

Liste Des Notations

E : Module d'élasticité longitudinal ($E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa) ;

G : Module de cisaillement ($G = 81000$ MPa) ;

ν : Coefficient de Poisson ($\nu = 0.2$) ;

I_y : Moment d'inertie selon l'axe y ;

I_z : Moment d'inertie selon l'axe z ;

I_{max} : Inertie maximale dans un profilé ;

I_{min} : Inertie minimale dans un profilé ;

I_{eq} : Inertie équivalent du profilé ;

i_y, i_z : Rayon de giration suivant respectivement les axes yy et zz ;

I_t : Moment d'inertie de torsion ;

I_w : Moment d'inertie de gauchissement ;

i_0 : Rayon d'inertie polaire ;

t : Epaisseur ;

t_w : Epaisseur de l'âme ;

t_f : Epaisseur de la semelle ;

H : Hauteur totale du profilé ;

h : Hauteur de la portion droite de l'âme ;

b : Largeur du profilé ;

A : Section du profilé ;

A_{eff} : Aire efficace de la section ;

PP : Poids propre ;

L : Longueur en générale ;

L_f : Longueur de flambement ;

N, N_{sd} : Effort normal ;

N_{pl} : Effort normale plastique ;

N_{cr}, P_{cr} : Charge critique de flambement ;

$N_{b,rd}$: Valeur de calcul d'un élément comprimé au flambement ;

P_u : Charge ultime ;

σ : Contrainte ;

σ_{cr} : Contrainte critique ;

M_{sd} : Moment fléchissant ;

M_{PL} : Moment plastique ;

$M_{cr,0}$: Moment critique de déversement ;

$M_{b,rd}$: Valeur de calcul de la résistance au déversement ;

γ_M : Coefficient de sécurité ;

f_y : Limite d'élasticité de l'acier ;

λ : Elancement ;

$\bar{\lambda}$: Elancement réduit ;

λ_1 : Elancement limite ;

$\overline{\lambda_{LT}}$: Elancement de déversement ;

ε : Coefficient de réduction élastique de l'acier ;

χ : Coefficient de réduction du flambement ;

y : La flèche ;

θ : La rotation ;

ΔU : Energie potentielle ;

ΔT : Le travail des forces extérieures.

Liste des figures

<i>Figure 1 : Distribution des moments de flexion et structure associée</i>	<i>1</i>
<i>Figure I.1 : Les états d'équilibre d'un système mécanique.....</i>	<i>3</i>
<i>Figure I.2 : Flexion sous un effort de compression.....</i>	<i>4</i>
<i>Figure I.3 : Modes de flambement d'une barre simplement comprimée.....</i>	<i>5</i>
<i>Figure I.4 : Les causes du Flambement par divergence.....</i>	<i>7</i>
<i>Figure I.5 : Flambement avec point limite.....</i>	<i>8</i>
<i>Figure I.6 : Le flambement élasto-plastique.....</i>	<i>8</i>
<i>Figure I.7 : Phénomène du déversement.....</i>	<i>10</i>
<i>Figure I.8 : Etude expérimentale du déversement.....</i>	<i>11</i>
<i>Figure I.9 : Schéma statique pour l'étude du déversement.....</i>	<i>12</i>
<i>Figure I.10 : Configuration déformée et décomposition du moment de flexion M_y.....</i>	<i>13</i>
<i>Figure I.11 : Influence de la distribution des moments de flexion sur la charge critique de déversement</i>	<i>14</i>
<i>Figure I.12 : Les effets du point d'application des charges transversales sur la charge critique de déversement</i>	<i>15</i>
<i>Figure I.13 : Instabilité par voilement.....</i>	<i>16</i>
<i>Figure I.14 : Voilement locale par compression.....</i>	<i>17</i>
<i>Figure I.15 : Voilement par cisaillement des plaques.....</i>	<i>17</i>
<i>Figure I.16 : Redistribution progressive des contraintes de compression</i>	<i>18</i>
<i>Figure I.17 : Comportement postcritique d'une paroi idéale comprimée.....</i>	<i>19</i>
<i>Figure II.1 : Hypothèse d'Euler sur le flambement.....</i>	<i>20</i>
<i>Figure II.2 : Les points d'inflexion d'une barre comprimée.....</i>	<i>22</i>
<i>Figure II.3 : Flambement d'une barre assemblée par des encastrements élastique.....</i>	<i>23</i>
<i>Figure II.4 : Schéma d'une poutre en console chargée à son extrémité.....</i>	<i>26</i>
<i>Figure II.5 : Schéma de flambement d'une barre bi-articulée.....</i>	<i>28</i>
<i>Figure II.6 : Formules des charges équivalentes données par Newmark.....</i>	<i>31</i>
<i>Figure II.7 : Courbe de flambement d'Euler et modes de ruine.....</i>	<i>34</i>
<i>Figure II.8 : Courbes de flambement et résultats d'essais de poteaux réels.....</i>	<i>35</i>

Figure II.9 : Courbes Européennes de flambement.....	36
Figure II.10 : Barre soumise à une charge excentrée.....	36
Figure II.11 : Trajectoire d'équilibre d'un poteau chargé excentriquement.....	37
Figure II.12 : Amplification de la déformée initiale.....	38
Figure II.13 : La déformée élasto-plastique.....	39
Figure II.14 : Schéma des contraintes résiduelles.....	40
Figure II.15 : Incidence des contraintes résiduelles sur la capacité portante.....	40
Figure II.16 : Combinaison des contraintes dans la section la plus sollicitée	42
Figure III.1 : Poteaux à section variable linéairement.....	44
Figure III.2 : Résultats de l'étude de Carter et Gere.....	47
Figures III.3 : Le coefficient r pour une structure à nœuds fixes.....	49
Figures III.4 : Le coefficient r pour une structure à nœuds mobiles.....	50
Figures III.5 : Coefficient r pour un poteau à jarrets.....	50
Figure III.6 : Dispersion des résultats autour de la courbe α de flambement.....	51
Figure III.7 : Facteur de longueur équivalente d'un poteau à inertie variable d'une structure à nœuds fixes (A) et une structure à nœud mobile (B) avec $\gamma = 3$	53
Figure III.8 : Forme du poteau étudié par JASPART	55
Figure III.9 : Type de cadre étudié par Fraser.....	58
Figure III.10 : Interaction des efforts dans les barres à inertie variable.....	59
Figure IV.1 : Schéma de principe d'étude d'un poteau à géométrie variable linéairement.....	62
Figure IV.2 : Schéma de principe d'étude d'un poteau à géométrie variable linéairement.....	63
Figure IV.3 : Schématisation des cas de conditions aux limites étudiées.....	64
Figure IV.4 : Division de la déformée en $(n+1)$ segment.....	64
Figure IV.5 : Schématisation d'une section à inertie variable.....	66
Figure IV.6 : Coefficient m_1 pour un Poteau à hauteur d'âme variable linéairement dans le plan de forte inertie.....	67
Figure IV.7 : Coefficient m_2 pour un Poteau à hauteur d'âme variable linéairement dans le plan de forte inertie.....	68
Figure IV.8 : Coefficient m_1 pour un Poteau à largeur des semelles variables linéairement dans le plan de forte inertie.....	69

Figure IV.9 : Coefficient m_2 pour un Poteau à largeur des semelles variables linéairement dans le plan de forte inertie	69
Figure IV.10 : Coefficient m_1 pour un Poteau à largeur des semelles variables linéairement dans le plan de faible inertie.....	70
Figure IV.11 : Schéma de l'étude d'un poteau.....	70
Figure IV.12 : Coefficient m_1 calculé par la méthode des éléments finis pour un Poteau à hauteur d'âme variable linéairement dans le plan de forte inertie.....	74
Figure IV.13 : Division du poteau aux parties à inertie constante.....	76
Figure IV.14 : Allure de déformée d'un poteau à hauteur d'âme variable, bi-articulés avec différentes valeurs de h_{min} / h_{max}	78
Figure IV.15 : Allure de déformée d'un poteau à hauteur d'âme variable, articulé-encasté avec différentes valeurs de h_{min} / h_{max}	78
Figure IV.16 : Allure de déformée d'un poteau à hauteur d'âme variable bi-encasté avec différentes valeurs de h_{min} / h_{max}	79
Figure IV.17 : Allure de déformée d'un poteau à hauteur d'âme variable, bi-encasté avec différentes valeurs de h_{min} / h_{max}	79
Figure IV.18 : Cas fréquemment rencontrés des équations de l'inertie.....	81
Figure IV.19 : Les conditions d'appuis étudiées.....	81
Figure IV.20 : Ajustement de coefficient γ_1 d'un poteau double articulé à inertie variable suivant la loi $I(x) = I_0(1 + \alpha x)$	83
Figure IV.21 : Ajustement de coefficient μ d'un poteau bi-articulé à inertie variable suivant la loi $I(x) = I_0(1 + \alpha x)$	83
Figure IV.22 : Flambement du poteau sous appuis élastiques.....	85
Figure IV.23 : Coefficient α pour un poteau articulé en pied et bloqué en tête par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$	87
Figure IV.24 : Coefficient α pour un poteau encasté en pied et bloqué en tête par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$	88
Figure IV.25 : Coefficient α pour un poteau encasté en pied, déplaçable en tête et bloqué en rotation par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$	88
Figure IV.26 : Coefficient α pour un poteau encasté en pied, bloqué en translation par un ressort avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$	89

Figure IV.27 : Coefficient α pour un poteau articulé en pied et bloqué en tête par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$	89
Figure IV.28 : Coefficient α pour un poteau encastré en pied et bloqué en tête par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$	90
Figure IV.29 : Coefficient α pour un poteau encastré en pied, déplaçable en tête et bloqué en rotation par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$	90
Figure IV.30 : Coefficient α pour un poteau encastré en pied, bloqué en translation par un ressort avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$	91
Figure IV.31 : Coefficient α pour un poteau articulé en pied et bloqué en tête par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$	91
Figure IV.32 : Coefficient α pour un poteau encastré en pied et bloqué en tête par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$	92
Figure IV.33 : Coefficient α pour un poteau encastré en pied, déplaçable en tête et bloqué en rotation par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$	92
Figure IV.34 : Coefficient α pour un poteau encastré en pied, bloqué en translation par un ressort avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$	93
Figure IV.35 : Schématisation du principe d'étude des poteaux constitués par tronçon.....	94
Figure IV.36 : Schéma de la déformé d'un profilé encastré libre à deux tronçons	95
Figure IV.37 : Schéma de la déformé d'un profilé bi-articulé à deux tronçons.....	96
Figure IV.38 : Le modèle équivalent à deux tronçons d'un profilé à inertie variable.....	99
Figure IV.39 : Caractéristiques géométriques et matérielles du poteau.....	103

Liste des photos

Photo I.1 : L'effondrement du pont de Québec 1907.....	9
Photo I.2 : Effondrement à cause du déversement d'une poutre	15

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1 : Formes de section et modes de flambement	6
Tableau II.1 : Coefficient de flambement K.....	22
Tableau II.2 : Valeurs du paramètre d'imperfection.....	35
Tableau III.1 : Définition du facteur de forme pour différents types de section.....	56
Tableau III.2 : Longueur de flambement des poteaux pour des portiques à 1 niveau.....	59
Tableau III.3 : Valeur du coefficient p en fonction de la nature de l'élément.....	56
Tableau IV.1 : Les expressions équivalentes des différentes conditions aux limites.....	65
Tableau IV.2 : Coefficient m_1 pour un Poteau à hauteur d'âme variable linéairement.....	72
Tableau IV.3 : Coefficient m_1 pour un Poteau à hauteur d'âme variable linéairement.....	72
Tableau IV.4: Coefficient m_1 pour un Poteau bi-articulé à hauteur d'âme variable linéairement.....	73
Tableau IV.5 : Coefficient m_1 pour un Poteau articulé - encastré à hauteur d'âme variable linéairement.....	73
Tableau IV.6 : Coefficient m_1 pour un Poteau bi-encastré à hauteur d'âme variable linéairement.....	73
Tableau IV.7 : Coefficient m_1 pour un Poteau encastré libre à hauteur d'âme variable linéairement.....	73
Tableau IV.8 : Valeurs de l'écart d'un Poteau doublement articulé	74
Tableau IV.9 : Valeurs de l'écart d'un Poteau articulé-encastré.....	75
Tableau IV.10 : Valeurs de l'écart d'un Poteau doublement encastré	75
Tableau IV.11 : Valeurs de l'écart d'un Poteau encastré libre (inertie maximale à l'encastrement)	75
Tableau IV.12 : Valeurs de l'écart d'un Poteau encastré libre (inertie minimale à l'encastrement).....	75
Tableau IV.13 : Les dimensions du poteau étudié.....	76
Tableau IV.14 : L'intervalle dimensionnel de l'étude.....	77
Tableau IV.15 : Le coefficient γ_1 et μ d'un profilé à inertie variable par l'équation $I(x) = I_0(1 + \alpha x)$	84
Tableau IV.16 : Le coefficient γ_1 d'un profilé à inertie variable par l'équation $I(x) = I_0(1 + \alpha x)^2$	84

Tableau IV.17 : Le coefficient γ_1 et μ d'un profilé à inertie variable par l'équation $I(x) = I_0(1 + \alpha x)^3$	84
Tableau IV.18 : Valeurs de coefficient c pour un poteau encastré libre.....	100
Tableau IV.19 : Valeurs de coefficient Ω_1 pour un poteau encastré libre.....	100
Tableau IV.20 : Valeurs de coefficient Ω_2 pour un poteau encastré libre.....	101
Tableau IV.21 : Valeurs de coefficient c pour un poteau doublement articulé.....	101
Tableau IV.22 : Valeurs de coefficient Ω_1 pour un poteau doublement articulé.....	102
Tableau IV.23 : Valeurs de coefficient Ω_2 pour un poteau doublement articulé.....	102
Tableau IV.24 : Valeurs de l'effort critique calculé par les méthodes du chapitre IV	106
Tableau IV.25 : Valeurs de l'effort critique calculé par les méthodes du chapitre.....	106
Tableau IV.26 : Valeurs de l'effort critique d'un poteau encastré élastiquement.....	107

