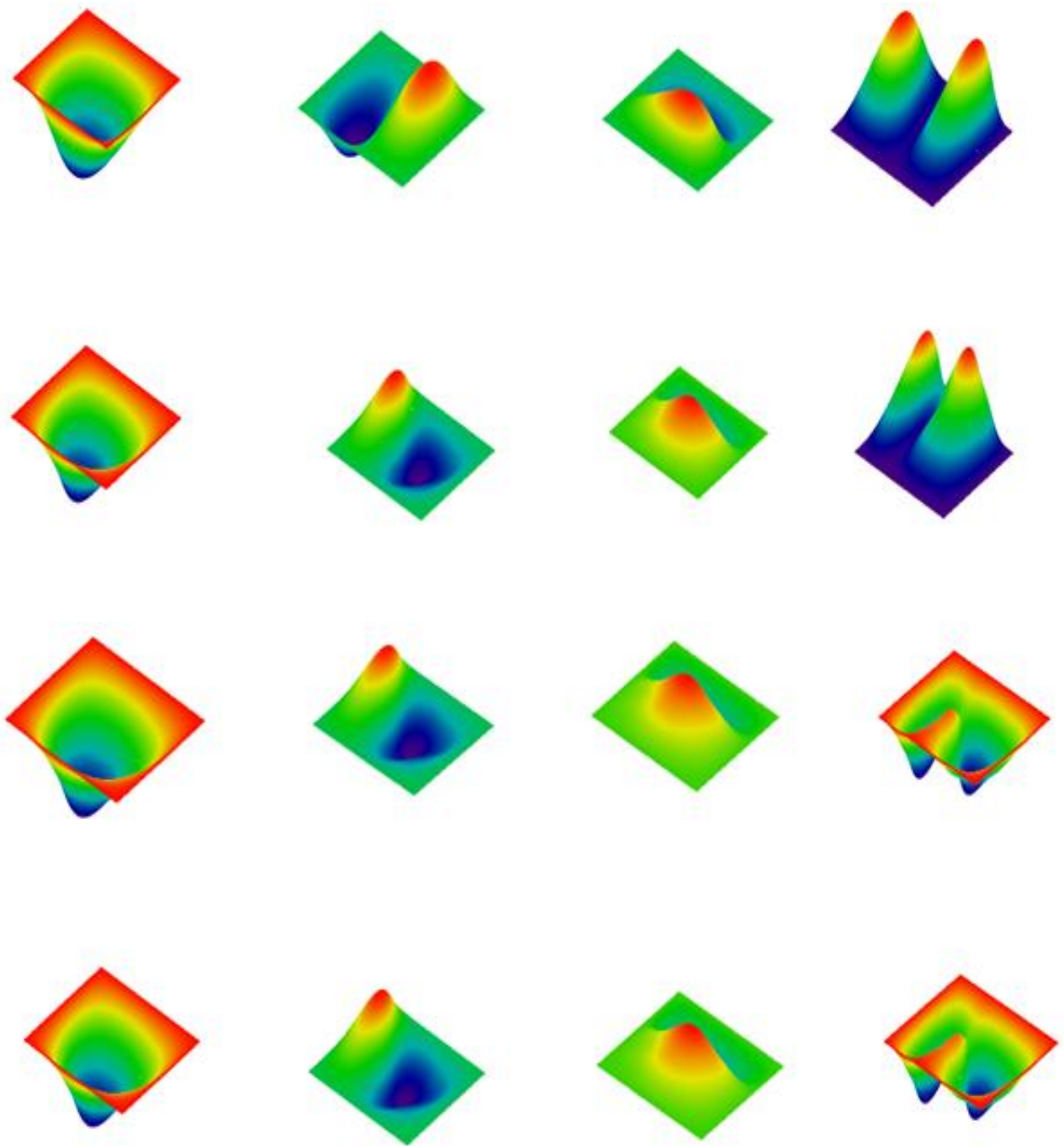


Fig. 7. 27 Quatre premiers modes d'une plaque CSRV, EEEE avec l'orientation $[\pm\langle 60^\circ/60^\circ \rangle]_s$
(1) : dans l'air (2) : $h/a=0.1$ (3) : $h/a=0.3$, (4) : $h/a=0.5$

