# *SOMMAIRE*

# Chapitre 1

## *INTRODUCTION*

Au départ théorie, la logique floue s'affirme comme une technique opérationnelle. Utilisée à côté d'autres techniques de contrôle avancé, elle fait une entrée discrète mais appréciée dans les automatismes de contrôle industriel.
Les bases théoriques de la logique floue (fuzzy logic) ont été établies au début des années 1965 par le professeur Zadeh de l'université de Californie de Berkeley.
Cette technique associe les notions de « sous-ensemble flou » et de « théorie des possibilités ».
Il s'agit d'une approche calquée sur le raisonnement humain plutôt que sur des calculs rigides ; pour des problèmes mal définis, l'être humain est irremplaçable.
En effet, le mode de raisonnement en logique floue est plus intuitif que la logique classique. Il permet aux concepteurs de mieux appréhender les phénomènes naturels, imprécis et difficilement modélisables en s'appuyant sur la définition de règles et de fonctions d'appartenance à des ensembles dits « ensembles flous ».
Un domaine d'application de la logique floue qui devient fréquent est celui du réglage et de la commande des régulations industrielles.
Cette méthode permet d'obtenir une loi de commande souvent efficace, sans devoir faire appel à des développements théoriques importants.
Elle présente l'intérêt de prendre en compte les expériences acquises par les utilisateurs et opérateurs du processus à commander.

<u>Bases générales :</u>

Les éléments de base de la logique floue sont :
- les variables linguistiques
- les fonctions d'appartenance
- les déductions aux inférences

<u>Variables linguistiques :</u>

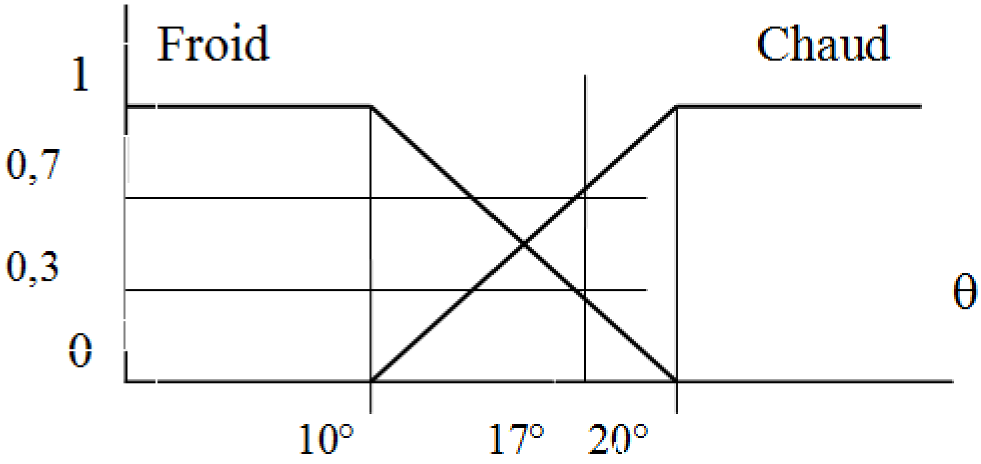
La description d'une certaine situation, d'un phénomène ou d'un procédé contient en général des qualificatifs flous tels que :
- peu, beaucoup, énormément
- rarement, fréquemment, souvent
- froid, tiède, chaud
- petit, moyen, grand
- etc.....

<u>Exemple :</u>

la variable linguistique « température » peut appartenir aux ensembles flous « froid »,« tiède » ou « chaud ».

<u>Fonctions d'appartenance :</u>

Au lieu d'appartenir à l'ensemble « vrai » ou à l'ensemble « faux » de la logique binaire traditionnelle, la logique floue admet des degrés d'appartenance à un ensemble donné. Le degré d'appartenance à un ensemble flou est matérialisé par un nombre compris entre 0 et 1. Une valeur précise de la fonction d'appartenance liée à une valeur de la variable est notée $\mu$ et appelée « facteur d'appartenance ».

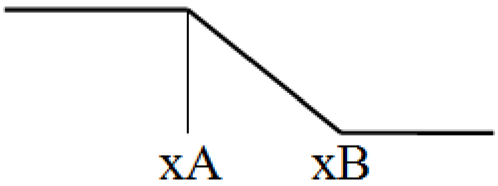



D'après ce graphique, on peut constater que pour une valeur $\theta = 17°$, le facteur d'appartenance à l'ensemble « froid » vaut $\mu$ froid $= 0,3$ et le facteur d'appartenance à l'ensemble « chaud » vaut $\mu$ chaud = 0,7

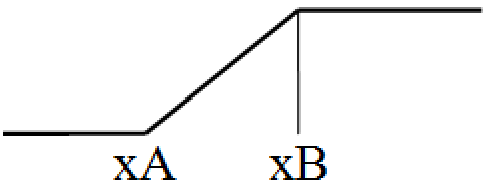
Les fonctions d'appartenance peuvent théoriquement prendre n'importe quelle forme. Toutefois, elles sont souvent définies par des segments de droites, et dites « linéaires par morceaux » .(Très utilisées car elles sont simples et comportent des zones où la notion est vraie, des zones où elle est fausse, ce qui simplifie le recueil d'expertise).

* Fonctions d'appartenance d'entrée :

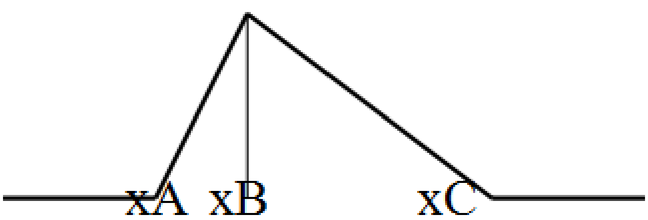
Demi-trapèze gauche



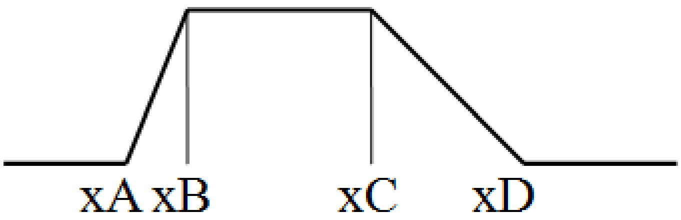

Demi-trapèze droit




Triangle symétrique ou asymétrique

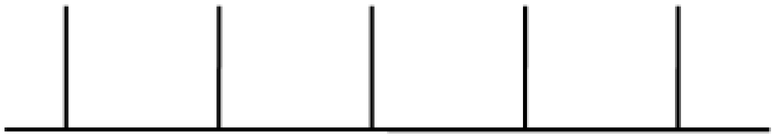



Trapèze symétrique ou asymétrique

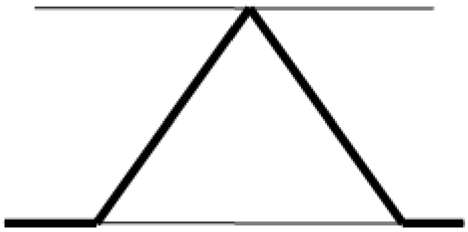



* Fonctions d'appartenance de sortie :

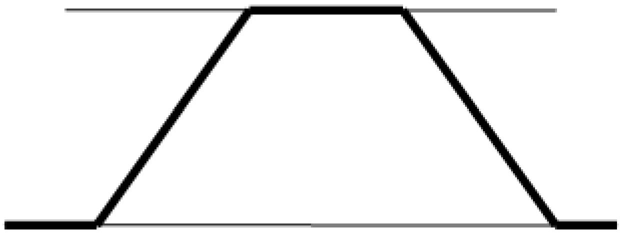
Singletons ou Rectangles Etroits



Triangle



Trapèze



## Déductions aux inférences :

Plusieurs valeurs de variables linguistiques sont liées entre elles par des règles et permettent de tirer des conclusions.

Les règles peuvent alors être exprimées sous la forme générale :

Si condition 1 alors action 1 ou

Si condition 2 alors action 2 ou

Si .....

Si condition n alors action n.

Les conditions peuvent dépendre de plusieurs variables liées entre elles par des opérateurs OU ou ET.

Si température froide et hygrométrie importante alors ouvrir la vanne d'admission d'air chaud.

Une simplification de la description des inférences s'obtient à l'aide d'une représentation par tableau, appelée matrice d'inférence.

Ecart de température

| Ecart d'humidité | +300 + | 0 | - -300 |
|---|---|---|---|
| +200 + | O | + | + + |
| 0 | – | O | + |
| - -200 | – – | – | O |

Avec :

+ ouvrir légèrement la vantelle
++ ouvrir totalement la vantelle
0 conserver la position de vantelle
- fermer légèrement la vantelle
-- fermer totalement la vantelle

Défuzzification

Les méthodes d'inférence fournissent une fonction d'appartenance résultante $\mu$R de la variable de sortie xR. Il s'agit donc d'une information floue. Il faut transformer cette information floue en une valeur déterminée qui sera appliquée à l'interface de commande du processus. C'est cette transformation qui est appelée défuzzification. La méthode de défuzzification la plus utilisée est celle de la détermination du centre de gravité.
Le résultat du calcul précédent doit être traité pour être adapté à l'interface de commande mise en oeuvre.

Applications :

$_*$Au Japon, la mise en oeuvre de la commande floue est devenue un argument marketing, et l'on cite de nombreux exemples dans les biens de consommation :
- la machine à laver Panasonic
- la caméra vidéo Sanyo
- l'aspirateur Hitachi
- la télévision Sony
- la conditionneuse d'air Mitsubishi
- etc.....

$_*$ La commande floue a également fait son entrée dans les processus industriels :

- l'automatisation de métro de Sandai en 1988
- l'automatisation de hauts fourneaux à Fos-sur-Mer et à Dunkerque en 1990
- l'automatisation d'une usine de fabrication de papier à TO Caima au Portugal en 1992
- le contrôle de niveau dans une usine de raffinage Elf en 1993
- dans le domaine de la robotique
- le contrôle d'un four de ciment pour la société danoise F.L Smidth
- le traitement des eaux
- les grues portuaires
- les métros
- les systèmes de ventilation et de climatisation
- le séchage de tuiles
- etc......

Chapitre 2

# CONSTRUCTION DE GROUPES NORMALES

## 2.1 Construction d'une relation d'équivalence

**Définition 2.1.1.** *Soient $(G,.)$ un groupe et $H$ un sous-groupe de $G$ .Alors on définit sur $G$ la relation binaire $\Re$ par :*

$$\forall x, y \in G : (x\Re y) \Leftrightarrow (xy^{-1} \in H)$$

**Proposition 2.1.1.** *$\Re$ est une relation d'équivalence.*

### 2.1.1 Nature de classes d'équivalences

Soit $x \in G$
on a : $\overline{x} = \{y \in G | x\Re y\}$
$= \{y \in G | xy^{-1} \in H\}$
$= \{y \in G | \exists h \in H : h = xy^{-1}\}$
$= \{y \in G | \exists h \in H : y = h^{-1}x\}$
$= \{y \in G | \exists h \in H : y = hx\}$
$= Hx$
donc : $\forall x \in G \ : \ \overline{x} = Hx$
On note l'ensemble des classes d'équivalences par $G/H$ au lieu de le noté par $G/\Re$.

## 2.2 Les sous–groupes normales

**Définition 2.2.1.** *Soient $(G,.)$ un groupe et $H$ un sous-groupe de $G$ . On dit que $H$ est un sous-groupe normale de $G$ si :*

$$\forall x \in G : xH = Hx$$

*Ainsi on le note par $H \lhd G$.*

**Remarque 2.2.1.** *Soient $(G,.)$ un groupe et $H$ un sous-groupe de $G$. Alors on a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} \forall x \in G : xH = Hx &\Leftrightarrow \forall x \in G : H = x^{-1}Hx \\ &\Leftrightarrow \forall x \in G : x^{-1}Hx \subseteq H \\ &\Leftrightarrow \forall (x,h) \in G \times H : x^{-1}hx \in H \end{aligned}$$

**Théorème 2.2.1.** *Soit $H$ un sous-groupe distingué dans $G$. Alors $(G/H, .)$ est un groupe , tel que :*

$$\forall \overline{x}, \overline{y} \in G/H : \overline{x}.\overline{y} = \overline{xy}$$

**Proposition 2.2.1.** *Soit $f$ un morphisme de groupes de $G$ dans $G'$.Alors $Ker(f) \lhd G$.*

**Théorème 2.2.2.** *Soit $f$ un morphisme de groupes de $G$ dans $G'$. alors $G/Ker(f) \simeq Im(f)$*

**Théorème 2.2.3.** *($2^{eme}$ théorème d'isomorphisme)*

*Soient $A$ , $B$ deux sous-groupes du (G,.) tel que : $B \lhd G$. Alors :*

$$A/A \cap B \ \simeq \ AB/B$$

**Théorème 2.2.4.** *($3^{eme}$ théorème d'isomorphisme)*

*Soient $H$ et $S$ deux sous-groupes distinguées dans $G$ tel que : $S \subseteq H \subseteq G$. Alors :*

$$(G/S)/(H/S) \ \simeq \ (G/H)$$

Chapitre 3

*L-SOUS-ENSEMBLE*

# *Préliminaire*

*Dans ce chapitre, nous présentons seulement les outils nécessaire au développement du reste d'autres parties et qui peut être utile pour le développement ultérieur de la théorie de Galois floue et des sous-algèbres de groupes floues. Une algèbre complète de L est un treillis complet tel que pour tous* $A \subseteq L$ *et pour tout* $b \in L$ *:*

$$\bigvee \{a \wedge b \mid a \in A\} = \left(\bigvee \{a \mid \in\}\right) \bigwedge b$$
*et*
$$\bigwedge \{a \vee b \mid a \in A\} = \left(\bigwedge \{a \mid \in A\}\right) \bigvee b$$

*Sauf indication contraire, L désigne toujours une algèbre complète de Heyting composée d'au moins deux éléments. Nous supposons parfois que L est une chaîne ou une chaîne dense. Dans ce cas, L est toujours supposé être complet. La réunion, la jointure et l'ordre partiel de L sont*$\vee$, $\wedge$ *et* $\leq$ *respectivement. Nous écrivons aussi 1 et 0 pour l'élément maximal et minimal de L respectivement. L est dit être régulier si :*

$$\forall\ a,b \in L \text{ tel que } (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0) \Rightarrow a \wedge b \neq 0$$

*L'intervalle fermé* $[0,1]$ *avec les opérations min, max et* $\leq$ *d'un treillis complet heyting. Nous écrivons souvent* $\wedge$ *pour minimum ou infinimum et* $\vee$ *pour maximum ou supremum.*
*On suppose que la limite supérieure de l'ensemble de rmpty est 0 élément de L et que la plus grande limite inférieure de l'ensemble vide est 1.Nous supposons que* $\boldsymbol{X,Y}$ *et* $\boldsymbol{Z}$ *désignent des ensembles non vides,* $\mathbb{N}$ *désignent des entiers positifs,* $\mathbb{Z}$ *l'ensemble de tous les entiers,* $\mathbb{Q}$ *l'ensemble des nombres rationnels,* $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\emptyset$ *l'ensemble vide. Sauf indication contraire I indique un ensemble arbitraire d'indices non vide .*

## 3.1 *L-Sous-ensembles*

***Définition*** **3.1.1.** *Un L-**sous-ensemble de** X est une application de X dans L.*
*L'ensemble de tous les L-sous-ensembles s'appelle l'ensemble L-**puissance de** X et on là note par $L^X$.*

***Remarque*** **3.1.1.** *Si L=$[0,1]$ alors, un L-sous-ensemble de X s'appelle **sous-ensembles floue** et $L^X$=$[0,1]^X$ s'appelle **puissance floue**.*

***Définition*** **3.1.2.** *Soit $\mu \in L^X$. L'ensemble $\{\ \mu(x) \mid\ x \in X\ \}$ s'appelle **l'image** de $\mu$ et on la note par $\mu(X)$ (ou $Im(\mu)$).*
*L'ensemble $\{\ x \mid\ x \in X, \mu(x) > 0\ \}$ s'appelle **support** de $\mu$ et on la note par $\mu^*$ .*
*En particulier, on appel $\mu$ un L-sous-ensemble **normal** (ou **unitaire**) si $1 \in \mu(X)$*
*$\mu$ s'appelle L-**sous-ensemble fini** si $\mu^*$ est un ensemble fini sinon on dit que $\mu$ est **infini**.*