TABLE DES MATIERS

Dédicaces

Remerciements

Résumé

Liste des notations

Liste des figures

Liste des tableaux

Table des matières

INTRODUCTION.....1

I. REVUE DE LITTÉRATURE SUR LES MODES D'INSTABILITE2

I.1 Introduction2

I.2 Notion de la stabilité2

I.3 Les origines des phénomènes d'instabilité élastique3

I.4 Le flambement3

I.4.1 Définition et historique3

I.4.2 Les type de flambement5

I.4.3 Les dangers du flambement.....9

I.5 Le déversement9

I.5.1 Définition et historique.....9

I.5.2 Aspect expérimental du déversement.....11

I.5.3 Aspect théorique de déversement.....12

I.5.4 Les dangers du déversement.....15

I.6 Le voilement.....16

I.6.1 Définition16

I.6.2 Les types de voilement.....16

I.6.2.1 Voilement locale par compression.....16

I.6.2.2 Voilement par cisaillement.....17

I.6.3 Analyse expérimentale du voilement.....17

I.6.4 Analyse théorique du voilement.....18

I.7 Conclusion..... 19

II. REVUE DE LITTERATURES SUR LES MODES DE CALCUL ET D'ANALYSE DU PROBLEME DU FLAMBEMENT.....	20
II.1 Introduction.....	20
II.2 Méthodes de calcul de la charge critique.....	24
II.2.1 La méthode d'Euler.....	24
II.2.1.1 La formule d'Euler.....	24
II.2.1.2 Longueur de flambement.....	22
II.2.1.3 Etude des cas simples par la méthode d'Euler.....	24
II.2.2 La méthode énergétique.....	25
II.2.3 La méthode des approximations successives.....	28
II.2.4 La méthode itérative de Newmark	30
II.2.5 Méthodes numériques.....	31
II.2.5.1 Méthode des différences finies	31
II.2.5.2 Méthode des éléments finis.....	31
II.3 Resistance de barreaux réels.....	33
II.3.1 Imperfection géométrique	36
II.3.1.1 Excentricité du chargement.....	36
II.3.1.2 Barre déformée initialement.....	37
II.3.2 Imperfections structurales.....	39
II.3.3 Effets combinés des imperfections.....	41
II.4 Conclusion.....	42
III. METHODES DE CALCUL DU FLAMBEMENT DES ELEMENTS A SECTION VARIABLE LINEAIRE.....	43
III.1 Introduction.....	43
III.2 Avantages des profilés à inertie variable.....	43
III.3 Hypothèses et notation.....	44
III.4 Longueur de flambement équivalent.....	44
III.4.1 Méthodes basées sur A_{min} et I_{min}	44
III.4.1.1 Etude de Carter et Gere.....	44
III.4.1.2 Etude de Galéa.....	48
III.4.1.3 Etude de Shiomi et Kurata	51
III.4.1.4 Etude de Mendera.....	52

III.4.1.5 Méthode adoptée par le LFRD.....	52
III.4.1.6 Méthode adoptée par le SSRC.....	52
III.4.2 Méthodes basée sur A_{max} et I_{max}	54
III.4.2.1 Etude de Mendera.....	54
III.4.2.2 Etude de Butler et Anderson.....	54
III.4.2.3 Méthode adoptée par le CSN.....	54
III.4.2.4 Méthode adoptée par le TGL.....	55
III.4.2.5 Etude de Jaspart.....	55
III.5 Aire et moment d'inertie équivalents	56
III.5.1 Etude de Mendera	56
III.5.2 Etude de Lind.....	57
III.5.3 Etude de Fraser.....	57
III.5.4 Méthode adoptée par le DIN.....	58
III.6 Flambement des poteaux comprimés et fléchis à inertie variable	58
III.6.1 Etude de Shiomi et Kurata.....	59
III.6.2 Etude de Butler et Anderson	59
III.6.3 méthode adoptée par le SSRC.....	60
III.7 Conclusion.....	60
IV. ETUDE PARAMETRIQUE.....	61
IV.1 INTRODUCTION.....	61
IV .2 Hypothèse de calcul.....	61
IV.3 Principe d'étude	62
IV.4 Description des méthodes de calculs.....	63
IV.4.1 La Méthode des différences finies	63
IV.4.2 Méthode basé sur les fonctions de Bessel.....	70
IV.4.3 Méthode basé sur les abaques de Carter et Gere	73
IV.4.4 Méthode basée sur l'utilisation d'un logiciel (éléments finis)	74
IV.5 Comparaison des résultats obtenus par les 4 méthodes précédentes.....	74
IV.6 Etude de généralisation des résultats	76
IV.6.1 Conclusion.....	77
IV.7 Etude de la déformée.....	77
IV.7.1 Poteau bi-articulé.....	78

IV.7.2 Poteau articulé-encasté.....	78
IV.7.3 Poteau bi-encasté.....	79
IV.7.4 Poteau encasté-libre.....	79
IV.7.5 Conclusion.....	80
IV.8 Calcul de la charge critique en fonction de la formule de variation de l'inertie	80
IV.8.1 Définition des étapes de la résolution.....	80
IV.8.2 Les résultats.....	84
IV.8.3 Conclusion.....	85
IV.9 Effet de la rigidité des nœuds sur la charge critique du flambement.....	85
IV.9.1 les résultats.....	87
IV.9.1.1 Poteau à hauteur d'âme variable (plan de forte inertie)	87
IV.9.1.2 Poteau à largeur des semelles variable (plan de forte inertie).....	89
IV.9.1.3 Poteau à largeur des semelles variable (plan de faible inertie).....	91
IV.9.1 Conclusion.....	93
IV.10 Poteau à variation par tronçons.....	94
IV.10.1 Principe d'étude ;.....	94
IV.10.2 Poteau encasté libre.....	95
IV.10.3 Poteau double articulé	96
IV.10.4 Comparaisons avec le modèle (2).....	97
IV.10.5 Comparaisons avec le modèle (3).....	98
IV.10.6 Description des résultats	98
IV.11 Exemple de calcul de l'effort critique.....	103
IV.11.1 Méthodes du chapitre IV	103
IV.11.2 Méthodes analytiques du chapitre III.....	105
IV.11.3 Calcul de l'effort critique d'un poteau encasté élastiquement.....	107
IV.11.3 Conclusion.....	107
Conclusion Générale.....	108
Références bibliographiques.....	109
Annexe A : Fonction de Bessel	111
Annexe B : Valeurs de coefficient c en fonction de ν	112

INTRODUCTION

Dans le cadre de notre formation de master en génie civil, nous sommes amenés, à l'issue de notre cursus, à réaliser un projet de fin d'études, qui est le reflet de tout le savoir acquis durant la formation. Nous avons choisis d'améliorer nos connaissances sur les phénomènes d'instabilités qui ont une grande incidence dans le domaine de la construction métallique. Le présent document concerne principalement, le flambement des profilés à inertie variable, un domaine qui reste moins adapté par des règles précises.

Cependant les codes de calcul moderne ne fournissent quasiment pas de règles de dimensionnement pour ces types d'éléments, ni d'outils simples et faciles à utiliser tout en restant performants. Par exemple le CCM97 ou l'Eurocode3 ne propose que quelques lignes de recommandations générales, laissant à l'utilisateur le soin de montrer par ses propres moyens que son dimensionnement est sécuritaire. En conséquence, l'intérêt d'utiliser ces éléments se perd quelque peu puisque leur dimensionnement risque d'être assez grossier, en tout cas moins performant que pour les poutres prismatiques.

Dans le but d'optimiser les constructions, l'utilisation des éléments à section variable présente un intérêt économique certain. Ces dernières permettent de mieux répartir la matière dans les zones les plus sollicitées, et ainsi d'avoir une meilleure répartition des contraintes le long des éléments. Cela permet un dimensionnement plus économique puisque l'acier est utilisé de façon plus rationnelle (figure 1).

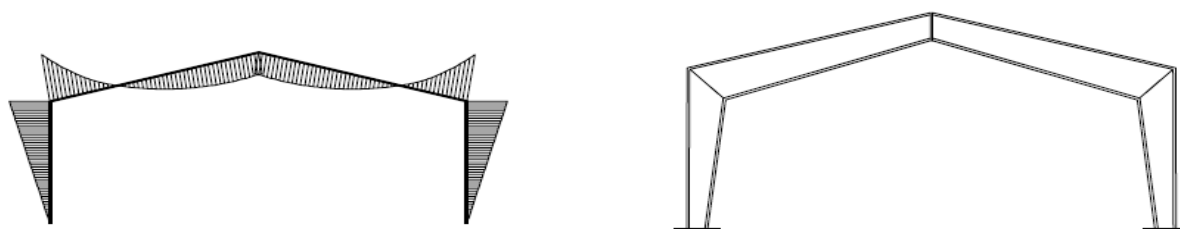


Figure 1 : Distribution des moments de flexion et structure associée

Le dimensionnement des éléments comprimés est conditionné par la résistance au phénomène de flambement. Ce dernier est caractérisé par la charge critique du flambement. Donc il est important de disposer une méthode qui facilite l'obtention de la charge critique des profilés à inertie variable.

L'étude de l'influence de la variation de l'inertie sur la charge critique du flambement sera un facteur supplémentaire et important pour la conception des poteaux.

Notre mémoire est structuré en plusieurs chapitres. Après l'introduction, le premier chapitre définit les phénomènes d'instabilité, leurs causes et leurs conséquences. Le deuxième chapitre propose quelques méthodes utilisées pour le calcul des charges critiques des barres à inertie constante, il traite ainsi l'effet des imperfections sur la charge et la contrainte critique. Le troisième chapitre regroupe de nombreuses études relatives à la résistance au flambement des éléments à inertie variable. Nous présentons au quatrième chapitre des graphes et des formules élaborés à base de la méthode des différences finies et la méthode d'Euler, permettant le calcul des charges critiques ainsi que l'étude des différents paramètres agissant sur la charge critique.

Chapitre I

REVUE DE LITTERATURE SUR LES MODES D'INSTABILITE DES ELEMENTS METALLIQUES

I.1 Introduction :

Tous les domaines de la construction moderne (génie civil, construction des machines, construction navale, automobile et aéronautique) sont caractérisés par l'emploi de structures toujours plus élancées et par la réduction progressive des sections résistantes. Cette réduction est exigée par l'économie et la légèreté. Elle est rendue possible par l'emploi de matériaux à haute résistance. C'est pourquoi le danger d'instabilité, devient de plus en plus menaçant pour l'ingénieur chargé de dessiner une structure.

Les phénomènes d'instabilités se présentent sous les formes les plus variées et souvent imprévisibles. Aussi ont-ils été la cause de grandes catastrophes. Aujourd'hui, bien que mieux connus, ils surprennent toujours perfidement les ingénieurs.

D'autre part, l'étude des phénomènes d'instabilité présente de sérieuses difficultés d'ordre mathématique. On peut dire qu'à l'heure actuelle, à l'exception des barres tendues, le danger d'instabilité est partout présent. En effet, il menace les poutres droites sollicitées à la compression (flambement), à la flexion (déversement) à la torsion (voilement des parois). IL présente dans les arcs, qui peuvent céder soit dans leur plan, soit transversalement à celui-ci, dans les plaques qui peuvent se voiler, et dans les coques qui présentent les phénomènes les plus variés.

De plus, les phénomènes d'instabilités peuvent se manifester dans des parties isolées des constructions (par exemple, flambement des barres comprimées, cas des poutres en treillis, voilement des panneaux d'âme dans les poutres à âme pleine), auquel cas il est généralement possible de les prévoir et de les étudier assez facilement. Mais ils peuvent aussi affecter l'ensemble d'une construction (flambement d'ensemble des portiques, des en arc, des poutres en treillis, etc.), auquel cas leur prévision et leur étude deviennent très ardues et incertaines.

I.2 Notion de la stabilité

On peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement.

Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par **DIRICHLET [5]** : «L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles ».

Pour un corps élastique, tout comme pour un corps rigide, on peut parler de stabilité ou d'instabilité des positions d'équilibre (figure I.1). Si, une fois l'action extérieure disparaît, le système retournant à sa position initiale, on dit que cette position est stable. Si le système n'y retourne pas, elle est instable.

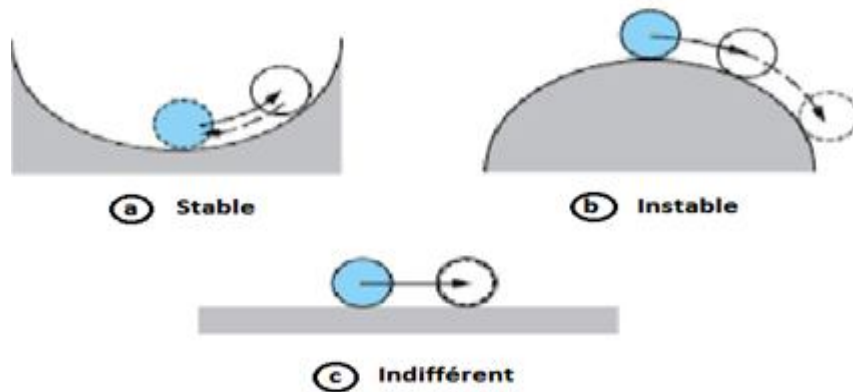


Figure 1.1 : Les états d'équilibre d'un système mécanique

I.3 Les origines des phénomènes d'instabilité élastique

Afin de garantir le degré de sécurité souhaité ou souhaitable, Il y a lieu de vérifier que les contraintes et les déformations restent en deçà des limites admissibles.

Deux cas de figure se présentent :

- Le cas de petites déformations
Tant que l'on reste dans le domaine des petites déformations, on admet que les sollicitations ne varient pas (ou peu) sous l'effet des déformations, ce qui conduit simplement à vérifier que les contraintes restent inférieures à la contrainte de ruine.
- Le cas des grandes déformations
Dans ce cas, les déplacements modifient considérablement les sollicitations qui les ont initiées et nécessitent des calculs spécifiques.

L'apparition de déformations importantes dans certaines pièces peut survenir :

- Dans le domaine élastique, lorsque la corrélation linéaire efforts /déformations n'est plus vérifiée, les déformations augmentant plus vite que les efforts appliqués ;
- Dans le domaine élasto-plastique, lorsqu'il y a écoulement plastique.

Les grandes déformations affectent les zones comprimées des pièces, qui peuvent présenter trois types de comportements caractéristiques, dénommés phénomènes d'instabilité qui sont :

- Le flambement qui affecte les barres simplement comprimées (flambement simple) ou comprimées et fléchies (flambement flexion) qui est très dangereux,
- Le déversement qui affecte les semelles comprimées des pièces fléchies,
- Le voilement qui affecte les âmes des pièces fléchies.