Conclusion et Perspectives

Le phénomène de l'interaction fluide-structure se retrouve dans de nombreux domaines : aéronautique, navale,...etc. Le comportement vibratoire du système (fluide-structure) subit des changements considérables et la résolution de ces problèmes dépend de type de structure. Dans cette thèse, nous avons traité l'analyse de la vibration libre d'une plaque composite stratifiée à rigidité variable immergée dans un fluide. La plaque est considérée en adoptant des fibres curvilignes. Le problème a été résolu en se basant sur la théorie HSDT C0 et la version p de la méthode des éléments finis. Le fluide provoque une variation de la rigidité du système par une pression appliquée sur la structure. Cette pression est modélisée en utilisant la fonction de potentiel de vitesse et l'équation de Bernoulli, en tenant compte de la condition d'imperméabilité entre la plaque et le fluide. Un programme de calcul a été développé pour déterminer les fréquences propres et les modes propres. Une étude de convergence et de comparaison a été réalisée pour valider les résultats obtenus à la base de notre modèle avec tous les solutions disponibles. La théorie HSDT C0 a présenté un avantage au niveau de la précision des résultats, parce que son hypothèse est basé sur la distribution hyperbolique des déformations et des contraintes de cisaillement transversal au long de l'épaisseur de la plaque et elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement. La convergence des résultats a été bien achevée en augmentant le degré des fonctions de forme hiérarchiques polynomiales. Une haute précision et une convergence rapide et monotone ont été obtenues à la base de ce dernier.

Les fréquences propres et les modes propres ont été examinés en considérant différents paramètres physiques et géométriques : l'angle d'orientation des fibres droites et curvilignes, l'épaisseur de la plaque, la profondeur d'immersion, le rapport d'élasticité et les conditions aux limites.

Ce travail nous a permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

- ✓ La fréquence fondamentale du système fluide-plaque dépend des propriétés géométriques et physiques (longueur, épaisseur, densité et module d'élasticité).
- ✓ Le contact du fluide avec la plaque a une influence importante sur le comportement dynamique de la structure, et cause une chute significative de la fréquence naturelle et peut affecter la stabilité du système.
- ✓ L'orientation des fibres curvilignes (symétriques et antisymétriques) et les conditions aux limites ont un fort effet sur la fréquence naturelle de la plaque.
- ✓ L'augmentation du rapport épaisseur/largeur engendre une augmentation de la fréquence d'où une augmentation de la rigidité de la structure.
- ✓ L'augmentation du rapport d'élasticité produit un accroissement des valeurs des fréquences propres.
- ✓ L'importance des plaques composites à rigidité variable (CSRV) est présentée par la variation de l'angle d'orientation des fibres, de sorte que la rigidité de la plaque peut être améliorée en gardant les mêmes propriétés géométriques de la plaque.
- ✓ L'augmentation de la profondeur d'immersion (h_1) fait augmenter la valeur de la masse ajoutée au système et par conséquent fait diminuer les paramètres de fréquence

En perspective, Les travaux réalisés dans cette thèse ouvrent la voie à de nombreux axes de recherche.

- ✓ Analyser les structures à rigidité variable de formes plus complexes: panneaux et coques cylindriques.
- ✓ Les plaques à rigidité variable (CSRV) immergée dans un fluide couplée avec une charge thermique.
- ✓ Le comportement du fluide : compressible, réel et non Newtonien.
- ✓ Réservoir à rigidité variable (CSRV) remplis par un fluide.