***Définition*** **3.1.3.** *Si $Y \subseteq X$ et $a \in L$ on définit l'application suivante :*

$$a_Y : \left| \begin{array}{ccl} X & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & a_Y(x) = \begin{cases} a & si\ x \in Y \\ 0 & sinon \end{cases} \end{array} \right.$$

***Cas particulier*** **3.1.1.** *En particulier, si Y=$\{y\}$, on dit alors que $a_y$ est L-**point** (ou L-**singleton**) et parfois on la note par $y_a$.*

*si a=1 alors, $1_Y$ s'appelle fonction caractéristique de Y.On note par "**S**" l'ensemble des L-singleton ainsi on pose :*

$$foot(\boldsymbol{S}) = \{\ y\ \in\ X \mid y_a \in S\ \}$$

***Définition*** **3.1.4.** *Soient $\mu$ , $\nu \in L^X$*

*Si :$\forall x \in X : \mu(x) \leq \nu(x)$,on dit que $\mu$ est **contenu** dans $\nu$ (ou $\nu$ **contient** $\mu$) et on écrit $\mu \subseteq \nu$ (ou $\nu \supseteq \mu$).*

*Si $\mu \subseteq \nu$ et $\nu \neq \mu$ alors, on dit que $\mu$ est **contenu proprement** dans $\nu$ (ou $\nu$ **contient proprement** dans $\mu$ ) et on écrit $\mu \subset \nu$ (ou $\nu \supset \mu$).*

***Remarque*** **3.1.2.** *$\subseteq$ est une relation d'ordre partiel dans $L^X$.*

***Preuve*** **3.1.1.** *Montrons que $\subseteq$ est une relation d'ordre partiel dans $L^X$*

***Réflexivité*** *:*

*Soit $\mu \in L^X$*

*On a : $\mu = \mu \Rightarrow \mu \subseteq \mu$*

*donc : $\subseteq$ est **Réflexive** dans $L^X$*

***Antisymétrie :***

*Soient* $\mu$ , $\nu \in L^X$

*On a :*

$((\mu \subseteq \nu)$ *et* $(\nu \subseteq \mu)) \Leftrightarrow ((\forall x \in X : \mu(x) \leq \nu(x)) et (\forall x \in X : \nu(x) \leq \mu(x)))$

$\Leftrightarrow (\forall x \in X : \mu(x) = \nu(x))$

$\Leftrightarrow (\mu = \nu)$

*donc :* $\subseteq$ *est* ***antisymétrique*** *dans* $L^X$

***Transitivité :***

*Soient* $\mu$ , $\nu$ , $\xi \in L^X$

*on a :* $(\mu \subseteq \nu$ *et* $\nu \subseteq \xi) \Leftrightarrow (\forall x \in X : \mu(x) \leq \nu(x)$ *et* $\nu(x) \leq \xi(x))$

$\Rightarrow (\forall x \in X : \mu(x) \leq \xi(x))$

$\Leftrightarrow \mu \subseteq \xi$

*donc :* $\subseteq$ *est* ***transitive*** *dans* $L^X$■

*Conclusion :* $\subseteq$ *est une relation d'ordre partiel dans* $L^X$■.

***Définition*** **3.1.5.** *Soient* $\mu, \nu \in L^X$*.On définit* $\mu \cap \nu$ *et* $\mu \cup \nu$ *dans* $L^X$ *par :*

$\forall\, x \in X$ :

$$(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$$
$$(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x)$$

*Ainsi* $\mu \cap \nu$ *et* $\mu \cup \nu$ *s'appellent respectivement* ***intersection*** *et* ***union*** *de* $\mu$ *et* $\nu$.

***Définition*** **3.1.6.** *Soit* $\mu \in L^X$ *. Pour* $a \in L$ *, on définit* $\mu_a$ *par :*

$$\mu_a = \{ x \mid x \in X , \mu(x) \geq a \}$$

$\mu_a$ *s'appelle une* $a-$***coupe*** *(ou* $a-$ ***ensemble de niveau****) de* $\mu$

***Propriétés*** **3.1.1.** *Soient* $\mu, \nu \in L^X$ *. Alors :*

*(1)* $(\mu \subseteq \nu , a \in L) \Rightarrow (\mu_a \subseteq \nu_a)$

*(2)* $(a \leq b , (a,b) \in L^2) \Rightarrow ( \mu_b \subseteq \mu_a)$

**Preuve 3.1.2.** *Soient* $\mu$ , $\nu \in L^X$

*(1)*

*On suppose que* $\mu \subseteq \nu$ , $a \in L$

*Montrons que* $\mu_a \subseteq \nu_a$ :

$$\begin{aligned} \text{On a : } (x \in \mu_a) &\Leftrightarrow (x \in X, \mu(x) \geq a) \\ &\Rightarrow (x \in X, \nu(x) \geq a) \qquad \text{car} \mu \subseteq \nu \\ &\Leftrightarrow (x \in \nu_a) \end{aligned}$$

*donc :* $\mu_a \subseteq \nu_a$

*(2)*

*On suppose que* $a \leq b$ , $(a,b) \in L^2$

*Montrons que* $\mu_b \subseteq \nu_a$ :

$$\begin{aligned} \text{On a : } (x \in \mu_b) &\Leftrightarrow (x \in X, \mu(x) \geq b) \\ &\Rightarrow (x \in X, \mu(x) \geq a) \\ &\Leftrightarrow (x \in \mu_a) \end{aligned}$$

*donc :* $\mu_b \subseteq \nu_a$

**Théorème 3.1.1.** *Soient* $I$ *un ensemble non vide d'indices ,* $(\mu_i)_{i\in I} \in (L^G)^I$ *et* $a \in L$. *Alors :*

*(1)* $\cup_{i\in I}(\mu_i)_a \subseteq (\cup_{i\in I}\mu_i)_a$

*(2)* $\cap_{i\in I}(\mu_i)_a = (\cap_{i\in I}\mu_i)_a$

**Preuve 3.1.3.** *Soient* $I$ *un ensemble non vide d'indices ,* $(\mu_i)_{i\in I} \in (L^G)^I$ *et* $a \in L$. *Alors :*

*(1)*

$$\begin{aligned} x \in \cup_{i\in I}(\mu_i)_a &\Leftrightarrow \exists\, i \in I : x \in (\mu_i)_a \\ &\Leftrightarrow \exists\, i \in I : \mu_i(x) \geq a \\ &\Rightarrow \bigvee_{i\in I} \mu_i(x) \geq a \\ &\Leftrightarrow (\cup_{i\in I}\mu_i)(x) \geq a \\ &\Leftrightarrow x \in (\cup_{i\in I}\mu_i)_a \end{aligned}$$

*donc :* $\cup_{i\in I}(\mu_i)_a \subseteq (\cup_{i\in I}\mu_i)_a$

*(2)*

$x \in \cap_{i \in I}(\mu_i)_a \Leftrightarrow \forall\, i \in I : x \in (\mu_i)_a$

$\Leftrightarrow \forall\, i \in I : \mu_i(x) \geq a$

$\Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x) \geq a$

$\Leftrightarrow (\cap_{i \in I}\mu_i)(x) \geq a$

$\Leftrightarrow x \in (\cap_{i \in I}\mu_i)_a$

*donc :* $\cap_{i \in I}(\mu_i)_a = (\cap_{i \in I}\mu_i)_a$

***Remarque*** **3.1.3.** *Si L est finie alors on a une égalité dans (1)*

***Théorème*** **3.1.2.** *Soient* $\mu \in L^X$ *, I un ensemble non vide d'indices et* $(a_i)_{i \in I} \in L^I$

*On pose :*

$$b = \bigwedge_{i \in I} a_i$$
$$c = \bigvee_{i \in I} a_i$$

*Alors :*

*(1)* $\cup_{i \in I}\mu_{a_i} \subseteq \mu_b$

*(2)* $\cap_{i \in I}\mu_{a_i} = \mu_c$

***Preuve*** **3.1.4.** *Soient* $\mu \in L^X$ *, I un ensemble non vide d'indices et* $(a_i)_{i \in I} \in L^I$

*On pose :*

$$b = \bigwedge_{i \in I} a_i$$
$$c = \bigvee_{i \in I} a_i$$

*(1) Montrons que* $\cup_{i \in I}\mu_{a_i} \subseteq \mu_b$

$x \in \cup_{i \in I}\mu_{a_i} \Leftrightarrow \exists\, i \in I : x \in \mu_{a_i}$

$\Leftrightarrow \exists\, i \in I : \mu(x) \geq a_i$

$\Rightarrow \exists\, i \in I : \mu(x) \geq b$ *car* $\forall\, i \in :\ b \leq a_i$

$\Leftrightarrow x \in \mu_b$

*donc :* $\cup_{i \in I}\mu_{a_i} \subseteq \mu_b$

*(2) Montrons que* $\cap_{i \in I}\mu_{a_i} = \mu_c$

$x \in \cap_{i \in I}\mu_{a_i} \Leftrightarrow \forall\, i \in I : x \in \mu_{a_i}$

$\Leftrightarrow \forall\, i \in I : \mu(x) \geq a_i$

$\Leftrightarrow \forall\, i \in I : \mu(x) \geq c$

$\Leftrightarrow \ x \ \in \ \mu_c$

*donc :* $\cap_{i\in I}\mu_{a_i} \ = \ \mu_c$

***Théorème*** **3.1.3.** *Soit* $\mu \ \in \ L^X$*. Alors :*

$$\mu \ = \ \cup_{a\in L} a_{\mu_a}$$
$$\mu \ = \ \cup_{a\in \mu(X)} a_{\mu_a}$$

***Preuve*** **3.1.5.** *Soit* $\mu \ \in \ L^X$

*Montrons que :* $a \ = \ \cup_{a\in L} a_{\mu_a}$

*Soit* $x \ \in \ X$

$(\cup_{a\in L} a_{\mu_a})(x) \ = \ \bigvee_{a\in L} a_{\mu_a}(x) \ = \ \bigvee\{a \in L | a \leq \mu(x)\} \ = \ \mu(x)$

*donc :* $\mu \ = \ \cup_{a\in L} a_{\mu_a}$

*Pour l'autre équation la preuve est similaire*$\blacksquare$

***Définition*** **3.1.7.** *Soient I un ensemble d'indices non vide et* $(X\ _i)_{i\in I}$ *une famille d'ensembles non vides.*

*On note par* $X$ *le produit cartésien des* $X_i$ *, définit par :*

$$X = \Pi_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \, | x_i \ \in \ X_i\}$$

*Pour tout* $i \in I$ *, soit* $\mu_i \in L^{X_i}$ *. Un L-sous-ensemble* $\mu \in L^X$ *donné par :*

$$\forall (x_i)_{i\in I} \in X \ : \mu(x) = \wedge_{i\in I} \mu_i(x)$$

*est appelé un produit directe complet des* $\mu_i$ *, ainsi on note* $\mu$ *par :*

$$\mu = \widetilde{\Pi}_{i\in I} \mu_i$$

*Si I=*$\{$*1,2,3,......,n*$\}$ *alors :*

$X = \Pi_{i\in I} X_i$

$= X_1 \times X_2 \times X_3 .... \times X_n$

$= \{(x_1, x_2, x_3, ....., x_n) | x_i \in X_i, i = 1, 2, 3, ....n\}$

*ainsi on écrit :*

$$\mu \ = \widetilde{\Pi}_{i\in I} \mu_i = \mu_1 \widetilde{\otimes} \mu_2 \widetilde{\otimes} \mu_3 \widetilde{\otimes} ....... \widetilde{\otimes} \mu_n$$

*Clairement on a le résultat suivant :*

$$\forall i \in I, \forall \mu_i, \nu_i \ \in L^{X_i} : \ (\mu_i \subseteq \nu_i) \Rightarrow (\widetilde{\Pi}_{i\in I} \mu_i \subseteq \widetilde{\Pi}_{i\in I} \nu_i \ )$$

## 3.2 Extension principale

***Définition*** **3.2.1.** *Soient $f$ une application de $X$ dans $Y$ et $(\mu,\nu) \in L^X \times L^Y$.*

*On définit $f(\mu) \in L^Y$ par :*

$$\forall y \in Y, f(\mu)(y) = \begin{cases} \bigvee\{\mu(x) | x \in X; y = f(x)\} & si\ f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & sinon \end{cases}$$

*ainsi on définit $f^{-1}(\nu) \in L^X$ par :*

$$\forall x \in X, f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x))$$

*$*f(\mu)$ s'appelle l'image directe de $\mu$ par $f$*

*$*f^{-1}(\nu)$ s'appelle l'image réciproque de $\nu$ par $f$*

***Théorème*** **3.2.1.** *Soit $f$ une application de $X$ dans $Y$. Alors :*

*(1) $\forall \mu_1, \mu_2 \in L^X : \mu_1 \subseteq \mu_2 \Rightarrow f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2)$*

*(2) Soit $I$ un ensemble non vide d'indices. Alors :*

$$\forall (\mu_i)_{i\in I} \in \left(L^X\right)^I : f(\cup_{i\in I}\mu_i) = \cup_{i\in I} f(\mu_i)$$

*(3) Soit $J$ un ensemble non vide d'indices. Alors :*

$$\forall (\nu_j)_{j\in J} \in \left(L^Y\right)^J : f^{-1}(\cup_{j\in J}\nu_j) = \cup_{j\in J} f^{-1}(\nu_j)$$

*(4) Soit $J$ un ensemble non vide d'indices. Alors :*

$$\forall (\nu_j)_{j\in J} \in \left(L^Y\right)^J : f^{-1}(\cap_{j\in J}\nu_j) = \cap_{j\in J} f^{-1}(\nu_j)$$

*(5) $\forall \nu_1, \nu_2 \in L^Y : \nu_1 \subseteq \nu_2 \Rightarrow f^{-1}(\nu_1) \subseteq f^{-1}(\nu_2)$*

*(6) $\forall \mu \in L^X : \mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$*

*(7) Si $f$ est une application injective de $X$ dans $Y$, alors :*

$$\forall \mu \in L^X : \mu = f^{-1}(f(\mu))$$

*(8) Si $f$ est une application injective de $X$ dans $Y$, alors :*

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} L^X & \longrightarrow & L^Y \\ \mu & \longmapsto & f(\mu) \end{array} \right.$$

*est injective.*

*(9)Si $f$ est une application injective de $X$ dans $Y$, alors :*

$$\phi : \left| \begin{array}{rcl} L^Y & \longrightarrow & L^X \\ \nu & \longmapsto & f^{-1}(\nu) \end{array} \right.$$

*est surjective.*

*(10)* $\forall \nu \in L^Y : f(f^{-1}(\nu)) \subseteq \nu$

*(11) Si* $f$ *est une application surjective, alors :*

$$\forall \nu \in L^Y : f(f^{-1}(\nu)) = \nu$$

*(12) Si* $f$ *est une application surjective, alors :*

$\psi$ *est surjective.*

*(13) Si* $f$ *est une application surjective, alors :*

$\phi$ *est injective.*

*(14)* $\forall \mu \in L^X, \forall \nu \in L^Y : f(\mu) \subseteq \nu \Leftrightarrow \mu \subseteq f^{-1}(\nu)$

*(15)* $\forall \mu \in L^X \ : \ g(f(\mu)) = (g \circ f)(\mu)$

*(16)* $\forall \xi \in L^Z \ : \ f^{-1}(g^{-1}(\xi)) = (g \circ f)^{-1}(\xi)$

***Preuve*** **3.2.1.** *Soit* $f$ *une application de* $X$ *dans* $Y$

*(1)*

*Soient* $\mu_1, \mu_2 \in L^X$

*On suppose que :* $\mu_1 \subseteq \mu_2$

*Montrons que :* $f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2)$

*soit* $y \in Y$

*1^er cas :* $f^{-1}(y) = \emptyset$

*on a :* $f(\mu_1)(y) = f(\mu_2)(y) = 0$

*2^eme cas :* $f^{-1}(y) \neq \emptyset$

*on a :* $f(\mu_1)(y) = \bigvee\{\mu_1(x) | x \in X; y = f(x)\}$

*ainsi :* $f(\mu_2)(y) = \bigvee\{\mu_2(x) | x \in X; y = f(x)\}$

*or :* $(\mu_1 \subseteq \mu_2) \Leftrightarrow (\forall x \in X; \mu_1(x) \leq \mu_2(x))$

