Table des matières

Liste des tableaux et des figures

Termes à définir

Aspect cardinal du nombre : représente une quantité, c’est le nombre d’éléments d’un ensemble. Par exemple : il y a cinq éléments.

Aspect ordinal du nombre : représente un élément dans la suite des nombres entiers naturels. Par exemple : c’est le cinquième élément.

Mot-nombre : le mot qui est attribué à un nombre précis, peut être oral ou écrit en lettres. À différencier des chiffres.

Nombre naturel (entier naturel) : nombre entier et positif, qui permet de dénombrer des objets.

Nombre relatif : nombre entier, positif ou négatif.

Nombre rationnel : nombre qui peut s’exprimer comme le quotient de deux nombres relatifs (fraction).

Nombre réel : tout nombre qui peut être représenté par une liste finie ou infinie de décimales.

Numéricité : qui a un caractère numérique.

Introduction

> *L'un de nous a demandé à un auditoire d'étudiants en psychologie, dont plusieurs doutaient du caractère symbolique de l'image, de bien vouloir indiquer, chacun pour soi, comment ils se représentaient la suite des nombres entiers. Le résultat a été stupéfiant par sa variété et sa richesse : rangée de bâtons verticaux de mêmes hauteurs ou de hauteurs croissantes, disques empilés, points successifs, escaliers réguliers ou avec paliers pour les dizaines, etc., courbes en zigzags, etc. (Piaget, Inhelder & Bovet, 1991, p. 447)*

L'image mentale des nombres est très différente d'une personne à l'autre. Depuis la découverte de ma propre manière d'imaginer la suite des nombres, j'ai questionné plusieurs personnes de mon entourage sur ce sujet. Il s'est avéré que chaque individu a une manière distincte et particulière de se représenter les nombres.

Quelles sont ces différentes représentations des nombres entiers ? Et d'où viennent ces images ? À ce jour, très peu de recherches ont été menées pour tenter de répondre à ces questions, et pour cause. Rares sont les personnes qui sont conscientes de leur image mentale des nombres. Afin d'obtenir des données valables, il faut donc effectuer des entretiens personnels - un travail laborieux et de longue haleine.

À travers ce travail de mémoire, je vais rassembler un certain nombre de représentations mentales et proposer une classification. Ensuite, afin d'éclaircir l'origine de ces images mentales, je tenterai de déterminer si l'image qu'une personne utilise est liée à la manière d'avoir appris les nombres. Pour finir, je vais m'intéresser à la performance : quel type de représentation donne les meilleurs résultats au test de mémorisation des nombres ? En bref, mon objectif est d'élucider quelque peu le mystère des représentations mentales des nombres.

Cadre théorique

Le concept du nombre

Comment définir le nombre ? Certes une entreprise ambitieuse. Les mathématiciens et philosophes[1] ne sont visiblement pas unanimes à ce sujet.

Alain Badiou présente dans son livre *Le nombre et les nombres* différentes définitions de mathématiciens bien connus. La **voie logiciste**, soutenu par Frege et Russell, stipule que le nombre est en fait une extension de son propre concept. L'extension contient tous les cas de vérité pour ledit concept. Les ensembles C_1 et C_2 sont équinumériques (et ont donc la “ même quantité ”) s'il y a une correspondance biunivoque qui associe les objets des deux concepts, et peu importe la nature des objets. Le nombre désigne alors un ensemble de concepts (ou un ensemble “ d'ensembles ”) qui sont équinumériques. (Badiou, 1990, pp. 27-35)

Par exemple, le nombre deux est défini par tous les ensembles de deux objets :

2 = { {● ,•},{✎,👓}, {🐈,🐈}, { 🚹 , 🚹 }, … }

Par contre, le nombre zéro pose un problème. Puisque le zéro est “ vide ”, autrement dit dépourvu de quantité, Frege propose de le définir comme concept “ non identique à soi ”, ainsi l'extension de ce concept est vide. Mais ce postulat est peu convaincant, puisque une règle universelle de la logique énonce : tout x est égal à lui-même. (Badiou, 1990, p. 29)

Une autre manière d'approcher le concept du nombre est par la **voie ensembliste**, de laquelle découlent les travaux de Dedekind, mais également ceux de Cantor, de Zermelo, de von Neumann et de Gödel. Pour ces mathématiciens, le nombre est un cas particulier de la hiérarchie des ensembles. Dedekind et Cantor développent une conception du nombre qui est principalement ordinale, contrairement au concept de Frege qui est de type cardinal. Dans cette vision, le nombre est un maillon d'une chaîne. Dedekind (1888) postule : « Tout nombre *n* est différent du nombre *n'* qui le suit » (Badiou, 1990, p. 46). Si on applique une fonction *f* sur un nombre *n*, on obtient le nombre *f(n)* qui est son successeur. Cette suite commence par le nombre 1, car zéro est purement cardinal. Toutefois, réduisant le nombre à son ordinal empêche toute pensée pure du nombre. (Badiou, 1990, pp. 45-62)

1 Certains sujets des mathématiques et de la philosophie sont étroitement liés, notamment la philosophie analytique et la philosophie de la logique. (Gochet, 2009)

Un troisième courant, appelé **voie formaliste**, résulte des travaux de Peano et Hilbert. Les fameux “ axiomes de Peano ” sont aujourd’hui une référence largement utilisée pour les nombres entiers naturels. C’est par la fonction successeur $n + 1$ que l’on arrive à la suite infinie des nombres naturels positifs. En effet, le nombre 1 possède une propriété, celle d’être un nombre naturel. La démonstration implicative que Peano fait est : si n possède cette propriété, alors $n + 1$ la possède également. (Badiou, 1990, pp. 63-69)

Tous ces travaux définissent l’aspect *naturel* de la numéricité. De ce fait, qu’en est-il des autres nombres : les entiers négatifs, les nombres rationnels (fractions), les nombres réels (ceux qui nombrent le continu linéaire), et enfin les nombres complexes ? Existe-t-il un concept unique du nombre, qui englobe tous ses aspects ? Badiou (1990) dit :

> *La question est donc celle-ci : existe-t-il un concept du nombre capable de subsumer, dans un type d’être unique, renvoyant à une procédure uniforme, au moins les nombres entiers naturels, les nombres rationnels, les nombres réels et les nombres ordinaux, finis ou infinis ? Y a-t-il sens à parler d’un nombre, sans avoir à préciser aussitôt à quel dispositif singulier, irréductible à tout autre, il appartient ? La réponse est oui. (p. 24)*

Il propose alors une définition qui a son origine dans la doctrine des *nombres surréels*, inventée par J. H. Conway. Ce mathématicien anglais a publié, dans les années septante, ce nouveau système de nombres, qui permet en effet de définir non seulement des nombres surréels, mais également tous les nombres réels. Il est alors possible de penser le nombre comme figure unifiée. (Badiou, 1990, p. 134)

La théorie de Conway suppose qu’à chaque nombre *x* correspondent deux sets de nombres. On peut écrire : $x = \{X_L \mid X_R\}$, X_L étant le côté gauche et X_R le côté droit. Le zéro, par exemple, est composé de deux sets vides, il se définit donc ainsi : $0 = \{ \varnothing \mid \varnothing\}$, ou peut également être écrit $0 = \{ \mid \}$. Les deux sets ne contiennent aucun élément. Il est ensuite possible de définir le nombre 1 en plaçant le 0, préalablement obtenu, dans la partie gauche : $1 = \{0 \mid \}$; ou encore le nombre -1 en positionnant le 0 dans la partie droite : $-1 = \{ \mid 0\}$. Les nombres 1 et -1 peuvent ensuite servir à former les nombres -2, - ½, ½ et 2, lesquelles peuvent à leur tour créer d’autres nombres, et ainsi de suite. Ce procédé compliqué et laborieux permet, au final, de définir tous les nombres réels et surréels[2]. (Grimm, 2012)

Badiou, qui est philosophe, préfère définir le nombre comme une sorte de découpe d'une matière pour obtenir une forme (en utilisant ainsi le langage d'Aristote). La matière est un ordinal, que l'on notera M(N) ; la forme est une partie de cet ordinal, noté F(N). Tout nombre x peut donc être définit comme x = (M(N), F(N)). (Badiou, 1990, pp. 128-134)

Ces développements au sujet des différents travaux sur le nombre nous montrent la complexité et la discordance pour établir une définition du concept. Il ne faut toutefois pas oublier que pour analyser les différentes façons de se représenter les nombres, nous avons surtout besoin d'une définition du nombre relatif ; je pars du principe qu'il y a très peu de gens qui se représentent les fractions et les nombres à virgules dans un système spatial.

Avant de clore ce chapitre, il est nécessaire de parler de notre système de numération. Le nombre étant un concept abstrait, l'homme a dû inventer des symboles oraux et écrits pour définir les nombres. Aujourd'hui, la base dix est utilisée presque partout dans le monde. Ce système attribue un symbole et un nom aux nombres de zéro à neuf. Les nombres après *neuf* sont composés par plusieurs chiffres, incorporant une valeur différente selon sa position dans le nombre. En base dix, le chiffre à gauche des unités vaut dix fois plus que si ce même chiffre se trouvait à la place des unités. À l'écrit, tous les nombres sont alors constitués par une combinaison de ces symboles. À l'oral en revanche, il faut également un mot pour désigner chaque puissance de dix. Ensuite, les autres nombres sont – à quelques exceptions près (en français par exemple *onze* et *douze*) - constitués d'une combinaison de ces mots. (Ifrah, 2006, chap. 2)

Histoire du nombre

Le concept des nombres a été esquissé par les Babyloniens, affiné par les Grecs et optimisé par les Indiens et les Arabes. Dans un premier temps, le nombre était utilisé oralement, mais très rapidement, l'humain a commencé à l'écrire. (Dehaene, 1997, p. 6)

Il est fort probable qu'au départ, les humains utilisaient uniquement les nombres *un* et *deux*, ainsi que le *trois* qui signifiait *beaucoup*. Dans plusieurs langues, ce lien entre *trois*

[2] Par exemple le nombre ε = {0 | 1, ½, ¼, ⅛, …}, qui résulte de la division de 1 par l'infini. Un nombre plus grand que zéro, mais plus petit que tous les nombres positifs.

et *beaucoup* est encore visible aujourd'hui : en français avec le mot *très* ainsi que le préfixe " trans ", en anglais avec le mot *thrice* qui signifie *trois fois* ou *beaucoup*. (Ifrah, 1985)

Les linguistes soutiennent cette hypothèse, car les trois premiers mots-nombres avaient un statut spécial. Dans les langues avec déclinaisons en genre et cas, *un*, *deux* et *trois* sont souvent des mots que l'on peut décliner et ces nombres étaient utilisés comme n'importe quel autre attribut, comme par exemple *rouge* ou *grand*. (Dehaene, 1997, p. 92)

La transition vers un système de numération plus élaboré a commencé avec la mise en correspondance de chaque quantité avec une partie du corps. Le corps humain est l'outil idéal pour le dénombrement de petites quantités et il n'est pas surprenant que les enfants s'aident de leurs doigts pour compter. L'emploi des doigts pourrait même avoir conduit à l'utilisation de la base dix (Fayol, 2012). Dans plusieurs communautés isolées, des systèmes de numération basés sur les parties du corps sont encore utilisés au début du 21ème siècle, notamment dans la Nouvelle Guinée (Rauff, 2003). Dans certaines sociétés par exemple, le mot pour dire *six* est littéralement le mot *poignet*. Cette manière de compter a bien sûr ses limites. Au-delà d'un certain nombre, le comptage n'est plus possible, car le nombre dépasse le dernier nombre en correspondance avec une partie du corps. (Dehaene, 1997, p. 92-94)

Pour simplifier, certaines sociétés ont créé une syntaxe qui permet d'exprimer les plus grands nombres par une combinaison de plusieurs nombres plus petits. Le nombre 6 par exemple était exprimé par " une main et un doigt ". Cette façon de faire peut sembler élémentaire, mais elle utilise déjà les principes de la numération moderne : le choix d'une base et l'expression des grands nombres par une combinaison de nombres plus petits par addition et/ou multiplication. (Dehaene, 1997, p. 94-95)

En plus de donner un nom à chaque nombre, les humains ont rapidement développé des systèmes d'écriture. La méthode la plus ancienne d'écrire les nombres consiste à représenter une série d'objets par un ensemble de coches de quantité identique : l'appariement. Le principe de la correspondance " terme à terme " a été utilisé par un grand nombre de civilisations aux quatre coins du monde, notamment par les bergers pour compter les animaux de leur troupeau et d'en garder une trace, afin de vérifier le soir s'il n'en manquait pas. Ce système, malgré sa simplicité, a permis aux humains de dépasser les limitations de la pure perception et de garder une trace écrite d'un nombre exact, mais sans pour autant utiliser le comptage abstrait. Par contre, cette méthode était fastidieuse pour l'écriture et la lecture du nombre. En effet, l'être humain a de la difficulté à identifier d'un coup d'œil la quantité d'un ensemble de plus de quatre objets. Il était donc rapidement nécessaire de grouper les coches et inventer des nouveaux symboles, pour que la lecture d'un grand nombre soit plus aisée. (Dehaene, 1997, p. 95-98)