I.4 Le flambement

I.4.1 Définition et historique

On appelle en effet flambement « flambage » la déformation finie qui apparaît et se poursuit spontanément dans une tige, une plaque ou une structure avant que la limite de rupture du solide qui les constitue ne soit atteinte. Ce fait est un phénomène physique relevant des principes de la résistance des matériaux. Il ne peut d'ailleurs

survenir que pour les corps dont l'une au moins des dimensions est petite par rapport aux autres (figure I.2).

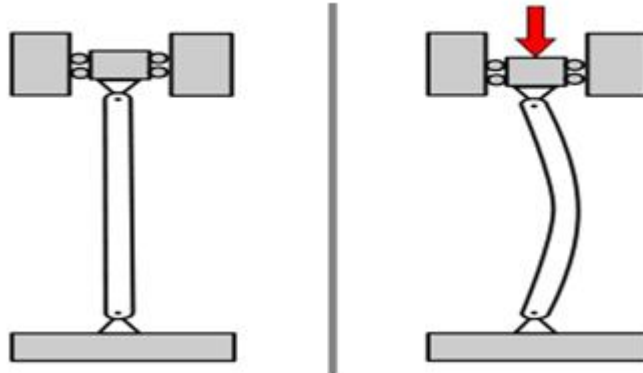


Figure I.2 : Flexion sous un effort de compression

Bien que la connaissance du flambage soit assez ancienne, sa description et la première théorie élaborée au sujet de ce phénomène ne furent données qu'en 1744 par Euler [20]. A cette époque, les principaux matériaux de construction étaient le bois et la pierre. Leur résistance est relativement faible et nécessitait des pièces trapues pour lesquelles la stabilité élastique ne jouait pas un rôle de premier plan. C'est pourquoi la théorie d'Euler demeura longtemps sans application pratique. Ce ne fut qu'au début de la construction des ponts en acier pour les chemins de fer (environ 1850) que la question du flambement prit une importance pratique [20].

Malheureusement, on reconnaît maintenant que les théories du flambage n'eurent qu'un succès mitigé car les expériences entreprises pour les vérifier échouèrent plus ou moins faute de méthodes expérimentales précises. En effet, les essais de flambage sont toujours délicats à effectuer du fait principalement du centrage et des liaisons mal définies aux extrémités comme le constate **DULEAU** (1820) dans ses expériences sur des colonnes en fer [25].

Une autre raison de l'échec relatif aux premières expériences vient du fait qu'elles portèrent le plus souvent sur des colonnes dont la longueur n'était pas suffisante par rapport à la dimension transversale et la limite d'élasticité de la matière apparaissait avant le flambage élastique. Or la théorie d'Euler porte sur le flambage élastique qui, nous le verrons plus loin, suppose des très grands élancements. Dès lors, le rôle de la plasticité dans le flambage n'était pas encore clairement apparu.

Les premières clartés furent jetées par **HODGKINSON** et **LAMARLE** (1845) qui constatèrent l'existence d'une limite d'élancement au-dessus de laquelle la formule d'Euler peut être utilisée [20].

En citant **GORDON** [6], pour mémoire, nous arrivons à Rankine qui s'est attaché à mettre un peu d'ordre dans la question entre 1855 et 1872 et enfin à **BAUSCHINGER** qui effectua en 1887 les premières expériences précises. Ce dernier pensa à réaliser les extrémités des barres sous la forme conique. Un tel artifice, fournissant un meilleur centrage des forces, lui permit de vérifier pour la première fois que la formule d'Euler est exacte lorsque le flambement se produit au cours de la phase élastique. Nous citons encore les travaux d'**ENGESSER** qui proposa l'extension des théories d'Euler par l'introduction d'un module tangentiel défini par la tangente à la courbe de déformation. Il étudia d'une manière approfondie le flambage des colonnes encastrées, l'influence de

l'effort tranchant et l'intégration des équations différentielles du flambage sous forme d'approximations successives, etc....[6].

La période moderne que nous faisons arbitrairement remonter au début de ce siècle a fait du flambage et de la stabilité élastique un problème de grande importance à cause de l'emploi de matériaux à grande résistance. On y aborde des questions nouvelles telles que le flambage par torsion des profilés ouverts, celui des plaques renforcées par des nervures, celui des arcs, la stabilité des coques, toutes questions posées de façon aigüe par la construction aéronautique et par les grands ouvrages de génie civil.

I.4.2 Les type de flambement

Le flambement peut se manifester sous diverses formes selon les spécificités de la section transversale. Ainsi, on distingue [17] :

- **Flambement par flexion**, où la pièce comprimée quitte sa position initialement rectiligne pour fléchir dans un des plans principaux d'inertie de la section droite ;
- **flambement par torsion**, pour lequel l'axe longitudinal de la pièce comprimée conserve sa position initialement rectiligne, tandis que chaque section transversale tourne autour de cet axe ;
- **flambement par flexion-torsion**, qui consiste en un flambement interactif associant les deux types de flambement précités et se manifeste donc sous la forme de formations conjointes de flexion et de torsion.

Pour chacun des trois modes d'instabilité, la figure (I.3) montre le déplacement de la section droite à mi-longueur d'une barre soumise à un effort de compression supposé appliquer au centre de gravité,

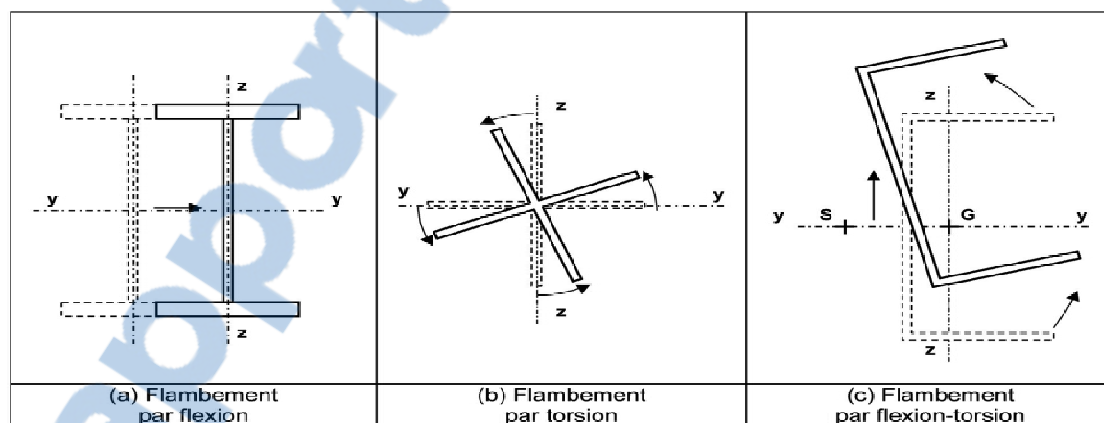


Figure I.3 : Modes de flambement d'une barre simplement comprimée

On donne pour chaque type de flambement la charge critique associée :

- pour le flambement par flexion (charge critique d'Euler) :

$$N_{cr,F} = \frac{\pi^2 EI}{(\alpha L)^2} \quad (I.1)$$

Avec: { L : longueur physique du poteau, appelée « longueur d'épure »,
 EI : raideur flexionnelle mobilisée lors du flambement,
 α : facteur traduisant l'influence des conditions d'appui
 αL : longueur de flambement

- pour le flambement par torsion :

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_0^2} \left(\frac{\pi^2 EI_w}{L_{k,T}^2} + G I_t \right) \quad (1.2)$$

avec :

$$\begin{cases} i_0 : \text{rayon d'inertie polaire} & i_0^2 = i_y^2 + i_z^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ i_y, i_z : \text{rayon de giration suivant respectivement les axes yy et zz} \\ y_0, z_0 : \text{sont les coordonnées du centre de cisaillement de la section par rapport au centre de gravité (figure I.4)} \\ L_{k,T} : \text{longueur de flambement par torsion à considérer} \\ I_t : \text{moment d'inertie de torsion de la section} \\ I_w : \text{moment d'inertie de gauchissement de la section} \end{cases}$$

- pour le flambement par flexion-torsion :

$$N_{cr,FT} = \frac{i_0}{2(I_y + I_z)} \left(N_{cr,y} + N_{cr,T} - \sqrt{(N_{cr,y} + N_{cr,T})^2 - 4 N_{cr,y} N_{cr,T} \frac{I_y + I_z}{I_0}} \right) \quad (1.3)$$

Cette formula valable pour les sections en une symétrie par rapport au l'axe yy

Avec :

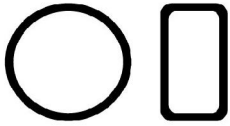
$$\begin{cases} N_{cr,y} : \text{est l'effort normal critique pour le flambement par flexion /yy, } N_{cr,y} = \frac{\pi^2 EI}{L_{k,y}^2} \\ N_{cr,z} : \text{est l'effort normal critique pour le flambement par flexion /zz, } N_{cr,z} = \frac{\pi^2 EI}{L_{k,z}^2} \\ N_{cr,T} : \text{est calculé par l'expression (1.2)} \end{cases}$$

Le flambement par torsion se manifeste dans les éléments à section doublement symétrique et présentant une grande raideur flexionnelle associée à une faible raideur torsionnelle.

Le flambement par flexion-torsion est déterminant dans le cas des barres à section ouverte et à parois minces "donc à faible raideur torsionnelle" présentant un centre de gravité nettement distinct du centre de cisaillement. Le tableau (I.1) présente le mode de flambement pour chaque type des sections et la contrainte critique à calculer.

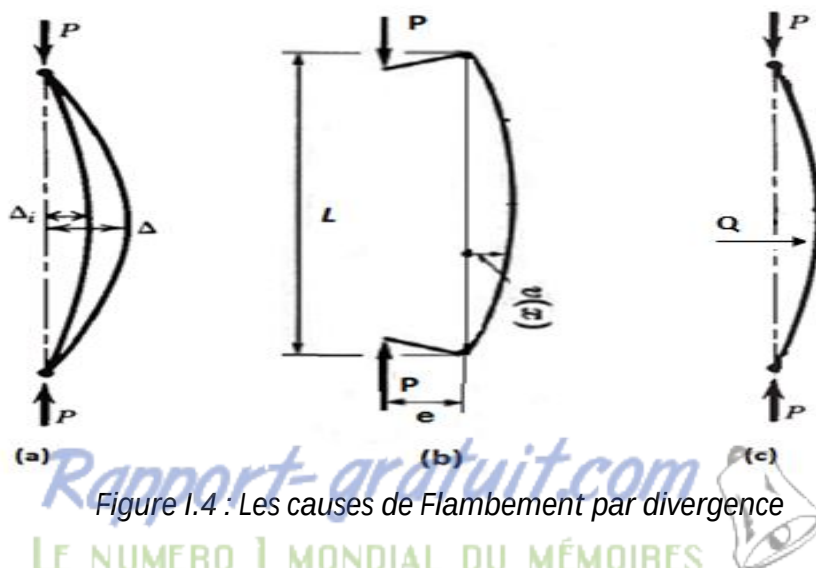
Tableau I.1 : Formes de section et modes du flambement

Forme de section	Mode de flambement	Efforts normaux à calculer
 Le centre de cisaillement est confondu avec le centre de gravité.	Flambement par flexion Flambement par torsion	Ncr, y Ncr, z Ncr, T

 Sections asymétriques	Flambement par flexion-torsion	$N_{cr, y}$ $N_{cr, z}$ $N_{cr, T}$ $N_{cr, FT}$
 Section avec un plan de symétrie	Flambement par flexion dans le plan de symétrie Flambement par flexion-torsion	$N_{cr, y}$ $N_{cr, z}$ $N_{cr, T}$ $N_{cr, FT}$
 Section avec deux plans de symétrie	Flambement par flexion	$N_{cr, y}$ $N_{cr, z}$

La présence ou non des imperfections modifient le comportement au flambement, on distingue :

- **le flambement par bifurcation** : il se produit dans les barres supposées parfaites avec des charges appliquées au centre de gravité. La barre dans ce cas reste rectiligne si la charge appliquée demeure inférieure à la charge critique. Si la charge critique est dépassée alors la barre prend soudainement une autre position d'équilibre par déformation latérale.
- **Le flambement par divergence** : Il est caractérisé par le fait essentiel que la poutre se dérobe à l'effort normal de compression en fléchissant transversalement. Il se déclenche à cause de la flexion initiale (courbure initiale (figure 1.4a), charge excentrée (figure 1.4b), charge transversale (figure 1.4c), etc.) l'effort normal de compression accentue, comme on s'en rend compte en se plaçant en configuration déformée. Ces deux types de flambement seront développés au chapitre II



Lorsqu'il s'agit des arcs et des treillis de faible hauteur un autre type de flambement peut se produire appelé :

- **flambement avec point limite** : un changement de position d'équilibre, se produisant avec un claquement sec peut avoir lieu quand le trajet initialement stable perd sa stabilité dès que l'on atteint localement une valeur maximum de la charge, appelée « point limite » du système (figure I.5). D'après ce schéma on peut constater que le comportement d'un système non-parfait est semblable à celui d'un système parfait.

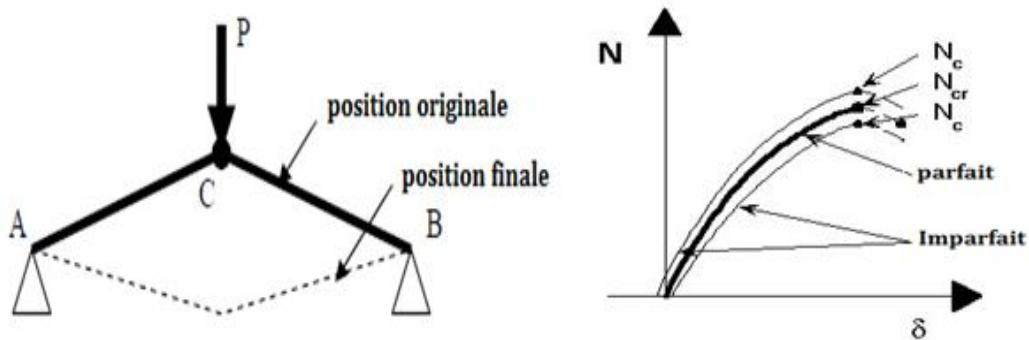


Figure I.5 : Flambement avec point limite

- **le flambement élasto-plastique** : lorsque la charge critique dépasse la limite d'élasticité ($\sigma_{cr} > f_y$) (figure I.6). L'établissement d'une théorie du flambement en domaine élasto-plastique est difficile et il n'y a pas aujourd'hui, de solution analytique générale. Au cours de flambement élasto-plastique les fibres situées du côté concave de la courbure sont sollicitées par des contraintes uniformes de compressions donc le module d'élasticité à considérer est le module tangent E_t , tandis que pour les fibres du côté convexe, c'est le module de Young E qui entre en jeu par déchargement élastique (figure I.6).