*par conséquence :* $\forall x \in X : y = f(x) \Rightarrow \mu_1(x) \leq \mu_2(x)$

*donc :* $\bigvee\{\mu_1(x)|x \in X; y = f(x)\} \leq \bigvee\{\mu_2(x)|x \in X; y = f(x)\}$

*c-à-d :* $f(\mu_1)(y) \leq f(\mu_2)(y)$

*alors des deux cas on constate que* $f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2)$■

*(2)*

*Soit $I$ un ensemble non vide d'indices*

*Soit* $(\mu_i)_{i\in I} \in (L^X)^I$

*Montrons que :* $f(\cup_{i\in I}\mu_i) = \cup_{i\in I}f(\mu_i)$

*Soit* $y \in Y$

*1er cas :* $f^{-1}(y) = \emptyset$

*on a :* $f(\cup_{i\in I}\mu_i)(y) = 0$

*ainsi :* $\cup_{i\in I}f(\mu_i) = \bigvee_{i\in I} f(\mu_i)(y) = \bigvee_{i\in I} 0 = 0$

*donc :* $f(\cup_{i\in I}\mu_i)(y) = \cup_{i\in I}f(\mu_i) = 0$

*2eme cas :* $f^{-1}(y) \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} f(\cup_{i\in I})(y) &= \bigvee\{(\cup_{i\in I}\mu_i)(x)|x \in X; y = f(x)\} \\ &= \bigvee\{\vee_{i\in I}\mu_i(x)|x \in X; y = f(x)\} \\ &= \bigvee\bigvee_{i\in I}\{\mu_i(x)|x \in X; y = f(x)\} \\ &= \bigvee_{i\in I}\bigvee\{\mu_i(x)|x \in X; y = f(x)\} \\ &= \bigvee_{i\in I} f(\mu_i)(y) \\ &= (\cup_{i\in I}f(\mu_i))(y) \end{aligned}$$

*donc des deux cas on constate que* $f(\cup_{i\in I}\mu_i) = \cup_{i\in I}f(\mu_i)$■

*(3)*

*Soit $J$ un ensemble non vide d'indices*

*Soit* $(\nu_j)_{j\in J} \in (L^Y)^J$

*Montrons que :* $f^{-1}(\cup_{j\in J}\nu_j) = \cup_{j\in J}f^{-1}(\nu_j)$

*Soit* $x \in X$

$$f^{-1}(\cup_{j\in J}\nu_j)(x) = (\cup_{j\in J}\nu_j)(f(x))$$

$$= \bigvee_{j\in J} \nu_j(f(x))$$

$$= \bigvee_{j\in J} f^{-1}(\nu_j)(x)$$

$$= (\cup_{j\in J} f^{-1}(\nu_j))(x)$$

*Alors :* $f^{-1}(\cup_{j\in J}\nu_j) = \cup_{j\in J} f^{-1}(\nu_j)\blacksquare$

<u>*(4)*</u>

*Soit* $J$ *un ensemble non vide d'indices*

*Soit* $(\nu_j)_{j\in J} \in (L^Y)^J$

*Montrons que :* $f^{-1}(\cap_{j\in J}\nu_j) = \cap_{j\in J} f^{-1}(\nu_j)$

*Soit* $x \in X$

$$f^{-1}(\cap_{j\in J}\nu_j)(x) = (\cap_{j\in J}\nu_j)(f(x))$$

$$= \bigwedge_{j\in J} \nu_j(f(x))$$

$$= \bigwedge_{j\in J} f^{-1}(\nu_j)(x)$$

$$= (\cap_{j\in J} f^{-1}(\nu_j))(x)$$

*Alors :* $f^{-1}(\cap_{j\in J}\nu_j) = \cap_{j\in J} f^{-1}(\nu_j)\blacksquare$

<u>*(5)*</u>

*Soit* $\nu_1, \nu_2 \in L^Y$

*On suppose que :* $\nu_1 \subseteq \nu_2$

*Montrons que :* $f^{-1}(\nu_1) \subseteq f^{-1}(\nu_2)$

*Soit* $x \in X$

$$f^{-1}(\nu_1)(x) = \nu_1(f(x))$$

$$\leq \nu_2(f(x)) \qquad \textit{car } \nu_1 \subseteq \nu_2$$

$$= f^{-1}(\nu_2)(x)$$

*donc :* $f^{-1}(\nu_1) \subseteq f^{-1}(\nu_2)\blacksquare$

<u>*(6)*</u>

*Montrons que :* $\forall \mu \in L^X : \mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$

*Soit* $\mu \in L^X$

*Soit* $x \in X$

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(\mu))(x) &= f(\mu)(f(x)) \\ &= \bigvee\{\mu(x')|x' \in X; f(x') = f(x)\} \\ &\geq \mu(x) \qquad \textit{car } x \in X \textit{ et } f(x) = f(x) \end{aligned}$$

*donc :* $\mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$■

<u>*(7)*</u>

*On suppose que* $f$ *est une application injective*

*Soit* $\mu \in L^X$

*Montrons que :* $\mu = f^{-1}(f(\mu))$

*Soit* $x \in X$

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(\mu))(x) &= f(\mu)(f(x)) \\ &= \bigvee\{\mu(x')|x' \in X; f(x') = f(x)\} \\ &= \bigvee\{\mu(x')|x' \in X; x' = x\} \qquad \textit{car } f \textit{ est injective} \\ &= \mu(x) \end{aligned}$$

*donc :* $\mu = f^{-1}(f(\mu))$■

<u>*(8)*</u>

*On suppose que* $f$ *est une application injective*

*Montrons que :*

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} L^X & \longrightarrow & L^Y \\ \mu & \longmapsto & f(\mu) \end{array} \right.$$

*est injective.*

*Soit* $\mu_1, \mu_2 \in L^X$

*on a :* $(\psi(\mu_1) = \psi(\mu_2)) \Leftrightarrow (f(\mu_1) = f(\mu_2))$
$\Rightarrow (f^{-1}(f(\mu_1)) = f^{-1}(f(\mu_2)))$
$\Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2$ *par* (7)

*alors* $\psi$ *est injective* ■ *(9)*

*On suppose que* $f$ *est une application injective*

*Montrons que :*

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} L^Y & \longrightarrow & L^X \\ \nu & \longmapsto & f^{-1}(\nu) \end{array} \right.$$

*est surjective.*

*soit* $\theta \in L^X$

*on a :* $f(\theta) \in L^Y$

*or :* $f$ *est injective*

*donc :* $\theta = f^{-1}(f(\theta))$
$= \phi(f(\theta))$

*alors :* $\phi$ *est surjective*■

*(10)*

*Soit* $\nu \in L^Y$

*Montrons que :* $f(f^{-1}(\nu)) \subseteq \nu$

*Soit* $y \in Y$

*1^er^ cas :* $f^{-1}(y) = \emptyset$

$f(f^{-1}(\nu))(y) = 0$

*2^eme^ cas :* $f^{-1}(y) \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(\nu))(y) &= \bigvee\{f^{-1}(\nu)(x) | x \in X; f(x) = y\} \\ &= \bigvee\{\nu(f(x)) | x \in X; f(x) = y\} \\ &= \nu(y) \end{aligned}$$

*des deux cas on constate que :*

$$f(f^{-1}(\nu))(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \nu(y) & si\ f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & sinon \end{array} \right. \tag{3.1}$$

*donc :*

$$f(f^{-1}(\nu))(y) \leq \nu(y)$$

*c-à-d :*

$$f(f^{-1}(\nu)) \subseteq \nu \blacksquare$$

*(11)*

*On suppose que f est une application surjective*

*Soit* $\nu \in L^Y$

*Montrons que :* $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$

*Soit* $y \in Y$

*puisque :* $(f \textit{ est surjective}) \Rightarrow (\exists x \in X \,; y = f(x))$

$$\Rightarrow (f^{-1}(y) \neq \emptyset)$$

*donc d'après* $2^{eme}$ *cas de (10) on constate que :*

$$f(f^{-1}(\nu))(y) = \nu(y)$$

*donc :*

$$f(f^{-1}(\nu)) = \nu \blacksquare$$

*(12)*

*On suppose que f est une application surjective*

*Montrons que :* $\psi$ *est surjective*

*Soit* $\theta \in L^Y$

*on a :* $f^{-1}(\theta) \in L^X$

*ainsi :*

$$(f \textit{ est surjective}) \Rightarrow (f(f^{-1}(\theta)) = \theta)$$

*donc :* $\psi$ *est surjective* $\blacksquare$

*(13)*

*On suppose que f est surjective*

*Montrons que :* $\phi$ *est injective*

*Soient* $\nu_1, \nu_2 \in L^Y$

*on a :* $\phi(\nu_1) = \phi(\nu_2) \Leftrightarrow f^{-1}(\nu_1) = f^{-1}(\nu_2)$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(\nu_1)) = f(f^{-1}(\nu_2))$$

$$\Rightarrow \nu_1 \ = \ \nu_2 \qquad\qquad \textit{car } f \textit{ est surjective}$$

*donc :* $\phi$ *est injective*$\blacksquare$

*(14)*

*Soient* $\mu \in L^X, \nu \in L^Y$

*Montrons que :* $(f(\mu) \subseteq \nu) \Leftrightarrow (\mu \subseteq f^{-1}(\nu))$

*on a :* $(f(\mu) \subseteq \nu) \ \Leftrightarrow \ ((f^{-1}(f(\mu)) \subseteq f^{-1}(\nu)))$

$$\Leftrightarrow \ (\mu \subseteq f^{-1}(\nu))\blacksquare$$

*(15)*

*Soit* $\mu \in L^X$ *Montrons que* $g(f(\mu)) \ = \ (g \circ f)(\mu)$

*Soit* $z \in Z$

$$\begin{aligned} g(f(\mu))(z) &= \bigvee\{f(\mu)(y)|y \in Y; g(y) = z\} \\ &= \bigvee\{\bigvee\{\mu(x)|x \in X; f(x) = y\}|y \in Y; g(y) = z\} \\ &= \bigvee\{\mu(x)|x \in X; g(f(x)) = z\} \\ &= \bigvee\{\mu(x)|x \in X; (g \circ f)(x) = z\} \\ &= (g \circ f)(z) \end{aligned}$$

*donc :* $g(f(\mu)) = (g \circ f)(z)\blacksquare$

*(16)*

*Soit* $\xi \in L^Z$

*Montrons que :* $f^{-1}(g^{-1}(\xi)) = (g \circ f)^{-1}(\xi)$

*Soit* $x \in X$

$$\begin{aligned} f^{-1}(g^{-1}(\xi)) &= g^{-1}(\xi)(f(x)) \\ &= \xi(g(f(x))) \\ &= \xi((g \circ f)(x)) \\ &= (g \circ f)^{-1}(\xi)(x) \end{aligned}$$

*donc :*$f^{-1}(g^{-1}(\xi)) = (g \circ f)^{-1}(\xi)\blacksquare$

# Chapitre 4

## L-SOUS-GROUPES

Dans toute ce qui suit $(G,.)$ signifie un groupe.

**Définition 4.0.1.** *On définit dans $L^G$ les opérations suivantes :*

*Dans $L^G$ on définit l'opération binaire $\circ$ par :*

$$\forall\ \mu\ ,\ \nu\ \in\ L^G\ ,\forall\ x\ \in\ G\ :\ (\mu\circ\nu)(x) = \bigvee\{\mu(y)\wedge\nu(z)\mid y,z\in G\ ,\ yz=x\}$$

$\forall\ \mu\ ,\ \nu\ :\ \mu\circ\nu$ *s'appelle le produit de $\mu$ par $\nu$.*

*Ainsi dans $L^G$ on introduit l'opération inverse par :*

$$\forall\ \mu\ \in\ L^G\ :\ \forall\ x\ \in\ G\ :\ \mu^{-1}(x)\ =\ \mu(x^{-1})$$

$\forall\ \mu\ \in\ L^G\ :\ \mu^{-1}$ *s'appelle l'inverse de $\mu$.*

**Théorème 4.0.1.** *Soit $(\mu\ ,\ \nu\ ,\ (\mu_i)_{i\in I})\ \in\ L^G\times L^G\times (L^G)^I$ avec $I$ est un ensemble non vide d'indices .*

*On pose $a\ =\ \bigvee\ \{\ \mu(x)\mid x\ \in\ G\ \}$*

*Alors on a les résultats suivant :*

*(1)* $\forall\ x\ \in\ G\ :\ (\mu\circ\nu)(x)\ =\ \bigvee_{y\in G}(\mu(y)\ \wedge\ \nu(y^{-1}x))$

*(2)* $\forall\ x\ \in\ G\ :\ (\mu\circ\nu)(x)\ =\ \bigvee_{y\in G}(\mu(xy^{-1})\ \wedge\ \nu(y))$

*(3)* $\forall\ x\ ,\ y\ \in\ G\ :\ (a_y\ \circ\ \mu)(x)\ =\ \mu(y^{-1}x)$

*(4)* $\forall\ x\ ,\ y\ \in\ G\ :\ (\mu\circ a_y)(x)\ =\ \mu(xy^{-1})$

*(5)* $(\mu^{-1})^{-1}\ =\ \mu$

*(6)* $(\mu\ \subseteq\ \mu^{-1})\ \Leftrightarrow\ (\mu^{-1}\ \subseteq\ \mu)\ \Leftrightarrow\ (\mu^{-1}\ =\ \mu)$

*(7)* $(\mu\ \subseteq\ \nu)\ \Leftrightarrow\ (\mu^{-1}\ \subseteq\ \nu^{-1})$

*(8)* $(\cup_{i\in I}\mu_i)^{-1} = \cup_{i\in I}\mu_i^{-1}$

*(9)* $(\cap_{i\in I}\mu_i)^{-1} = \cap_{i\in I}\mu_i^{-1}$

*(10)* $(\mu\circ\nu)^{-1} = \nu^{-1}\circ\mu^{-1}$

***Preuve*** **4.0.1.** *Soit* $(\mu\ ,\ \nu\ ,\ (\mu_i)_{i\in I}) \in L^G\times L^G\times (L^G)^I$ *avec* $I$ *est un ensemble non vide d'indices .*

*On pose* $a = \bigvee\{\ \mu(x)\mid x \in G\ \}$

*(1)*

*Montrons que :* $\forall\ x \in G : (\mu\circ\nu)(x) = \bigvee_{y\in G}(\mu(y)\ \wedge\ \nu(y^{-1}x))$

*Soit* $x \in G$

$$
\begin{aligned}
(\mu\circ\nu)(x) &= \bigvee\{\ \mu(y)\ \wedge\ \nu(z)\mid y\ ,\ z \in G\ ;\ yz = x\ \}\\
&= \bigvee\{\ \mu(y)\ \wedge\ \nu(z)\mid y\ ,\ z \in G; z = y^{-1}x\ \}\\
&= \bigvee\{\ \mu(y)\ \wedge\ \nu(y^{-1}x)\mid y \in G\ \}\\
&= \bigvee_{y\in G}(\mu(y)\ \wedge\ \nu(y^{-1}x))\blacksquare
\end{aligned}
$$

*(2)*

*Montrons que :* $\forall\ x \in G : (\mu\circ\nu)(x) = \bigvee_{y\in G}(\mu(xy^{-1})\ \wedge\ \nu(y))$

*Soit* $x \in G$

$$
\begin{aligned}
(\mu\circ\nu)(x) &= \bigvee\{\ \mu(y)\ \wedge\ \nu(z)\mid y\ ,\ z \in G\ ;\ yz = x\ \}\\
&= \bigvee\{\ \mu(y)\ \wedge\ \nu(z)\mid y\ ,\ z \in G\ ;\ z = xz^{-1}\ \}\\
&= \bigvee\{\ \mu(xz^{-1})\ \wedge\ \nu(z)\mid z \in G\ \}\\
&= \bigvee_{y\in G}(\mu(xy^{-1})\ \wedge\ \nu(y))\blacksquare
\end{aligned}
$$

*(3)*

*Montrons que :* $\forall\ x\ ,\ y \in G : (a_y\ \circ\ \mu)(x) = \mu(y^{-1}x)$

*Soient* $x\ ,\ y \in G$

*on a :*
$$
\begin{aligned}
(a_y\circ\mu)(x) &= \bigvee_{z\in G}(a_y(z)\ \wedge\ \mu(z^{-1}x))\\
&= a_y(y)\ \wedge\ \mu(y^{-1}x)\\
&= a\ \wedge\ \mu(y^{-1}x)\\
&= (\vee_{x'\in G}\mu(x'))\ \wedge\ \mu(y^{-1}x)\\
&= \mu(y^{-1}x)\blacksquare
\end{aligned}
$$