Dans un premier temps, certains peuples ont commencé par grouper les chiffres-unités afin de faciliter la lecture, soit en passant à la ligne après un certain nombre de symboles, soit en traçant le cinquième trait en diagonale pour ainsi former des paquets de cinq traits. Ensuite, des bergers ont inventé de nouveaux signes pour écrire 5 et 10, car la gravure d'une grande quantité de traits dans des bâtons en bois demandait trop de temps. Ils ont donc commencé à écrire le 5 avec le signe V et le 10 avec le signe X, c'est l'origine des chiffres romains. (Dehaene, 1997, p. 97; Ifrah, 1985)

Les trois premiers nombres en chiffres romains nous rappellent le temps quand l'écriture des nombres n'avait pas encore été inventée. Ce sont de simples coches. Georges Ifrah montre que dans toutes les civilisations anciennes, les premiers trois ou quatre nombres étaient toujours une répétition du symbole pour “ 1 ”, mais très souvent, le nombre “ 5 ” ne suivait plus cette même construction. Il est évident qu'à partir d'un certain nombre, l'annotation par simple répétition du même symbole ne permet plus l'identification immédiate du nombre en question, car il devient nécessaire de compter le nombre de signes. En effet, le nombre d'objets que l'être humain est capable d'énumérer d'un seul coup est limité. (Dehaene, 1997)

Le principe additif a été utilisé par beaucoup de civilisations. Il simplifie l'écriture et la lecture des nombres, mais la lecture n'est tout de même pas instantanée et demande d'effectuer un calcul pour les plus grands nombres. La répétition peut être évitée si on définit un symbole différent pour chaque nombre de 1 à 9, pour les dizaines de 10 à 90 et les centaines de 100 à 900. Ce système a été utilisé par les Grecs et les Juifs. Ainsi, en grec, le nombre 345 pouvait s'écrire TME (300 + 40 + 5). Mais cette méthode a également sa limite : il fallait connaitre un grand nombre de symboles et il était impossible d'écrire les très grands nombres. L'addition seule ne pouvait pas être la solution pour l'écriture des nombres, et l'intégration de la multiplication devient indispensable. Des systèmes hybrides qui combinent l'addition et la multiplication ont alors vu le jour. (Dehaene, 1997, p. 97-98)

L'ancêtre de notre numération a vu le jour autour du 5$^{\text{ème}}$ siècle après J.-C. En Inde du Nord, les savants ont commencé à utiliser neuf chiffres distincts, qui n'évoquaient plus les quantités correspondants, comme c'était encore souvent le cas avec les notations à traits ou avec des points. De plus, ils ont déjà adopté la base décimale, mais le système de numération était de type additif. Il fallait donc également un chiffre spécial pour toutes les dizaines, les centaines, et ainsi de suite, suivant le principe de la Grèce. (Ifrah, 1985)

Une dernière invention a considérablement augmenté l'efficacité de l'écriture des nombres ainsi que des calculs : le principe de la notation positionnelle. Plusieurs civilisations ont développé la numération de position, mais c'est la numération indienne avec une base unique – la base dix – et le chiffre 0, qui a pu persuader d'autres civilisations à adopter ce système. (Ifrah, 1985)

Cette numération a avant tout convaincu les Arabes, un peuple alors très ouvert d'esprit et intéressé par l'avancée de la science. Ils ont découvert ce système en Inde et l'ont adopté. Des mathématiciens et autres savants de la civilisation arabo-islamique ont alors écrit des ouvrages importants, qui ont permis la vulgarisation de ces connaissances. Les Arabes ont alors servi d'intermédiaire entre l'Orient et l'Occident, et c'est pourquoi nous attribuons encore aujourd'hui cette numération (à tort) aux Arabes. De nos jours, la notation décimale positionnelle est utilisée presque partout dans le monde. (Dehaene, 1997, p. 98)

L'acquisition du nombre par l'enfant

L'apprentissage du nombre s'effectue dans un premier temps d'une manière implicite. L'enfant commence par imiter les activités des gens qui l'entourent, en se basant sur son observation. Pendant cette première phase, l'enfant acquiert surtout des connaissances sur le code verbal des nombres[3]. Plus tard, ces connaissances implicites peuvent être complétées par des apprentissages explicites, en incluant alors également le code indo-arabe : les chiffres. (Fayol, 2012, pp. 19-20)

Piaget et Széminska distinguent dans leurs travaux deux capacités logiques que l'enfant doit acquérir pour maîtriser le nombre. La première est l'opération de sériation, qui consiste à ordonner les nombres en fonction de leur aspect ordinal. La seconde se résume à la capacité de classifier des nombres selon leur valeur cardinale. Ces deux capacités doivent se coordonner pour finalement permettre la maîtrise des nombres finis, qui sont à la fois cardinaux et ordinaux. (Van Nieuwenhoven, 1999, chap. 1)

Ce qui est toutefois mis à l'écart lors des études menées par Piaget et Széminska est le dénombrement en utilisant la comptine numérique, alors que ce procédé est souvent utilisé par le jeune enfant. En effet, Piaget s'est basé principalement sur la thèse théorique du nombre, et

[3] Les nombres à l'oral (mots-nombres).

non pas les conduites spontanées. Il a ainsi largement sous-estimé les compétences numériques des jeunes enfants, ce qui a mené à une définition restrictive des habilités mathématiques de l'enfant. (Van Nieuwenhoven, 1999, pp. 32-35)

Depuis les années '80, un certain nombre de recherches ont apporté un éclairage nouveau sur l'apprentissage du nombre. La perspective socioculturelle se basant sur les travaux de Vygotsky (1978) a été largement adoptée. Selon Fuson (1988 et 1991), l'enfant apprend tout d'abord à utiliser des mots-nombres dans des contextes différents, ainsi qu'à réciter les mots-nombres dans l'ordre croissant. Il postule également que les enfants apprennent très tôt que le comptage se base sur une série de mots où chaque mot-nombre ne figure qu'une seule fois. Selon Van Nieuwenhoven, les premières utilisations sont progressives, commençant par la comptine verbale et se terminant par la compréhension du rôle du comptage pour résoudre des problèmes liés au cardinal. (Van Nieuwenhoven, 1999, pp. 36-39)

C'est donc à travers l'apprentissage du comptage que l'enfant acquiert les premières notions sur les nombres. Il utilise l'aspect ordinal pour compter, et à la fin de la séquence de comptage, il obtient le nombre cardinal des éléments de l'ensemble compté : ce nombre correspond au dernier mot-nombre de la suite ordinale. (Van Nieuwenhoven, 1999, chap. 1)

En revenant sur le concept du nombre, on remarque que l'aspect ordinal des nombres est très tôt intégré par les enfants. L'ordinal et le cardinal vont de pair dans l'apprentissage. Selon le plan d'études romand (PER), les élèves mémorisent la suite numérique jusqu'à 12, parfois même jusqu'à 20 ou plus, déjà dans la première partie du premier cycle, c'est-à-dire au cours des deux premières années de scolarité (1-2H) quand les élèves ont entre quatre et six ans. En parallèle, les enfants apprennent également à associer un nombre à une quantité et inversement. Dans la deuxième partie du premier cycle, donc en 3-4H, les élèves sont confrontés à l'écriture chiffrée des nombres en intégrant la signification de la position des chiffres et le rôle du zéro. (Plan d'études romand - MSN 12, 2016)

Le traitement mental du nombre

L'être humain, tout comme certains animaux, dispose d'un certain sens de la quantité qui est inné. Le mathématicien Tobias Dantzig parle de cette intuition numérique pour la première fois en 1954 dans son livre *Number, the language of science*. Mais à cette époque, la psychologie était dominée par la théorie de Jean Piaget qui niait toute habileté numérique du jeune enfant, et il a fallu vingt ans pour que la découverte de Dantzig soit confirmée. (Dehaene, 1997)

Aujourd'hui, ce module mental du cerveau qui permet de se faire une représentation approximative d'une quantité est appelé *accumulateur* par les scientifiques. C'est seulement depuis les années '80 que la compétence numérique du jeune enfant a été examinée empiriquement. Plusieurs études ont montré que même le jeune enfant et les animaux sont capables de distinguer une série de trois sons d'une série de quatre sons. Mais la structure initiale du cerveau ne permet pas de faire de calculs exacts, nous ne possédons pas d'unité arithmétique destinée à traiter les nombres. (Dehaene, 1997)

Cette représentation approximative d'une quantité fait partie du modèle dit du " triple code ", proposé par Stanislas Dehaene et Laurent Cohen en 2007, et sera alors nommée " représentation analogique ". Elle est complétée par la représentation verbale et la représentation arabe. La première renvoie au traitement des formes auditives et visuelles des noms des nombres, traités dans l'hémisphère dominant pour le langage. La seconde, en revanche, utilise un système logographique visuo-spatial indépendant du langage et des lettres, traité dans les aires occipito-temporales des deux hémisphères. (Fayol, 2012)

Des liaisons multiples connectent ces différentes représentations entre elles, générant ainsi un passage direct d'un format à un autre, sans passer obligatoirement par l'interprétation sémantique. (Fayol, 2012)

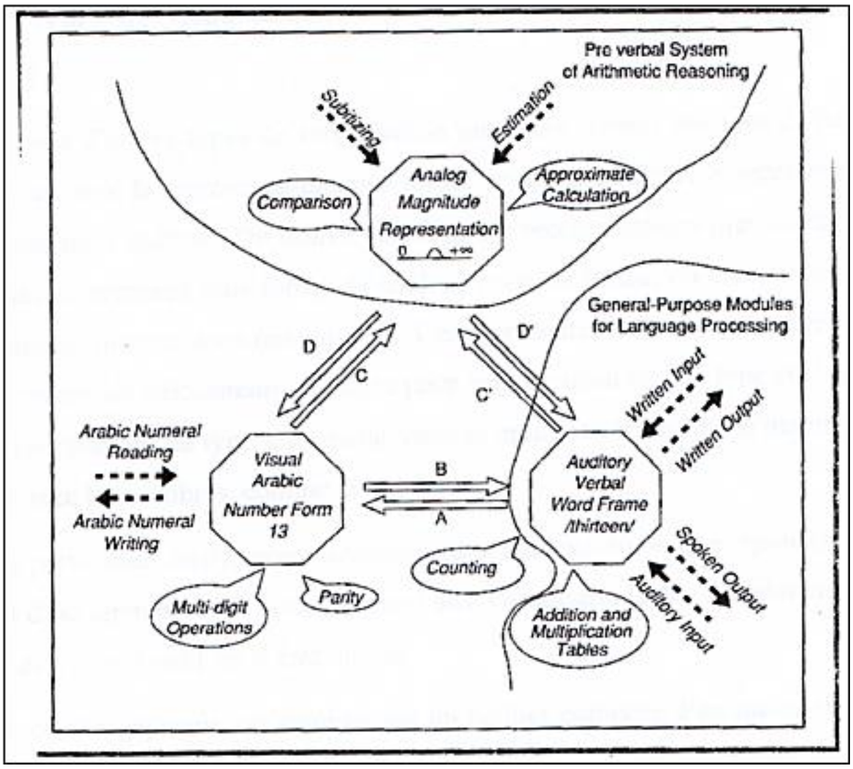

Figure 1 : Modèle du triple code de Dehaene (Dehaene, 1992)

Un autre modèle théorique a été formulé par McCloskey (1992), selon lequel le cerveau a recours à différents modules de traitement. Un premier module se charge de l'entrée, donc la compréhension des nombres, donc de la forme chiffrée ou sémantique du nombre. Le module de calcul, deuxième module proposé par McCloskey, sert de sous-système d'interprétation. Il identifie les opérateurs et cherche le résultat dans le stock des faits arithmétiques. Finalement, le module de la production, troisième module, transforme le résultat en code symbolique adéquat (mots-nombres ou chiffres). (Van Nieuwenhoven, 1999, pp. 38-40)

Un troisième modèle, élaboré par Campbell et Clark (1988 et 1991), part du principe qu'il y a cinq groupes de représentations qui entrent en ligne de compte pour le traitement des nombres : représentations analogues, imaginaires, verbales, visuo-motrices et autres représentations. Ces formats différents sont alors interconnectés avec des liens multiples. (Van Nieuwenhoven, 1999, pp. 40-41)

Le modèle du triple code que nous avons vu plus haut est en quelque sorte une combinaison du modèle de McCloskey et celui de Campbell et Clark. Il regroupe l'aspect modulaire des composantes du premier et la notion de codes multiples du second. (Van Nieuwenhoven, 1999, pp. 41-42)

L'image mentale

Déjà dans l'Antiquité, on savait qu'il est plus facile de mémoriser quelque chose en l'associant à une image. Ensuite, plusieurs expériences de la fin du 19$^{\text{ème}}$ siècle l'ont épistémologiquement démontré, par exemple l'expérience de Michel Denis et Pierrette de Pouqueville (1976), pendant laquelle les sujets devaient se souvenir de phrases, présentées sous différentes formes : phrase écrite, dessin, une photo, trois photos qui témoignent de l'action et pour finir un film de l'action. Les modalités qui permettent le plus la mémorisation des phrases sont le film et les trois photographies, qui ont obtenu un score égal. En deuxième place figure le dessin, en troisième la photographie seule et en dernière position la phrase sans représentation imagée. (Lieury, 2013, chap. 5)

Il est intéressant de constater que le dessin devance la photographie. En effet, la photographie contient des informations superflues qui ne seront pas retenues en mémoire. Des expériences ont montré que les détails et couleurs sont en général mal mémorisés, l'image stockée est donc plutôt une image de synthèse. Cela explique pourquoi un dessin est plus facilement mémorisé qu'une photographie. (Lieury, 2013, chap. 5)