Bibliographie

- Akhavan, H. and P. Ribeiro. 2011. "Natural modes of vibration of variable stiffness composite laminates with curvilinear fibers." *Composite Structures* 93: 3040-3047.
- Alireza, J. **2012**. "dynamic analysis of isotropic and laminated reinforced composite plates subjected to flowing fluid." Master of Applied Science, University of Montreal, Avril.
- Amabili, M., Pasqualini, A and Dalpiaz, G. 1995. "Natural Frequencies and modes of free-edge circular plates vibration in vacuum or in contact with liquid." *Journal of Sound and Vibration* 188: 685-699.
- Amabili, M., Frosali, G. and Kwak, M. K. **1996**. "Free vibrations of annular plates coupled with fluid." *Journal of Sound and vibration* 191: 825-846.
- Atmane, H.A, A. Tounsi, I. Mechab and Adda Bedia, E.A. **2010**. "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory." *Int. J. Mech. Mater. Design.* 6: 113-121.
- Bauer, H. F. **1981**. "Hydroelastic vibrations in a rectangular container." *International Journal of Solids and Structures* 17: 639-652.
- Bert, C.W. and B.L., Mayberry. **1969**. "Free vibration of unsymmetrically laminated anisotropic plate with clamped edges, *J. Compos. Mater.* 3: 282-293.
- Bert, C.W. and P.H. Francis. **1974**. "Composite material mechanics: structural mechanics." *AIAA J.* 12:1173-1186.
- Beurrières, F.J. **1939**. "Sur en phenomene d'oscillation auto en tenue en mecanique des fluides reels." *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air* 147.
- Charbonneau, E. **1999**. "Analyse dynamique des plaques rectangulaires submergees dans un fluide." MSc. A. MQ48843, Ecole Polytechnique, Montreal (Canada), Canada,
- Cheung, Y. K., CAO, Z. and WU, S. Y. **1985**. "Dynamic analysis of prismatic structures surrounded by an infinite fluid medium." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 13: 351-360.
- Cheung, Y., and D. Zhou. **2000**. "Coupled vibratory characteristics of a rectangular container bottom plate." *Journal of Fluids and Structures* 14: 339-357.
- Chien, H., L. V. Tran, D. T. Tran, T. Nguyen-Thoi and H. Nguyen-Xuan. **2012**. "Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and node-based smoothed discrete shear gap method." *Applied Mathematical Modelling* 36: 5657-5677.
- Chowdhury, P. C. **1972**. "Fluid Finite Elements for Added Mass Calculations." *Int. J. Ship. Building Prog.* 19: 302-309.
- Dirk, H.J. A. L., C. Ward and K.D. Potter. **2012**. "The engineering aspects of automated prepreg layup: History, present and future." *Composites Part B: Engineering* 3: 997-1009.

- Dowell, E. II. and Voss, H. M. **1963**. "The effect of a cavity on panel vibration." *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 1: 476-477.
- Ergin, A. and B. Ugurlu. **2003**. "Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid." *Journal of Fluids and Structures* 17: 927-939.
- Evans, D. O. **1998**. "Fiber placement", *Handbook of Composites*. Springer 476-487.
- Feodoseev, V.P. **1951**. "Vibrations and stability of a pipe when liquid flows through it." *Inzhenernyi Sbornik*. 10:169-170
- Ferreira, A.J.M. and G.E. Fasshauer. **2006**. "Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an RBF-pseudospectral method." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196: 134-146.
- Fu, Y. and W. Price. **1987**. "Interactions between a partially or totally immersed vibrating cantilever plate and the surrounding fluid." *Journal of Sound and Vibration*. 118: 495-513.
- Grant, C. and J. Martin. **2003**. "Automated processing technology for composites: current status and vision for the future." *International SAMPE Symposium and Exhibition*. SAMPE, pp. 888-895.
- Gürdal, Z. and R. Olmedo. 1993. "In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientations: Variable stiffness concept." *AIAA Journal* 31: 751 -758.
- Gürdal, Z. and R. Olmedo. **1993a**. "In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientations: Variable stiffness concept." *AIAA Journal* 31: 751-758.
- Gürdal, Z., B. F. Tatting and K. C. Wu. **2005**. "Tow-placement technology and fabrication issues for laminated composite structures." In 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Austin, USA, 1-17.
- Gurdal, Z., B.F. Tatting and C.K. Wu. 2008. "Variable stiffness composite panels: effects of stiffness variation on the in-plane and buckling response." *Compos: Part A*, 39: 911-922.
- Haddara, M.R. and S. Cao. **1996**. "A study of the dynamic response of submerged rectangular flat plates." *Marine Structures* 9: 913-933.
- Hadian, J. and A.H. Nayfeh. **1993**. "Free vibration and buckling of shear-deformable cross-ply laminated plates using the state-space concept." *Computers and Structures* 48: 677-693.
- Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. **2011**. "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory." *Applied Mathematics and Mechanics*. 925-942.
- Honda, S. and Y. Narita. **2011**. "Vibration design of laminated fibrous composite plates with local anisotropy induced by short fibers and curvilinear fibers." *Composite Structures* 93: 902-910.
- Honda, S. and Y. Narita. **2012**. "Natural frequencies and vibration modes of laminated composite plates reinforced with arbitrary curvilinear fiber shape paths." *Journal of Sound and Vibration* 331:180-191.