*(4)*

*Montrons que :* $\forall\ x\ ,\ y \in G : (\mu\circ a_y)(x) = \mu(xy^{-1})$

*Soient* $x, y\in G$

*on a :*
$$
\begin{aligned}
(\mu\circ a_y)(x) &= \bigvee_{z\in G}(\mu(xz^{-1})\ \wedge\ a_y(z))\\
&= \mu(xy^{-1})\ \wedge\ a_y(y)\\
&= \mu(xy^{-1})\ \wedge\ a\\
&= \mu(xy^{-1})\ \wedge\ (\bigvee_{x'\in G}\mu(x'))\\
&= \mu(xy^{-1})\blacksquare
\end{aligned}
$$

*(5)*

*Montrons que :* $(\mu^{-1})^{-1} = \mu$

*Soit* $x\in G$

*on a :*
$$
\begin{aligned}
(\mu^{-1})^{-1}(x) &= \mu^{-1}(x^{-1})\\
&= \mu((x^{-1})^{-1})\\
&= \mu(x)
\end{aligned}
$$

*donc :* $(\mu^{-1})^{-1} = \mu\blacksquare$

*(6)*

*Montrons que :* $(\mu \subseteq \mu^{-1}) \Leftrightarrow (\mu^{-1} \subseteq \mu)$

$\Rightarrow$ *CN*

*On suppose que :* $\mu \subseteq \mu^{-1}$

*Montrons que :* $\mu^{-1} \subseteq \mu$

*Soit* $x \in G$

*on a :* $\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$
$\leq \mu^{-1}(x^{-1})$ *car* $\mu \subseteq \mu^{-1}$
$= (\mu^{-1})^{-1}(x)$
$= \mu(x)$

*donc :* $\mu^{-1} \subseteq \mu$

$\Leftarrow$ CS

*On suppose que :* $\mu^{-1} \subseteq \mu$

*Montrons que :* $\mu \subseteq \mu^{-1}$

*Soit* $x \in G$

*on a :* $\mu(x) = \mu((x^{-1})^{-1})$
$= \mu^{-1}(x^{-1})$
$\leq \mu(x^{-1})$ *car* $\mu^{-1} \subseteq \mu$
$= \mu^{-1}(x)$

*donc :* $\mu \subseteq \mu^{-1}$

*Montrons que :* $(\mu^{-1} \subseteq \mu) \Leftrightarrow (\mu = \mu^{-1})$

*on a :* $(\mu^{-1} \subseteq \mu) \Leftrightarrow (\mu^{-1} \subseteq \mu$ *et* $\mu \subseteq \mu^{-1})$ *Par l'équivalence précédente*
$\Leftrightarrow (\mu = \mu^{-1})$

*donc :* $(\mu \subseteq \mu^{-1}) \Leftrightarrow (\mu^{-1} \subseteq \mu) \Leftrightarrow (\mu^{-1} = \mu)$

*(7)*

*Montrons que :* $(\mu \subseteq \nu) \Leftrightarrow (\mu^{-1} \subseteq \nu^{-1})$

*on a :* $(\mu \subseteq \nu) \Leftrightarrow (\forall x \in G : \mu(x) \leq \nu(x))$
$\Leftrightarrow (\forall x \in G : \mu((x^{-1})^{-1}) \leq \nu((x^{-1})^{-1}))$
$\Leftrightarrow (\forall x \in G : \mu^{-1}(x^{-1}) \leq \nu^{-1}(x^{-1}))$
$\Leftrightarrow (\forall x \in G : \mu^{-1}(x) \leq \nu^{-1}(x))$
$\Leftrightarrow (\mu^{-1} \subseteq \nu^{-1})$ ■

*(8)*

*Montrons que :* $(\cup_{i\in I}\mu_i)^{-1} = \cup_{i\in I}\mu_i^{-1}$

*Soit* $x \in G$

$(\cup_{i\in I}\mu_i)^{-1}(x) = (\cup_{i\in I}\mu_i)(x^{-1})$
$= \bigvee_{i\in I} \mu_i(x^{-1})$
$= \bigvee_{i\in I} \mu_i^{-1}(x)$
$= (\cup_{i\in I}\mu_i^{-1})(x)$

*donc :* $(\cup_{i\in I}\mu_i)^{-1} = \cup_{i\in I}\mu_i^{-1}$ ■

*(9)*

*Montrons que :* $(\cap_{i\in I}\mu_i)^{-1} = \cap_{i\in I}\mu_i^{-1}$

*Soit* $x \in G$

$(\cap_{i\in I}\mu_i)^{-1}(x) = (\cap_{i\in I}\mu_i)(x^{-1})$
$= \bigwedge_{i\in I} \mu_i(x^{-1})$
$= \bigwedge_{i\in I} \mu_i^{-1}(x)$
$= (\cap_{i\in I}\mu_i^{-1})(x)$

*donc :* $(\cap_{i\in I}\mu_i)^{-1} = \cap_{i\in I}\mu_i^{-1}$ ■

*(10)*

*Montrons que :* $(\mu \circ \nu)^{-1} = \nu^{-1} \circ \mu^{-1}$

*Soit* $x \in G$

$(\mu \circ \nu)^{-1}(x) = (\mu \circ \nu)(x^{-1})$
$= \bigvee\{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y , z \in G; yz = x^{-1} \}$
$= \bigvee\{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y , z \in G; (yz)^{-1} = x \}$
$= \bigvee\{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y , z \in G; z^{-1}y^{-1} = x \}$

$$= \bigvee\{ \mu((y^{-1})^{-1}) \wedge \nu((z^{-1})^{-1}) \mid y , z \in G; z^{-1}y^{-1} = x \}$$
$$= \bigvee\{ \mu^{-1}(y^{-1}) \wedge \nu^{-1}(z^{-1}) \mid y , z \in G ; z^{-1}y^{-1} = x \}$$
$$= \bigvee\{ \nu^{-1}(z^{-1}) \wedge \mu^{-1}(y^{-1}) \mid y , z \in G ; z^{-1}y^{-1} = x \}$$
$$= \bigvee\{ \nu^{-1}(z) \wedge \mu^{-1}(y) \mid y , z \in G ; zy = x \}$$
$$= (\nu^{-1} \circ \mu^{-1})(x)$$

*donc :* $(\mu \circ \nu)^{-1} = \nu^{-1} \circ \mu^{-1}$ ■

***Définition*** **4.0.2.** *Un $L-$sous-ensemble $\mu$ de $G$ est dit $L-$sous-groupe de $G$ si $\mu$ vérifie les conditions suivantes :*

$G_1$) $\forall x , y : \mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

$G_2$) $\forall x \in G : \mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$

$\star$ *Si $L = [0,1]$ alors un $L-$ sous-groupe de $G$ s'appelle un sous-groupe floue.*
$\star$ *On note par $L(G)$ l'ensemble de $L-$ sous-groupes de $G$.*
$\star$ *Si $\mu \in L(G)$ on pose :*

$$\mu_* = \{x \in G | \mu(x) = \mu(e)\}$$

***Remarque*** **4.0.1.** *Si $\mu \in L^G$ satisfasse à la condition $G_1$ , alors on a le résultat suivant :*

$$\forall n \in \mathbb{N} , \forall x \in G : \mu(x^n) \geq \mu(x)$$

*ainsi on a :*

$$\forall \mu \in L(G) , \forall x , y : \mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

***Preuve*** **4.0.2.** *Soit $\mu \in L(G)$*
*Soient $x, y \in G$*
*on a :* $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y^{-1})$ *car $\mu$ verifie $G_1$*
$\geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ *car $\mu$ verifie $G_2$* ■

***Lemme*** **4.0.1.** *Soit $\mu \in L(G)$ ;alors :*

1) $\forall x \in G : \mu(e) \geq \mu(x)$

2) $\forall x \in G : \mu(x) = \mu(x^{-1})$

***Preuve*** **4.0.3.** *Soit $\mu \in L(G)$*
*(1)*
*Soit $x \in G$*
*on a :* $\mu(e) = \mu(xx^{-1})$
$\geq \mu(x) \wedge \mu(x^{-1})$ *d'après (G1)*
$= \mu(x)$ *d'après (G2)* ■
*(2)*
*Soit $x \in G$*
*on a :* $\mu(x) \leq \mu(x^{-1})$ *d'après (G2)*
*ainsi :* $\mu(x) = \mu((x^{-1})^{-1})$
$\geq \mu(x^{-1})$ *d'après (G2)*
*donc :* $\mu(x) = \mu(x^{-1})$ ■

**Remarque 4.0.2.** *Revenant au résultat qui dit :*
$\forall\, \mu \in L^G : [(\mu\ verifie\ (G_1)) \Rightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in G : \mu(x^n) \geq \mu(x))]$

**Preuve 4.0.4.** *Soit* $\mu \in L^G$
*On suppose que* $\mu$ *verifie* $(G_1)$
*Montrons que :* $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, x \in G : \mu(x^n) \geq \mu(x)$
*Raisonnement par récurrence sur n :*
*Pour* $n = 0$ *Soit* $x \in G$
*On a :* $\mu(x^n) = \mu(x^0)$
$= \mu(e)$
$\geq \mu(x)$ *d'après (1) du lemme précédente*
*donc la propriété est vraie pour* $n = 0$
*Soit* $n \in \mathbb{N}$
*On suppose que :* $\forall j \in \{0, ......, n\}; \forall x \in G : \mu(x^j) \geq \mu(x)$
*Montrons que :* $\forall x \in G : \mu(x^{n+1}) \geq \mu(x)$
*Soit* $x \in G$
*On a :* $\mu(x^{n+1}) = \mu(x^n x)$
$\geq \mu(x^n) \wedge \mu(x)$
$= \mu(x)$ *Par "H.R"*
*Conclusion :* $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in G : \mu(x^n) \geq \mu(x)$

**Lemme 4.0.2.** *Soit* $\mu \in L^G$.

$$\mu \in L(G)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall a \in \mu(G) \cup \{b \in L | b \leq \mu(e)\} : \mu_a \text{ est un sous-groupe de } G$$

**Preuve 4.0.5.** *Soit* $\mu \in L^G$

$\Rightarrow$ *CN*
*On suppose que :* $\mu \in L(G)$
*Montrons que :* $\forall a \in \mu(G) \cup \{b \in L | b \leq \mu(e)\}$ *;* $\mu_a$ *est un sous-groupe de G*
*Soit* $a \in \mu(G) \cup \{b \in L | b \leq \mu(e)\}$
*on a :* $\mu_a \subseteq G$
*ainsi :* $\mu_a \neq \emptyset$
*car : on a deux cas présent*
***1**^er **cas :*** $a \in \mu(G)$
*On a :* $(a \in \mu(G)) \Leftrightarrow (\exists x \in G : \mu(x) = a)$
$\Rightarrow (\exists x \in G : x \in \mu_a)$
$\Rightarrow \mu_a \neq \emptyset$
***2**^eme **cas :*** $a \in \{b \in L | b \leq \mu(e)\}$
*donc :* $\mu(e) \geq a$
*c-à-d :* $e \in \mu_a$
*alors :* $\mu_a \neq \emptyset$
*d'autre part soient* $x, y \in \mu_a$
*on a :* $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
$\geq a \wedge a$ *car* $x, y \in \mu_a$
$= a$
*donc :* $xy^{-1} \in \mu_a$ *alors* $\mu_a$ *est un sous-groupe de G*
$\Leftarrow$ *CS*

*On suppose que :* $\forall a \in \mu(G) \cup \{b \in L | b \leq \mu(e)\}$ *;* $\mu_a$ *est un sous-groupe de* $G$
*Montrons que :* $\mu \in L(G)$
*on a :* $\mu \in L^G$
*d'autre part soient* $x, y \in G$
*on pose :* $\alpha = \mu(x)$ *et* $\beta = \mu(y)$
*pour* $a = \alpha \wedge \beta$
*on a :* $x, y \in \mu_a$
*comme* $\mu_a$ *est sou-groupe de* $G$
*alors :* $xy^{-1} \in \mu_a$
*c-à-d :* $\mu(xy^{-1}) \geq a$
*c-à-d :* $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
*donc :* $\mu \in L(G)$■

**Corollaire 4.0.1.** *Si* $\mu \in L(G)$ *alors,* $\mu_*$ *est un sous-groupe de* $G$*.*

**Preuve 4.0.6.** *On suppose que* $\mu \in L(G)$
*Montrons que :* $\mu_*$ *est un sous-groupe de* $G$
*1[er] étape :* *Montrons que* $\mu_* = \mu_{\mu(e)}$
*on a :* $(x \in G) \Rightarrow (\mu(x) \geq \mu(e))$
$\Leftrightarrow (x \in \mu_{\mu(e)})$
*donc :* $\mu_* \subseteq \mu_{\mu(e)}$
*d'autre part Soit* $x \in \mu_{\mu(e)}$
*d'où :* $\mu(x) \geq \mu(e)$
*on sait que :* $\forall y \in G : \mu(e) \geq \mu(y)$
*or* $x \in G$ *car* $\mu_{\mu(e)} \subseteq G$
*pour* $y = x$ *on obtient que* $\mu(e) \geq \mu(x)$
*alors :* $\mu(x) = \mu(e)$
*c-à-d :* $x \in \mu_*$
*donc :* $\mu_{\mu(e)} \subseteq \mu_*$
*alors :* $\mu_* = \mu_{\mu(e)}$
*2[eme] étape :* *Montrons que* $\mu_*$ *est un sous-groupe de* $G$
*on a :* $\mu_* = \mu_{\mu(e)}$
*ainsi :* $\mu(e) \in \mu(G) \cup \{b \in L | b \leq \mu(e)\}$ *car* $\mu(e) \in \mu(G)$
*ainsi :* $\mu \in L(G)$
*alors d'après le lemme précédente on obtient que* $\mu_{\mu(e)}$ *est un sous-groupe de* $G$
*c-à-d :* $\mu_*$ *est un sous-groupe de* $G$*.*■

Rappelle : L est dite régulier si :

$$\forall a, b \in L \text{ tel que } (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0) \Rightarrow a \wedge b \neq 0$$

**Théorème 4.0.2.** *Si* $\mu \in L(G)$*.On suppose que* $L$ *est régulier alors* $\mu^*$ *est un sous-groupe de* $G$*.*

**Théorème 4.0.3.** *Soit* $\mu \in L^G$ *alors ,* $\mu \in L(G)$ *si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :*
$(G_1)'$ $\mu \circ \mu \subseteq \mu$
$(G_2)'$ $\mu^{-1} \subseteq \mu$ *(ou* $\mu \subseteq \mu^{-1}$ *ou* $\mu = \mu^{-1}$ *)*

**Preuve 4.0.7.** *Soit* $\mu \in L^G$
$\Rightarrow$ CN
*On suppose que* $\mu \in L(G)$

*Montrons que les conditions* $(G_1)'$ *et* $(G_2)'$ *sont vérifiés*

*Pour* $(G_1)'$ *:*

*Soit* $x \in G$

$$\begin{aligned} \text{on a : } (\mu \circ \mu)(x) &= \bigvee(\mu(y) \wedge \mu(y^{-1}x)) \\ &= \bigvee_{y\in G}(\mu(y) \wedge \mu(y^{-1}x)) \\ &\leq \bigvee_{y\in G} \mu(yy^{-1}x) \qquad \text{car } \mu \in L(G) \\ &= \bigvee_{y\in G} \mu(x) \\ &= \mu(x) \end{aligned}$$

*donc :* $(G_1)'$ *est vérifié*

*Pour* $(G_2)'$ *:*

*Soit* $x \in G$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \mu^{-1}(x) &= \mu(x^{-1}) \\ &= \mu(x) \qquad \text{car } \mu \in L(G) \end{aligned}$$

*donc :* $\mu^{-1}(x) \leq \mu(x)$

*alors :* $G_2)'$ *est vérifié*

*ainsi on a :*

$$(\mu \subseteq \mu^{-1}) \Leftrightarrow (\mu^{-1} \subseteq \mu) \Leftrightarrow (\mu = \mu^{-1})$$