Une image permet de regrouper et organiser plusieurs informations, réduisant ainsi l'effort qui serait nécessaire pour mémoriser chaque composante séparément. Pour mémoriser par exemple les mots *argent* et *rivière*, on peut utiliser l'image d'un billet de banque qui flotte sur la rivière. (Lieury, 2013, chap. 5)

Piaget et Inhelder classent les images mentales en deux catégories principales : les images reproductrices et les images anticipatrices. Les images reproductrices évoquent des objets ou évènements connus, contrairement aux images anticipatrices qui représentent des évènements non perçus auparavant. Ces derniers ne se développent qu'à partir d'opérations mentales concrètes. (Piaget, Inhelder & Bovet, 1991, chap. 1)

C'est à l'âge d'un an et demi à deux ans que l'enfant commence à faire des conduites sensori-motrices pour lesquelles il doit pour la première fois faire appel à des images mentales. Cependant, les images anticipatrices apparaissent seulement vers 7 à 8 ans. (Piaget *et al.*, 1991)

Quatre procédés sont possibles pour accéder à l'image mentale d'une personne. Tout d'abord la description verbale du sujet d'après son introspection, ensuite le dessin par le sujet, mais encore le choix du dessin qui correspond le mieux à sa représentation, ou finalement la reproduction gestuelle par le sujet. (Piaget *et al.*, 1991)

L'image mentale contient souvent un haut degré de schématisation, car il existe un nombre illimité de perceptions d'un objet, qu'il faut rassembler en peu d'images mentales. Si l'on suppose que l'image mentale est un produit de la perception, toute nouvelle perception peut se traduire en image ou engendrer une évolution d'images déjà présentes. Ces perceptions peuvent être verbales, ou encore symboliques. Il existe également des systèmes intermédiaires, notamment les schèmes perceptifs qui prennent en compte la représentation vécue et perçue ainsi que les concepts généraux. (Piaget *et al.*, 1991)

Tout adulte a besoin d'images mentales permettant de concrétiser la pensée abstraite liée à la langue et aux mathématiques. Les mathématiciens typiquement recourent sans cesse à leur imagination afin d'incarner les abstractions en exemples ou schémas concrets. (Piaget *et al.*, 1991)

La chaîne numérique mentale

Selon Dehaene (1997), les quantités numériques sont mentalement représentées sur une ligne numérique, alignées selon leur ordre de grandeur. La ligne peut être orientée dans l'espace : le zéro à gauche, les grands nombres à droite. (Dehaene, 1997, p. 81)

Les nombres évoquent non seulement une quantité, mais également un espace. Stanislas Dehaene a démontré ce lien entre les nombres et l'espace avec une expérience pendant laquelle les sujets ont dû décider si un nombre est plus grand ou plus petit que 65. Pour donner la réponse, ils tenaient deux pancartes de réponse, une dans la main droite et une dans la main gauche. Par contre, Stanislas Dehaene a varié le côté de la réponse : une moitié des sujets répondait " plus grand " avec la main droite et " plus petit " avec la main gauche, l'autre moitié répondait de manière contraire. Les personnes qui répondaient " plus grand " avec la main droite étaient considérablement plus rapides et faisaient moins d'erreurs que ceux de l'autre groupe. Apparemment, les grands nombres sont spontanément associés au côté droit et les petits nombres au côté gauche. (Dehaene, 1997, ch. 3)

Pour savoir d'où vient cette représentation de gauche à droite, Stanislas Dehaene a effectué deux expériences. L'hypothèse que les droitiers et les gauchers se représentent la ligne numérique différemment s'est avérée fausse. Quant à l'hypothèse que l'orientation de la chaîne numérique dépend de variables culturelles, il a interrogé un groupe d'Iraniens qui avaient donc appris à lire de droite à gauche. Dans ce cas, l'orientation était corrélée à l'exposition à la culture occidentale. Les Iraniens qui vivaient depuis longtemps en France avaient une représentation de gauche à droite, pendant que ceux qui ont immigré il y a peu de temps avaient tendance à associer les grands nombres avec le côté gauche. La direction de l'association des nombres avec l'espace semble être liée à la direction de l'écriture. (Stanislas Dehaene, 1997, ch. 3)

En effet, dans la culture occidentale, l'organisation des nombres de gauche à droite est omniprésente : la règle graduée, les calendriers, les diagrammes mathématiques, le classement des livres à la bibliothèque, les numéros des étages en dessus de la porte des ascenseurs, les claviers d'ordinateur, etc. L'internalisation de cette convention se fait depuis l'enfance. (Dehaene, 1997, ch. 3)

Dehaene postule que la majorité des gens ont une représentation mentale de la chaîne numérique qui est orientée de gauche à droite. Mais certains ont une image plus animée des nombres. Entre 5 et 10 % des humains sont convaincus que les nombres ont des couleurs ou ont un emplacement précis dans l'espace. Toutefois, ces représentations partageraient souvent plusieurs propriétés avec la chaîne numérique sur une droite. Les nombres entiers sont presque toujours représentés par une ligne continue, avec les nombres successifs situés à côté. Occasionnellement, on observe un changement de direction ou une discontinuité aux passages à une autre décade. La plupart du temps, les nombres croissants tendent vers la droite, et la plupart des gens affirment que la forme devient de plus en plus vague avec les grands nombres. (Dehaene, 1997, p. 83-86)

Pour ces postulats, Dehaene fait référence aux travaux de Sir Francis Galton qui s'est beaucoup intéressé à la question de la représentation mentale des nombres vers la fin du 19ème siècle. Cet anthropologue, explorateur, géographe, météorologue et statisticien britannique a en effet publié plusieurs textes à ce sujet dans le journal *Nature*, notamment *Visualised Numerals* en janvier et mars 1880. Il présente alors plusieurs représentations spatiales que des amis et connaissances lui ont fait parvenir. (Galton, 1880a)

Au total, Galton a pu rassembler plus de 80 représentations mentales de nombres. Toutefois, il a uniquement cherché à obtenir des représentations qui utilisent une image où la disposition des nombres est particulière. Il demande expressément à ses lecteurs de lui faire parvenir des informations sur leurs exemples " bien prononcés " de personnes qui sont capables de se rappeler ou représenter dans leur imagination une certaine vue, des sons, des odeurs ou des goûts. Ces représentations particulières ne constituent en effet qu'une partie des représentations possibles. Il en est d'ailleurs conscient, car il constate : « Je suis aujourd'hui incapable de déterminer le pourcentage de personnes qui ont […] la capacité de visualiser les nombres, car mes données proviennent principalement de personnes exceptionnellement douées.[4] (Galton, 1880a, p. 252) Avec " visualiser ", il sous-entend une représentation spatiale des nombres. Pour lui, le fait de se représenter les nombres dans un arrangement défini et constant est une faculté ou même un don. (Galton, 1880a)

Un autre énoncé surprenant de Galton est que cette manière particulière de se représenter les nombres dans un espace serait fortement héréditaire. Il a en effet souvent observé que lorsqu'un individu d'une fratrie possède cette " capacité ", elle était très souvent également présente chez les sœurs, frères ou cousins. (Galton, 1880a)

[4] Traduit par E. Haller. Texte original : I am as yet unable to determine the percentage of persons who possess […] the power of visualising numerals, because my returns are chiefly derived from persons who are exceptionally gifted.

Finalement, Galton prétend que ces *figures* doivent avoir leur origine dans un état mental précoce, présent déjà avant que l'enfant apprenne les nombres. Il explique ce postulat par le fait qu'il n'existe aucun livre pour enfants qui aurait pu générer ces représentations étranges. (Galton, 1880b)

Dehaene suppose que la représentation des nombres est en lien avec la manière dont les cartes corticales[5] du nombre et de l'espace sont formées pendant le développement. Le sens du nombre déjà présent à la naissance est enrichi et complété par les nombres qui sont nouvellement appris. En effet, le nombre total de neurones restant constant durant le développement, l'agrandissement du réseau du nombre doit se faire sur les cartes corticales avoisinantes, qui sont celles de la couleur, de la forme et de l'emplacement. (Dehaene, 1997, ch. 3)

Par contre, la chaîne numérique mentale que nous utilisons pour nous représenter des quantités supporte seulement une forme limitée de l'intuition des nombres. Elle contient seulement des nombre positifs entiers et leurs relations proches. Les autres nombres n'ont pas d'équivalent direct dans le cerveau. Pour vraiment les comprendre, quelqu'un doit se construire une nouvelle méthode mentale qui permet une compréhension intuitive. Pour fonctionner d'une manière intuitive, notre cerveau a besoin d'images. (Dehaene, 1997, ch. 3)

[5] Ensemble de neurones pour un domaine de fonctions.

Ma propre manière de me représenter les nombres

Mon image mentale des nombres s'est construite de manière inconsciente au fur et à mesure de l'apprentissage des nombres. Depuis, j'avais toujours utilisé cette représentation mentale des nombres sans en être consciente, jusqu'il y a peu quand j'ai commencé à prendre conscience de cette disposition spatiale particulière des nombres. Quand je dois penser un nombre, cette image me permet de me le représenter de manière concrète. C'est pour moi un outil qui me permet de situer un nombre spatialement et ainsi définir son ordre de grandeur et sa relation aux autres nombres.

Ma chaîne numérique mentale a des aspects spiroïdaux, mais sans reprendre entièrement le principe de la base dix : les nombres 1 à 12 forment quasiment un cercle, les nombres 1 à 10 prennent alors la forme d'un " u ". Le rapport entre le 1 el le 10 n'est pas visible, par contre il y a ensuite un lien (illustré avec les traits bleus) entre les nombres 2 à 10 et leurs multiples de dix (20 à 100 respectivement).

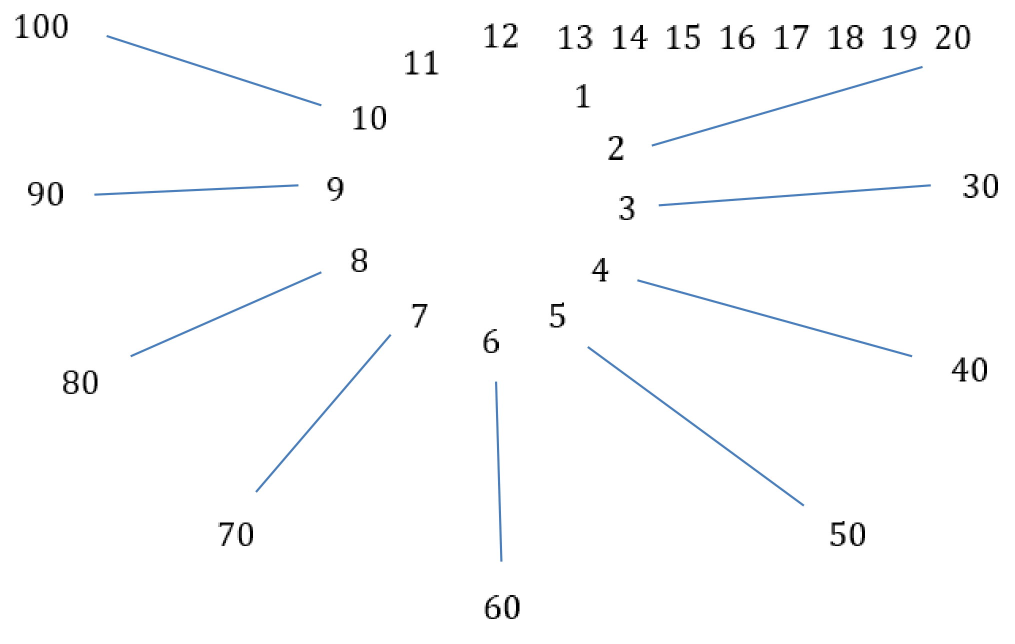

Figure 2 : Ma représentation mentale des nombres de 1 à 100

Une autre particularité est la forme que prend la suite des nombres à partir de 21. La disposition des nombres 21 à 30 par exemple rappelle celle des nombres 1 à 10, de même que les nombres 100 à 1'000 et les nombres 1'000 à 10'000. En revanche, les nombres 10'000 à 100'000 sont, quant à eux, disposés selon le schéma des nombres 10 à 100, entourant tous les nombres inférieurs. Les nombres 100'000 à 900'000 et 1 mio à 10 mio sont de nouveau alignés en prenant la forme d’un “ u ”.