La contrainte critique est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (I.4)$$

$$\lambda = \bar{\lambda} \lambda_e \quad \text{avec :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_e : \text{l'élancement limite} \\ \sigma_{0,2} : \text{limite d'élasticité conventionnelle} \\ F_u : \text{charge ultime de flambement} \end{array} \right.$$

$$\lambda_e = \sqrt{E / \sigma_{0,2}}$$

$$\sigma_{0,2} = F_u / A \bar{\sigma}$$

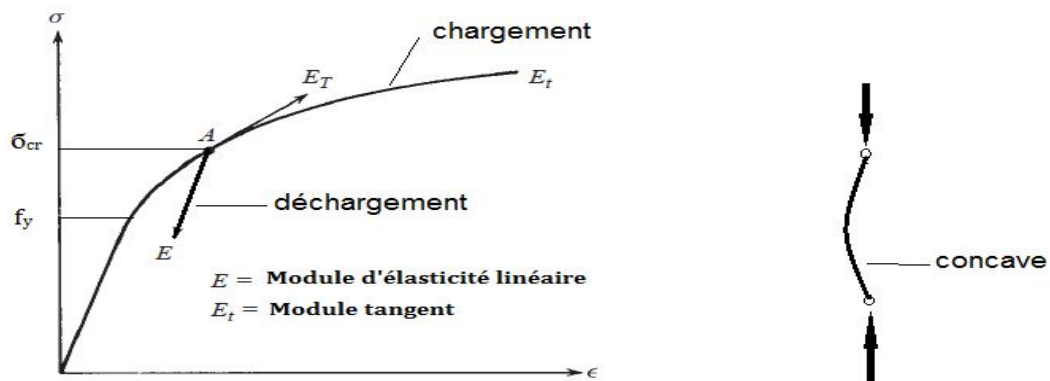


Figure I.6 : Le flambement élasto-plastique

I.4.3 Les dangers du flambement

Le flambement est l'une des premières causes de sinistres des structures, parce qu'il affecte essentiellement les poteaux, l'élément porteur principal de bâtiment. Ces sinistres ont été à l'origine de grandes catastrophes comme l'effondrement du pont de Québec (1907, 74 mort, photo (I.1)).

Dans une structure, le flambement d'un élément comprimé provoque des grandes déformations dues à la non linéarité géométrique, et par conséquent, il engendre une chute de la force supportée. Cela modifie le cheminement des forces dans la structure et peut causer l'instabilité des autres éléments. Les contreventements sont les plus exposés à ce type de risque. Pour l'éviter soit on dimensionne les éléments comprimés pour résister, soit on considère que les éléments tractés participent à la résistance.



Photo I.1 : L'effondrement du pont de Québec 1907

On peut améliorer la résistance au flambement d'un élément par plusieurs façons. La réduction du rapport d'élancement par l'augmentation des dimensions se traduira par une charge ultime plus élevée. Cela peut aussi être fait en répartissant le matériau de manière différente le long de l'élément.

Une autre manière d'améliorer la résistance au flambement d'un élément est de lui fournir des maintiens supplémentaires afin de modifier le mode de flambement. La charge critique élastique d'un poteau en compression axiale bi-articulé par ex, est augmentée d'un facteur 4 si on ajoute un appui simple à mi-hauteur. En plus, limiter la capacité au déplacement et à la rotation des nœuds modifie le mode de flambement.

I.5 Le déversement

I.5.1 Définition et historique

Les pièces soumises à flexion simple au tour de l'axe d'inertie principale maximale de leur section transversale sont affectées par un phénomène d'instabilité, dénommé déversement (figure I.7), dès lors que l'inertie principale minimale est sensiblement inférieure à l'inertie principale maximale. Cette circonstance est rencontrée pour la grande majorité des profils utilisés en construction métallique. L'instabilité en cause n'est rien d'autre que le flambement latéral de la partie de la section transversale

soumise, du fait de la flexion, à des contraintes de compression. Par rapport au flambement, le déversement présente néanmoins des spécificités importantes :

- D'une part, la partie tendue du profil exerce sur la partie comprimée des effets stabilisateurs, ce qui conduit à assimiler le phénomène à un flambement en milieu élastique,
- D'autre part, le plus souvent, la compression, tout comme le moment de flexion qui la génère, n'est pas uniforme sur la longueur de la pièce.

Ces particularités rendent généralement complexe l'établissement des solutions aux problèmes du déversement. On notera en particulier que, du fait de la distance qui sépare la partie tendue de la partie comprimée, le flambement latéral de cette dernière s'accompagne inévitablement d'une torsion de la poutre autour de son axe longitudinal : toutes les caractéristiques de la section transversale sont ainsi impliquées dans la déformée de déversement et, en particulier, les inerties de torsion pure et de gauchissement.

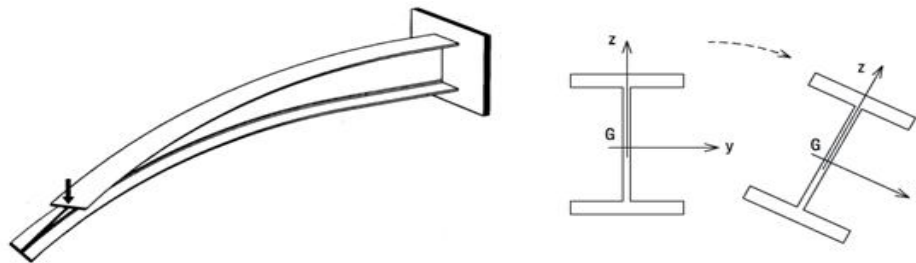


Figure I.7 : Phénomène du déversement

L'intérêt de dimensionner des poutres résistantes au déversement étant évident, plusieurs chercheurs se sont penchés sur ce problème dans le but de pouvoir proposer des formules approchées de dimensionnement aux ingénieurs et projecteurs du domaine de la construction métallique. Cependant, le problème apparaît encore plus complexe que celui des poteaux.

En 1905 **TIMOSHENKO [25]** a élaboré les formules théoriques de déversement d'une poutre simplement appuyée ensuite, il a étudié l'influence des conditions d'appui sur la charge critique du déversement.

On note aussi les formules de **A.N. DINNIK (1913)** pour des poutres maintenues latéralement et les formules de F. Stussi pour les poutres en I avec courbure initiale [6].

BRAHAM (1998) utilise l'approche de **MERCHANT-RANKINE**, c'est-à-dire sur le concept de multiplicateur des charges. Il valide cette méthode à travers des résultats de simulation numérique pour différentes variations de hauteur d'âme, pour différentes longueurs et aussi pour les conditions d'appuis. Cette approche a été utilisée dans les différentes normes Européennes (comme dans l'additif 80 pour le déversement par exemple), au même titre que des formulations « d'**AYRON-PERRY** », sur lesquelles sont basées les formules actuelles de l'Eurocode 3 pour le flambement et le déversement [6].

Pour le déversement des poutres à section variable, **FOGEL** et **KETTER [6]** étudient le comportement plan sous effort normal et moment d'extrémité d'une poutre à section

variable. En faisant des approximations polynomiales sur la variation de l'inertie dans le sens de la flexion. Ils proposent de résoudre mathématiquement les équations obtenues, et présentent les résultats sous forme d'abaques.

Signalons pour finir les travaux de Saka [10], qui propose un algorithme d'optimisation des portiques constitués de poutres en I doublement symétriques à hauteur d'âme linéairement variable. En retenant le critère de résistance au déversement, pour le moins discutable du code américain [2], il cherche à minimiser le poids de la structure.

Il y a diverses études théoriques du comportement des poutres, basées sur les principes de la mécanique des Milieux Continus. En 1965, **BAZANT** propose une théorie de la torsion non uniforme et des équations d'équilibre pour les poutres à parois minces et section variable [17].

BROWN propose des tables permettant de calculer la charge critique de déversement de tels éléments, pour différentes conditions d'appui et différents niveaux d'application de charges. Il utilise la méthode des différences finies pour résoudre les équations différentielles [6].

BAPTISTA (2002) utilise un modèle numérique « éléments finis » basé sur l'étude des déformations globales des sections, capable de rendre compte du comportement non linéaire géométrique et matériel des poutres à parois minces et section variable. Il propose des expressions polynomiales pour calculer les valeurs de charges ultimes et critiques de tels poteaux, dont les coefficients sont issus du lissage des résultats numériques obtenus [5].

BOISSONNADE (2002) propose une formulation « éléments finis » à travers un élément de poutre à section variable. Il conclue que le déversement des poutres à inertie variable est différent de celui d'une poutre avec section équivalente. Il développe même une nouvelle formule d'interaction pour les éléments comprimés fléchis [6].

I.5.2 Aspect expérimental du déversement

Considérons une poutre mince, dont les appuis sont encastres vis-à-vis de torsion et quelconque vis-à-vis de la flexion (figure I.8)

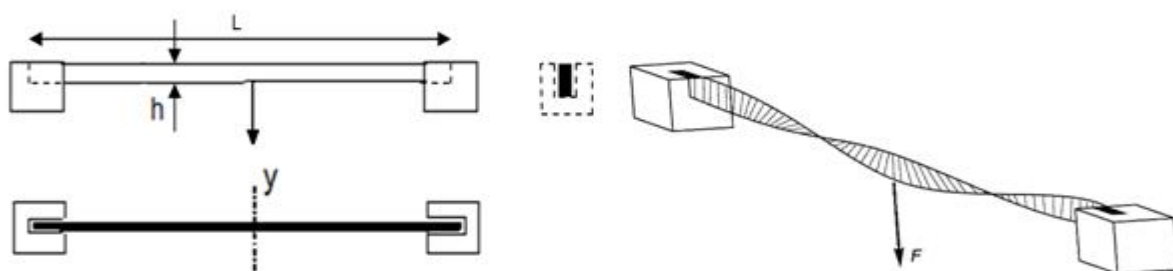


Figure I.8 : Etude expérimentale du déversement

H = 320 mm
B = 8 mm
L = 5m
Acier S.235

Appliquant une charge concentrée verticale F en son centre de gravité G . L'essai réalisé au laboratoire, montre que la poutre s'effondre brutalement sous une charge $F = 5.2 \text{ kN}$.

A l'instant de l'effondrement, le moment vertical maximal, en milieu de travée, vaut :

$$M_f = \frac{F}{4} + \frac{g l^2}{8} \quad (g : \text{Poids propre de la poutre})$$

$$M_f = \frac{520 \times 5}{4} + \frac{7850 \times 0,008 \times 0,32 \times 5^2}{8} = 7,13 \text{ kNm}$$

Ce qui correspond à une contrainte de flexion :

$$\sigma_f = \frac{M_f \cdot v}{I} = \frac{6 M_f}{b h^2} = \frac{6 \times 713 \times 10^3}{8 \times 320^2} = 52 \text{ MPa}$$

σ_f est inférieure à la contrainte limite d'élasticité $f_y = 235 \text{ MPa}$.

On constate donc, que pour une faible valeur de contrainte de flexion, la poutre prend brutalement une flèche latérale, qui provoque par la suite sa ruine, alors que nous sommes encore loin de la limite élastique.

I.5.3 Aspect théorique de déversement

Cas de référence : Le cas de référence pour le déversement est la poutre de longueur L à section uniforme doublement symétrique, soumise à des moments d'extrémité M , égaux mais de signes contraires, appliqués rigoureusement dans le plan de forte inertie de la section (figure I.9).

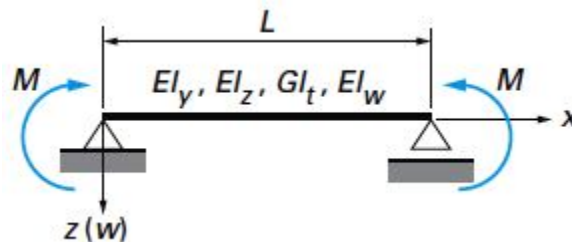


Figure I.9 : Schéma statique pour l'étude du déversement

La sollicitation de cette poutre de référence est donc la flexion pure, appelée aussi sollicitation de moment uniforme. Les conditions d'appui aux extrémités sont des appuis simples, appelés aussi appuis à fourche, étant entendu qu'elles concernent des conditions tant flexionnelles que torsionnelles, à savoir :

- pour la flexion : appuis simples d'extrémité :

$$v(x) = w(x) = \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (I.5)$$

$v(x)$: déplacement horizontale, $w(x)$: déplacement verticale.

- pour la torsion : la rotation de torsion empêchée et le gauchissement libre aux appuis d'extrémité :

$$\phi(x) = \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0$$

Les propriétés de la section sont :

- ☐ raideurs flexionnelles EI_y (forte inertie) et EI_z (faible inertie) ;
- ☐ raideurs torsionnelles GI_t et raideur de gauchissement EI_w .

- Les équations d'équilibre de la poutre dans l'état déformé sont au nombre de trois : flexion autour de l'axe fort, flexion autour de l'axe faible et de torsion. Elles s'écrivent, eu égard à la figure I.10 .