*ce qui achève la preuve*■

$\Leftarrow$ CS

*On suppose que* $\mu$ *vérifie* $G_1)'$ *et* $G_2)'$

*Montrons que* $\mu \in L(G)$

*on a :* $\mu \in L^G$

*ainsi soit* $x, y \in G$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \mu(xy) &\geq (\mu \circ \mu)(xy) \\ &= \bigvee(\mu(z) \wedge \mu(z^{-1}xy)) \\ &\geq \mu(x) \wedge \mu(x^{-1}xy) \\ &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \text{ donc : } (G_1) \text{ est vérifié.} \end{aligned}$$

*d'autre part soit* $x \in G$

*on a :* $\mu^{-1} \subseteq \mu \Leftrightarrow \mu \subseteq \mu^{-1}$

*donc :* $\mu(x) \leq \mu^{-1}(x)$

*d'où :* $(G_2)$ *est vérifié*

*alors :* $\mu \in L(G)$■

**Théorème 4.0.4.** *Soient* $\mu, \nu \in L(G)$ *alors ,* $\mu \circ \nu \in L(G)$ *si et seulement si* $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$

**Preuve 4.0.8.** *Soient* $\mu, \nu \in L(G)$

$\Rightarrow$CN

*On suppose que* $\mu \circ \nu \in L(G)$

*Montrons que* $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \mu \circ \nu &= \mu^{-1} \circ \nu^{-1} \\ &= (\nu \circ \mu)^{-1} \\ &= \nu \circ \mu \end{aligned}$$

$\Leftarrow$CS

*On suppose que* $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$

*Montrons que* $\mu \circ \nu \in L(G)$

$$\begin{aligned} \text{on a : } (\mu \circ \nu) \circ (\mu \circ \nu) &= \mu \circ (\nu \circ \mu) \circ \nu \\ &= \mu \circ (\mu \circ \nu) \circ \nu \\ &= (\mu \circ \mu) \circ (\nu \circ \nu) \\ &\subseteq \mu \circ \nu \end{aligned}$$

*d'autre part on a :*

$(\mu \circ \nu)^{-1} = \nu^{-1} \circ \mu^{-1}$

$\qquad = \nu \circ \mu$

$\qquad = \mu \circ \nu$

*donc :* $\mu \circ \nu \in L(G)$■

***Théorème*** **4.0.5.** *Soient* $\mu \in L(G)$ *,* $H$ *un groupe et* $f$ *un morphisme surjective de* $G$ *dans* $H$*.Alors* $f(\mu) \in L(H)$*.*

***Preuve*** **4.0.9.** *Soient* $u, v \in H$

*alors :* $\exists x, y \in G : u = f(x)$ *et* $v = f(y)$

$(f(\mu))(uv) = \bigvee\{\mu(z) \mid z \in G\ ,\ f(z)\ =\ uv\}$

$\qquad \geq\ \bigvee\{\mu(xy)\ \ |; x, y \in G\ ,\ f(x)\ =\ u\ ,\ f(z)\ =\ v\}$

$\qquad \geq\ \bigvee\{\mu(x) \wedge \mu(y) \mid x, y\ \in G\ ,\ f(x)\ =\ u\ ,\ f(y)\ =\ v\}$

$\qquad = (\bigvee\{\mu(x) \mid x \in G\ ,\ f(x)\ =\ u\}) \bigwedge (\bigvee\{\mu(y) | y \in G, f(y) = v\})$

$\qquad =\ (f(\mu))(u) \wedge (f(\mu))(v)$

*D'autre part il est claire que :* $(f(\mu))(u^{-1}) = (f(\mu))(v)$

*donc :* $f(\mu) \in L(H)$■

***Théorème*** **4.0.6.** *Soit* $H$ *un groupe et* $\nu \in L(H)$*.Si* $f$ *est un morphisme de groupes de* $G$ *dans* $H$ *alors* $f^{-1}(\nu) \in L(G)$*.*

***Preuve*** **4.0.10.** *Soit* $x, y \in G$

*on a :* $f^{-1}(\nu)(xy) = \nu(f(xy))$

$\qquad = \nu(f(x)f(y))$ *car* $f$ *est un morphisme de groupes*

$\qquad \geq \nu(f(x)) \wedge \nu(f(y))$ *car* $\nu \in L(H)$

$\qquad = f^{-1}(\nu)(x) \wedge f^{-1}(\nu)(y)$

*on a :* $f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x))$

$\qquad \leq \nu((f(x))^{-1})$

$\qquad = \nu(f(x^{-1}))$

$\qquad = f^{-1}(\nu)(x^{-1})$■

***Théorème*** **4.0.7.** *Soient* $I$ *un ensemble non vides d'indices et* $(\mu_i)_{i \in I}\ \in\ (L(G))^I$*. Alors* $\cap_{i \in I} \mu_i \in L(G)$

***Preuve*** **4.0.11.** *Soient* $I$ *un ensemble non vides d'indices et* $(\mu_i)_{i \in I}\ \in\ (L(G))^I$*.*

*On a :* $\cap_{i \in I} \mu_i \in L^G$

*d'autre part soient* $x\ ,\ y\ \in\ G$

$(\cap_{i \in I} \mu_i)(xy^{-1})\ =\ \bigwedge_{i \in I} \mu_i(xy^{-1})$

$\qquad \geq\ \bigwedge_{i \in I} (\mu_i(x) \wedge \mu_i(y))$

$\qquad =\ (\bigwedge_{i \in I} \mu_i(x)) \wedge (\bigwedge_{i \in I} \mu_i(y))$

$\qquad =\ (\cap_{i \in I} \mu_i)(x) \wedge (\cap_{i \in I} \mu_i)(y)$

*donc :* $\cap_{i \in I} \mu_i\ \in\ L(G)$■

***Définition*** **4.0.3.** *Soit* $\mu\ \in\ L^G$*. On pose :*

$$\langle \mu \rangle\ =\ \cap\ \{\ \nu \mid \mu\ \subseteq\ \mu\ ,\ \nu\ \in\ L(G)\ \}$$

$\langle \mu \rangle$ *est appelé le L-sous-groupe de* $G$ *engendré par* $\mu$*.*

***Remarque*** **4.0.3.** $\langle \mu \rangle$ *est le plus petit L-sous-groupe contenant* $\mu$*.*

**Notation** **4.0.1.** *Soit* $\mu\ \in\ L^G$*.*

*On pose :*

$$\mu^1 = \mu$$
$$et\ \forall\ n\ \mathbb{N}^* - \{1\}\ :\ \mu^n = \mu^{n-1} \circ \mu$$

***<u>Théorème</u>*** **4.0.8.** *Soit* $\mu \in L^G$.
*On pose :* $a = \{\ \eta(e) \mid \mu \subseteq \eta\ ,\ \eta \in L(G)\ \}$
*Alors :* $\langle\mu\rangle = a_e \cup (\cup_{n=1}^{\infty}(\mu \cup \mu^{-1})^n) = \cup_{n=1}^{\infty}(a_e \cup \mu \cup \mu^{-1})^n$

***<u>Preuve</u>*** **4.0.12.** *On pose :* $\nu = a_e \cup (\cup_{n=1}^{\infty}(\mu \cup \mu^{-1})^n)$
*Il est claire que* $\mu \subseteq \nu$ , $a_e \subseteq \nu$ , $\nu = \nu^{-1}$ *et* $\nu \circ \nu = \nu$
*Alors d'après le <u>théorème4.0.3</u> on obtient que* $\nu \in L(G)$
*Comme* $\mu \subseteq \nu \Rightarrow \langle\mu\rangle\nu$
*D'autre part soit* $\xi \in L(G)$ *tel que* $\mu \subseteq \xi$
*Alors :* $a_e \subseteq \xi$ *et* $(\mu \cup \mu^{-1})^n \subseteq \xi$
*Ainsi :* $\nu \subseteq \xi$
*Par conséquence :* $\nu \subseteq \langle\mu\rangle$
*Alors :* $\langle\mu\rangle = \nu$
*Pour l'autre égalité la preuve est similaire* ■

# Chapitre 5

## *L-SOUS-GROUPES NORMALES*

***Théorème*** **5.0.1.** *Soit $\mu \in L^G$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(N1)* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xy) = \mu(yx)$ *dans ce cas on dit que $\mu$ est un L-sous-ensemble abélien de G*
*(N2)* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xyx^{-1}) = \mu(y)$
*(N3)* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y)$
*(N4)* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xyx^{-1}) \leq \mu(y)$
*(N5)* $\forall\, \nu \in L^G : \mu \circ \nu = \nu \circ \mu$

***Preuve*** **5.0.1.** *Soit* $\mu \in L^G$
*(N1)* $\Rightarrow$ *(N2)*
*On suppose que :* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xy) = \mu(yx)$
*Montrons que :* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xyx^{-1}) = \mu(y)$
*Soient* $x\,,\ y \in G$
*on a :* $\mu(xyx^{-1}) = \mu((xy)x^{-1})$
$= \mu(x^{-1}(xy))$ *par (N1)*
$= \mu(y)$
*donc :* $\forall\, x\,,\ y\ :\ \mu(xyx^{-1}) = \mu(y)$
*(N2)* $\Rightarrow$ *(N3)*
*on a :* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xyx^{-1}) = \mu(y) \Rightarrow \forall\, x\,,\ y \in G : \ \mu(y) \leq \mu(xyx^{-1})$
*car :* $\leq$ *est une relation d'ordre dans dans L.*
*(N3)* $\Rightarrow$ *(N4)*
*On suppose que :* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y)$
*Montrons que :* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xyx^{-1}) \leq \mu(y)$
*Soient* $x\,,\ y \in G$
*on a :* $\mu(xyx^{-1}) \leq \mu(x^{-1}xyx^{-1}(x^{-1})^{-1})$ *par (N3)*
$= \mu(y)$
*donc :* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xyx^{-1}) \leq \mu(y)$
*(N4)* $\Rightarrow$ *(N5)*
*On suppose que :* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xyx^{-1}) \leq \mu(y)$
*Montrons que :* $\forall\, \nu \in L^G : \mu \circ \nu = \nu \circ \mu$
*Soit* $x \in G$
*on a :* $(\mu \circ \nu)(x) = \bigvee_{y \in G}(\mu(xy^{-1}) \wedge \nu(y))$
$= \bigvee_{y \in G}(\mu(y^{-1}x) \wedge \nu(y))$ *par (N4)*
$= (\nu \circ \mu)(x)$
*donc :* $\forall\, \nu \in L^G : \mu \circ \nu = \nu \circ \mu$
*(N5)* $\Rightarrow$ *(N1)*
*On suppose que :* $\forall\, \nu \in L^G : \mu \circ \nu = \nu \circ \mu$
*Montrons que :* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xy) = \mu(yx)$

*Soient* $x\ ,\ y\ \in\ G$
*On pose :*

$$a\ =\ \bigvee\{\ \mu(x)\mid x\ \in\ G\ \}$$
$$\nu\ =\ a_{y^{-1}}$$

*par (N5) on :*

$$a_{y^{-1}}\circ\mu\ =\ \mu\circ a_{y^{-1}}$$

*donc :*

$$\forall\ x\ ,\ y\ :\ \mu(xy)\ =\ \mu(yx)\blacksquare$$

***Définition*** **5.0.1.** *Soit* $\mu\ \in\ L(G)$*.On dit que* $\mu$ *est un L-sous-groupe normale de G s'il est un L-sous-ensemble abélien .*

**Notation** **5.0.1.** *On note par NL(G) l'ensemble des L-sous-groupes normales de G.*

***Cas particulier*** **5.0.1.** *Si* $L\ =\ [0,1]$ *alors tout L-sous-groupe normale de G est appelé sous-groupe normale floue .*

*Soient* $\mu\ ,\ \nu\ \in\ L(G)$*.*
*Si* $\exists\ u\ \in\ G\ ,\ \forall\ x\ \in\ G:\ \mu(x)\ =\ \nu(uxu^{-1})$
*alors on dit dans cette ordre que* $\mu\ ,\ \nu$ *sont des L-sous-groupes conjuguées et on écrit* $\mu\ =\ \nu_u$*.*

***Remarque*** **5.0.1.** *On a les propriétés suivantes :*
*(1)* $\mathbf{1}_G\in\ NL(G)$
*(2)* $\mathbf{1}_e\in\ NL(G)$
*(3) Si G est commutative , alors tout L-sous-groupe de G est normale*
*(4)* $\forall\ \mu\ \in\ L(G)\ :\ (\mu\ \in\ NL(G))\ \Leftrightarrow\ (\forall\ z\ \in\ G\ :\ \mu\ =\ \mu_z)$

***Théorème*** **5.0.2.** *Soit* $\mu\ \in\ L^G$*. Alors on a l'équivalence suivantes :*

$$(\mu\ \in\ NL(G))\ \Leftrightarrow\ (\forall\ a\in\ \mu(G)\cup\{b\in L|b\leq\mu(e)\}\ :\mu_a\triangleright G)$$

***Preuve*** **5.0.2.** *Soit* $\mu\ \in\ L^G$
$\Rightarrow$ *CN*
*On suppose que* $\mu\ \in\ NL(G)$
*Montrons que* $\forall\ a\in\ \mu(G)\cup\{b\in L|b\leq\mu(e)\}\ :\mu_a\triangleright G$
*on a :* $\mu\ \in\ NL(G)\Rightarrow\mu\ \in\ L(G)$
$\Leftrightarrow\forall a\in\mu(G)\cup\{b\in L|b\leq\mu(e)\}:\mu_a\ sous-groupe\ de G$
*d'autre part Soit* $a\in\ \mu(G)\cup\{b\in L|b\leq\mu(e)\}$
*soit* $(x,h)\in G\times\mu_a$
*on a :* $\mu(xhx^{-1})\ =\ \mu(x(hx^{-1}))$
$=\ \mu(hx^{-1}x)$ *car* $\mu\ \in\ NL(G)$
$=\ \mu(h)$
$\geq\ a$
*donc :* $xhx^{-1}\ \in\ \mu_a$
*alors :* $\forall\ a\in\ \mu(G)\cup\{b\in L|b\leq\mu(e)\}\ :\mu_a\triangleright G$
$\Leftarrow$ *CS*
*On suppose que* $\forall\ a\in\ \mu(G)\cup\{b\in L|b\leq\mu(e)\}\ :\mu_a\triangleright G$
*Montrons que* $\mu\ \in\ NL(G)$
*on a :*

$$\forall\, a \in\ \mu(G) \cup \{b \in L | b \leq \mu(e)\}\ : \mu_a \rhd G$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\, a \in\ \mu(G) \cup \{b \in L | b \leq \mu(e)\}\ : \mu_a\ sous-groupe\ de\ G$$

$$\Updownarrow$$

$$\mu\ \in\ L(G)$$

*d'autre part soient* $x\ , y\ \in\ G$
*on pose :* $a\ =\ \mu(y)$
*on a :* $y\ \in\ \mu_a$ *car* $\mu(y)\ =\ a$
*donc :* $xyx^{-1}\ \in\ \mu_a$ *car* $\mu_a \rhd G$
*donc :* $\mu(xyx^{-1})\ \geq\ a$
*c-à-d :* $\mu(xyx^{-1})\ \geq\ \mu(y)$
*alors :* $\mu\ \in\ NL(G)$■

***Théorème*** **5.0.3.** *Soit* $\mu\ \in\ NL(G)$*.Alors on les résultats suivants :*
*(1)* $\mu_* \ \rhd\ G$
*(2) Si L est régulier alors ,* $\mu^*\ \rhd\ G$

***Théorème*** **5.0.4.** *Soit* $\mu\ \in\ L(G)$
*On pose :* $N(\mu)\ =\ \{x\ |\ x\ \in\ G\ ,\ \forall\ y\ \in\ G\ :\ \ \mu(xy)\ =\ \mu(yx)\}$
*Alors* $N(\mu)$ *est un sous-groupe de G et* $\mu|_{N(\mu)}$ *est un L-sous-groupe normale de* $N(\mu)$*.*

***Théorème*** **5.0.5.** *Soit* $\nu\ \in\ L(G)$*, alors :*

$$\#\{\nu_u | u \in G\}\ =\ \#[G : N(\nu)]$$

***Preuve*** **5.0.3.** *Soit* $\nu\ \in\ L(G)$
*on considère l'application suivante :*

$$\begin{aligned} \phi : \{\nu_u | u \in G\}\ &\longrightarrow [G : N(\nu)] \\ \nu_u\ &\longmapsto\ u^{-1}N(\nu) \end{aligned}$$