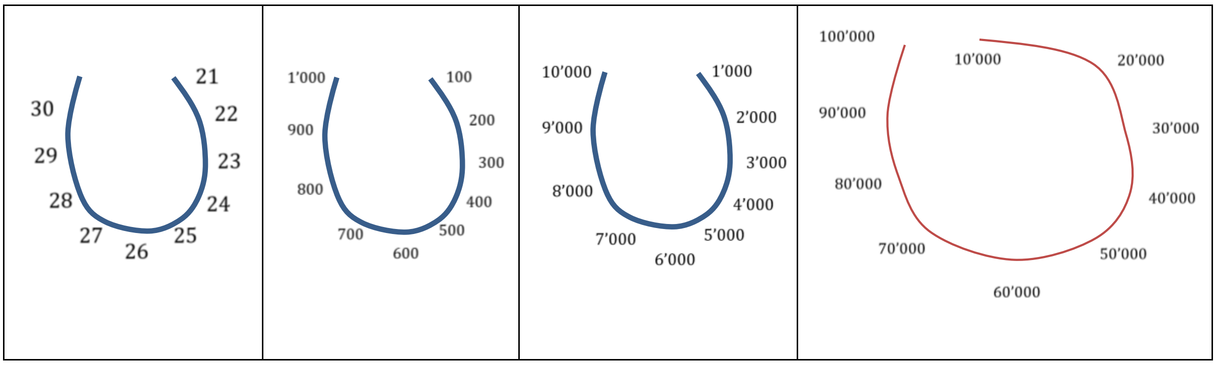

Figure 3 : Ma représentation, comparaison des différentes formes

On peut donc distinguer deux formes différentes. La première rappelle la forme du “ u ” et se déploie depuis la droite vers la gauche (en bleu sur l’illustration ci-dessus). Elle s’applique à tous les nombres dont le mot-nombre commence par une unité : quatre, quatre-cent, quatre-mille, quatre millions, etc. Le deuxième schéma se caractérise par le fait qu’il entoure tous les nombres inférieurs (en rouge sur l’illustration), il est employé pour tous les nombres dont le mot-nombre commence par une dizaine : quarante, quarante-mille, etc.

Il semble alors que lors de la construction de mon image mentale des nombres, les nombres dix-mille, onze-mille, douze-mille, etc. ont été mis en correspondance avec leur homologue des dizaines (dix, onze, douze, etc.), car leur mot-nombre commence avec le même mot. La forme circulaire de ces nombres se distingue de la forme en *u* que prennent les nombres dont le mot nombre commence par une unité. Le même schéma se reproduit avec les nombres 10 mio, 11 mio et 12 mio.

Cette représentation des nombres me facilite tout travail mental qui implique des nombres, notamment la mémorisation de nombres et le calcul mental. Pour me souvenir du résultat de la multiplication 6 x 7 par exemple, je sais que la réponse se trouve à droite, à l’intérieur de la boucle des quarantaines, et je trouve rapidement le résultat 42. Lors de l’apprentissage des livrets, je n’ai pas seulement mémorisé le résultat mais également son emplacement dans mon image des nombres.

En ce qui me concerne, la représentation des nombres 1 à 12 est probablement due au fait que j’ai appris ces premiers nombres conjointement avec l’apprentissage de l’heure, car ils sont disposés comme sur le cadran d’une montre. En apprenant les nombres suivants, j’ai simplement complété ce schéma établi.

Question de recherche

Piaget et ses co-auteurs du livre *L'image mentale chez l'enfant* (Piaget *et al.*, 1991) l'ont déjà constaté dans les années soixante : il existe une panoplie de représentations mentales des nombres entiers. Galton s'est penché sur la question dans les années 1880. Les résultats qu'il a obtenus sont fascinants, mais sa recherche n'était pas systématique. Il est alors intéressant d'investiguer sur les différentes représentations mentales des nombres de manière dogmatique.

L'idée de ce sujet pour mon travail de mémoire m'est venue en m'interrogeant sur ma propre manière de voir les nombres et en questionnant quelques personnes de mon entourage. Je suis très vite venue à la même conclusion que Piaget. Les représentations mentales sont variées ; certains se ressemblent, mais d'autres sortent totalement du lot.

À travers ma recherche, je rassemble donc un certain nombre de représentations mentales, et tente ensuite de répondre à la question suivante :

Comment l'être humain se représente-t-il mentalement les nombres entiers ?

La question est volontairement très ouverte, car je voudrais prendre en compte toutes les formes de représentation des nombres entiers. Certaines personnes s'imaginent les nombres dans un ordre croissant, mais d'autres ne voient pas de lien entre les nombres qui se succèdent. J'ai donc renoncé à questionner les personnes sur la “ chaîne numérique mentale ” ou la “ suite mentale des nombres ”, afin de rester ouverte aux représentations qui ne prennent pas en compte l'aspect ordinal d'un nombre, ou au contraire démontreraient plutôt un lien avec les aspects cardinaux.

Il me semble intéressant d'effectuer cette recherche sur la représentation mentale des nombres, d'autant plus que je n'ai pas pu identifier d'auteur ou de chercheur qui aurait analysé ce sujet de manière générale. Certes, Sir Francis Galton était très passionné et a récolté une grande quantité de représentations mentales, mais il s'est focalisé uniquement sur les images mentales qui témoignent d'un arrangement particulier des nombres dans l'espace. De plus, ses recherches ont eu lieu en 1880 et il est fort possible que la manière de se représenter les nombres ait changé depuis. Par ailleurs, je n'ai pas trouvé de travaux au sujet de la représentation mentale des nombres.

Hypothèses

À travers ma recherche, je vais vérifier trois hypothèses qui touchent au champ de la représentation mentale des nombres :

H1 : Il y a des représentations des nombres sans lien et d'autres avec lien ordinal.

H2 : La représentation est fortement influencée par la manière d'avoir appris les nombres.

H3 : La manière de se représenter les nombres a une influence sur la capacité à retenir en mémoire des nombres, tant à court qu'à long terme.

Pour définir la première hypothèse, je me suis basée sur ma propre représentation et celles de mon entourage. J'ai constaté que, malgré la diversité des images mentales, elles peuvent être classées dans trois catégories : sans lien ordinal, représentations avec lien ordinal unidimensionnel ainsi que les représentations avec lien ordinal bi- ou tridimensionnel. Je propose alors un modèle qui permet de classifier les représentations mentales en trois catégories :

1) Représentations avec un lien ordinal unidimensionnel
2) Représentations avec un lien ordinal bi- ou tridimensionnel
3) Autres représentations visuelles

La deuxième hypothèse est également basée sur mon propre vécu. En effet, dans mon cas, il est assez probable que ma représentation des nombres de 1 à 12 est liée à l'apprentissage de l'heure, et j'ai effectivement le souvenir que mes grands frères m'inculquaient la lecture de l'heure sur notre horloge à la maison. Cette hypothèse est toutefois difficilement vérifiable ; et je me suis vite rendu compte, en questionnant quelques personnes, que la plupart n'ont aucun souvenir quelconque de l'apprentissage du nombre. En effet, comme nous avons vu dans la partie théorique de ce travail, l'acquisition du nombre commence déjà très tôt dans l'enfance.

Toutefois, j'ai décidé de conserver cette hypothèse et de l'inclure dans les entretiens, malgré la suspicion d'obtenir très peu de réponses. L'espoir que les informations obtenues pourraient être très concluantes a fait pencher la balance dans ce sens.

La troisième hypothèse porte sur les qualités des différents types de représentation. Beaucoup de facteurs influencent la capacité à mémoriser quelque chose, et il me parait possible que le type de représentation mentale puisse avoir une influence sur la mémoire des nombres. En effet, comme vu plus haut, une image permet plus facilement de se souvenir de quelque chose. J'en déduis que les personnes avec une représentation spatiale des nombres devraient mieux mémoriser les nombres et s'en rappeler plus aisément.

Parallèlement, il m'a semblé intéressant de me pencher sur la question de la performance, car en fin de compte, c'est ce qui peut apporter une nouvelle vision pour l'enseignement. Si la capacité de traiter les nombres dépend de la représentation mentale, on pourrait alors se demander si cette représentation peut être influencée par un enseignement particulier pendant les premières années de l'école obligatoire.

Méthode

Étant donné qu'il existe peu de documentation au sujet de la représentation mentale des nombres, il s'agit - dans un premier temps - de tenter de mieux comprendre le phénomène de l'image mentale des nombres. J'ai donc choisi la méthode d'enquête qui permet l'exploration et la description du phénomène.

C'est à travers des entretiens semi-directifs que j'ai récolté des données qui ont ensuite servi à l'analyse du sujet. Dans la première partie de l'entretien, j'ai demandé à mes interlocuteurs de me décrire leur représentation des nombres ainsi que leurs souvenirs de l'apprentissage des nombres, s'ils existent. Cette partie de l'entretien était enregistrée avec un dictaphone, ce qui a évité de devoir tout écrire et a ainsi permis de limiter le temps nécessaire pour mener chaque entretien. De plus, les explications orales ont ensuite été complétées par un dessin, réalisé tout à la fin de l'entretien, après avoir fait les tests sur la mémoire des nombres. J'ai choisi de procéder de cette manière, car à travers l'utilisation de l'image mentale des nombres pendant le test, cette dernière peut devenir plus lucide et tangible et la description initiale peut alors être complétée, si nécessaire, par l'interlocuteur.

Par la question sur le souvenir de l'apprentissage des nombres, je cherche notamment à vérifier le lien entre la manière d'avoir appris les nombres et la manière de se les représenter. Ensuite, j'ai effectué des tests sur la mémoire des nombres, qui ont pour but de déterminer s'il existe un lien entre le type de représentation mentale et les performances de mémorisation des nombres.

Récolte de données

La population concernée par cette recherche est constituée de tout être humain ayant appris les nombres, tout au moins les premiers nombres qui sont souvent utilisés dans la vie de tous les jours. Dans l'éducation scolaire suisse, ce stade est atteint au cours de la 1ère année HarmoS de l'école primaire, alors que les élèves sont âgés de quatre ans environ. Toutefois, j'ai constaté que les enfants ont souvent de la peine à faire une introspection, à se rendre compte de leur représentation des nombres et à la décrire. De plus, ils éprouvent même parfois de la difficulté à comprendre la question et saisir ce qui est demandé. J'ai déjà posé plusieurs fois la question de l'image mentale des nombres à des enfants en âge d'école primaire, et leurs réponses me font conclure qu'ils ne sont pas capables soit de déterminer s'il y a une représentation mentale, soit de la décrire convenablement. C'est pour ces raisons que je décide de me limiter aux adultes uniquement. Pour finir, je dois également restreindre – pour des raisons pratiques - la population aux personnes parlant le français, l'allemand ou l'anglais, langues dans lesquelles je peux effectuer l'entretien.

La taille de l'échantillon ne devrait, dans ce type de recherche, pas être définie au préalable. C'est la saturation, moment où l'on reçoit toujours les mêmes réponses, qui est l'indicateur pour la fin de la récolte de données. Cependant, dans le cadre de mon travail de mémoire, il ne me sera pas possible d'atteindre cet objectif. Je me limite donc à un nombre de 50 entretiens, faute de temps pour arriver au point de saturation.

Ce sont des gens de mon entourage que j'ai contacté pour participer à cette recherche : famille, amis, voisins et connaissances diverses. Afin d'obtenir un résultat fidèle à la population, j'ai veillé à interroger des personnes de différents âges et niveaux de formation, mais sans volontairement pondérer ces variables. La variation du domaine professionnel s'est avérée particulièrement délicate. Tant à l'école qu'au travail, je suis entourée d'enseignants ou futurs enseignants. J'ai donc dû, à un moment donné, refuser la participation à la recherche de certaines personnes, afin de limiter le risque que cette prépondérance ait une influence sur les résultats de ma recherche.

Il existe quatre procédés possibles pour obtenir l'image mentale d'une personne : la description verbale du sujet d'après son introspection, le dessin par le sujet, le choix de dessin qui correspond le mieux à sa représentation et la reproduction gestuelle par le sujet (Piaget *et al.*, 1991). À travers les entretiens, je prends en compte la description verbale et le dessin. La gestuelle peut également me donner des indications et ainsi me permettre de faire des relances fructueuses. Toutefois, le choix d'un dessin me parait inadéquat, d'une part à cause de la variété de représentations possibles et d'autre part pour éviter d'influencer la réponse ou rester figé dans ce qui est proposé.

J'ai élaboré une grille d'entretien qui est divisée en trois parties (voir annexes). La première consiste en une série de questions ouvertes qui amène l'interviewé à une introspection et description de son image mentale des nombres. Suite à la première question sur comment la personne se représente mentalement des nombres, qui est une question primaire, j'ai inséré une question secondaire qui cherche à déterminer, si ce n'est pas déjà fait au cours de la première réponse, si la personne voit les nombres dans un arrangement ordinal. Ces deux premières questions me permettent de me faire une image de leur représentation mentale des nombres, qui me servira pour classer les représentations dans les différentes catégories.

La troisième question concerne l'apprentissage des nombres. Elle vise à collecter des informations sur le contexte et les éventuels outils, objets et représentations visuelles qui étaient utilisés pour l'apprentissage des nombres. Comme déjà mentionné, je m'attends à ce qu'un grand nombre de personnes ne se souviennent pas de l'apprentissage des nombres, mais j'espère tout de même d'obtenir des réponses concluantes d'au moins quelques interlocuteurs.

Dans la deuxième partie de l'entretien, j'effectue une série de tests sur la mémoire des nombres à court et à long terme. Pour commencer, c'est moyennant les livrets, ou plutôt l'apprentissage par cœur du résultat des livrets, que je mesure la mémoire à long terme d'un nombre. C'est ici un bel exemple d'un nombre mémorisé il y a longtemps et qui reste en général en mémoire.

Pour limiter le recours au calcul pour l'obtention du résultat, j'ai choisi de ne pas prendre en compte les livrets 1, 2 et 3, pour lesquels le résultat peut facilement être obtenu par calcul mental. C'est donc avec les nombres 4 à 9 que j'ai composé les multiplications à effectuer. Afin de choisir des nombres au hasard, j'ai eu recours au générateur de nombres aléatoires en ligne[6], qui m'a permis de générer deux nombres entre 4 et 9, jusqu'à obtention de dix multiplications sans répétition. Sur la grille d'entretien, j'ai prévu un tableau pour inscrire le temps de réponse et si la réponse est juste ou fausse. En effet, je ne pourrai pas prendre en compte les réponses fausses, étant donné que, dans ce cas, le nombre appris par cœur n'a pas été retrouvé.