- Honda, S., Y. Oonishi, Y. Narita, and K. Sasaki. **2008**. “Vibration Analysis of Composite Rectangular Plates Reinforced along Curved Lines.” *Journal of System, Design and Dynamics* 2: 76–86.
- Hosseini-Hashemi, Sh. Mahmoud Karimi and H. Rokni Damavandi Taher. **2010**. “Vibration analysis of rectangular Mindlin plates on elastic foundations and vertically in contact with stationary fluid by the Ritz method.” *Ocean Engineering* 37: 174-185.
- Hosseini-Hashemi, Sh., Mahmoud Karimi and Hossein Rokni. **2012**. “Natural frequencies of rectangular Mindlin plates coupled with stationary fluid.” *Applied Mathematical Modelling* 36: 764-778.
- Houmat, A. **2012**. “Nonlinear free vibration of a composite rectangular specially-orthotropic plate with variable fiber spacing.” *Composite Structures* 94: 3029-3036.
- Houmat, A. **2013**. “Nonlinear free vibration of laminated composite rectangular plates with curvilinear fibers.” *Journal of Computers and Structures*; 106: 211-224.
- Houmat, A. **2015**. “Nonlinear free vibration analysis of variable stiffness symmetric skew laminates.” *European Journal of Mechanics A/Solids* 50: 70-75.
- Huu-Tai Thai and Seung-Eock Kim. **2010**. “Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory.” *International Journal of Mechanical Sciences* 52: 626-633.
- Hyer, M. W., and H. H. Lee. **1991**. “The Use of Curvilinear Fiber Format to Improve Buckling Resistance of Composite Plates with Central Circular Holes.” *Composite Structures* 18: 239–261.
- Hylarides, S. and Vorus, W. S. **1982**. “The added mass matrix in ship vibration, using a source distribution related to the finite element grid of the ship structure.” *International Shipbuilding Progress* 29, 34-43.
- Kant, T. and K. Swaminathan. **2002**. “Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory.” *Composite Structures* 56: 329-344.
- Karama, M, K.S. Afaq, and S. Mistou. **2003**. “Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity.” *Int. J. Solids Structures*; 40: 1525-1546
- Kerboua, Y., A. A. Lakis, M. Thomas and L. Marcouiller. **2008**. “Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid.” *Journal of Applied Mathematical Modeling* 32: 2570-2586.
- Kirchhoff, G.R. **1850a** . “Sur la balance et le mouvement d'un disque élastique.” *J. Reine Angew. Math. (Crelle)* 40, 51-88.
- Kirchhoff, G.R. **1850b**. “A propos des vibrations d'une plaque élastique circulaire.” *Poggendorffs Annalen* 81: 258–264.