$\phi$ *est bijective , en effet :*
*Injectivité :*
*Soit* $\nu_u, \nu_v\ \in\ \{\nu_u | u \in G\}^2$
*on a :* $\phi(\nu_u)\ =\ \phi(\mu_v)\ \Leftrightarrow\ \overline{u^{-1}N(\nu)}\ =\ \overline{v^{-1}N(\nu)}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \overline{u^{-1}}\ =\ \overline{v^{-1}} \\
&\Leftrightarrow\ u^{-1}\, \Re\, v^{-1} \\
&\Leftrightarrow\ (u^{-1})^{-1} v^{-1}\ \in\ N(\nu) \\
&\Leftrightarrow\ uv^{-1}\ \in\ N(\nu) \\
&\Leftrightarrow\ \forall x\ \in\ G\ :\ \nu(xuv^{-1})\ =\ \nu(uv^{-1}x) \\
&\Leftrightarrow\ \forall x\ \in\ G\ :\ \nu(uxu^{-1})\ =\ \nu(vxv^{-1}) \\
&\Leftrightarrow\ \nu_u\ =\ \nu_v
\end{aligned}$$

*donc :* $\phi$ *est injective.*
*Surjectivité :*

$$\begin{aligned}
\beta\ \in\ [G : N(\nu)]\ &\Leftrightarrow\ \exists\, u\ \in\ G\ :\ \beta\ =\ uN(\nu) \\
&\Leftrightarrow\ \exists\, u\ \in\ G\ :\ \beta\ =\ (u^{-1})^{-1} N(\nu) \\
&\Leftrightarrow\ \exists\, u\ \in\ G\ :\ \beta\ =\ u^{-1}N(\nu) \\
&\Leftrightarrow\ \exists\, u\ \in\ G\ :\ \beta\ =\ \phi(u)
\end{aligned}$$

*donc :* $\phi$ *est surjective*
*alors :* $\phi$ *est bijective*
*d'où :* $\#\{\nu_u | u \in G\}\ =\ \#[G : N(\nu)]$■

***Théorème* 5.0.6.** *Soit $\nu \in L(G)$*
*(1) $\cap_{u\in G}\nu_u \in NL(G)$*
*(2) $\cap_{u\in G}\nu_u$ est le plus grand L-sous-groupe normale de G contenu dans $\nu$*

***Preuve* 5.0.4.** *Soit $\nu \in L(G)$*
*(1)*
*1^er étape : Montrons que $\forall\, u \in G : \nu_u \in L(G)$*
*Soient $x , y \in G$*
*on a :* $\nu_u(xy^{-1}) = \nu(uxy^{-1}u^{-1})$
$= \nu((uxu^{-1})(uyu^{-1}))$
$\geq \nu(uxu^{-1}) \wedge \nu(uy^{-1}u^{-1})$ *car $\nu \in L(G)$*
$\geq \nu(uxu^{-1}) \wedge \nu(uyu^{-1})$ *car $\nu \in L(G)$*
$= \nu_u(x) \wedge \nu_u(y)$
*donc : $\forall\, u \in G : \nu_u \in L(G)$*
*alors : $\cap_{u\in G}\nu_u \in L(G)$*
*2^eme étape : Montrons que $\cap_{u\in G}\nu_u \in NL(G)$*
*Soient $x , y \in G$*
*on a :* $(\cap_{u\in G}\nu_u)(xyx^{-1}) = \bigwedge_{u\in G}(\nu_u(xyx^{-1}))$
$= \bigwedge_{u\in G}(\nu(uxyx^{-1}u^{-1}))$
$= \bigwedge_{u\in G}(\nu((ux)y(ux)^{-1}))$
$= \bigwedge_{u\in G}(\nu_{ux}(y))$
$= \bigwedge_{u\in G}(\nu_u(y))$
$= (\cap_{u\in G}\nu_u)(y)$
*donc : $\cap_{u\in G}\nu_u \in NL(G)$*■
*(2)*
*Soit $\mu \in NL(G)$ tel que : $\mu \subseteq \nu$*
*1^er étape :Montrons que $\forall\, u \in G : \mu = \mu_u$*
*Soit $u \in G$*
*Soit $x \in G$*
*on a :* $\mu(x) = \mu(uxu^{-1})$ *car $\mu \in NL(G)$*
$= \mu_u(x)$
*donc : $\forall\, u \in G : \mu = \mu_u$*
*2^eme étape :Montrons que $\mu \subseteq \cap_{u\in G}\nu_u$*
*Soit $u \in G$*
*Soit $x \in G$*
*on a :* $\mu_u(x) = \mu(uxu^{-1})$
$\leq \nu(uxu^{-1})$ *car $\mu \subseteq \nu$*
$= \nu_u(x)$
$\forall\, u \in G : \mu_u \subseteq \nu_u$
*par conséquence : $\cap_{u\in G}\mu_u \subseteq \cap_{u\in G}\nu_u$*
*donc : $\mu \subseteq \cap_{u\in G}\nu_u$* *car $\cap_{u\in G}\mu_u = \cap_{u\in G}\mu = \mu$*
*3^eme étape : Montrons que $\cap_{u\in G}\nu_u \subseteq \nu$*
*Soit $x \in G$*
*on a :* $(\cap_{u\in G}\nu_u)(x) = \bigwedge_{u\in G} \nu_u(x)$
$= \bigwedge_{u\in G} \nu(uxu^{-1})$
$\leq \bigwedge_{u\in G}(\nu(u) \wedge \nu(x) \wedge \nu(u^{-1}))$ *car $\nu \in L(G)$*
$= \bigwedge_{u\in G}(\nu_u \wedge \nu(x))$ *car $\nu \in L(G)$*
$\leq \nu(x) \wedge \nu(x)$
$= \nu(x)$
*alors : $\cap_{u\in G}\nu_u \subseteq \nu$*

*donc :* $\cap_{u \in G} \nu_u$ *est le plus grand L-sous-groupe normale de G contenu dans* $\nu$■

***Définition*** **5.0.2.** *Soient* $\mu \in L(G)$ *et* $x \in G$. *Les L-sous-ensembles* $\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu$ *et* $\mu \circ \mu(e)_{\{x\}}$ *sont appellent respectivement par la classe à gauche et la classe à droite de x et on les note respectivement par* $x\mu$ *et* $\mu x$

***Remarque*** **5.0.2.** *Si* $\mu \in NL(G)$ *, alors la classe à gauche et la classe à droite de x sont égaux.*

***Théorème*** **5.0.7.** *Soit* $\mu \in L(G)$
*(1)* $\forall\, x\,,\, y\ :\ x\mu \ =\ y\,\mu \Leftrightarrow x\mu_* \ =\ y\mu_*$
*(2)* $\forall\, x\,,\, y\ :\ \mu x \ =\ \mu y \Leftrightarrow \mu_* x \ =\ \mu_* y$

***Preuve*** **5.0.5.** *Soit* $\mu \in L(G)$
*(1)*
*Soient* $x\,, y \in G$
$\Rightarrow$ CN *On suppose que* $x\mu = y\mu$
*Montrons que* $x\mu_* = y\mu_*$
*on a :* $x\mu = y\mu \Leftrightarrow \mu(e)_{\{x\}} \circ \mu = \mu(e)_{\{y\}} \circ \mu$
$\Leftrightarrow \forall\, z \in G\ :\ (\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu)(z) = (\mu(e)_{\{y\}} \circ \mu)(z)$
$\Leftrightarrow \forall\, z\, G\ :\ \mu(x^{-1}z) = \mu(y^{-1}z)$ *car* $\mu(e) = \bigvee\{\mu(x)|x \in G\}$
*en particulier pour* $z = y$
*alors :* $\mu(x^{-1}y) = \mu(y^{-1}y) = \mu(e)$
*donc :* $x^{-1}y \in \mu_*$ $\mu_*$ *est un sous-groupe de G car* $\mu \in L(G)$
*d'où :* $x\mu_* = y\mu_*$
$\Leftarrow$ CS
*On suppose que* $x\mu_* = y\mu_*$
*Montrons que :* $x\mu = y\mu$
*on a :* $x\mu_* = y\mu_* \Leftrightarrow x^{-1}y \in \mu_*$ *et* $y^{-1}x \in \mu_*$ *car* $\mu_*$ *est un sous-groupe de G*
$\Leftrightarrow \mu(x^{-1}y) = \mu(y^{-1}x) = \mu(e)$
*ainsi :* $\mu(x^{-1}z) = \mu(x^{-1}yy^{-1}z)$
$\geq \mu(x^{-1}y) \wedge \mu(y^{-1}z)$
$= \mu(e) \wedge \mu(y^{-1}z)$
$= \mu(y^{-1}z)$
*d'autre part :*
$\mu(y^{-1}z) = \mu(y^{-1}xx^{-1}z)$
$\geq \mu(y^{-1}x) \wedge \mu(x^{-1}z)$
$= \mu(e) \wedge \mu(x^{-1}z)$
$= \mu(x^{-1}z)$
*donc :* $\forall\, x\,,\, y\ :\ x\mu = y\,\mu \Leftrightarrow x\mu_* = y\mu_*$
*(2)*
*Soient* $x\,, y \in G$
$\Rightarrow$ CN *On suppose que* $\mu x = \mu y$
*Montrons que* $\mu_* x = \mu_* y$
*on a :* $\mu x = \mu y \Leftrightarrow \mu \circ \mu(e)_{\{x\}} = \mu \circ \mu(e)_{\{y\}}$
$\Leftrightarrow \forall\, z \in G\ :\ (\mu \circ \mu(e)_{\{x\}})(z) = (\mu \circ \mu(e)_{\{y\}})(z)$
$\Leftrightarrow \forall\, z\, G\ :\ \mu(zx^{-1}) = \mu(zy^{-1})$ *car* $\mu(e) = \bigvee\{\mu(x)|x \in G\}$
*en particulier pour* $z = y$
*alors :* $\mu(yx^{-1}) = \mu(yy^{-1}) = \mu(e)$
*donc :* $yx^{-1} \in \mu_*$ $\mu_*$ *est un sous-groupe de G car* $\mu \in L(G)$
*d'où :* $\mu_* x = \mu_* y$
$\Leftarrow$ CS

*On suppose que* $\mu_* x = \mu_* y$
*Montrons que :* $\mu x = \mu y$
*on a :* $\mu_* x = \mu_* y \Leftrightarrow yx^{-1} \in \mu_*$ *et* $xy^{-1} \in \mu_*$ *car* $\mu_*$ *est un sous-groupe de* $G$
$\Leftrightarrow \mu(yx^{-1}) = \mu(xy^{-1}) = \mu(e)$

*ainsi :*

$$\begin{aligned}\mu(zx^{-1}) &= \mu(zy^{-1}yx^{-1}) \\ &\geq \mu(yx^{-1}) \wedge \mu(zy^{-1}) \\ &= \mu(e) \wedge \mu(zy^{-1}) \\ &= \mu(zy^{-1})\end{aligned}$$

*d'autre part :*

$$\begin{aligned}\mu(zy^{-1}) &= \mu(zx^{-1}xy^{-1}) \\ &\geq \mu(xy^{-1}) \wedge \mu(zx^{-1}) \\ &= \mu(e) \wedge \mu(zx^{-1}) \\ &= \mu(zx^{-1})\end{aligned}$$

*donc :* $\forall\, x, y : \mu x = \mu y \Leftrightarrow \mu_* x = \mu_* y$ ■

**Théorème 5.0.8.** *Soient* $\mu \in NL(G)$ *et* $x, y \in G$. *Si* $x\mu = y\mu$, *alors* $\mu(x) = \mu(y)$

**Preuve 5.0.6.** *On suppose* $x\mu = y\mu$
*d'après le théorème 5.0.7 on obtient que :* $x^{-1}y \in \mu_*$ *et* $y^{-1}x \in \mu_*$

*ainsi :*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \mu(y^{-1}xy) \\ &\geq \mu(y^{-1}x) \wedge \mu(y) \\ &= \mu(e) \wedge \mu(y) \\ &= \mu(y)\end{aligned}$$

*d'autre part par une preuve similaire on démontre que* $\mu(y) \geq \mu(x)$
*donc :* $\mu(x) = \mu(y)$ ■

**Théorème 5.0.9.** *Soit* $\mu \in NL(G)$. *On pose* $G/\mu = \{x\mu \mid x \in G\}$. *Alors :*
*(1)* $\forall x, y \in G : (x\mu) \circ (y\mu) = (xy)\mu$
*(2)* $(G/\mu, \circ)$ *est un groupe*
*(3)* $G/\mu \cong G/\mu_*$
*(4)Soit* $\mu^{(*)} \in L^{G/\mu}$ *définie par :*

$$\forall\, x \in G : \mu^{(*)}(x\mu) = \mu(x)$$

*Alors :* $\mu^{(*)} \in NL(G/\mu)$

**Preuve 5.0.7.** *Soit* $\mu \in NL(G)$. *On pose* $G/\mu = \{x\mu \mid x \in G\}$
*(1)*
*Soient* $x, y \in G$

$$\begin{aligned}(x\mu) \circ (y\mu) &= (\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu) \circ (\mu(e)_{\{y\}} \circ \mu) \\ &= \mu(e)_{\{x\}} \circ (\mu \circ \mu(e)_{\{y\}}) \circ \mu \\ &= \mu(e)_{\{x\}} \circ (\mu \circ \mu) \circ \mu(e)_{\{y\}} \\ &= \mu(e)_{\{x\}} \circ \mu \circ \mu(e)_{\{y\}} \\ &= \mu(e)_{\{x\}} \circ (\mu \circ \mu(e)_{\{y\}}) \\ &= \mu(e)_{\{x\}} \circ (\mu(e)_{\{y\}} \circ \mu) \\ &= (\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu(e)_{\{y\}}) \circ \mu \\ &= (xy)\mu\ ■\end{aligned}$$

*(2)*
*D'après (1)* $\circ$ *est loi de composition interne dans* $G/\mu$
*ainsi :* $\circ$ *est associative dans* $G/\mu$
*D'autre part :*
$\forall\, x \in G : \mu \circ (x\mu) = (e\mu) \circ (x\mu) = (ex)\mu = x\mu$
$\forall\, x \in G : (x^{-1}\mu) \circ (x\mu) = (x^{-1}x)\mu = e\mu = \mu$

*Alors :* $(G/\mu, \circ)$ *est un groupe*■
*(3)*
*Il est claire que l'application suivante :*

$$\begin{aligned} \psi : G/\mu &\longrightarrow G/\mu_* \\ x\mu &\longmapsto x\mu_* \end{aligned}$$

*est un isomorphisme*■
*(4)*
*d'une part soit* $x \in G$
$\mu^{(*)}((x\mu)^{-1}) = \mu^{(*)}(x^{-1}\mu) = \mu(x^{-1}) = \mu(x) = \mu^{(*)}(x\mu)$
*d'autre part soient* $x , y \in G$

$$\begin{aligned} \mu^{(*)}((x\mu) \circ (y\mu)) &= \mu^{(*)}(xy\mu) \\ &= \mu(xy) \\ &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \\ &= \mu^{(*)}(x\mu) \wedge \mu^{(*)}(y\mu) \end{aligned}$$

*alors :* $\mu \in L(G/\mu)$
*ainsi Soient* $x , y \in G$

$$\begin{aligned} \mu^{(*)}((x\mu) \circ (y\mu)) &= \mu^{(*)}((xy\mu) \\ &= \mu(xy) \\ &= \mu(yx) \\ &= \mu^{(*)}(yx\mu) \\ &= \mu^{(*)}((y\mu) \circ (x\mu)) \end{aligned}$$

*donc :* $\mu^{(*)} \in NL(G/\mu)$■
*Le groupe définit dans le* *<u>théorème 5.0.9</u>* *est appelé groupe quotient (ou groupe facteur ) de G relative au L-sous-groupe normale* $\mu$.