Dans le but de tester la mémoire à court terme, j'ai choisi de dicter une série de nombres, qui doivent être retenus en mémoire pendant cinq secondes et ensuite être restitués. Tout comme

[6] http://randomnumbergenerator.intemodino.com/fr/generateur-de-nombres-aleatories.html

pour les nombres pour les multiplications, j'ai également utilisé le générateur de nombres aléatoires. La difficulté varie entre les différentes séries, afin d'éviter que les plus forts réussissent à restituer tous les nombres et ainsi perdre la possibilité de différencier leurs performances. En effet, si plusieurs individus arrivent à se souvenir de tous les nombres, il sera alors impossible de dire lequel est capable de mieux retenir en mémoire une série de nombres. La première série est constituée de quatre nombres à deux chiffres. J'ai ensuite augmenté la difficulté en proposant des séries plus conséquentes, d'abord de cinq et ensuite de six nombres, mais toujours à deux chiffres. Dans cette première partie, les nombres sont donnés dans l'ordre croissant. L'ordre peut en effet avoir une influence sur la capacité de mémorisation pour les personnes qui se représentent les nombres comme une suite ordinale. Dans ce cas, les sujets vont éventuellement se rendre compte que pour chaque nouveau nombre de la suite, ils avancent un bout sur leur chaîne numérique mentale. Cette information peut les aider à retenir les nombres.

Par la suite, j'ai modulé l'ordre de grandeur des nombres, en constituant à nouveau des séries de quatre nombres, mais une fois à trois chiffres et une autre série à quatre chiffres. Il semble en effet que les plus grands nombres sont beaucoup plus difficiles à retenir en mémoire, car elles contiennent plus d'information par nombre. À l'oral comme à l'écrit, ces nombres sont constitués de plus d'éléments, soit d'éléments de mots, soit de chiffres. De plus, comme le dit Dehaene, la représentation spatiale des nombres devient de plus en plus imprécise et floue avec l'avancement dans les plus grands nombres. Par contre, cela pourrait ne pas être le cas avec une représentation des nombres en deux ou trois dimensions, où l'on retrouve souvent des points de repères dans différents endroits de la suite des nombres. C'est donc également pour cette raison que j'ai choisi d'inclure des suites avec des nombres dans les centaines et les milliers.

Pour finir, les sujets ont de nouveau dû retenir en mémoire des séries des nombres à deux chiffres, mais cette fois les nombres n'étaient pas donnés dans l'ordre croissant comme dans les trois premières séries. Là également, je pense que les personnes qui se représentent les nombres dans l'ordre croissant sur une ligne ont un avantage lors de la mémorisation, car la trace que laissent les différents sauts entre les nombres peut à nouveau être utilisée pour se rappeler des nombres plus facilement.

Analyse

Plusieurs représentations et autres particularités

La récole de données a été satisfaisante, du moins ce qui concerne la collecte des images mentales des nombres. J'ai pu obtenir 50 représentations mentales des nombres de différents types et formes. Par contre, plusieurs occurrences inattendues sont à signaler.

Tout d'abord, 20 % des personnes questionnées utilisent plusieurs représentations, dépendant de la situation dans laquelle ces nombres apparaissent. Une personne a pu clairement définir quelle représentation elle utilise dans quelle situation. Pour des comparaisons et des intervalles, elle a recours à la flèche des réels (droite numérique), pour les additions et soustractions, elle se sert de la maison de dix (compléments à dix), et pour les calculs avec décimales, elle fait un calcul mental en colonne. Quant à l'énonciation d'un nombre sans contexte, elle se représente ce nombre à l'écrit, mais sans le situer spatialement.

Il se pose alors la question de l'attribution d'une catégorie pour ces représentations. En effet, il est parfois difficile de déterminer quelle image est prépondérante. Neuf sur dix personnes qui utilisent plusieurs images déclarent utiliser la droite numérique, mais à différentes envergures. Certains l'utilisent pour penser tout nombre, d'autres uniquement pour les exercices mathématiques qui demandent l'utilisation de la droite numérique.

Pour la catégorisation de ces représentations, je voulais au départ proposer une nouvelle catégorie, celle des personnes qui utilisent plusieurs représentations. Mais cette option ne nous apporterait rien de plus que si on ne les prenait simplement pas en compte, car nous n'aurions aucune indication sur le type de représentations que cette catégorie inclue.

On pourrait alors choisir de ne pas les prendre en compte, ou au contraire prendre en compte toutes les représentations de ces personnes. Le premier cas de figure nous priverait d'une grande quantité de représentations, étant donné qu'un cinquième des personnes interrogées sont concernées. Le second cas provoque forcément un biais dû à l'ampleur variable des utilisations de ces représentations qui ne serait pas prises en compte. Je propose alors de pondérer l'importance de ces représentations par rapport aux nombres d'images que la personne utilise. Si le sujet indique qu'il utilise trois images différentes, le type de chaque image sera pris en compte pour un tiers.

Le modèle des trois catégories que j'ai proposé dans les hypothèses doit être complété par une quatrième et cinquième catégorie : celle des personnes sans représentation visuelle quelconque et celle des représentations sans lien ordinal. En effet, deux personnes interrogées ont témoigné qu'elles n'ont aucune image visuelle lorsqu'on évoque un nombre, ni même des chiffres écrits sans lien avec les autres nombres. C'est alors un concept abstrait qui n'est pas visualisé. En ce qui concerne les représentations sans lien, je les ai jusqu'à présent pris en compte dans les *autres* représentations. Par contre, cette rubrique contient également des représentations bien particulières, que j'aimerais distinguer de la simple représentation chiffrée sans lien ordinal. Je propose alors ces catégories :

1) Représentations avec un lien ordinal unidimensionnel
2) Représentations avec un lien ordinal bi- ou tridimensionnel
3) Représentations chiffrées sans lien ordinal
4) Autres représentations visuelles
5) Sans représentation visuelle

En choisissant ces cinq catégories, il est possible de prendre en compte toutes les représentations que j'ai obtenues lors de mes 50 entretiens.

L'ambigüité du souvenir

En ce qui concerne le souvenir de l'apprentissage des nombres, un peu plus de la moitié des sujets ont un quelconque souvenir, mais il est généralement très vague. Parfois, ce sont plutôt des suppositions. De plus, le souvenir ne correspond pas toujours à la réalité, car il peut se déformer au fil des années. Il sera probablement difficile de déterminer sur cette base si la représentation mentale des nombres dépend de la manière d'avoir appris les nombres.

Les tests et les variables parasites

Venons à présent à l'analyse des tests sur la mémorisation des nombres à court et à long terme. Il s'est avéré que plusieurs variables parasites ont une influence sur les performances des sujets. La fréquence d'utilisation des livrets par exemple. Les personnes avec enfants en âge de scolarité primaire ont répondu avec une rapidité surprenante. Le fait de réviser les livrets avec leurs enfants a rafraichi leur mémoire des résultats. Il arrive également que certaines multiplications sont fréquemment utilisées dans un certains secteurs professionnels. C'est le cas pour la multiplication 8 x 8 dans le domaine informatique par exemple. De plus, une assistante médicale a donné la réponse au calcul 5 x 6 en un temps record, alors qu'elle était incapable de trouver le résultat des neuf autres multiplications. Il lui a fallu seulement 0.66 secondes pour restituer le résultat, une des meilleures performances sur la totalité des entretiens. En effet, dans son travail, elle doit régulièrement effectuer ce calcul pour réserver une salle au bloc opératoire. La plupart du temps, la salle doit être réservée pour une durée de cinq heures. Toutefois, le programme informatique pour la réservation demande une entrée en minutes, elle doit alors réserver la salle opératoire pour une durée de 300 minutes, et elle sait que cela représente 5 heures à 60 minutes.

Un autre biais est généré par le fait que certaines personnes n'ont jamais appris par cœur les résultats des livrets. Une partie d'entre elles ont développé un moyen de calculer rapidement la réponse, d'autres n'ont simplement pas pu répondre à la plupart des questions sur les livrets. J'ai donc décidé de ne pas prendre en compte les résultats des personnes qui n'ont pas répondu juste à au moins 50 % des questions.

Un troisième facteur qui influence le temps de réponse est la vitesse de traitement de l'information dans le cerveau, propre à chaque individu. Pour arriver au résultat, il faut passer par différentes étapes. Tout d'abord, l'information orale est transmise au cerveau. Si le résultat a été appris par cœur, le modèle du triple code de Dehaene (voir figure 1, page 9) stipule que cette information auditive n'a pas besoin d'être transformée et resterait dans la zone de traitement verbal du cerveau. Il faut par contre alors trouver la réponse à la multiplication, et ensuite faire le chemin inverse et prononcer le résultat. Dans le cas où l'individu calcule le résultat parce qu'il ne le connait pas par cœur, le temps de traitement sera alors supérieur, ce qui doit également être considéré comme un biais dans la détermination du temps de réponse.

Ensuite, c'est également l'environnement et les conditions du test qui ont une influence sur les performances. Il n'était pas toujours possible de réaliser l'entretien dans un endroit silencieux. Le bruit environnant a alors pu altérer le processus de réflexion et ainsi retarder la réponse. De plus, certains entretiens ont été menés par Skype. Malgré une bonne qualité de transmission, un léger décalage ne peut être exclu. Et finalement, une participante a signalé avoir ressenti un stress pendant le test, et il est bien connu que le stress peut générer des blocages.

Pour finir, il reste à considérer la dictée et le chronométrage des réponses. J'ai tenté de dicter la multiplication à effectuer toujours à la même vitesse et avec la même intonation, mais il est évident qu'il y avait certainement des variations. Toutefois, l'effet sur la vitesse de réponse n’est pas certain. Le chronométrage du temps de réponse en revanche est certainement influencé par le fait que cette mesure ait été faite manuellement avec le chronomètre de l’application *horloge* de l’iPhone. Il entre en ligne de compte alors non seulement le temps de réponse, mais également ma précision et ma réaction lors de la manipulation de cet outil.

Concernant le test de mémorisation des nombres à court terme, un certain nombre de variables parasites présentés plus haut sont également applicables, particulièrement les facteurs liés à l’environnement et aux conditions du test. Mais l’influence la plus conséquente est certainement la technique de mémorisation. Certains se répètent les nombres moyennant une sorte d’autodictée mentale, les voient à l’écrit ou s’imaginent de les écrire, et d’autres cherchent un lien avec un élément connu, comme l’âge d’un membre de la famille ou l’année d’un évènement historique.

Toutefois, le problème principal de ces deux tests sur la mémorisation des nombres est qu’ils ne permettent pas de déterminer si la performance est liée au type de représentation mentale. En effet, très souvent, les sujets n’ont pas eu recours à leur image mentale pour se souvenir des nombres. Seule une personne a affirmé utiliser sa représentation spatiale des nombres pour retrouver les réponses pour les livrets. La pertinence de ces tests et leurs résultats est alors discutable.

Cet échec est inattendu pour moi, car personnellement j’utilise ma représentation mentale automatiquement à chaque fois que je rencontre un nombre. La seule consolation consiste dans le fait que ces tests sur la mémorisation des nombres a parfois fait émerger une compréhension plus profonde des schémas numériques que la personne utilise.

Résultats

Représentation mentale des nombres

Il aurait certainement été intéressant de poursuivre les entretiens afin d’obtenir plus de données concernant les représentations mentales de l’être humain. Toutefois, l’échantillon de 50 personnes permet déjà d’évaluer et analyser les informations. En classant les représentations dans les cinq catégories proposées, on obtient la distribution qui est représentée dans le graphique ci-dessous.

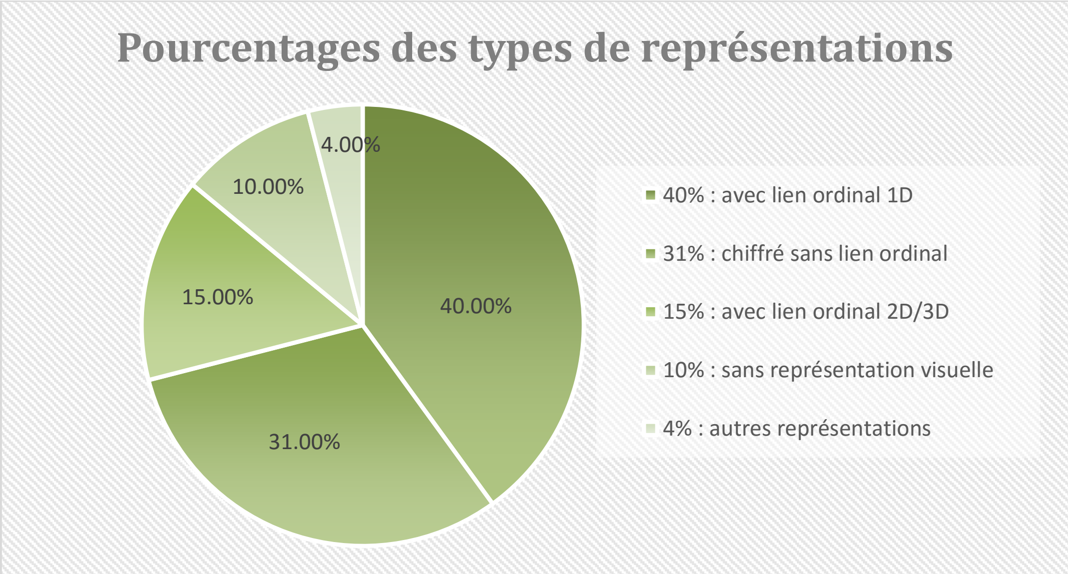

Figure 4 : Pourcentages des types de représentations mentales

La représentation unidimensionnelle

La représentation prépondérante, avec une occurrence à 40 %, est celle avec lien ordinal unidimensionnelle, donc la droite numérique. Selon les personnes, cette droite peut être horizontale, verticale ou légèrement inclinée. Chez plusieurs personnes, elle est horizontale pour les nombres positifs et verticale pour les nombres négatifs, rappelant alors l'image du thermomètre. D'autres individus se représentent le plan cartésien[7], les nombres pouvant alors se situer soit sur la droite horizontale soit sur la droite verticale.