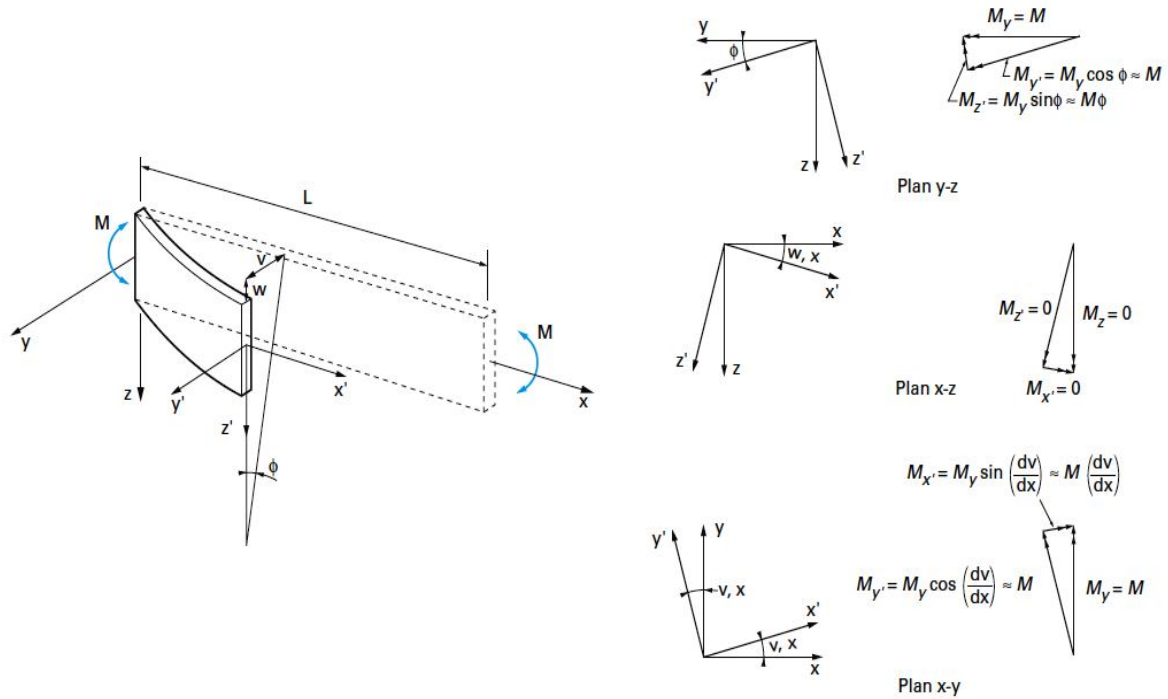


Figure I.10 : Configuration déformée et décomposition du moment de flexion M_y

$$EI_Y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -M \quad (I.6a)$$

$$EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M\phi(x) \quad (I.6b)$$

$$GI_t \frac{d^2 \phi}{dx^2} - EI_w \frac{d^3 \phi}{dx^3} = M \frac{dv(x)}{dx} \quad (I.6c)$$

La relations (I.6a) est indépendante des deux autres, tandis que (I.6b) et (I.6c) sont couplées. Elle peut donc être résolue séparément. En éliminant $v(x)$ entre l'équation (I.6b) et (I.6c), on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} - \frac{GI_t}{EI_w} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{M^2}{EI_z EI_w} \phi(x) = 0 \quad (I.7)$$

Si la raideur de gauchissement était négligeable ($EI_w = 0$), cette équation se réduirait à :

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \frac{M^2}{EI_z GI_t} \phi(x) = 0 \quad (I.8)$$

Dont la solution est du type : $\phi(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ (I.9)

Ce qui entraine une déformé latérale du type : $v(x) = B \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ (I.10)

Le mode d'instabilité est donc en demi-onde sinusoïdale, on tire alors de (I.8) l'expression de moment critique de déversement : $M_{cr,0} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t}$ (I.11)

Si on tien en compte de la rigidité de gauchissement on trouve encore que le mode d'instabilité est toujours donné par (I.9) et (I.10) mais que le moment critique élastique de déversement prend la forme :

$$M_{cr,0} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t \left(1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}\right)} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \sqrt{1 + \omega^2} \quad (I.12)$$

Avec : ω (désigné parfois paramètre de Timoshenko) : $\omega = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI_w}{GI_t}}$

On constate que, d'une part, comme il fallait s'y attendre, la raideur de gauchissement a pour effet d'accroître la résistance au déversement et, d'autre part, la longueur L intervient dans l'expression du facteur ω . Il en résulte que ce dernier a une faible incidence sur le moment critique élastique de déversement de poutres longues et/ou à section massive, mais qu'un bénéfice significatif est attendu dans les poutres courtes et à section élancée.

L'expression théorique (de base) doit être modifiée pour prendre en compte les caractéristiques très diverses pouvant être recensées dans la pratique et qui influent directement sur la valeur critique du moment maximal le long de la poutre [17]:

- ☐ Condition de liaisons aux extrémités ;
- ☐ Variation du moment de flexion la long de la poutre due à des charges transversales et/ou à des couples d'extrémité (figure I.11) ;
- ☐ Effets stabilisateur ou déstabilisateur du point d'application des charges transversales par rapport au centre de gravité du profil (figure I.12) ;
- ☐ les imperfections géométriques;
- ☐ les contraintes résiduelles.

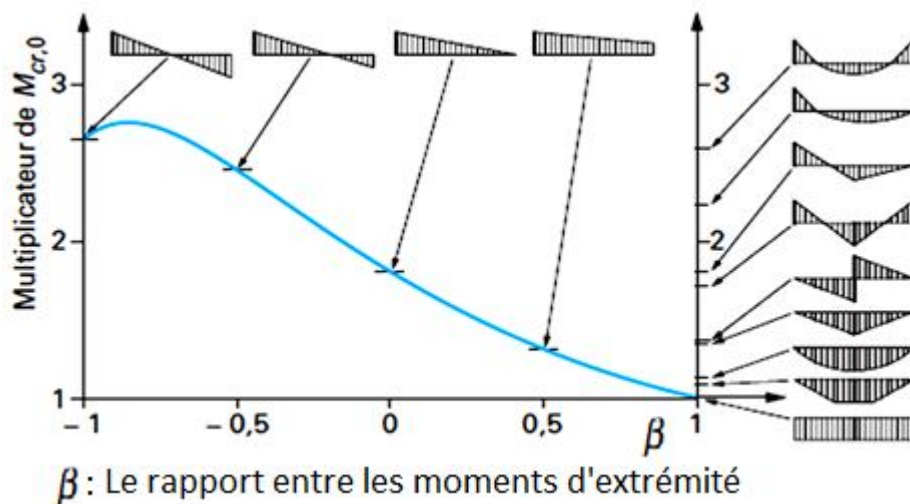


Figure I.11 : Influence de la distribution des moments sur la charge critique du déversement

Ce Diagramme caractérise un IPE300 de longueur L=10m et avec une charge transversales appliquées au centre du cisaillement.

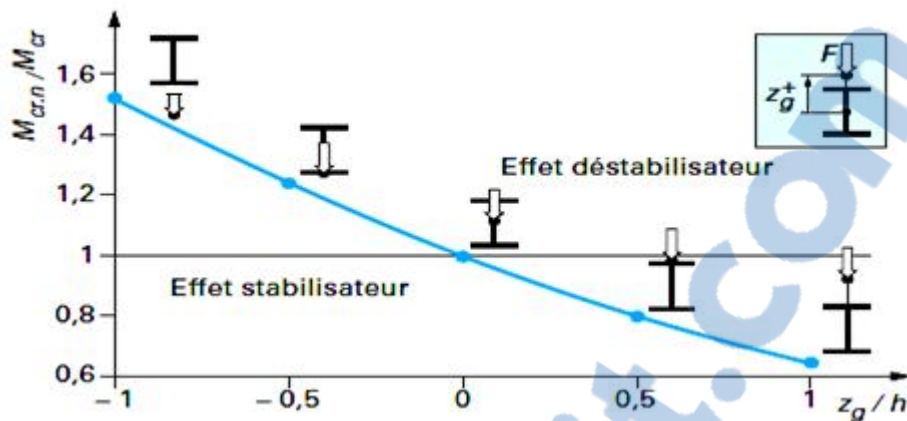


Figure I.12 : Les effets du point d'application des charges transversales sur le déversement

I.5.4 Les dangers du déversement

Pratiquement, les ingénieurs et les calculateurs sont très avertis des dangers du flambement. En revanche, et concernant les pièces fléchies, les calculs se limitent très généralement à un simple dimensionnement en flexion (simple ou déviée), sans vérification du risque de déversement.

Souvent les calculateurs apprécient mal le risque du déversement (une poutrelle qui déverse se vrille, mais reste en place, du fait de ses liaisons avec d'autres éléments, pense-t-on généralement).

En fait, les désordres provoqués par le déversement peuvent être légers (poutres déformées, bacs acier déchirés), mais également graves (effondrement partiels ou totale). Actuellement, il semble que de tels désordres aient tendance à se multiplier, avec le développement sur le marché des profilés minces (tôles pliées, de faible épaisseur) qui tendent à prendre la place des profilés laminés habituels pour ce qui concerne les pannes, les lisses et certaines poutres.

Ci-dessous la photographie d'un bâtiment qui s'est effondré en totalité sous une charge de neige minime (40 daN/m^2), du fait du déversement des poutres de portiques (Omégas en tôle pliée), qui en basculant ont provoqué l'effondrement totale de la structure. Les poutres avaient été dimensionnées en flexion simple, sur la base de $f_y = 235 \text{ MPa}$, alors qu'une contrainte de 70 MPa avait généré le déversement.



Photo I.2 : Effondrement à cause du déversement d'une poutre

I.6 Le voilement

I.6.1 Définition

Le voilement correspond à une déformation accidentelle affectant généralement une pièce de grande surface mais surtout de faible épaisseur sous l'action d'efforts supérieurs à la charge admissible (figure I.13).

Toujours à la recherche de l'économie dans la construction des poutres, on a le plus souvent cherché à augmenter l'inertie en éloignant le plus possible la matière du centre de gravité et en éliminant au maximum la matière dans les régions les moins sollicitées.

Les profilés laminés normalisés (IPE, HEA...) sont peu sensibles au voilement, leurs âmes étant surdimensionnées. En revanche, les âmes des profilés reconstitués soudés sont très sensibles au voilement. Il s'agit des poutres ou caissons d'ouvrages d'art, des parois de réservoirs, de silos...

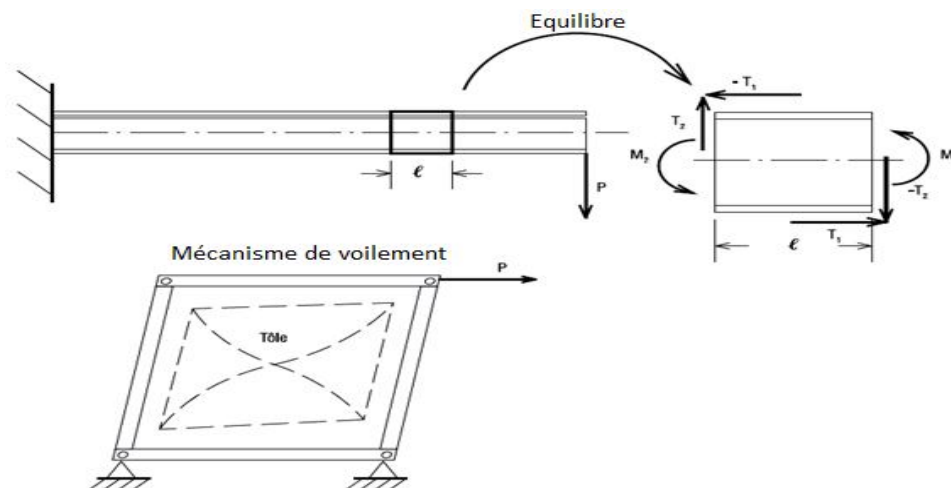


Figure I.13 : Instabilité par voilement

I.6.2 Les types de voilement

I.6.2.1 Voilement locale par compression

Les rapports largeur sur épaisseur des parois des sections usuelles, désignés élancement géométriques, varient dans des proportions très importantes. Lorsque ces parois sont sollicitées en compression, ceci a une incidence directe sur le niveau de la ruine. En effet, ce phénomène d'instabilité est assimilable à un flambement, dans la direction normale à la paroi, des fibres longitudinales (figure I.14a).

Si l'élancement géométrique est faible (paroi compacte) le voilement local intervient alors que l'acier a déjà subi d'importantes déformations plastiques après avoir atteint le niveau de contrainte correspondant à la limite d'élasticité. En revanche, lorsque la paroi présente un élancement particulièrement élevé, la ruine par voilement local peut intervenir très tôt, avant même que le niveau apparent de contrainte dans cette paroi ait atteint la limite d'élasticité (figure I.14b) [4].

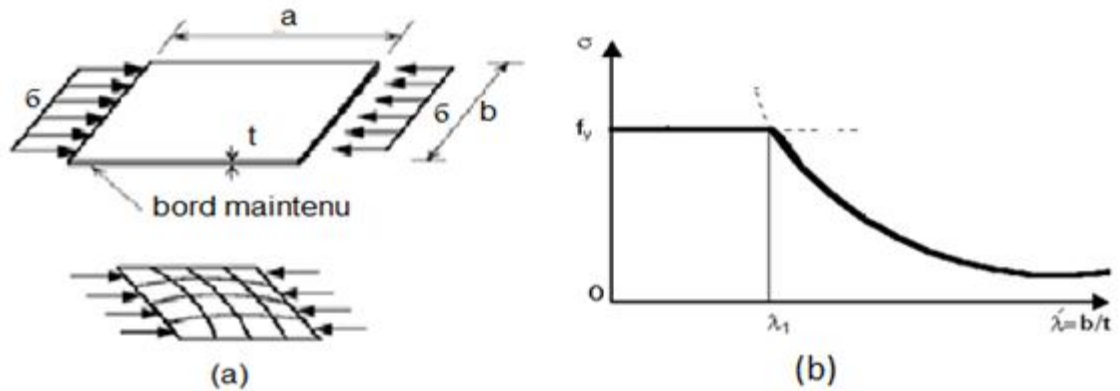


Figure I.14 : Voilement locale par compression

I.6.2.2 Voilement par cisaillement

Le voilement par cisaillement se manifeste dans les panneaux soumis à des contraintes de cisaillement sur son contour (figure I.15a). Les contraintes de cisaillement développent dans le plan de la plaque des contraintes principales de traction et de compression. L'existence de ces dernières est propre à générer le voilement de la plaque de même nature que le voilement par compression (figure I.15b)

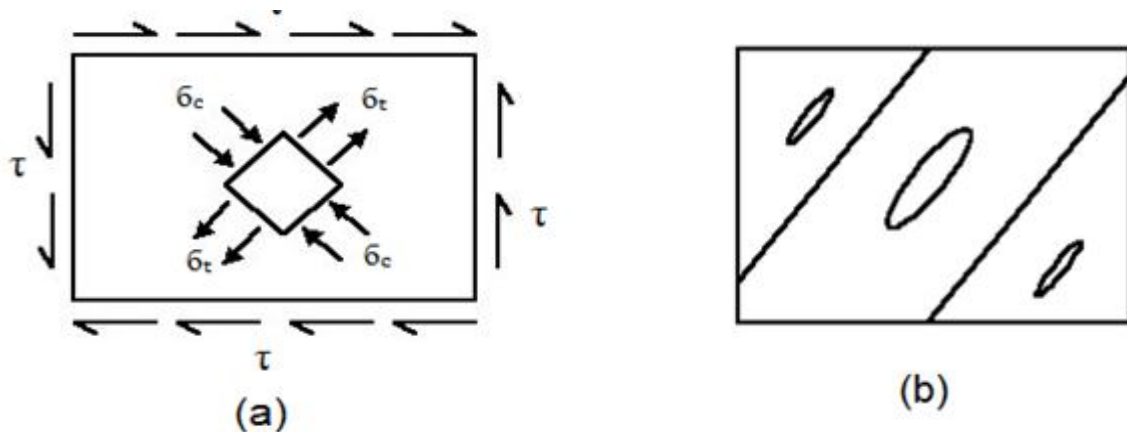


Figure I.15 : Voilement par cisaillement des plaques

I.6.3 Analyse expérimentale du voilement

Les essais montrent que les déformations des âmes de poutres par voilement se traduisent non pas par des ondulations régulières (comme pour une plaque mince libre), mais par des cloques et des boursouflures (zones d'acier plastifiées), localisées dans les zones surcomprimées, comme le montre la figure I.14.