- Korosh Khorshid and Sirwan Farhadi. **2013**. "Free vibration analysis of a laminated composite rectangular plate in contact with a bounded fluid." *Composite Structures* 104: 176-186.
- Kulkarni S.D and Kapuria S. **2008**. "Free vibration analysis of composite and sandwich plates using an improved discrete Kirchhoff quadrilateral element based on third-order zigzag theory." *Comput Mech.* 42:803-24.
- Kwak, M. K. **1996**. "Hydroelastic vibration of rectangular plates." *Journal of Applied Mechanics* 63: 110-115.
- Kwak, M. K. and Kim, M. K. **1991**. "Axisymmetric Vibration of Circular Plates in Contact with Fluid." *Journal of Sound and Vibration* 14: 381-389.
- Kyeong-Hoon Jeong. **2006**. "Hydroelastic vibration of two annular plates coupled with a bounded compressible fluid." *Journal of Fluids and Structures* 22: 1079-1096.
- Kyeong-Hoon, J. and K. Kwi-Ja. **2005**. "Hydroelastic vibration of a circular plate submerged in a bounded compressible fluid." *Journal of Sound and Vibration.* 283: 153-72.
- Lamb, H. **1920**. "Vibrations of an elastic plate touching water." *Proceedings of the Royal Society of London* 98: 205-216.
- Leissa, W. and A. F. Martin. **1990**. "Vibration and buckling of rectangular composite plates with variable fiber spacing." *Composite Structures* 4: 339-357.
- Lekhnitskii, S.G. **1957**. "Anisotropic Plates." 2nd Edition .Gordon, 1968; original Russian edition Gostekhizdat. Moscow.
- Levinson, M. **1980**. "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates." *Mechanics Research Communications.* 7:343-350
- Liang, C.C., C.C. Liao, Y.S. Tai and W.H. Lai. **2001**. "The free vibration analysis of submerged cantilever plates." *Ocean Engineering* 28: 1225-1245.
- Lindholm, U. S., D. D. Kana, W. H. Chu and H. N. Abramson. **1965**. "Elastic vibration characteristics of cantilever plates in water." *J. Ship Res* 9: 11-22.
- Lindholm, U. S., Kana, D. D., Chu, W.H. and Abramson, H. N. **1965**. "Elastic Vibration Characteristics of Cantilever Plates in Water," *J. Ship Research* 9, 1: 11-23.
- Lorenzo Dozio. **2014**. "Exact vibration solutions for cross-ply laminated plates with two opposite edges simply supported using refined theories of variable order." *Journal of Sound and Vibration.* 333:2347-2359.
- Marcus, M. S. **1978**. "A finite-element method applied to the vibration of submerged plates." *Journal of Ship Research* 22: 94-99.
- Marouene, A. **2015**. "Résistance à la compression et au flambage des composites carbone/époxy à rigidité variable fabriqués par le procédé de placement automatique des fibres." Thèse de doctorat, Département de Génie Mécanique, Ecole Polytechnique de Montréal.