***<u>Théorème</u>*** **5.0.10.** *Soient* $\nu \in L(G)$ *et* $N$ *un sous-groupe normale de* $G$ .
*On définit* $\xi \in L^{G/N}$ *par :*

$$\forall\, x \in G \ : \ \xi([x]) = \bigvee\{\nu(z) \mid z \in [x]\}$$

*Alors* $\xi \in L(G/N)$

***<u>Preuve</u>*** **5.0.8.** *Soit* $x \in G$

$$\begin{aligned} \xi([x]^{-1}) &= \xi([x^{-1}]) \\ &= \bigvee\{\nu(z) \mid z \in [x^{-1}]\} \\ &= \bigvee\{\nu(w^{-1}) \mid w^{-1} \in [x^{-1}]\} \\ &= \bigvee\{\nu(w) \mid w \in [x^{-1}]\} \\ &= \xi([x]) \end{aligned}$$

*ainsi soient* $x , y \in G$

$$\begin{aligned} \xi([x][y]) &= \bigvee\{\nu(z) \mid z \in [xy]\} \\ &= \bigvee\{\nu(uv) \mid u \in [x] , v \in [y]\} \\ &\geq \bigvee\{\nu(u) \wedge \nu(v) \mid u \in [x] , v \in [y]\} \\ &= (\bigvee\{\nu(u) \mid u \in [x]\}) \wedge (\bigvee\{\nu(v) \mid \ \in [y]\}) \\ &= \xi([x]) \wedge \xi([y]) \end{aligned}$$

*donc :* $\xi \in L(G/N)$■
*Le L-sous-groupe* $\xi$ *définit dans le* *<u>théorème 5.0.10</u>* *est appelé L-sous-groupe quotient (ou L-sous-groupe facteur ) du L-sous-groupe* $\nu$ *de* $G$ *relative au sous-groupe normale* $N$ *de* $G$ *et pn la note par* $\nu/N$.

***Théorème*** **5.0.11.** *Soient* $\mu \in NL(G)$ *et H un groupe . Supposons que f est un morphisme surjective de G dans H . Alors* $f(\mu) \in NL(H)$.

***Preuve*** **5.0.9.** *D'après le théorème4.0.5* $f(\mu) \in L(H)$
*Soient* $x , y \in H$
*comme f est surjective* $\exists\, u \in G : f(u) = x$

$$\begin{aligned} f(\mu)(xyx^{-1}) &= \bigvee\{\mu(w) \mid w \in G , f(w) = xyx^{-1}\} \\ &= \bigvee\{\mu(u^{-1}wu) \mid , f(u^{-1}wu) = y\} \\ &= \bigvee\{\mu(w) \mid uwu^{-1} \in G , f(w) = y\} \\ &= \bigvee\{\mu(w) \mid w \in G , f(w) = y\} \\ &= f(\mu)(y) \end{aligned}$$

*donc :* $f(\mu) \in NL(H)\blacksquare$

***Théorème*** **5.0.12.** *Soient H un groupe et* $\nu \in L(H)$*.Si f est un morphisme de groupes de G dans H, alors* $f^{-1}(\nu) \in NL(G)$

***Preuve*** **5.0.10.** *D'après le théorème 4.0.6 on a* $f^{-1}(\nu) \in L(G)$
*d'utre part soient* $x , y \in G$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\nu)(xy) &= \nu(f(xy)) \\ &= \nu(f(x)f(y)) \\ &= \nu(f(y)f(x)) \\ &= \nu(f(yx)) \\ &= f^{-1}(\nu(yx)) \end{aligned}$$

*donc :* $f^{-1}(\nu) \in NL(G)\blacksquare$

# Chapitre 6

## *HOMOMORPHISMES ET ISOMORPHISMES*

***Définition* 6.0.1.** *Soient $\mu, \nu \in L(G)$ tel que $\mu \subseteq \nu$.On dit que $\mu$ est un L-sous-groupe normale du L-sous-groupe $\nu$ si :*

$$\forall\, x\,,\, y \in G \,:\, \mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y) \wedge \nu(x)$$

*et on la note par $\mu \lhd \nu$*

***Remarque* 6.0.1.** *(1)Soient $G_1$ et $G_2$ deux sous-groupes d'un groupe G, alors on a l'équivalence suivante :*

$$G_1 \lhd G_2 \Leftrightarrow 1_{_{G_1}} \lhd 1_{_{G_2}}$$

*(2) Soient $\mu \in NL(G)$, $\nu \in L(G)$ tel que $\mu \subseteq \nu$ alors $\mu \lhd \nu$*

*(3) Tout L-sous-groupe est normale par rapport à lui même*

*(4) Soit $\mu \in L^G$. $\mu$ est L-sous-groupe normale de G si et seulement si $\mu \lhd 1_G$*

***Preuve* 6.0.1.** *(1)Soient $G_1$ et $G_2$ deux sous-groupes d'un groupe G*
*$\Rightarrow$ CN*
*On suppose que $G_1 \lhd G_2$*
*Montrons que $1_{_{G_1}} \lhd 1_{_{G_2}}$*
*1^er étape : Montrons que $1_{_{G_1}}$ , $1_{_{G_2}} \in L(G)$*
*Pour $1_{_{G_1}}$*
*Soient $x$ , $y \in G$ On a :*

$$1_{G_1} : \left| \begin{array}{ccl} X & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & 1_{G_1}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ x \in G_1 \\ 0 & sinon \end{array} \right. \end{array} \right.$$

*1^er cas : $xy^{-1} \notin G_1$*
*sous-cas 1 : on a : $xy^{-1} \notin G_1 \Leftrightarrow [x]^{G_1} \neq [y]^{G_1}$*
$$\Rightarrow y \notin G_1$$
$$\Rightarrow 1_{G_1}(y) = 0$$
$$\Rightarrow 1_{G_1}(x) \wedge 1_{G_1}(y) = 0$$
*donc : $1_{G_1}(xy^{-1}) = 1_{G_1}(x) \wedge 1_{G_1}(y) = 0$*
*sous-cas 2 : $x \notin G_1$*
*alors on a directement : $1_{G_1}(xy^{-1}) = 1_{G_1}(x) \wedge 1_{G_1}(y) = 0$*
*2^eme cas : $xy^{-1} \in G_1$*
*Par définition de l'application indicatrice on a :*

$$1_{G_1}(xy^{-1}) = 1 \geq 1_{G_1}(x) \wedge 1_{G_1}(y)$$

*Alors* $1_{G_1} \in L(G)$
*De même pour* $1_{G_2}$
*2ème étape : Montrons que* $1_{G_1} \subseteq 1_{G_2}$
*Soit* $x \in G$
*On a :*
*1er cas :* $x \notin G_1$
*alors :* $1_{G_1}(x) = 0 \leq 1_{G_2}$
*2ème cas :* $x \in G_1$
$1_{G_1}(x) = 1_{G_2}(x) = 1$
*des deux cas on constate que* $1_{G_1} \subseteq 1_{G_2}$
*3ème étape : Montrons que* $\forall\, x\,,\ y \in G : \mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y) \wedge \nu(x)$
*Soient* $x\,,\ y \in G$
*1er cas :*$xyx^{-1} \notin G_1$
*Sou-cas 1 :* $x \in G_1$
*on a :* $xyx^{-1} \in G_1 \Leftrightarrow xG_1 \neq xG_2$ *car* $G_1 \lhd G_2$
$\Rightarrow y \notin G_1$
$\Rightarrow 1_{G_1}(y) = 0$
*donc :* $1_{G_1}(xyx^{-1}) = 1_{G_1}(y) \wedge 1_{G_2}(x) = 0$
*Sou-cas 1 :* $x \notin G_1$
*alors le x a deux disponibilités :*
$\rightarrow x \in G_2$
*alors* $y \notin G_1$
*sinon comme* $G_1 \lhd G_2$
*On obtient que* $xyx^{-1} \in G_1$ *ce qu'est absurde*
*donc :* $1_{G_1}(xyx^{-1}) = 1_{G_1}(y) \wedge 1_{G_2}(x) = 0$
$\rightarrow x \notin G_2$
*alors directement* $1_{G_1}(xyx^{-1}) = 1_{G_1}(y) \wedge 1_{G_2}(x) = 0$
*2ème cas :*$xyx^{-1}$ *in* $G_1$
*alors par définition de la fonction indicatrice n obtient que :*

$$1_{G_1}(xyx^{-1}) = 1 \geq 1_{G_2}(x) \wedge 1_{G_1}(y)$$

*alors :* $1_{G_1} \lhd 1_{G_2}$
$\Leftarrow$ *CS*
*On suppose que :* $1_{G_1} \lhd 1_{G_2}$
*Montrons que :* $G_1 \lhd G_2$
$x \in G_1 \Leftrightarrow 1_{G_1}(x) = 1 \Rightarrow 1_{G_1}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in G_2$
*alors :* $G_1 \subseteq G_2$
*d'autre part soit* $(x, h) \in G_2 \times G_1$
$1_{G_1}(xhx^{-1}) \geq 1_{G_1}(h) \wedge 1_{G_2}(x) = 1$
*donc :* $1_{G_1}(xhx^{-1}) = 1$
*c-à-d :* $xhx^{-1} \in G_1$
*donc :* $G_1 \lhd G_2$ ■
*(2),(3) et (4) sont immédiates*

***Théorème* 6.0.1.** *Soient* $\mu\,,\ \nu \in L(G)$ *tel que* $\mu \subseteq \nu$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(1)* $\mu$ *est un L-sous-groupe normale* $\nu$
*(2)* $\forall\, x\,,\ y : \mu(yx) \geq \mu(xy) \wedge \nu(y)$
*(3)* $\forall\, x \in G : (\mu \circ \mu(e)_{\{x\}}) \cap \nu \subseteq \mu(e)_{\{x\}} \circ \mu$

***Théorème*** **6.0.2.** *Soit $\mu$ , $\nu \in L(G)$ tel que $\mu \subseteq \nu$. Alors on a l'équivalence suivantes :*

$$\mu \lhd \nu$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, a \in \mu(G) \cup \{b \in L | b \leq \mu(e)\} \;:\; \mu_a \lhd \nu_a$$

***Théorème*** **6.0.3.** *Soient $\mu$ ,$\nu \in L(G)$ tel que $\mu \lhd \nu$. Alors :*
*(1) $\mu_* \lhd \nu_*$*
*(2) Si L est régulier alors , $\mu^* \lhd \nu^*$*

***Théorème*** **6.0.4.** $\forall\, (\mu, \nu) \in NL(G) \times L(G) \;:\; \mu \cap \nu \lhd \nu$

***Preuve*** **6.0.2.** *Il est claire que $\mu \cap \nu \in L(G)$ et $\mu \cap \nu \subseteq \nu$*
*d'autre part soient $x$ , $y \in G$*

$$\begin{aligned}(\mu \cap \nu)(xyx^{-1}) &= \mu(xyx^{-1}) \wedge \nu(xyx^{-1}) \\ &= \mu(y) \wedge \nu(xyx^{-1}) \\ &\geq \mu(y) \wedge \nu(x) \wedge \nu(y) \wedge \nu(x^{-1}) \\ &= (\mu \cap \nu)(y) \wedge \nu(x)\end{aligned}$$

*alors : $\mu \cap \nu \lhd \nu$*$\blacksquare$

***Théorème*** **6.0.5.** *Soient $\mu$ , $\nu$ , $\xi \in L(G)$ tel que $\mu \lhd \xi$ et $\nu \lhd \xi$. Alors $\mu \cap \nu \lhd \xi$*

***Preuve*** **6.0.3.** *Il est claire que $\mu \cap \nu$ $L(G)$ et $\mu \cap \nu \subseteq \xi$*
*d'autre part soient $x$ , $y \in G$*

$$\begin{aligned}(\mu \cap \nu)(xyx^{-1}) &= \mu(xyx^{-1}) \wedge \nu(xyx^{-1}) \\ &\geq (\mu(y) \wedge \xi(x)) \wedge (\nu(y) \wedge \xi(x)) \\ &\geq (\mu \cap \nu)(y) \wedge \xi(x)\end{aligned}$$

*alors : $\mu \cap \nu \lhd \xi$*$\blacksquare$

***Théorème*** **6.0.6.** *Soit $\mu$ , $\nu \in L(G)$ tel que $\mu \lhd \nu$*
*Soit $H$ un groupe et $f$ un morphisme de groupes de $G$ dans $H$ . Alors :*
*$f(\mu) \lhd f(\nu)$*

***Preuve*** **6.0.4.** *Il est claire que $f(\mu)$ , $f(\nu) \in L(G)$ et que $f(\mu) \subseteq f(\nu)$*
*d'autre part Soient $x$ , $y \in H$*

$$\begin{aligned}(f(\mu)(xyx^{-1})) &= \bigvee\{\mu(z) | z \in G, f(z) = xyx^{-1}\} \\ &\geq \bigvee\{\mu(uvu^{-1}) | u, v \in G, f(u) = x, f(v) = y\} \\ &\geq \bigvee\{\mu(v) \wedge \nu(u) | u, v \in G, f(u) = x, f(v) = y\} \\ &= (\bigvee\{\mu(v) | u \in G, f(v) = y\}) \wedge (\bigvee\{\nu(u) | u \in G, f(u) = x\}) \\ &= (f(\mu))(y) \wedge (f(\nu))(x)\end{aligned}$$

*donc : $f(\mu) \lhd f(\nu)$*$\blacksquare$

***Théorème*** **6.0.7.** *Soit $H$ un groupe*
*Soient $\mu, \nu \in L(H)$ tel que $\mu \lhd \nu$*
*Soit $f$ un morphisme de groupes de $G$ dans $H$*
*Alors $f^{-1}(\mu) \lhd f^{-1}(\nu)$*

***Preuve*** **6.0.5.** *Il est claire que $f^{-1}(\mu)$ , $f^{-1}(\nu) \in L(G)$ et $f^{-1}(\mu) \subseteq f^{-1}(\nu)$*
*d'autre part soient $x$ , $y \in G$*

$$\begin{aligned}f_{-1}(\mu)(xyx^{-1}) &= \mu(f(xyx^{-1})) \\ &= \mu(f(x)f(y)f(x^{-1})) \\ &\geq \mu(f(y)) \wedge \nu(f(x)) \\ &= f^{-1}(\mu)(y) \wedge f^{-1}(\nu)(x)\end{aligned}$$

*donc : $f^{-1}(\mu) \lhd f^{-1}(\nu)$*$\blacksquare$

***Définition*** **6.0.2.** *Soient $G$ , $H$ deux groupes et $(\mu, \nu) \in L(G) \times L(H)$*
*(1) Un morphisme de groupes $f$ de $G$ dans $H$ est appelé un morphisme faible de $\mu$ dans $\nu$ si $f(\mu) \subseteq \nu$ .*
*Si $f$ est un morphisme faible de $\mu$ dans $\nu$ , alors on dit que $\mu$ est un homomorphe faible de $\nu$ et on écrit $\mu \overset{f}{\sim} \nu$ ou bien $\mu \sim \nu$ .*
*(2) Un isomorphisme de groupes $f$ de $G$ dans $H$ est appelé un isomorphisme faible de $\mu$ dans $\nu$ si $f(\mu) \subseteq \nu$ .*
*Si $f$ est un isomorphisme faible de $\mu$ dans $\nu$ , alors on dit que $\mu$ est un isomorphe faible de $\nu$ et on écrit $\mu \overset{f}{\backsimeq} \nu$ ou bien $\mu \backsimeq \nu$ .*
*(3) Un morphisme de groupes $f$ de $G$ dans $H$ est appelé un morphisme de $\mu$ dans $\nu$ si $f(\mu) = \nu$ .*
*Si $f$ est un morphisme de $\mu$ dans $\nu$ , alors on dit que $\mu$ est un homomorphe de $\nu$ et on écrit $\mu \overset{f}{\approx} \nu$ ou bien $\mu \approx \nu$ .*
*(4) Un isomorphisme de groupes $f$ de $G$ dans $H$ est appelé un isomorphisme de $\mu$ dans $\nu$ si $f(\mu) = \nu$ .*
*Si $f$ est un isomorphisme de $\mu$ dans $\nu$ , alors on dit que $\mu$ est un isomorphe de $\nu$ et on écrit $\mu \overset{f}{\cong} \nu$ ou bien $\mu \cong \nu$ .*
*Soient $\mu$ , $\nu \in L(G)$. O n suppose que $\mu \lhd \nu$ et que $L$ est régulier. Alors $\mu^* \lhd \nu^*$ ainsi on a $\nu|_{\nu^*}$ est un L-sous-groupe de $\nu^*$ . D'autre part le facteur L-sous-groupe de $\nu|_{\nu^*}$ relativement à $\mu^*$ existe . Ce facteur on la note par $\nu/\mu$ et on l'appelle par L-sous-groupe quotient (ou le facteur L-sous-groupe) de $\nu$ relative à $\mu$*