Les études expérimentales montrent également que les âmes voilées, résistent encore à des efforts additionnels. Autrement dit, le voilement ne conduit pas à une ruine rapide et brutale des pièces, ce qui en fait un phénomène finalement peu dangereux.

Pour éviter le voilement des âmes, deux moyens sont possibles :

- Soit réduire l'élancement de l'âme par augmentation de l'épaisseur,
- Soit par l'utilisation des raidisseurs d'âme, judicieusement positionnés.

I.6.4 Analyse théorique du voilement

La méthode énergétique de Timoshenko des plaques minces permet la détermination d'une contrainte critique, obtenue dès lors que le travail des forces extérieures appliquées atteint le niveau de potentiel interne de la plaque, l'expression générale est [12]:

$$\sigma_{cr} = k_{\sigma} \times \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1-\nu^2)} \times \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (I.13)$$

avec :

E : module d'élasticité longitudinale de l'acier

ν : coefficient de Poisson de l'acier

t : épaisseur de la paroi ;

b : largeur de la paroi (perpendiculaire à la section des contraintes).

k_{σ} : coefficient qui prend en compte :

- La distribution des contraintes longitudinales sur la largeur b de la paroi,
- Les conditions d'appui au contour de la paroi,
- Le rapport a / b de la longueur à la largeur de la paroi.

Généralement les contraintes critiques calculées par cette formule ne correspondent que rarement aux contraintes de ruine expérimentales.

L'écart entre les résultats s'explique par l'existence d'une résistance dite postflambement due à une redistribution progressive des contraintes au sein de la paroi. Cette redistribution permet de plafonner la sollicitation subie par les fibres les plus touchées par l'instabilité, tout en mobilisant un complément de résistance au droit des autres fibres (figure I.16). La ruine apparente dans la paroi dépassant alors effectivement la valeur critique théorique (figure I.17).

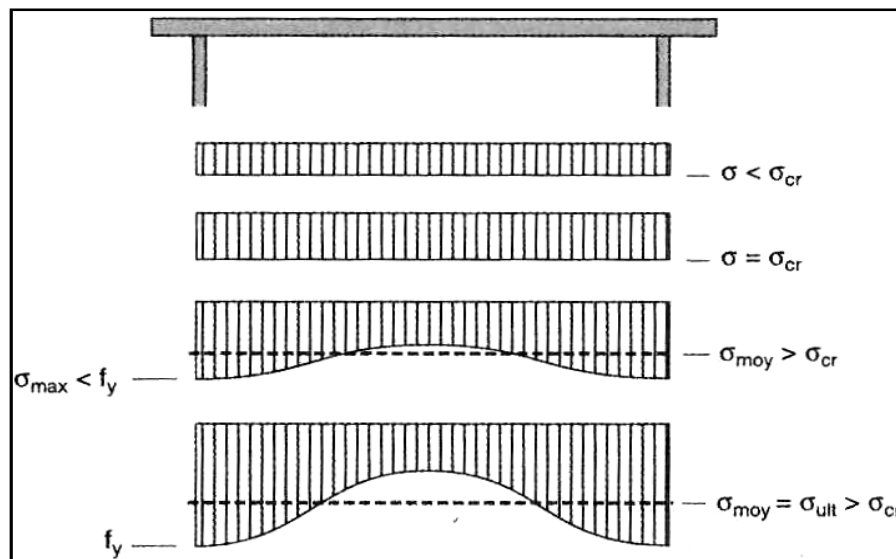


Figure I.16 : Redistribution progressive des contraintes de compression (paroi de classe 4)

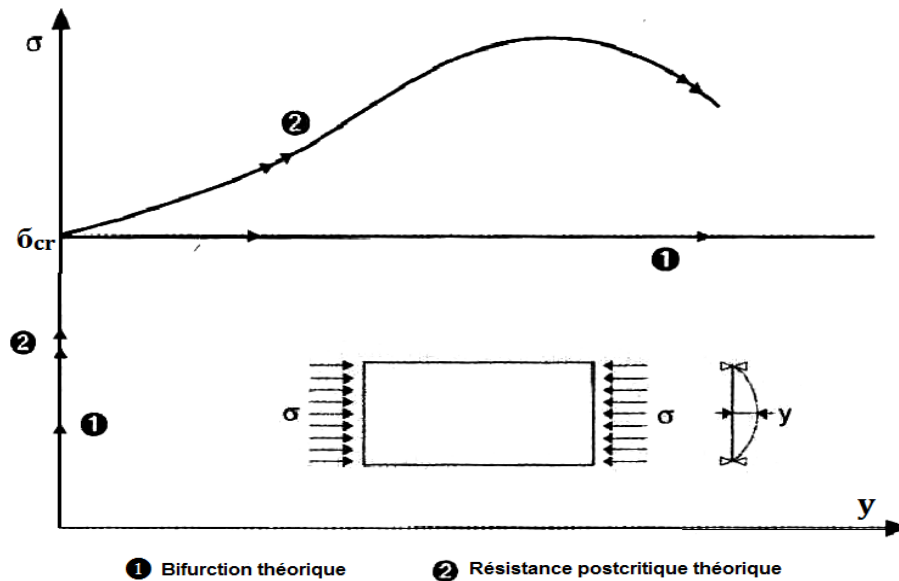


Figure I.17 : Comportement postcritique d'une paroi idéale comprimée

I.7 Conclusion

Il n'est pas exagéré de dire que la majeure partie des écroulements des constructions est due à des phénomènes d'instabilités, plutôt qu'à une sollicitation excessive des matériaux. C'est ce qui justifie l'importance sans cesse croissante réservée à l'étude des phénomènes d'instabilité.

Les charges critiques théoriques des différents phénomènes d'instabilité sont établies sur la base d'hypothèse d'élasticité et l'absence de tout défaut. En réalité le comportement des éléments comprimés est influé par la présence des imperfections, la plasticité de la section critique avant la ruine et l'interaction des différents modes d'instabilité. Cela nécessite le recours aux méthodes expérimentales et numériques pour l'étude de la résistance.

Chapitre II

Revue de littératures sur les modes de calcul et d'analyse du problème de flambement

II.1 Introduction

L'étude des problèmes de stabilité fait appel aux différentes méthodes qui fournissent à l'ingénieur les moyens pratique de déterminer les chargements critiques. Il est important de maîtriser les avantages et les inconvénients de chaque méthode. Cependant L'étude de celles ci nous permet de localiser l'utilisation de chaque méthode. Autrement dit, il faut savoir les paramètres qui favorisent une méthode sur l'autre.

L'expérimentation démontre que l'effort de compression n'est jamais idéalement appliqué suivant l'axe moyen de la section. En effet, les pièces ne sont jamais rigoureusement rectilignes de par les diverses manutentions et transports, voire dès la sortie des laminoirs. Sur chantier, les poteaux ne sont jamais parfaitement verticaux. Et si l'on rajoute à cela les tolérances de laminage (inerties variables) ainsi que les défauts d'homogénéité (module d'élasticité E variable) on comprend aisément que la charge initialement appliquée à l'axe de la pièce se trouve inévitablement décalée, générant par la même occasion un petit moment de flexion parasite suffisamment important, mais réel est inévitable, et majorant considérablement la contrainte de compression. La pièce prend alors la forme d'une flamme ondulée, d'où le nom de flambage.

II.2. Méthodes de calcul de la charge critique

II.2.1 La méthode d'Euler

II.2.1.1 La formule d'Euler

Euler ne fait aucune hypothèse sur la cause du flambement. Il suppose qu'une pièce parfaitement cylindrique, sollicitée par un effort normal N de compression suivant l'axe de la pièce x' , x , a pris sous l'influence d'une cause indéterminée une faible courbure (figure II.1).

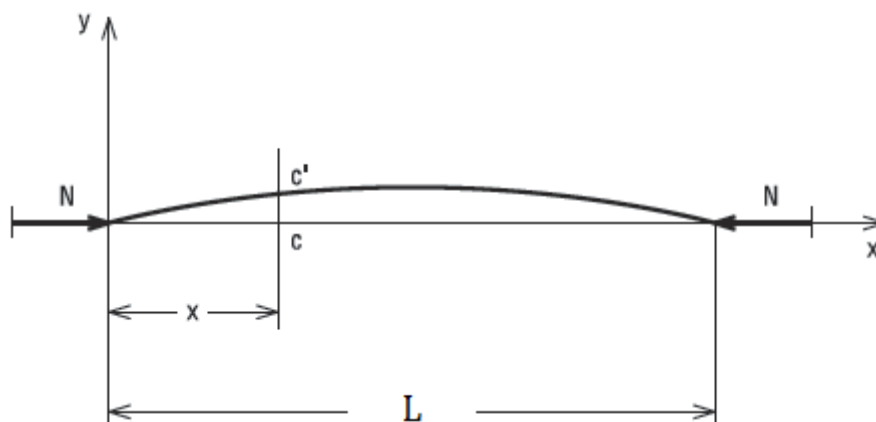


Figure II.1 : Hypothèse d'Euler sur le flambement

Si on suppose que le flambement se manifeste avant la plastification de la barre alors d'après la loi fondamentale de flexion le moment fléchissant est alors de la forme suivante [17] :

$$M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ avec } M = Ny \text{ d'où } EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Ny = 0$$

Remarque : l'effet de l'effort tranchant est négligé, on suppose que l'effort de compression reste perpendiculaire à toutes sections de la poutre.

On pose $\frac{N}{EI} = \beta^2$ alors on obtient une équation du genre $\frac{d^2 y}{dx^2} + \beta^2 y = 0$

C'est une équation différentielle du second ordre et la résolution de cette équation est la solution d'une équation générale de la forme : $y(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x$.

La détermination des constantes A et B s'opère grâce aux conditions aux limites :

Pour $x = 0 \iff y = 0$ donc $B = 0$;

Pour $x = L \iff y = 0$ donc $A \cdot \sin \beta L = 0$.

Or, $A \neq 0$, sinon y serait nul quel que soit x , donc $\sin \beta x = 0$ entraîne $\beta L = k\pi$ d'où : $\beta = \frac{k\pi}{L}$ avec k est un nombre entier.

Enfin, de l'égalité $\beta = \frac{k\pi}{L}$ et $\beta^2 = \frac{N}{EI}$ on tire $N_{cr} = k^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, valeur nommée charge critique d'Euler.

La déformée de la ligne moyenne a donc pour équation : $y(x) = A \sin k\pi \frac{x}{L}$

Le coefficient A, représente, en module, la flèche maximale ; aucune condition ne permet de définir sa valeur ; il reste indéterminé tant que l'équilibre est réalisé, c'est-à-dire que la force de compression égale N_{cr} .

En résumé donc, trois cas sont à distinguer :

- $N < N_{cr}$: la poutre primitivement fléchie, se redresse et la flèche disparaît complètement (stabilité) ;
- $N = N_{cr}$: la poutre conserve la flèche qu'on lui a donnée, flèche indépendante de N_{cr} et que un faible effort transversale suffit à modifier (cas limite de l'équilibre indifférent) ;
- $N > N_{cr}$: la flèche augmente jusqu'à la rupture ; il n'y a pas d'équilibre possible (instabilité).

Pour chaque une valeur de $k = 1, 2, 3 \dots$ correspond un mode harmonique différent. Dans la pratique seul le cas où $k = 1$ est à retenir, puisqu'il correspond à la plus petite charge critique entraînant l'instabilité et par conséquent constituant un seuil à ne pas dépasser.

En ce qui concerne la charge critique, celle-ci a été définie en considérant une pièce articulée aux deux extrémités.

La formule d'Euler est applicable quelles que soient les liaisons aux extrémités à condition de remplacer L par la distance L_f qui sépare deux points d'inflexion, réels ou fictifs, de la ligne élastique (figure II.2).

D'où : $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2}$ avec L_f la longueur libre de flambement.

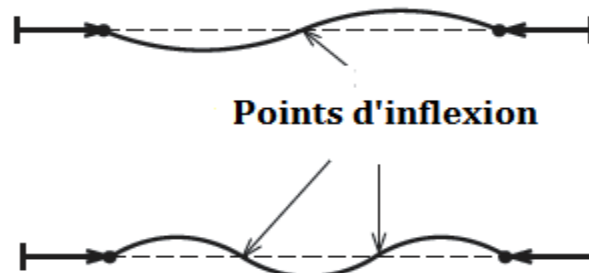


Figure II.2 : Les points d'inflexion d'une barre comprimée

II.2.1.2 Longueur de flambement

Pratiquement, la longueur de flambement L_f est évaluée en multipliant la longueur physique de l'élément, L , par un coefficient de flambement K , celui-ci dépend des conditions d'appui aux extrémités de l'élément, ou, plus précisément, du *niveau des contraintes flexionnelles d'extrémité*, d'une part, et de la *possibilité de translation latérale* relative des extrémités, d'autre part. Quelques valeurs caractéristiques de K sont fournies dans le Tableau II.1.

Tableau II.1 : Coefficient de flambement K

	Sans déplacement latérale			Avec déplacement latérale		
Cas	a	b	c	d	e	f
Mode de flambement						
K (théorique)	1	0.7	0.5	2	2	1

Un élément tel qu'un poteau est intégré dans un environnement, il possède des liaisons à ses extrémités, il est soumis à un chargement et il est intégré à une structure qui fait elle aussi partie de l'environnement. Il est donc nécessaire de définir un élément équivalent au poteau étudié, mais cet élément équivalent doit être isolé et restreint à ses extrémités. Ces contraintes doivent présenter des rigidités telles qu'elles remplacent les effets de l'environnement sur l'élément étudié.