- Meylan, M.H. **1997**. "The forced vibration of a thin plate floating on an infinite liquid." *Journal of Sound and Vibration* 205: 581-591.
- Michael R. Motley, Matthew R. Kramer, Yin L. Young. **2013**. "Free surface and solid boundary effects on the free vibration of cantilevered composite plates." *Composite Structures* 96: 365-375.
- Mindlin, R. D. **1951**. "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates." *ASME Journal of Applied Mechanics* 18: 31-38.
- Nayak, A.K., R.A. Shenoi and S.S.J. Moy. **2004**. "Transient response of composite sandwich plates." *Composite Structures* 64: 249-267.
- Nayak, A.K., S.S.J. Moy and R.A. Shenoi. **2002**. "Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory." *Composites: Part B* 33: 505-519
- Neeraj Grover, B.N. Singh and D.K. Maiti. **2013**. "Analytical and finite element modeling of laminated composite and sandwich plates: An assessment of a new shear deformation theory for free vibration response." *International Journal of Mechanical Sciences* 67: 89-99.
- Noor, A. K. and Burton, W. S. **1990a**. Three-dimensional solutions for antisymmetrically laminated anisotropic plates. *57*:182-188.
- Noor, A.K. **1973**. "Free vibrations of multilayered composite plates." *AIAA J.* 11: 1038-1039.
- Olsen, H. B. and J. J. Craig. **1993**. "Automated composite tape lay-up using robotic devices". *Robotics and Automation*. Proceedings. IEEE International Conference 3: 291-297
- Païdoussis, M.P. **1998**. "Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow." vol. 1, Academic Press, London.
- Pal, N. C., P. K. Sinha and S. K. Bhattacharyya. **2001**. "Finite element dynamic analysis of submerged laminated composite plates." *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 20: 547-563.
- Pandya, B. N. and T. Kan. **1988**. "Higher -Order shear deformable theories for flexure of sandwich plates- finite element evaluations." *International Journal of Solids and Structures*. 24: 1267-1286.
- Peake, W.H. and E.G. Thurston. **1954**. "The lowest resonant frequency of a water loaded circular plate." *Journal of the Acoustical Society of America* 26: 166-168.
- Pister, K.S. and Dong, S.B. **1959**. "Elastic bending of layered plates." *Journal of Engineering Mechanics Division*, 85: 1-10.
- R.W., Mote Jr and C.D. **1976**. "On the dynamic analysis of curved and twisted cylinders transporting fluids." *ASME Journal of Pressure Vessel Technology* 98: 143-150.
- Rayleigh, L. **1877**. "Theory of sound." Second Edition ed. New York: Dove.
- Reddy, J. N. **1984**. "A simple higher-order theory for laminated composite plates." *Journal of Applied Mechanics* 51: 745-752.

- Reddy, J. N. **1990a**. “A review of refined theories of laminated composite plates.” *Shock Vibr. Dig.* 22: 3-17.
- Reddy, J. N. **1990b**. “A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness.” *Znt. J. Non-Lin. Mech.* 25: 677-686.
- Reddy, J. N. **1997**. “Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis.” CRC Press, Boca Raton, Florida.
- Reddy, J. N. and Phan, N. D. **1985**. “Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory.” *J. Sound Vibr.* 98: 157-170.
- Reddy, J.N. **1997**. “Mechanics of laminated composite plate: theory and analysis.” New York: CRC Press.
- Reddy, J.N. **2004**. “Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis.” CRC press.
- Reddy, J.N. **1984**. “A simple higher-order theory for laminated composite plates.” *ASME J. Appl. Mech.* 51: 745-752.
- Reddy, J.N. **1999**. “Theory and Analysis of Elastic plates.” Taylor & Francis, Philadelphia.
- Reissner, E. **1944**. “On the Theory of Bending of Elastic Plates.” *Journal of Mathematics and Physics* 23:184-191.
- Reissner, E. **1945**. “The Effect of Transverse Shear Deformations on the Bending of Elastic Plates.” *Journal of Applied Mechanics* 12: A69-A77.
- Reissner, E. **1984**. “On a certain mixed variational theory and a proposed applications.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20: 1366-1368.
- Reissner, E. **1972**. “A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates.” *AIAA J.* 10: 716-718.
- Ribeiro, P., and H. Akhavan. **2012b**. “Non-linear vibrations of variable stiffness composite laminated plates.” *Composite Structures* 94: 2424-2432.
- Robert D and Blevins. **1977**. “Flow Induced Vibrations.” Krieger 289-297.
- Serdoun, S. M. N., S. M. Hamza-Cherif and S. M. O. Sebban. 2015. “Free Vibration Analysis Sandwich Plates Coupled with Fluid.” *International Journal of Engineering Research and Technology* 4: 2278-0181.
- Shankara, C. A. and N. G. R. Iyengar. **1992**. “Analysis of composite plates with higher order shear deformation theory.” *Mechanics Research Communications* 4: 301-314.
- Shankara, C. A. and N. G. R. Iyengar. **1996**. “A C0 element for the free vibration analysis of laminated composite plates.” *Journal of Sound and Vibration* 5: 721-738.
- Shimpi, R.P. **2002**. “Refined plate theory and its variants.” *AIAA J.*, 40: 137-146.