Comme l'a déjà constaté Dehaene (1997, p. 85), les personnes interrogées ont généralement déclaré que la représentation devient de moins en moins précise vers les grands nombres. Certains individus se représentent même seulement une partie des nombres sur la droite numérique, les plus grands nombres sont alors représentés sans lien aux autres nombres. La personne de l'entretien n° 20 par exemple se représente uniquement les nombres entre 1 et environ 40 sur une droite, ensuite la ligne s'arrête.

La représentation sans lien ordinal

En deuxième place vient alors la représentation sans lien ordinal entre les nombres. 31 % des personnes interrogées se représentent les nombres sous leur forme chiffrée. Cette image est alors la plupart du temps en noir et blanc, ou de couleur indéfinie, et les chiffres en caractères

[7] Deux droites numériques perpendiculaires formant le système de coordonnées cartésiennes, qui permet de déterminer la position d'un point dans un espace.

d'impression. Il n'y a alors aucune organisation entre les nombres. Si on évoque plusieurs nombres à la suite, le nombre cité précédemment disparait et le nouveau se met à sa place.

La représentation bi- ou tridimensionnelle

La catégorie des représentations avec lien ordinal bi- ou tridimensionnel constitue le 15 % des données obtenues. Ce résultat est alors supérieur à celui que Sir Francis Galton avait estimé. Il disait qu'un homme sur 30 (3.33 %), ou alors une femme sur 15 (6.67 %), se représente le nombre à un endroit spatialement bien précis (Galton, mars 1880, p. 494). Quant à Dehaene, il stipule qu'entre 5 % et 10 % des humains associent aux nombres des couleurs ou des emplacements précis (Dehaene, 1997, p. 83).

Ces représentations pluridimensionnelles attribuent un emplacement bien précis à chaque nombre. Plusieurs personnes se représentent les nombres dans un tableau. Les nombres 1 à 10 se trouvent alors sur la première ligne, les nombres 11 à 20 se mettent dessous et ainsi de suite, jusqu'au nombre 100. Il y a ensuite une nouvelle *carte* pour les nombres de 101 à 200.

Quelques images mentales particulières valent la peine d'être décrites plus précisément. Une personne par exemple se représente les nombres étant les numéros des maisons dans une rue. D'une part il voit le nombre écrit sur une plaquette bleue, d'autre part les nombres impairs se trouvent d'un côté de la rue et les nombres pairs de l'autre. Par contre, cette personne utilise cette représentation uniquement pour les petits nombres. Les plus grands sont pensés de manière abstraite et associés à de l'argent pour se représenter l'ordre de grandeur. Ainsi, un nombre entre 100 et 1'000 fait alors penser à des factures, un montant autour de 5'000 au salaire, et un montant entre 20'000 et 30'000 au prix d'une voiture.

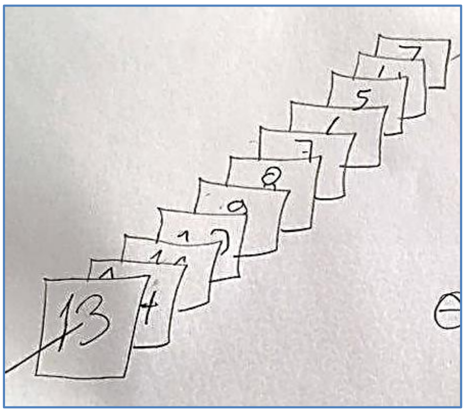
Figure 5 : Dessin de la représentation, entretien n° 34

La personne de l'entretien n° 34 voit les nombres sur une droite qui est orientée en profondeur et en perspective. J'ai décidé de classifier cette représentation dans les images pluridimensionnelles, car il ne s'agit pas d'une figure plane. La personne interrogée m'a expliqué qu'elle se place mentalement devant le nombre évoqué et voit alors les nombres supérieurs alignés derrière ce nombre, les nombres inférieurs se trouvent alors sur une ligne qui continue derrière sa tête.

Une troisième personne utilise une image bien particulière pour se représenter les siècles, alors que les nombres autrement sont représentés de manière linéaire, à l'horizontal pour les nombres positifs et à la verticale pour les nombres négatifs. Les nombres des années par contre sont représentés sous forme de vagues, le début du siècle se trouvant tout en haut et la fin du siècle en bas, comme le montre le dessin récolté lors de l'entretien (figure 5). Plus le siècle est récent, plus cette représentation est précise. Les siècles peu connus sont alors plutôt représenté par un long trait vertical, la partie supérieure représentant le début du siècle et la partie inférieure la fin.

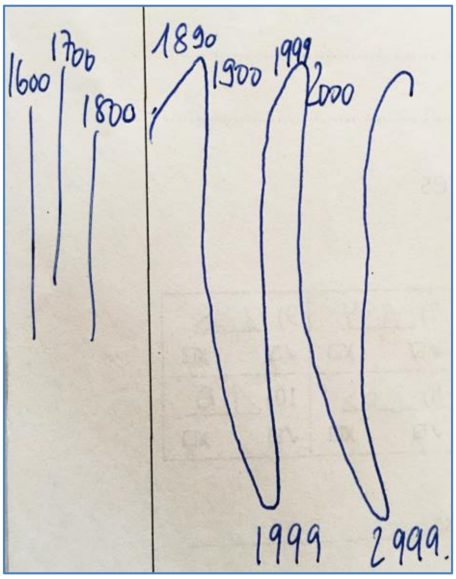

Figure 6 : Dessin de la représentation des siècles, entretien n° 39

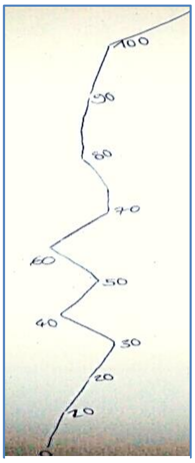

Figure 7 : Dessin de la représentation, entretien n° 32

Deux autres personnes se représentent les nombres dans un arrangement particulier. L'entretien n° 32 a dévoilé une représentation linéaire orientée de manière verticale (figure 6). Toutefois il y a un léger changement de direction quand on change de dizaine à partir de 30. Cette inclinaison d'une partie de la droite numérique est le plus prononcée entre 30 et 70, ainsi qu'au tournant de la centaine. Cette personne utilise sa représentation des nombres pour se rappeler des résultats des livrets par exemple. Pour le calcul 4 x 7 par exemple, elle sait que la réponse se trouve dans le bout droit des vingtaines. De plus, elle se souvient alors que les nombres 20, 24 et 28 font partie du livret 4, tout comme 21 et 28 font partie du livret 7. Le nombre 28, qui se trouve dans les deux livrets, est alors identifié comme réponse.

La deuxième personne se représente les nombres de manière circulaire ou triangulaire. Les nombres 1 à 10 sont alignés de gauche à droite, les nombres 11 à 100 continuent ensuite de manière verticale, et les nombres 101 à 1'000 tendent de nouveau vers la gauche, de telle manière à revenir sur le point de départ avec le nombre 1'000. C'est alors en une sorte de deuxième couche que les nombres 1'000 à 10'000 se poursuivent superposés aux nombres 1 à 10 et ainsi de suite. Les nombres négatifs suivent le même schéma, mais se trouvent à l'étage en dessous.

La personne en question a eu beaucoup de peine à représenter son image mentale, non seulement à cause des aspects tridimensionnels, mais également par le fait que l'alignement des nombres change de forme selon le point de vision. Dans sa tête, les nombres 100 à 1000 sont disposés de manière horizontale, perpendiculaire aux nombres 1 à 10, mais au final on arrive quand même vers l'emplacement du 1, ce qui demanderait une inclinaison de cette droite afin d'obtenir une forme triangulaire (représenté en gris). Cette représentation n'est donc géométriquement pas possible. Par contre, tout comme ma propre représentation, cette image fait ressortir le lien entre les mots-nombres, notamment en superposant les nombres *vingt*, *vingt-mille* et *vingt millions,* donc les nombres dont le mot-nombre commence par une dizaine.

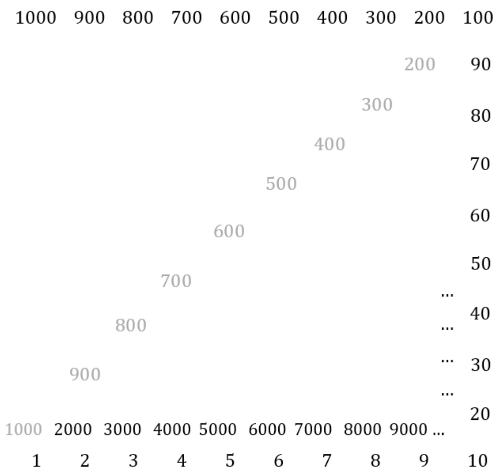

Figure 8 : Représentation entretien n° 40

Il est intéressant de constater que cette représentation des nombre est celle qui ressemble le plus à ma propre image mentale, tout particulièrement en reconsidérant l'hypothèse de Sir Francis Galton concernant l'hérédité de ce genre de représentations spatiales, car il s'agit en effet de ma sœur. Ce postulat, à première vue étonnant, serait-il une réalité ? Il faudrait poursuivre les recherches pour pouvoir en dire plus, mais la coïncidence est tout du moins surprenante.

Sans représentation visuelle

La part des personnes qui n'a aucune image visuelle des nombres est remarquablement élevée. 10 % des gens ne se font aucune représentation imagée, pour eux, c'est un concept abstrait. Par contre, certains associent le nombre à un autre concept. Trois personnes attribuent par exemple les nombres à un ordre de grandeur, d'autres à des choses connus, comme en a témoigné la personne de l'entretien n° 47 pour qui les nombres font penser à des factures. Seule une personne a déclaré n'avoir aucune représentation, la seule information retenue étant le mot du nombre.

Les autres représentations

Seules deux personnes des 50 interrogées ont une image mentale qui n'entre dans aucune autre catégorie. L'interviewé de l'entretien n° 22 se représente les nombres comme blocs de volume.

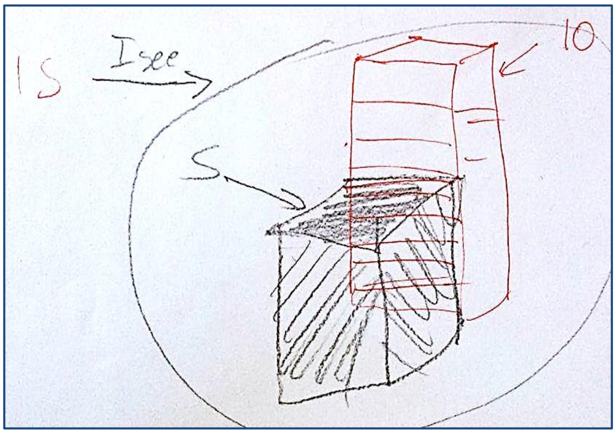

Figure 9 : Dessin de la représentation, entretien n° 22

Pour le nombre 15 par exemple, il s'imagine un bloc de 5 devant un bloc de 10. Cette forme d'image est intéressante, car elle prend en compte l'aspect cardinal du nombre, et non pas l'aspect ordinal comme c'est le cas pour la plupart des autres représentations. Il y a également un lien très étroit avec le système positionnel de la numération que nous utilisons : chaque bloc représente une position.

L'entretien n° 45 a dévoilé une autre représentation particulière. Chaque chiffre se trouve sur une sorte de roue, qui peut être tournée de manière à changer le chiffre et donc le nombre, selon le principe des cadenas à combinaison chiffrée. On peut alors identifier un lien entre les nombres 1 à 9, qui est valable pour toutes les positions du chiffre dans le nombre. A partir du nombre 376 par exemple, on peut facilement passer au nombre 377, 375, ou encore 386 ou 476. Le nombre est alors clairement décomposé et pensé en chiffres. En tournant une des roues, la valeur du nombre change selon la position de cette roue dans le nombre.