Le concept de longueur de flambement permet de considérer les effets de l'ensemble de la structure sur la stabilité de l'élément comprimé à étudier. Or la détermination de longueur de flambement exige l'étude préalable de l'élément équivalent isolé. Le problème majeur réside donc dans l'évaluation des caractéristiques des contraintes.

Dans le précédent paragraphe nous avons examiné le flambage sous sa forme Eulérienne la plus simple, celle de la figure II.1. Nous allons examiner maintenant l'influence de l'encastrement élastique [4].

Considérons le cas plus général de la figure II.3 où apparaissent trois mouvements lorsque la charge critique est atteinte :

- Une rotation θ_0 à la base qui développe un moment de flexion $M_0 = C_0 \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = C_0 \theta_0$
- Une rotation au sommet qui développe un moment de flexion $M_1 = C_1 \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=L} = C_1 \theta_1$
- Une translation $\Delta y = -a$ du sommet par rapport à la base suivant la direction y et qui développe une réaction : $Q = -C_3 \Delta y$

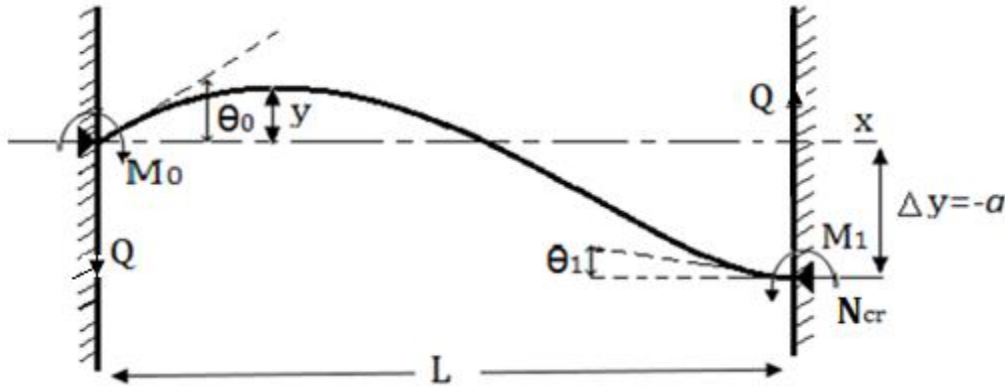


Figure II.3 : Flambement d'une barre assemblée par des encastres élastiques

Ces différentes conditions d'extrémité peuvent être exprimées par les paramètres sans dimension : $\mu = C_0 \frac{L}{EI}$, $\nu = C_1 \frac{L}{EI}$, $\alpha = C_3 \frac{L^3}{EI}$.

L'équation de la déformée étant : $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$

Le moment M est donné par : $M_x = Py + Qx - M_0$ avec la condition d'équilibre : $M_0 - M_1 - QL + Pa = 0$

En écrivant $\frac{M_1}{M_0} = \xi$ on tire des deux équations précédentes : $M_x = Py + Qx - \frac{QL - Pa}{1 - \xi}$

Ecrivant $\Phi = \frac{PL^2}{EI}$ et reportant la valeur du moment dans l'équation de flexion, on obtient l'équation différentielle de la déformée :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\Phi}{L^2} y - \frac{1}{L^2} \left(\alpha \Delta y \frac{x}{L} - \frac{\alpha \Delta y + \Phi a}{1 - \xi} \right) = 0$$

Donc la solution est, avec $y = 0$ pour $x=0$:

$$\frac{y}{a} = -\frac{\frac{\alpha \Delta y}{\Phi a}}{1 - \xi} \left(1 - \cos \frac{x}{L} \sqrt{\Phi} \right) + C \sin \frac{x}{L} \sqrt{\Phi} + \frac{\alpha \Delta y x}{\Phi a L}$$

L'introduction des conditions aux limites définies plus haut donne une équation en Φ d'où l'on peut tirer la petite valeur de Φ qui satisfait l'équation suivante :

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\Phi} \right) \left(mn - \frac{m + n}{\sin \sqrt{\Phi}} \right) - \frac{\alpha}{\Phi} \frac{m + n}{\sqrt{\Phi}} = 0$$

Avec :

$$m = \frac{1 - \cos\sqrt{\Phi}}{\sin\sqrt{\Phi}} + \frac{\sqrt{\Phi}}{\mu}, \quad n = \frac{1 - \cos\sqrt{\Phi}}{\sin\sqrt{\Phi}} + \frac{\sqrt{\Phi}}{\nu}$$

Les coefficients C_0 et C_1 représentent les rigidités effectifs des liaisons d'extrémité due à la structure adjacente du nœud. Ils sont calculés comme les rigidités effectives K_{ij} des poutres données dans l'annexe E de l'Eurocode 3 ou l'annexe A de CCM97.

Pour l'extrémité articulée, C_0 ou C_1 sont pris égale à 0, donc μ ou ν égale à 0.

Pour l'extrémité encastrée, C_0 et C_1 sont pris égale à ∞ , donc μ et ν égale à ∞ .

C_3 est calculé par l'expression suivante : $C_3 = Q/a$, $C_3 = 0$ pour une extrémité libre et $C_3 = \infty$ pour une extrémité fixe.

II.2.1.3 Etude des cas simples par la méthode d'Euler

II.2.1.3.1 Barre articulée – encastrée

Pour une barre articulée en sommet et encastrée en base l'équation différentielle de la déformée devienne [22]:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \beta^2 y = \frac{Q}{EI} (L - x) \quad \text{avec} \quad \beta = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

La solution générale s'écrit : $y(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x + \frac{Q}{\beta^2 EI} (L - x)$

Nous avons comme conditions aux extrémités :

- Au base de la barre, $x = 0$ et $y = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$
- Au sommet de la barre, $x = L$ et $y = 0$

Les conditions aux extrémités satisfont donc au système homogène de trois équations linéaire :

$$\begin{cases} A \cdot \sin \beta L + \cos \beta L \cdot B + 0 \cdot Q = 0 \\ A \cdot EI \beta^3 + 0 \cdot B + (-1) \cdot Q = 0 \\ A \cdot 0 + EI \beta^2 \cdot B + L \cdot Q = 0 \end{cases}$$

Pour que ce système admette d'autres solutions que la solution triviale : $A = 0$, $B = 0$, $Q = 0$, il faut et il suffit que son déterminant Δ soit nul, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\Delta = \beta^2 EI (\sin \beta L - \beta L \cos \beta L) = 0 \longrightarrow \beta^2 EI = 0 \text{ ou } \sin \beta L - \beta L \cos \beta L = 0$$

$\beta = \sqrt{\frac{N}{EI}}$ doit donc satisfaire à l'équation : $\tan \beta L = \beta L$.

La plus petite racine positive vaut $\beta L = 4.493$; elle correspond au mode fondamental de flambement et donne :

$$N_{cr} = (4.493)^2 \frac{EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.699L)^2}$$

0.699L : Représente la longueur de flambement pour une barre articulée – encastrée.

II.2.1.3.2 Barre double encasté

L'équation différentielle dans ce cas : $\frac{d^2y}{dx^2} + \beta^2 y = \frac{Q}{EI} (L - x) + \frac{M_1}{EI}$.

La solution générale a la forme suivante : $y(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x + \frac{Q}{\beta^2 EI} (L - x) + \frac{M_1}{\beta^2 EI}$

Les conditions aux limites fournissent donc quatre équation linéaires et homogènes, par rapport aux quatre inconnues : A, B, Q, M_1 .

$$\begin{cases} A \sin \beta L + B \cos \beta L + \frac{M_1}{\beta^2 EI} = 0 \\ A \beta \cos \beta L - B \beta \sin \beta L - \frac{Q}{\beta^2 EI} = 0 \\ B + \frac{QL}{\beta^2 EI} + \frac{M_1}{\beta^2 EI} = 0 \\ A \beta - \frac{Q}{\beta^2 EI} = 0 \end{cases}$$

Pour qu'il admette une solution, il faut et il suffit que son déterminant soit nul, c'est-à-dire que l'on ait : $2(\cos \beta L - 1) + \beta L \sin \beta L = 0$, Ou : $\sin \frac{\beta L}{2} \left(\frac{\beta L}{2} \cos \frac{\beta L}{2} - \sin \frac{\beta L}{2} \right) = 0$

L'ensemble des solutions de cette équation est la réunion :

- de l'ensemble des solutions de l'équation : $\sin \frac{\beta L}{2} = 0$ soit : $\beta L = 2n\pi$
- et de l'ensemble des solutions de l'équation : $\frac{\beta L}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta L}{2}$ soit, comme nous l'avons vu sur l'exemple précédant : $\frac{\beta L}{2} = 4.493$.

Donc la plus petite charge critique trouvée est : $N_{cr} = \frac{4 \pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}$ [22].

II.2.2 La méthode énergétique

Lorsque le problème est plus complexe, à cause du mode de chargement, des liaisons ou de la forme de la barre, il est difficile, voire impossible, d'obtenir la déformée exactement, sous forme analytique. La méthode énergétique permet la détermination d'une valeur approchée de la charge critique.

La question de la stabilité des différentes formes d'équilibre d'une barre comprimée est généralement illustrée par une bille reposant sur une surface sphérique en un point où le plan tangent est horizontal (figure I.1).

Dans le premier cas (figure I.1a), tout déplacement de la bille de sa position d'équilibre élève le centre de gravité, c'est-à-dire augmente l'énergie potentielle du système.

Dans le second cas (figure I.1b), il abaisse le centre de gravité et, par suite, diminue l'énergie potentielle du système.

Dans le cas d'équilibre stable, l'énergie potentielle du système est un minimum, tandis que dans le cas de l'équilibre instable, c'est un maximum.

Dans le cas intermédiaire (figure I.1c), un déplacement ne modifie pas l'énergie.

Pour chacun des systèmes représentés par la figure I.1, la stabilité ne dépend que de la forme de la surface d'appui et non du poids de la bille. Si l'on considère une colonne comprimée, l'instabilité dépend de l'intensité de la charge.

Lorsqu'on fait passer le système d'un état d'équilibre de référence à l'état d'équilibre étudié, soient **[4]** :

ΔU : l'énergie potentielle élastique emmagasinée par le système ;
 ΔT : le travail des forces extérieures appliquées au système.

Si on néglige l'effet de l'effort tranchant dans une barre déformée, l'énergie potentielle est donnée par la formule : $\Delta U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx$ ou $\Delta U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$

et le travail des force extérieur est donné par la formule : $\Delta T = N \lambda$.

avec : M est le moment fléchissant de la barre déformée

N est la force de compression appliqué sur la barre

λ : est le déplacement du point d'application de la force N. Il est calculé comme suite :

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

dans les expressions de ΔU et ΔT , l'inconnue c'est l'équation de la déformée y . Pour cela il faut donner une forme de flambement raisonnable. Bien qu'il ne soit pas essentiel pour une solution approchée que les conditions aux extrémités de la barre soient exactement vérifiées, il faut néanmoins qu'elle donne une idée satisfaisante de la forme de la barre.

Comme exemple, considérons une barre encastrée à la base et libre à l'autre extrémité et supposons que nous ne connaissons pas exactement l'expression de la ligne élastique.

On en obtient une approximation en adoptant la courbe d'une poutre cantilever chargée à son extrémité (Figure II.4).

L'équation de cette courbe sera : $y = \frac{Rx^2}{6EI} (3L - x) = \frac{\delta x^2}{2L^3} (3L - x)$

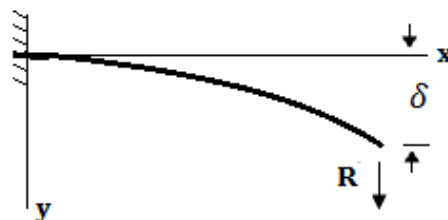


Figure II.4 : Schéma d'une poutre en console chargée à son extrémité

Cette courbe est différente de la courbe réelle qui est : $y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right)$, mais elle satisfait aux conditions aux extrémités.

Le moment de flexion pour une section transversale est : $M = -N(\delta - y)$ et l'énergie correspondante est : $\Delta U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{N^2}{2EI} \int_0^L (\delta - y)^2 dx$.

En remplaçant y par sa valeur, on trouve : $\Delta U = \frac{17}{35} \frac{N^2 \delta^2 L}{2EI}$.

Le travail de la charge N est : $\Delta T = \frac{N}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{3}{5} \frac{N \delta^2}{L}$.

En égalant ΔU et ΔT , on obtient alors : $\frac{17}{35} \frac{N^2 \delta^2 L}{2EI} = \frac{3}{5} \frac{N \delta^2}{L}$

D'où $N_{cr} = \frac{42}{17} \frac{EI}{L^2} = 2.4706 \frac{EI}{L^2}$.

La valeur exacte de la charge critique est : $N_{cr} = 2.4674 \frac{EI}{L^2}$.

L'erreur commise en prenant la solution approchée n'est que de 0.13%.

L'emploi de la méthode de l'énergie en adoptant une courbe arbitraire, mais satisfaisant aux conditions aux extrémités, donne toujours pour la charge critique une valeur plus forte que la valeur exacte. Cela provient du fait que la vraie courbe élastique d'une barre gondolée par flambement est toujours celle qui correspond à la moindre résistance de la barre. Travailler sur une courbe hypothétique revient à introduire dans le système une contrainte additionnelle qui empêche la barre gondolée de prendre une forme autre que celle de la courbe supposée. Or l'introduction d'une contrainte additionnelle de ce genre ne peut qu'augmenter la rigidité du système et la valeur des charges critiques. Si on utilise plusieurs courbes arbitraires, celle qui donnera la plus faible charge critique sera la plus exacte.

Cette méthode peut être améliorée et l'on peut arriver à des solutions beaucoup plus voisines de la solution exacte en prenant comme équation de la courbe une expression contenant plusieurs paramètres ; en faisant varier la valeur de ces paramètres, la courbe change de forme. La charge critique dépend elle-même de ces paramètres. Il ne reste plus qu'à les choisir de manière à rendre minimale la valeur de la charge critique [25].

D'une façon générale, on peut supposer que la courbe de flambement est représentée par l'équation : $y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + \dots$

Dans laquelle $f_1(x)$, $f_2(x)$..., sont des fonctions de x satisfaisant aux conditions aux limites de la barre et a_1 , a_2 ..., sont des constantes.