- Soedel, S.M. and Soedel, W. **1994**. "On the free and forced vibration of a plate supporting a freely sloshing surface liquid." *Journal of Sound and vibration* 171: 159-171.
- Stavsky, Y. **1961**. "Bending and stretching of laminated aeolotropic plates." *J. Engng Mech.* 87: 31-55.
- Swaminathan, K. and Patil, S. **2008**. "Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angle-ply plates." *Compos Struct.* 82(2): 209-16.
- Swaminathan, K. and Patil, S.S. **2007**. "Higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the stress analysis of antisymmetric angle-ply plates analytical solutions." *Composite Structures* 80: 595-608.
- Tatting, B. and Z. Gürdal. **2001**. "Analysis and design of tow-steered variable stiffness composite laminates." American Helicopter Society Hampton Roads Chapter, Structure Specialists Meeting.
- Tatting, B., Z. Gürdal and C. Wu. **2008**. "Variable stiffness composite panels: Effects of stiffness variation " on the in-plane and buckling response." *Composites Part A* 5: 911-922.
- Thai, H.T. and Kim, S.E. **2010**. "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory." *International Journal of Mechanical Sciences.* 626-633.
- Thai, H.T. and Kim, S.E. **2011**. "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory." *Composite Structures*, 1738-1746.
- Touratier, M. **1991**. "An efficient standard plate theory." *International Journal of Engineering Science*, 29: 901-916.
- Waldhart, C. 1996. "Analysis of tow-placed, variable-stiffness laminates." MSc Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Whitney J.M. **1969**. "The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates." *J.Compos Mater.* 3: 534-547.
- Whitney, J. M. and A. W. Leissa. **1969**. "Analysis of Heterogeneous Anisotropic Plates." paper No. 69-APM-15, Presented at ASME Applied Mechanics and Fluids Engineering Conference, Northwestern University, June 16-18.
- Whitney, J.M. **1970**. "The effect of boundary conditions on the response of laminated composites." *J. Compos. Mater.* 4:192-203.
- Whitney, J.M. and A.W. Leissa. **1970**. "Analysis of simply supported laminated anisotropic rectangular plate." *AIAA J.* 8: 28-33.
- Whitney, J.M. and N.J., Pagano. **1970**. "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates." *J. Appl. Mech. ASME* 37: 1031-1036.
- Yang, P. C., C. H. Norris and Y. Stavsky. **1966**. "Elastic wave propagation in heterogeneous plates." *International Journal of Solids and Structures* 2: 665-84.

Yazdani, S. and P. Ribeiro. **2015**. "A layerwise p-version finite element formulation for free vibration analysis of thick composite laminates with curvilinear fibres." *Journal of Composite Structures* 120: 531-542.

Yazdani, S. and P. Ribeiro. **2014**. "Modes of vibration of unsymmetric multilayered composite plates with curvilinear fibres." *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, Eurodyn, Porto, Portugal. 30 June - 2 July.*

Yazdani, S., P. Ribeiro and Rodrigues, J D. **2014**. "A p-version layerwise model for large deflection of composite plates with curvilinear fibers." *Journal of Composite Structures*, 108: 181-190.

Zienkiewicz, O. C. and Newton, R. E. **1969**. "Coupled Vibrations of a Structure Submerged in a Compressible Fluid." *Proc. Int. Symp. on Finite Element Techniques, Stuttgart* 360-379.

Zienkiewicz, O. C., Irons, B. and Nath, B. **1965**. "Natural Frequencies of Complex, Free or Submerged Structures by the Finite Element Method." *Symp. Vibration on Civil Engg. London.* 83-90.