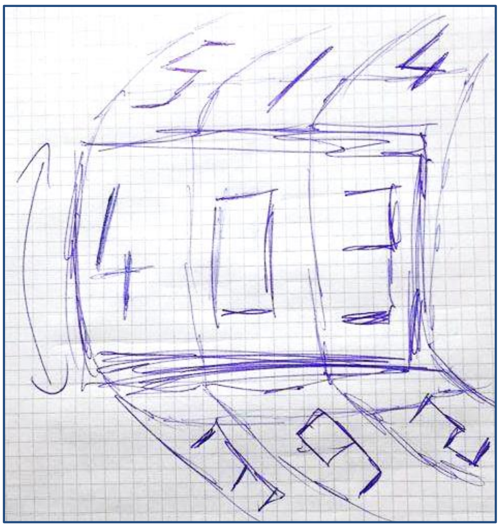

Figure 10 : Dessin de la représentation, entretien n° 45

Lien avec l'apprentissage des nombres

Sur les 50 personnes interrogées, 27 ont un quelconque souvenir de l'apprentissage des nombres. J'ai alors tenté de déterminer si la manière d'avoir appris les nombres est en lien avec la représentation que la personne se fait des nombres.

Pour 11 personnes sur les 27, un lien entre l'apprentissage et le type de représentation a pu être identifié. La personne de l'entretien n° 8 par exemple, qui se représente les nombres sans lien ordinal, se souvient d'anciennes boîtes à pellicules, dans lesquels se trouvaient un certain nombre de noisettes. Sur le couvercle était écrit le chiffre qui correspond au nombre de noisettes à l'intérieur. Il y a donc une correspondance entre la quantité et le nombre (type cardinal), mais aucun lien ordinal car les boîtes étaient considérées de manière individuelle et n'étaient certainement pas alignées dans l'ordre croissant. La représentation mentale de la personne de l'entretien n° 22, présentée dans le chapitre précédent, est également en lien avec son souvenir d'apprentissage des nombres. Il se souvient du boulier, qui est également une manière de traiter le nombre sans avoir recours aux chiffres, mais qui permet de visualiser un nombre avec du matériel physique.

Onze personnes sur 27 ont donc un souvenir qui peut être mis en lien avec leur représentation actuelle des nombres, cela représente le 40 %. En considérant qu'il y a donc plus de la moitié des souvenirs qui ne sont pas en lien, et que les liens repérés peuvent également être un pur hasard, il est difficile de se prononcer sur la pertinence de ce résultat.

En effet, un seul souvenir n'est certainement pas suffisant pour déterminer le lien entre ces deux composantes. Il faudrait avoir accès à toutes les méthodes d'apprentissages qui étaient utilisées pour l'apprentissage, mais cela n'est guère possible, surtout rétrospectivement. Il faudrait mener une recherche à long terme sur le terrain pour réellement pourvoir vérifier s'il existe un lien entre l'apprentissage et la représentation mentale.

Lien entre le type de représentation et la capacité à mémoriser un nombre

Afin d'aborder la question de la performance, je voulais tenter de déterminer si un certain type de représentation mentale des nombres influence la capacité à retenir un nombre en mémoire. Pour la mémoire à court terme, j'ai dicté une série de nombres à retenir pendant cinq secondes et à restituer ensuite. Quant à la mémoire à long terme, j'ai interrogé les personnes sur les livrets, dont les résultats ont été appris par cœur pendant la scolarité. Ce sont donc des nombres retenus en mémoire depuis plusieurs années déjà.

Toutefois, lors des entretiens, il s'est avéré que seule une personne utilise son image des nombres comme aide pour se souvenir. Par contre, les personnes qui utilisent une quelconque représentation visuelle pour les nombres mémorisent en général un nombre sous sa forme chiffrée, alors que les personnes qui n'ont aucune image des nombres retiennent un nombre en mémoire sous sa forme auditive. J'ai alors décidé d'opposer ces deux formes afin de déterminer si l'une des deux engendre de meilleurs résultats aux tests de la mémorisation des nombres, émettant l'hypothèse que les personnes qui utilisent une représentation visuelle arrivent mieux à se souvenir d'un nombre.

Les résultats du test sont illustrés dans le tableau ci-dessous. Tant pour le test de mémorisation à long terme que pour celui à court terme, les résultats sont très proches. Pour le premier, ce sont les personnes sans représentation visuelle qui devancent les autres de 0.17 secondes. Quant au test sur la mémorisation à court terme, les sujets qui utilisent une représentation visuelle obtiennent un score de 1.40 % supérieur.

	Mémorisation à long terme : Temps de réponse moyenne (secondes)	Mémorisation à court terme : Pourcentage des nombres mémorisés
Avec représentation visuelle	2.77	53.28%
Sans représentation visuelle	2.93	51.88%

Figure 11 : Résultats des tests de mémorisation

Ces différences ne sont pas significatives, et les résultats contradictoires ne permettent pas d'identifier si la représentation visuelle augmente la capacité à retenir un nombre en mémoire. De plus, en considérant les innombrables variables parasites qui interviennent dans ce test, l'hypothèse est clairement à infirmer.

Conclusion

La récolte des représentations mentales des nombres a permis de les classer dans différentes catégories et ainsi obtenir le pourcentage que chaque catégorie représente sur l'ensemble des images mentales. La part des représentations en deux ou trois dimensions, dans lesquels les nombres se trouvent à un emplacement précis dans l'espace, est supérieure à ce qui a été postulé dans la littérature thématique jusqu'à présent. De plus, un grand nombre de personnes n'utilise aucune image visuelle mentale pour se représenter les nombres, qui restent alors un concept entièrement abstrait.

Le lien avec l'apprentissage des nombres n'a pas pu être démontré, principalement à cause de la difficulté d'obtenir des informations valables et exhaustives sur la manière d'avoir appris les nombres. Les souvenirs sont peu présents et très vagues, étant donné que l'on apprend les nombres très tôt, souvent même avant le début de la scolarité.

L'analyse du lien entre le type de représentation et les performances de mémorisation des nombres n'a pas été concluante. Les tests proposés se sont avérés être inadaptés, car souvent elles n'impliquent pas l'utilisation de l'image mentale des nombres, mais d'autres moyens de mémorisation. Même la confrontation des résultats des personnes qui utilisent une image visuelle quelconque à ceux des personnes qui n'utilisent aucune image visuelle n'a pas rélévé de différence de performance entre ces deux catégories.

D'autres recherches seraient nécessaire, notamment pour compléter la récolte des différentes représentations des nombres, qui n'a pas pu être menée jusqu'à saturation lors de ce mémoire professionnel. Ensuite, afin de pouvoir se prononcer sur l'existence d'un lien entre l'apprentissage des nombres et la représentation mentale, il faudrait mettre en place une recherche qui récolte les méthodes d'apprentissage sur le terrain et les confronte aux représentations de ces mêmes enfants quelques années plus tard. Pour finir, l'effet du type de représentation sur la performance est difficilement vérifiable, car chaque personne fait un usage différent de sa représentation des nombres, et en utilise parfois différentes images selon le contexte.

Toutefois, les résultats de la récolte des représentations mentales des nombres sont satisfaisants et j'ai pu atteindre l'objectif principal de cette recherche : une collecte de nombreuses représentations et la classification de ces dernières dans différentes catégories. En découvrant la multitude de façons de s'imaginer les nombres, j'ai également mieux compris ma propre manière de penser les nombres.

La compréhension que j'ai aujourd'hui des différentes images mentales va également m'être utile pour l'enseignement des mathématiques. Chaque élève se fait une image différente des nombres. Certains utilisent plutôt une représentation avec lien ordinal, d'autres avec des aspects cardinaux, et encore d'autres n'ont aucune représentation des nombres. Ces élèves n'auront alors pas besoin des mêmes aides aux mêmes moments.

Bibliographie

Badiou, A. (1990). *Le nombre et les nombres*. Paris : Ed. du Seuil.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, *44*(1-2), 1–42.

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. New York : Oxford University Press.

Fayol, M. (2012). *L'acquisition du nombre*. Paris : Presses universitaires de France.

Galton, F. (1880a). Visualised Numerals. *Nature*, *January 15*, 252–256.

Galton, F. (1880b). Visualised Numerals. *Nature*, *March 25*, 494–495.

Gochet, P. (2009). [Review of *Introduction à la philosophie analytique. La logique comme méthode. Collection "Le point philosophique";*, by B. Leclercq, d'Ali Benmakhlouf, & D. Giovannangeli]. *Revue Internationale de Philosophie*, *63(250 (4))*, 481–486.

Grimm, G. (2012). An introduction to Surreal Numbers. Retrieved February 28, 2016, from https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/Grimm.pdf

Ifrah, G. (1985). *Les chiffres, ou, L'histoire d'une grande invention*. Paris : R. Laffont.

Ifrah, G. (2006). *Histoire universelle des chiffres: l'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul*. Paris : R. Laffont.

Lieury, A. (2013). *Psychologie cognitive* (3e éd. rev. et augm.). Paris : Dunod.

Piaget, J., Inhelder, B., & Bovet, M. (1991). *L'image mentale chez l'enfant: étude sur le développement des représentations imagées*. Paris : Presses universitaires de France.

Plan d'études romand (PER) - MSN 12. (2016, April 23). Retrieved from http://www.plandetudes.ch/web/guest/MSN_12

Rauff, J. (2003). Counting on Your Body in Papua New Guinea. Retrieved from http://www.academia.edu/2056304/Counting_on_Your_Body_in_Papua_New_Guniea

Van Nieuwenhoven, C. (1999). *Le comptage: vers la construction du nombre*. Paris : De Boeck Université.

Table des matières des annexes

Entretien semi-directif n°……

Données personnelles

Age : ………………………………………………………… Métier : ……………………………………………………………………………

Sexe : ……………………………………………………… Niveau d'études : ……………………………………………………………

Questions

1. **Comment vous représentez-vous mentalement les nombres ? Un nombre a-t-il un endroit précis par rapport aux autres nombres ? Décrivez votre image mentale.**

   Résumé post-entretien, basé sur l'enregistrement audio :

   ………

   ………

2. **Y a-t-il des liens entre les nombres ? Si oui, quel est ce lien ?**

   Résumé post-entretien, basé sur l'enregistrement audio :

   ………

   ………

3. **Dans quelles circonstances avez-vous appris les nombres ? (où ? comment ? avec qui ? avec représentation visuelle ou seulement par oral ?)**

   Résumé post-entretien, basé sur l'enregistrement audio :

   ………

   ………

Résultats du test sur la mémorisation des nombres

Livrets

Temps de rép. (s) Rép. juste / faux	1) _____ ✔☐ ✘☐	3) _____ ✔☐ ✘☐	5) _____ ✔☐ ✘☐	7) _____ ✔☐ ✘☐	9) _____ ✔☐ ✘☐
	2) _____ ✔☐ ✘☐	4) _____ ✔☐ ✘☐	6) _____ ✔☐ ✘☐	8) _____ ✔☐ ✘☐	10) _____ ✔☐ ✘☐

Réponses correctes : _________/10 Temps moyen de réponse : ________________

Réponse trouvé par : ☐ calcul ☐ par cœur ☐ autre : ____________________

Mémorisation d'une série de nombres

Ordre croissant :

Série 1 : ______/4

Série 2 : ______/5

Série 3 : ______/6

Série 4 : ______/4

Série 5 : ______/4

Sans ordre :

Série 6 : ______/4

Série 7 : ______/5

Série 8 : ______/6

Dessin de la représentation mentale

Dessinez dans ce rectangle votre représentation des nombres et leur lien entre eux.

Test : mémorisation de nombres

Livrets

1) 8 x 9   3) 5 x 8   5) 8 x 8   7) 6 x 7   9) 5 x 7
2) 6 x 5   4) 9 x 7   6) 7 x 4   8) 9 x 6   10) 7 x 8

Mémorisation d'une série de nombres

Dans l'ordre croissant

Série 1 : 4 nombres entre 10 et 99, dans l'ordre croissant

27	49	56	89

Série 2 : 5 nombres entre 10 et 99, dans l'ordre croissant

26	36	58	66	97

Série 3 : 6 nombres entre 10 et 99, dans l'ordre croissant

12	25	31	58	77	81

Série 4 : 4 nombres entre 100 et 999, dans l'ordre croissant

430	642	710	984

Série 5 : 4 nombres entre 1000 et 9999, dans l'ordre croissant

1758	4573	6199	8437

Sans ordre

Série 6 : 4 nombres entre 10 et 99, sans ordre

47	53	26	84

Série 7 : 5 nombres entre 10 et 99, sans ordre

18	83	47	59	77

Série 8 : 6 nombres entre 10 et 99, sans ordre

75	84	49	37	50	21

Tableau récapitulatif des entretiens

Entretien n°	Représentation des nombres	lien ordinal 1D	lien ordinal 2D	chiffré sans lien ordinal	autres représentations visuelles	sans représentation visuelle	Lien avec l'apprentissage	souvenir d'apprentissage	lien entre souvenir et représentation	Mémorisation à long terme	moyenne temps de réponse (réponses justes)	livrets appris dans la langue du test	Mémorisation à court terme	% de mémorisation total
1		x						non	-		1.7611	oui		44.38%
2			x					oui	?		3.1989	oui		31.88%
3		x						oui	non		1.418	oui		51.04%
4		x				x		non	-		1.632	oui		53.54%
5				x	x			non	-		7.3788	oui		65.21%
6		x						non	-		2.84	oui		49.38%
7				x				non	-		0.981	oui		33.96%
8			x			x		oui	oui		1.4722	oui		46.04%
9		x						non	-		1.015	oui		64.79%
10			x					non	-		1.842	oui		71.67%
11		x						oui	non		1.416	oui		40.21%
12		x						non	-		3.266	non		46.67%
13		x						non	-		4.6757	oui		73.13%
14		x		x				oui	non		3.7229	oui		48.33%
15		x						oui	non		2.4867	oui		58.54%
16		x						oui	oui		4.1367	oui		52.29%
17		x		x				oui	non		3.0038	oui		47.29%
18		x						oui	non		3.11	oui		43.13%
19		x						non	-		-	non		45.42%
20		x		x				non	-		5.1278	non		37.92%
21					x			non	oui		10.141	oui		30.42%
22					x			oui	oui		4.288	non		40.00%
23				x				non	-		-	non		41.67%
24				x				oui	oui		2.5033	non		56.46%
25				x				oui	non		6.6371	non		72.08%
26				x				non	-		2.4	oui		51.04%
27			x					oui	non		2.6443	oui		55.21%
28				x				non	-		8.0386	oui		53.13%
29		x		x				non	-		2.345	oui		35.63%
30		x			x			oui	non		2.2222	non		49.58%
31		x		x				non	-		2.1678	oui		68.13%
32		x	x		x			oui	non		2.25	oui		73.96%
33		x						oui	non		2.3144	oui		48.96%
34			x					oui	non		1.8278	non		45.42%
35						x		oui	oui		3.947	oui		37.92%
36				x				oui	oui		3.0478	oui		48.96%
37		x						non	-		1.8411	oui		51.67%
38				x				non	-		-	oui		24.79%
39		x	x					oui	oui		1.865	oui		54.79%
40			x					non	-		2.4622	oui		59.58%
41		x						oui	non		6.3311	non		43.96%
42				x				non	-		3.095	oui		36.46%
43				x				oui	oui		1.797	oui		64.79%
44				x				oui	oui		1.742	oui		48.33%
45					x			oui	non		2.8667	oui		76.04%
46						x		oui	non		8.0963	oui		50.83%
47		x	x		x			non	-		1.6883	oui		61.25%
48		x		x				oui	oui		4.0657	oui		46.46%
49		x						non	-		1.007	non		52.08%
50				x				oui	non		4.3511	oui		65.42%