***Théorème*** **6.0.8.** *Soient $\mu\ \nu \in L(G)$ tel que $\mu \lhd \nu$.*
*On suppose que $L$ est régulier ; alors, $\nu|_{\nu^*} \approx \nu/\mu$*

***Preuve*** **6.0.6.** *Soit $f$ le morphisme naturel de $\nu^*$ dans $\nu^*/\mu^*$*
*Soit $x \in \nu^*$ tel que : $[x] = x\mu^*$*

$$\begin{aligned} f(\nu|\nu^*)([x]) &= \bigvee\{\nu|_{\nu^*}(z) \mid z \in \nu^*, f(z) = [x]\} \\ &= \bigvee\{\nu(y) \mid y \in [x]\} \\ &= (\nu/\mu)([x]) \end{aligned}$$

*alors : $\nu|_{\nu^*} \overset{f}{\approx} \nu/\mu$* ■

***Théorème*** **6.0.9.** *Soient $\nu \in L(G)$ , $H$ un groupe et $\xi \in L(H)$*
*On suppose que $\nu \overset{f}{\approx} \xi$ et $L$ est régulier.Alors :*
*il existe un L-sous-groupe normale $\mu$ de $\nu$ tel que $\nu/\mu \cong \xi|_{\xi^*}$*

***Preuve*** **6.0.7.** *Depuis $\nu \approx \xi$ , il existe un morphisme surjective de $G$ dans $H$ tel que tel que $f(\nu) = \xi$ .*
*On définit l'application suivante ;*

$$\mu : \left| \begin{array}{ccl} G & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & \mu(x) = \begin{cases} \nu(x) & si\ x \in \ker f \\ 0 & sinon \end{cases} \end{array} \right.$$

*Il est claire que $\mu \in L(G)$ et $\mu \subseteq \nu$*
*<u>1^er^ cas :</u> $x \in \ker f$*
*alors : $\forall\ y \in G : yxy^{-1}$*
*ainsi : $\forall\ y \in G : \mu(yxy^{-1}) = \nu(yxy^{-1}) \geq \nu(x) \wedge \nu(y) = \mu(x) \wedge \nu(y)$*
*<u>2^eme^ cas :</u> $x\ G/\ker f$*
*alors : $\mu(x) = 0$*
*Ainsi : $\forall\ y \in G : \mu(yxy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \nu(y)$*
*Par conséquence $\mu \lhd \nu$*
*D'autre part depuis $\nu \overset{f}{\approx} \xi$ alors $f(\nu^*) = \xi^*$*

*ainsi on pose :* $g \;=\; f|_{\nu^*}$
*alors :* $g$ *est un homomorphisme de* $\nu^*$ *dans* $\xi^*$ *et que* $\ker f \;=\; \mu^*$
*ainsi il existe un isomorphisme de* $\nu^*/\mu^*$ *tel que :*

$$\forall\, x \;\in\; \nu^* \;:\; h([x]) \;=\; g(x) \;=\; f(x)$$

*pour un tel* $h$ *on obtient que :*

$$\begin{aligned} h(\nu/\mu)(z) \;&=\; \bigvee\{(\nu/\mu)([x]) \mid x \;\in\; \nu^*\;,\; h([x]) \;=\; z\} \\ &=\; \bigvee\{\bigvee\{\nu(y)|y \in [x]\}|x \in \nu^*, g(x) = z\} \\ &=\; \bigvee\{\nu(y)|y \in \nu^*, g(y) = z\} \\ &=\; \bigvee\{\nu(y)|y \in G, f(y) = z\} \\ &=\; \xi(z) \end{aligned}$$

$\forall z \in \xi^*$.
*alors :* $\nu/\mu \;\overset{h}{\cong}\; \xi|_{\xi^*}$■

***Théorème*** **6.0.10.** *Soient* $\mu \;\in\; NL(G)$ *et* $\nu \;\in\; L(G)$ *tel que* $\mu(e) \;=\; \nu(e)$ *et que L est régulier; alors :*

$$\nu/(\mu \cap \nu) \;\simeq\; (\mu \circ \nu)/\mu$$

***Preuve*** **6.0.8.** *Du* *théorème 5.0.3* *on obtient que* $\mu \lhd G$ .
*D'après le deuxième théorème d'isomorphisme de groupes on aura :*

$$\nu^*/(\mu^* \cap \nu^*) \;\cong\; (\mu^*\nu^*)/\mu^*$$

*Depuis L est régulier , il est facile de vérifie que :*

$$\begin{aligned} (\mu \cap \nu)^* \;&=\; \mu^* \cap \nu^* \\ (\mu \circ \nu)^* \;&=\; \mu^*\nu^* \end{aligned}$$

*par conséquence on a :*

$$\nu/(\mu \cap \nu)^* \;\overset{f}{\cong}\; (\mu \circ \nu)^*/\mu^*$$

*où* $f$ *est donnée par :*

$$\forall\, x \;\in\; \nu^* f(x(\mu \cap \nu)^*) \;=\; x\mu^*$$

*ainsi soit* $y \;\in\; \nu^*$
*on a :*
$$\begin{aligned} f(\nu/(\mu \cap \nu))(y\mu^*) \;&=\; (\nu/(\mu \cap \nu))(y(\mu \cap \nu)^*) \\ &=\; \bigvee\{\nu(z)|z \in y(\mu \cap \nu)^*\} \\ &\leq\; \bigvee\{(\mu \circ \nu)(z)|z \in y(\mu \cap \nu)^*\} \\ &\leq\; \bigvee\{(\mu \circ \nu)(z)|z \in y\mu^*\} \\ &=\; ((\mu \circ \nu)/\mu)(y\mu^*) \end{aligned}$$
*par conséquent* $f(\nu/(\mu \cap \nu)) \;\subseteq\; (\mu \circ \nu)/\mu$
*alors :* $\nu/(\mu \cap \nu) \;\overset{f}{\simeq}\; (\mu \circ \nu)/\mu$■

***Théorème*** **6.0.11.** *Soient* $\mu, \nu, \xi \;\in\; L(G)$ *tel que* $\mu \lhd \nu$ *et* $\nu, \mu \lhd \xi$ .
*On suppose que L est régulier. Alors :*

$$(\xi/\mu)/(\nu/\mu) \;\cong\; \xi/\nu$$

***Preuve*** **6.0.9.** *D'après le* *théorème 6.0.2* *, on a* $\mu^* \;\lhd\; \nu^*$ *,ainsi* $\mu^*$ , $\nu^* \;\lhd\; \xi^*$*. Alors d'après le troisième théorème d'isomorphismes de groupes on obtient que :*

$$(\xi^*/\mu^*)/(\nu^*/\mu^*) \overset{f}{\cong} \xi^*/\nu^*$$

*tel que* $f$ *est donné par :*

$$\forall\, x \in \xi^* \ :\ f(x\mu^*.(\nu^*/\mu^*)) = x\nu^*$$

*ainsi soit* $x \in \xi^*$

$$\begin{aligned} f((\xi/\mu)/(\nu/\mu))(x\nu^*) &= ((\xi/\mu)/(\nu/\mu))(x\mu^*.(\nu^*/\mu^*)) \\ &= \bigvee\{(\xi/\nu)(y\mu^*) | y \in \xi^*, y\mu^* \in x\mu^*.(\nu^*/\mu^*)\} \\ &= \bigvee\{\bigvee\{\xi(z) | z \in y\mu^*\} | y \in \xi^*, y\mu^* \in x\mu^*.(\nu^*/\mu^*)\} \\ &= \bigvee\{\xi(z) | z \in \xi^*, z\mu^* \in x\mu^*.(\nu^*/\mu^*)\} \\ &= \bigvee\{\xi(z) | z\mu^* \in x\mu^*.(\nu^*/\mu^*)\} \\ &= \bigvee\{\xi(z) | z \in \xi^*, f(z) \in x\nu^*\} \\ &= (\xi/\nu)(x\nu^*) \end{aligned}$$

*donc :*

$$(\xi/\mu)/(\nu/\mu) \overset{f}{\cong} \xi/\nu\blacksquare$$

***Définition*** **6.0.3.** *On suppose que L est régulier. Soit* $\mu \in L(G)$*. Alors :*
*(1) On dit que* $\mu$ *est abélien si* $\mu^*$ *est abélien.*
*(2) On dit que* $\mu$ *est solvable si il existe un suite de sous-groupes flou* $\mu_i$ *de* $G$ *où* $i = 1, ....., k$ *,* $\mu_i \lhd \mu_{i-1}$ *,* $\mu_{i-1}/\mu_i$ *est abélien ,* $\mu_0 = \mu$ *et* $\mu_k = e_{\mu(e)}$*.*

***Théorème*** **6.0.12.** *On suppose que L est régulier. Soient* $\mu$ *,* $\nu \in L(G)$
*(1) Si* $\mu$ *est solvable , alors* $\mu^*$ *est solvable.*
*(2) Si* $\mu \subseteq \nu$ *et* $\nu$ *est solvable , alors* $\mu$ *est solvable.*

***Preuve*** **6.0.10.** *(1)Évident*$\blacksquare$
*(2)*
*Soit* $(\nu_i)_{i\in\{1,....,k\}} \in L(G)^k$ *tel que :*
$\forall\, i \in \{1, ...., k\}\ :\ \nu_i \lhd \nu_{i-1}, \nu_{i-1}/\nu_i$ *est abélien ,* $\nu_0 = \nu$ *et* $\nu_k = e_{\nu(e)}$
*alors :* $\forall\, i \in \{1, ....., k\}$ *:* $\mu \cap \nu_i \lhd \mu \cap \nu_{i-1}$
*ainsi :* $\forall\, i \in \{1, ....., k\}$ *:* $(\mu \cap \nu_{i-1})/(\mu \cap \nu_i)$
*donc :* $\mu$ *est solvable*$\blacksquare$

# Bibliographie


[1] Abadi, H. H and Zahedi, M. M., A density theorem on fuzzy prime spectrum of a ring, preprint.

[2] Abadi, H. H and Zahedi, M. M., Some results on fuzzy prime spectrum of a ring, FSS 77 (1996) 235 - 240.

[3] Abdukhalikov, K. S., The dual of a fuzzy subspace, FSS 82 (1996) 375 -381.

[4] Abdukhalikov, K. S., Tulenbaev, M. S., and Umirbaev, U. U., On fuzzy bases of vector spaces, FSS 63 (1994) 201 - 206.

[5] Abou-Zaid, Salah, On fuzzy ideals and fuzzy quotient rings of a ring,FSS 59 (1993) 205 - 210.

[6] Ahsan, J., Khan, M. F., Shabir, M. and Zaman, N., Rings characterized by their fuzzy submodules, Inform. Sci. 74 (1993) 247-264.

[7] Ajmal, N., Homomorphism of fuzzy groups, correspondence theorem and fuzzy quotient groups, FSS 61 (1994) 329 - 339.

[8] Ajmal, N. and Thomas, K. V., The lattice of fuzzy subgroups and fuzzy normal subgroups, Inform. Sci. 76 (1994) 1-11.

[9] Ajmal, N., The lattice of fuzzy normal subgroups is modular, Inform Sci. 83 (1995) 199 - 209.

[10] Ajmal, N., Fuzzy subgroups with sup property, Inform Sci. 93 (1996) 247 - 264.

[11] Ajmal, N. and Thomas, K. V., The lattice of fuzzy ideals of a ring, FSS 74 (1995) 371-379.

[12] Ajmal, N. and Thomas, K. V., A complete study of the lattices of fuzzy congruences and fuzzy normal subgroups, Inform. Sci., 82 (1995) 198 - 218.

[13] Akgul, M., Some properties of fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl, 133 (1988) 93-100.

[14] Alkhamees, Y., Fuzzy cyclic subgroups and fuzzy cyclic p-groups, J. Fuzzy Math. 3 (1995) 911 - 919.

[15] Alkhamees, Y. and Mordeson, J. N., Fuzzy principal ideals and fuzzy simple field extensions, FSS, 96 (1998) 247-253.

[16] Alkhamees, Y. and Mordeson, J. N., Fuzzy localized subrings, Inform. Sci, 99 (1997) 183-193.

[17] Alkhamees, Y. and Mordeson, J. N., Local examination of fuzzy intersection equations, FSS 98 (1998) 249-254.

[18] Alkhamees Y. and Mordeson, J. N., Reduced fields, primitive fields and fuzzy Galois theory, preprint.

[19] Asaad, M., Groups and fuzzy subgroups, FSS 39 (1991) 323-328.

[20] Asaad M. and Abou-Zaid S., Fuzzy subgroups of nilpotent groups, FSS 60 (1993) 321 - 323.

[21] Assad, M. and Abou-Zaid, S., A contribution to the theory of fuzzy subgroups, FSS (1996) 355 - 369.

[22] Balbes, R. and Dwinger, P., Distributive Lattices, University of Missouri Press, 1974.

[23] Barnes, W. E., Introduction to Abstract Algebra, D. C. Heath, Boston, 1963.

[24] Bhakat, S. K. and Das, P., Fuzzy subrings and ideals redefined, FSS 81 (1996) 383-393.

[25] Bhambri S. K., Kumar, R. and Kumar, P., On fuzzy primary submodules, Bull. Cal. Math. Soc. 86 (1994) 445-452.

[26] Bhambri S. K., Kumar, R. and Kumar, P., Fuzzy prime submodules and radical of a fuzzy submodule, Bull. Cal. Math. Soc. 87 (1995) 163-168.

[27] Birkhoff, G., Lattice Theory, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1967).

[28] Biswas, R., Fuzzy fields and fuzzy linear spaces redefined, FSS 33 (1989) 257 - 259.

[29] Borzoee, R. A. and Zahedi, M. M., Fuzzy algebraic extension generated by a fuzzy subset and maximal fuzzy algebraic extension, J. Fuzzy Math. I (1993) 649 - 657.

[30] Bourbaki, N. (transl. by P. M. Cohn and J. Howie), Elements of Mathematics, Algebra II, Chapters 4 - 7 , Springer - Verlag, Berlin, New York (1981).

[31] Bourbaki, N., Elements of Mathematics, Commutative Algebra, Springer- Verlag, New York, 1989, Chaps. 1-7.

[32] Chen De-Gang and Gu Wen-Xiang, Product structure of fuzzy factor groups, FSS 60 (1993) 2229 - 232.

[33] Cox, D., Little, J., and O'Shea, D., Ideals, Varieties, and Algorithms, An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Springer-Verlag, 1992.

[34] Das, P., Fuzzy vector spaces under triangular norms, FSS 25 (1988) 73 -85.

[35] Das, P. S., Fuzzy groups and level subgroups, J. Math. Anal. Appl. 84 (1981) 264 - 269.

[36] Deveney, J. K., An intermediate theory for a purely inseparable Galois theory, Trans. Amer. Math. Soc. 198 (1974) 287 - 295.

[37] Deveney, J. K. and Mordeson, J. N., Splitting and modularly perfect fields, Pacific J. Math. 83 (1979) 45-54.

[38] Deveney, J. K. and Mordeson, J. N., Distinguished subfields of intermediate fields, Canad. J. Math. 33 (1981) 1085-1096.

[39] Deveney, J. K. and Mordeson, J. N., Uniqueness of subfields, Canad. Bull. Math. 29 (1986) 191-196.

[40] Deveney, J. K. and Mordeson, J. N., Inseparable extensions and primary abelian groups, Arch. Math. 33 (1979) 538 - 545.

## La liste des symboles

| | |
|---|---|
| $\vee$ | Élément supérieure |
| $\wedge$ | Élément inférieure |
| $\mathbb{N}$ | L'ensemble des entiers naturels |
| $\mathbb{Z}$ | L'ensemble des entiers relatifs |
| $\mathbb{Q}$ | L'ensemble des nombres rationnelles |
| $\mathbb{R}$ | L'ensemble des nombres réelles |
| $\emptyset$ | Ensemble vide |
| $I$ | Ensemble non vide d'indices |
| $\in$ | Appartient |
| $\subseteq$ | Inclusion |
| $\subset$ | Inclusion propre |
| $\cap$ | Intersection |
| $\cup$ | Union |
| $\mu \sim \nu$ | $\mu$ est faiblement homomorphe à $\nu$ |
| $\mu \simeq \nu$ | $\mu$ est faiblement isomorphe à $\nu$ |
| $\mu \approx \nu$ | $\mu$ est homomorphe à $\nu$ |
| $\mu \cong \nu$ | $\mu$ est faiblement isomorphe à $\nu$ |