Temps de réponse / test mémoire à long terme

entretien n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	moyenne
1	-	5.97	1.75	14.77	4.45	3.85	-	6.69	4.18	17.37	7.37875
2	1.1	-	1.87	1.18	0.87	1.78	2.17	0.88	1.13	2.27	1.472222222
3	1.87	2.13	1.09	1.7	-	1.13	1.15	3.6	2.18	1	1.761111111
4	1.57	1.19	1.17	1.83	2.26	1.22	1.39	2.99	1.69	1.01	1.632
5	1.89	7.37	1.58	3.93	1.32	1.88	-	1.92	1.22	1.05	2.462222222
6	1.45	1.25	1.2	1.11	0.51	3.18	2.81	1.46	0.75	0.46	1.418
7	1.53	0.8	0.85	0.76	0.93	0.85	0.86	1.35	0.95	0.93	0.981
8	1.55	0.95	0.9	0.73	0.8	1.75	0.95	0.7	0.81	0.93	1.007
9	1.51	-	6.68	2.13	0.98	1.83	4.65	2.46	3.75	1.57	2.84
10	3.7	0.58	1	0.92	0.91	1.24	4.55	-	1.95	1.6	1.827777778
11	1.17	1.25	0.86	0.89	0.7	0.87	1.06	1.19	1.06	1.1	1.015
12	2.18	1	0.79	1.51	1.08	1.03	0.84	2.71	0.9	2.12	1.416
13	2.88	1.19	1.54	1.65	2.44	1.44	10.7	3.64	1.04	6.14	3.266
14	7.9	1.08	5.87	3.35	-	2.98	1.92	2.96	-	-	3.722857143
15	4.01	1.46	11.13	1.51	10.94	1.52	-	2.16	-	-	4.675714286
16	1.56	1.96	4.41	1.23	6.96	-	1.93	1.3	1.48	1.55	2.486666667
17	4.55	-	1.15	3.43	7.6	1.56	1.5	3.01	1.23	-	3.00375
18	1.69	1.27	-	4.43	1.74	-	-	3.07	-	12.62	4.136666667
19	-	-	-	2.96	1.57	2.66	3	6.51	1.96	-	3.11
20	7.15	-	1.44	6.46	7.03	2.15	2.87	2.61	11.36	5.08	5.127777778
21	1.48	1.46	1.26	1.75	1.93	1.56	1	1.68	2.68	2.62	1.742
22	1.91	-	1.66	3.13	1.73	5.28	1.86	3.7	1.9	4.63	2.866666667
23	-	16.08	6.06	7.26	11.43	16.56	8.76	7.13	7.85	-	10.14125
24	3.63	2.18	4.13	4.15	2.88	3.53	6.23	4.76	3.98	7.41	4.288
25	-	0.66	-	-	-	-	-	-	-	-	-
26	4.95	1.78	4.2	1.74	1.9	2.33	2.31	1.71	1.61	-	2.503333333
27	1.65	1.46	2.21	3.15	1.53	1.33	1.65	1.81	1.75	1.88	1.842
28	-	4.81	4.26	-	5.82	2.86	3	20.26	5.45	-	6.637142857
29	-	1.52	1.91	1.56	2.94	1.21	-	3.88	4.62	1.12	2.345
30	-	2.06	1.83	3.56	5.58	5.51	6.46	-	3.46	-	4.065714286
31	3.82	1.76	1.61	-	1.53	2.26	1.73	2.48	2.73	2.08	2.222222222
32	1.53	-	1.86	3.83	1.25	2.16	2.73	2.91	1.73	-	2.25
33	-	-	3.29	-	-	-	9.1	-	2.55	-	-
34	8.32	-	1.48	1.23	2.83	1.61	3.18	5.23	1.58	3.33	3.198888889
35	-	0.75	-	18.4	14.98	4.51	1.23	3.34	2.5	19.06	8.09625
36	-	1	4.03	-	3.4	2.26	1.65	-	2.06	-	2.4
37	5.31	1.48	1.51	3.06	-	2.26	1.56	1.6	1.56	2.49	2.314444444
38	2	-	8.15	3.26	-	3.68	29.97	2.58	6.63	-	8.038571429
39	-	1.46	0.95	-	0.85	4.06	1.34	2.03	2.98	1.25	1.865
40	-	2.3	1.13	8.49	-	1.5	1.63	-	1.28	2.18	2.644285714
41	1.45	1.28		1.86	1.38	1.4	1.56	3.21	1.68	2.75	1.841111111
42	8.67	1.8	1	3.56	0.88	-	1.63	1.63	1.45	6.81	3.047777778
43	-	3.88	2.91	-	-	6.03	-	-	4.45	-	-
44	3.52	1.32	0.97	3.18	1.19	-	8.88	1.95	3.75	-	3.095
45	4.83	1.68	2.25	4.31	-	4.56	12.42	3.03	1.8	4.28	4.351111111
46	6.68	1.53	1.02	5.15	2.26	2.26	2.6	6.68	2.53	8.76	3.947
47	-	1.33	0.75	-	0.93	0.96	-	5.15	1.01	-	1.688333333
48	3.52	1.25	1.68	1.68	1.63	2.04	4.23	1.72	1.76	-	2.167777778
49	1.13	1.07	1.39	24.01	5.3	4.55	13.36	4.4	1.77	-	6.331111111
50	1.91	0.92	1.02	2.23	1.77	0.93	2.37	2.94	0.92	2.96	1.797

pas pris en compte pour le calcul du résultat (langue ou trop peu de réponses justes)

Pourcentage des nombres restitués / mémoire à court terme

entretien n°	1	2	3	4	5	6	7	8	moyenne
1	1/2	3/5	2/3	1/2	1/4	1/2	1/5	1/3	44.38%
2	3/4	1/5	1/3	1/4	0	1	3/5	1/2	45.42%
3	3/4	3/5	2/3	0	0	1	2/5	2/3	51.04%
4	1/4	1	1/3	0	0	1	3/5	1/2	46.04%
5	1/4	4/5	1	1/4	1/4	1	2/5	1/3	53.54%
6	3/4	3/5	1/2	0	0	1	3/5	1/2	49.38%
7	3/4	3/5	1/6	1/4	1/4	1/2	1/5	0	33.96%
8	1	1	5/6	1/4	0	1/2	4/5	5/6	65.21%
9	1	1	5/6	1/2	1/4	1	3/5	0	64.79%
10	3/4	3/5	5/6	0	0	0	1/5	1/6	31.88%
11	1	3/5	1/2	1/4	0	1/2	1/5	1/6	40.21%
12	1/4	3/5	1/2	1/4	0	1	4/5	1/3	46.67%
13	1	4/5	1/2	1	1/4	1	4/5	1/2	73.13%
14	3/4	3/5	2/3	1/4	0	1	3/5	0	48.33%
15	1/4	1	5/6	1/2	0	1	3/5	1/2	58.54%
16	3/4	1	1/3	1/2	1/4	1/4	3/5	1/2	52.29%
17	1/2	3/5	1/2	1/4	1/2	1/2	3/5	1/3	47.29%
18	1	4/5	1/3	1/4	0	1/2	2/5	1/6	43.13%
19	3/4	3/5	1/3	1/4	1/4	3/4	1/5	1/2	45.42%
20	3/4	2/5	2/3	0	0	1/4	4/5	1/6	37.92%
21	1/2	3/5	1/2	1/2	1/4	3/4	3/5	1/6	48.33%
22	1	1	1	1/2	0	3/4	1	5/6	76.04%
23	1/2	1/5	1/3	0	1/4	3/4	2/5	0	30.42%
24	1	4/5	1/3	1/4	0	1/4	2/5	1/6	40.00%
25	1/4	4/5	1/2	1/4	1/4	3/4	1/5	1/3	41.67%
26	1/4	4/5	5/6	1/2	0	1	4/5	1/3	56.46%
27	1	3/5	1/2	1/4	1/4	3/4	2/5	2/3	55.21%
28	1	1	5/6	1/2	0	1	3/5	5/6	72.08%
29	1	1/5	1/2	1/2	0	1/4	2/5	0	35.63%
30	1	2/5	1/2	1/4	1/2	1/2	2/5	1/6	46.46%
31	1	2/5	1/3	1/4	1/4	1	2/5	1/3	49.58%
32	1	1	2/3	1/2	1/4	1	1	1/2	73.96%
33	1/2	2/5	1/2	1/2	1/4	1/2	3/5	2/3	48.96%
34	1	4/5	2/3	3/4	-	1/2	4/5	1/2	71.67%
35	1/2	4/5	1/2	1/2	1/4	3/4	3/5	1/6	50.83%
36	1	3/5	1/3	1/2	1/4	1/2	2/5	1/2	51.04%
37	1	2/5	1/2	1/2	0	1	2/5	1/3	51.67%
38	3/4	4/5	2/3	3/4	0	3/4	1/5	1/3	53.13%
39	1	3/5	1/3	3/4	0	1	1/5	1/2	54.79%
40	1	4/5	1/2	3/4	1/4	1/2	4/5	1/6	59.58%
41	1	2/5	1/2	1/4	0	1	1/5	1/6	43.96%
42	3/4	4/5	1/3	1/4	1/4	1	1/5	1/3	48.96%
43	1/2	0	2/3	0	0	1/4	2/5	1/6	24.79%
44	1	3/5	1/6	0	0	3/4	2/5	0	36.46%
45	1	3/5	2/3	1/4	1/4	1	4/5	2/3	65.42%
46	1/4	3/5	1/3	1/4	0	1/2	3/5	1/2	37.92%
47	1	3/5	2/3	1/2	0	1	4/5	1/3	61.25%
48	1	4/5	1	3/4	0	1	2/5	1/2	68.13%
49	1/2	3/5	1/2	1/2	1/4	3/4	2/5	2/3	52.08%
50	1	4/5	1	1/4	0	1	4/5	1/3	64.79%

Résumé

Les nombres sont un concept abstrait, pour lequel la plupart des personnes se font une image mentale, qui leur permet de visualiser les nombres. Chaque personne a une manière très distincte de se représenter les nombres, car cette image mentale se construit de manière automatique au fur et à mesure de l'apprentissage des nombres.

Au cours de ce travail de mémoire, j'ai rassemblé 50 représentations mentales. Afin de différencier les types de représentations, je propose un classement en cinq catégories. Les 50 représentations récoltées ont donc été analysées et attribuées à une des catégories suivantes : la représentation unidimensionnelle, la représentation bi- ou tridimensionnelle, la représentation sans lien ordinal, les personnes sans représentation visuelle et les autres représentations. En catégorisant les images mentales de telle manière, j'ai pu déterminer les pourcentages d'occurrence pour chacune de ces catégories.

Parallèlement à la récolte des représentations mentales des nombres, j'ai questionné les interviewés sur leurs souvenirs de l'apprentissage des nombres, afin de pouvoir déterminer si la représentation qu'une personne se fait des nombres est en lien avec les premières confrontations aux nombres durant leur enfance.

Pour finir, j'ai tenté de déterminer si une certaine manière de se représenter les nombres pourrait améliorer la capacité de retenir un nombre en mémoire, tant à court qu'à long terme. Le bon sens nous dit qu'une représentation mentale facilite la mémorisation, d'autant plus si elle incorpore plusieurs aspects. Une représentation peut être uniquement conceptuelle, chiffrée, ou encore avec une mise en lien des nombres selon leur valeur ordinale, donc situé dans l'espace.

Mots clés : Mathématiques - Nombres entiers - Représentation mentale - Image mentale - Lien entre les nombres - Organisation spatiale des nombres