Pour calculer la charge critique, il faut déduire l'expression de la charge critique par l'égalité entre l'énergie potentielle et le travail des forces extérieures. La charge critique sera donnée en fonction des inconnues, a_1 , a_2 Celles-ci doivent être telles que la charge critique soit minimale. Nous utiliserons alors les équations : $\frac{\partial N}{\partial a_1}, \frac{\partial N}{\partial a_2}, \frac{\partial N}{\partial a_3}$ [25].

II.2.3 La méthode des approximations successives

Nous venons de voir que la méthode fondée sur l'énergie du système permet d'arriver à des solutions approchées dont les valeurs dépendent à l'équation de la déformée choisie. La méthode des approximations successives que nous allons maintenant appliquer à la recherche de la valeur des charges critiques permet de fixer leurs limites supérieure et inférieure. En possession de ces deux limites, on pourra arriver à une solution plus approchée.

Comme la méthode énergétique, il faut supposer à la courbe élastique de la barre une certaine forme qui a pour obligation de satisfaire aux conditions aux extrémités. Cette courbe permet de tracer le diagramme des moments et de calculer les flèches par une méthode quelconque. En comparant la courbe ainsi obtenue par le calcul avec celle prise arbitrairement, on en déduit l'équation permettant de déterminer les valeurs de la charge critique. Ce raisonnement est ensuite repris en utilisant les dernières valeurs de la flèche comme valeurs initiale et ainsi de suite jusqu'à ce que la flèche supposée devienne très proche de la flèche trouvée.

On peut évaluer en chaque point de l'axe de la barre les flèches supposées et calculées en obtenant l'équation de la charge critique. La plus faible valeur de la charge trouvée de cette manière donne la limite inférieure, et la plus forte la limite supérieure de la charge critique. Ainsi à chaque stade de calcul, cette charge est connue entre certaines limites. On obtient une meilleure approximation en utilisant des valeurs moyennes des flèches, comme on va la montrer dans les exemples qui suivent [22].

Pour illustrer cette méthode, soit la barre de la figure II.5a pour laquelle nous connaissons la solution exacte. En première équation, la ligne élastique est une parabole : $y_1 = \frac{4\delta x(L-x)}{L^2}$

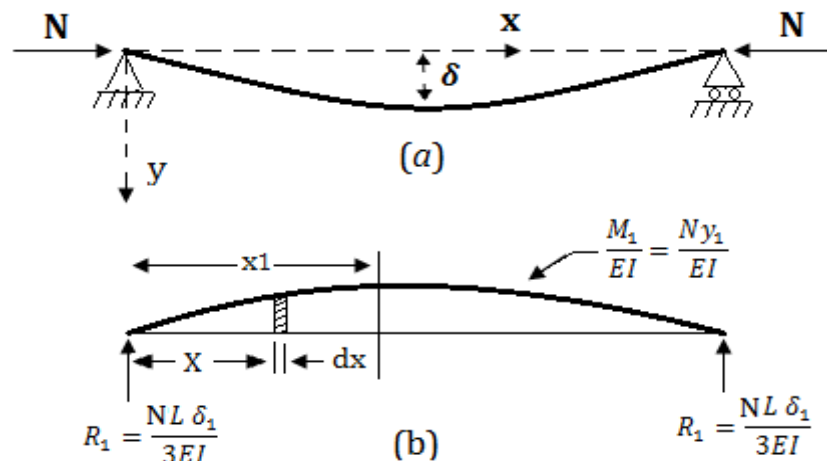


Figure II.5 : Schéma de flambement d'une barre bi-articulée

Le moment de flexion en chaque section de la barre est $M_1 = Py_1$ et on peut obtenir directement la flèche correspondante par la méthode de la poutre conjuguée. Cette poutre conjuguée est représentée sur la figure II.5b et est supposée soumise à la charge fictive M_1/EI . Les flèches cherchées sont numériquement égales aux moments de flexion s'exerçant sur la poutre conjuguée. Les réactions fictives sur la poutre sont : $R_1 = \frac{NL\delta_1}{3EI}$

et le moment de flexion en une section x_1 est : $R_1 x_1 - \int_0^{x_1} \frac{N y_1}{EI} (x_1 - x) dx$.

Portant l'équation de y_1 et R_1 dans l'équation du moment de flexion, on trouve

$$y_2 = \frac{NL\delta_1 x}{3EI} \left(1 - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right).$$

La charge critique s'obtient en égalant les flèches y_2 et y_1 en une section quelconque de la poutre. Ainsi, au centre, on a

$$(y_1)_{x=L/2} = \delta_1, \quad (y_2)_{x=L/2} = \delta_2 = \frac{5NL^2\delta_1}{48EI}$$

d'où, en égalant les deux expressions $N_{cr} = \frac{48EI}{5L^2} = \frac{9.6EI}{L^2}$ qui est plus faible de 2.7% de la valeur vraie. Pour obtenir une valeur plus exacte, nous pouvons calculer comme suit les flèches y_2 et y_1

$$(y_1)_{moy} = \frac{1}{L} \int_0^L y_1 dx = \frac{2}{3} \delta_1, \quad (y_2)_{moy} = \frac{1}{L} \int_0^L y_2 dx = \frac{NL^2\delta_1}{15EI}.$$

Leur égalité donne $N_{cr} = \frac{10EI}{L^2}$ qui est trop forte d'environ 1.3%. Finalement pour déterminer les écarts sur N_{cr} , considérons les valeurs maximales et minimales du rapport y_1/y_2 .

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{12EI}{NL^2} \frac{L^2(L-x)}{L^3 - 2x^2L + x^3}$$

qui est maximal à $x=0$ et minimal à $x=L/2$. Ces valeurs sont : $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)_{max} = \frac{12EI}{NL^2}$, $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)_{min} = \frac{9.6EI}{NL^2}$

donc la valeur critique est comprise entre les valeurs $\frac{9.6EI}{L^2} < N_{cr} < \frac{12EI}{L^2}$.

On peut répéter le cycle en utilisant y_2 comme flèche supposée. On peut l'écrire sous la forme

$$y_2 = \frac{16\delta_2 x}{5L} \left(1 - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right)$$

où δ_2 est la flèche au centre de la barre. Le moment de flexion dans cette barre (figure II.5a) est alors Ny_2 et la charge de la barre conjuguée est $M_1/EI = Ny_2/EI$. Le calcul des moments fictifs sur la barre conjuguée donne la troisième approximation de la flèche

$$y_3 = \frac{8NL^2\delta_2}{75EI} \left(\frac{3x}{L} - \frac{5x^2}{L^2} + \frac{3x^5}{L^5} - \frac{x^6}{L^6} \right).$$

L'égalité de y_2 et y_3 au centre de la poutre donne $\delta_2 = \frac{61NL^2\delta_1}{600EI}$ d'où $N_{cr} = \frac{9.836EI}{L^2}$ qui est inférieure d'environ 0.35% à la valeur vraie. Si les valeurs moyennes de y_2 et y_3 sont égales, on trouve $N_{cr} = \frac{9.882EI}{L^2}$ qui est supérieure d'environ 0.12% à la valeur vraie. Les valeurs minimales et maximales de ce rapport conduisent à $\frac{9.836EI}{L^2} < N_{cr} < \frac{10EI}{L^2}$.

On peut donc pousser la méthode aussi loin que l'on veut pour avoir des résultats aussi précis que possible. Les valeurs de la charge critique obtenues en utilisant les valeurs

moyennes de la flèche sont généralement plus précises que celles obtenues prenant la flèche en un point quelconque de la poutre, son centre par exemple [22].

II.2.4 La méthode itérative de Newmark

Mathématiquement, l'essence de la méthode de Newmark réside dans une technique d'intégration numérique permettant la résolution d'équations différentielles du type $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$. Elle conduit à un calcul rapide des cisaillements et des moments dans des poutres isostatiques quelconques soumises à des charges transversales. Cette méthode est généralement utilisée pour les barres à inertie variable ou les barres soumise à des charges variables.

Pour pouvoir appliquer la méthode de Newmark, il faut diviser la poutre en plusieurs segments égaux. Chaque point de séparation s'appelle port. Le nombre de ports doit permettre une bonne description de la poutre, des chargements et des conditions d'appui. Quand le chargement consiste en des charges concentrées appliquées aux ports, la méthode détermine les cisaillements dans les segments et les moments de manière exacte aux ports. Les cisaillements sont déterminés en faisant la somme algébrique des charges le long de la poutre et on trouve les moments fléchissant en ajoutant ou retranchant les produits des cisaillements successifs par la longueur des segments sur lesquels ils agissent.

Quand la poutre est soumise à des charges réparties, celles-ci peuvent être remplacées par des charges concentrées équivalentes exercées aux ports. Les formules de détermination des charges concentrées équivalentes sont exactes, respectivement pour des distributions de charges linéaires (figure II.6B) et paraboliques (figure II.6D) et approchées pour des distributions d'ordre supérieur. On peut aussi utiliser les formules relatives aux ports d'extrémité chaque fois qu'il y a un saut dans la valeur ou la pente de la charge appliquée (figure II.6A et II.6C).

Une fois que les moments fléchissant sont connus, on peut traiter les courbures en divisant par la rigidité de flexion (EI). Comme les charges (N), le cisaillement (V) et le moment fléchissant (M) suivent les mêmes relations les uns avec les autres que la courbure $\frac{M}{EI}$, la pente (θ) et la flèche (y), on peut en conclure que la procédure utilisée pour calculer les moments fléchissant à partir des charges peut aussi être utilisée pour calculer les flèches à partir des courbures, aussi longtemps que l'on prend en compte les différentes conditions aux limites. Pour pouvoir répéter la procédure ci-dessus, la première étape consiste à remplacer les courbures (quantité répartie de manière continue) par des « courbures concentrées » équivalentes. Physiquement, ces quantités représentent le changement brutal de pente qui a lieu aux nœuds d'une poutre hypothétique formée de segments rigides articulés les uns aux autres et dont la raideur de flexion est fournie exclusivement par des ressorts spirales placés aux articulations [10].

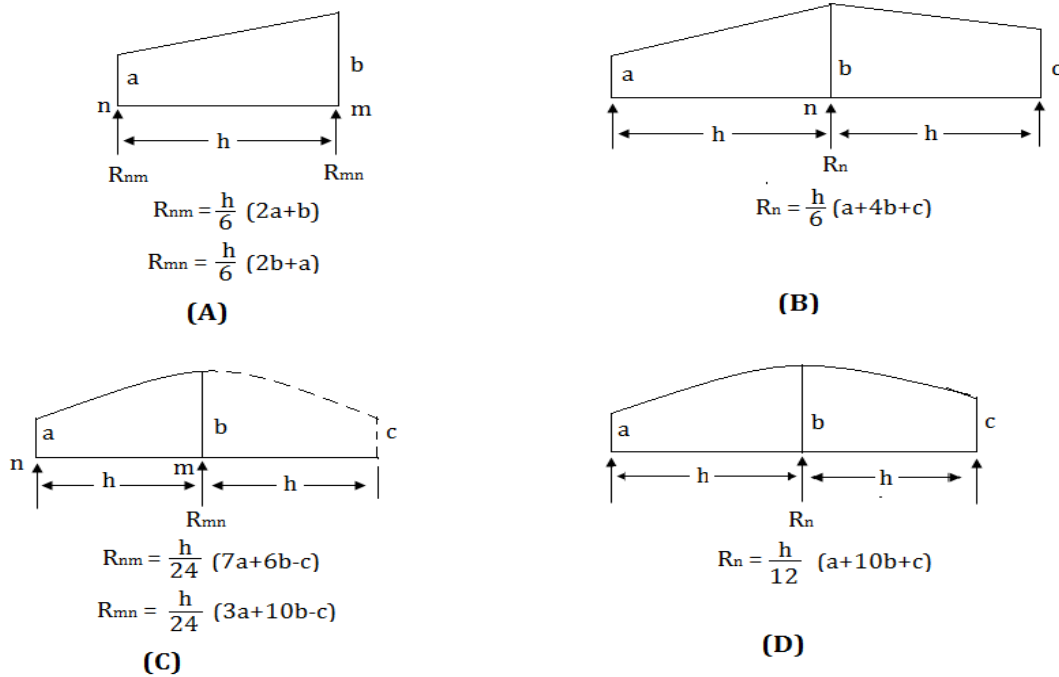


Figure II.6 : Formules des charges équivalentes données par Newmark

Les variations de pente sont équivalentes à des courbures réparties dans le sens qu'elles produisent les mêmes pentes et flèches aux ports. Les formules à utiliser pour calculer les courbures concentrées équivalentes sont celles utilisées pour les charges et représentées sur la figure II.6C et II.6D. Ensuite la procédure donne successivement les pentes moyennes des segments et les flèches aux ports. Il faut noter que ces quantités sont précisément les charges concentrées équivalentes, les cisaillements moyens et les moments fléchissant de la poutre conjuguée sollicitée par des charges réparties coïncidant avec le diagramme de courbure de la poutre initiale (le concept de courbure concentrée est remplacé par la définition de la poutre conjuguée).

II.2.5 Méthodes numériques

II.2.5.1 Méthode des différences finies

La base de la méthode des différences finies d'Euler consiste donc à diviser le domaine d'intégration en un certain nombre de sous-domaines ou intervalles, en supposant les fonctions linéaires à l'intérieur du sous-domaine. L'utilisation de cette méthode sera développée au chapitre 4 (voire IV.2.1).

II.2.5.2 Méthode des éléments finis

Le flambement présente l'un des exemples du non linéarité géométrique. Le calcul de flambement par les éléments finis se fait en tenant compte de la matrice d'élasticité classique de la structure $[K]$ et en intégrant la matrice dite de rigidité géométrique $[K_g]$ qui représente la non linéarité géométrique. La matrice de rigidité géométrique contient des termes qui sont fonction de la valeur de l'état de contrainte dans les éléments.

En intégrant les deux matrices $[K]$ et $[K_g]$, l'équation à résoudre est alors la suivante [15]:

$$[[K] + [K_g]] \{u\} = \{F\}$$

avec : $\{u\}$: Vecteur des déplacements de la structure,
 $\{F\}$: Vecteur des efforts extérieurs,

En intégrant dans les calculs la matrice de rigidité géométrique, les termes de rigidité des deux matrices peuvent être en opposition. Prenons l'exemple d'une poutre en flexion, cette poutre aura une rigidité plus faible si elle est initialement comprimée et plus élevée si elle est tendue. Cette exemple illustre bien la philosophie de la méthode du flambement généralisé où l'on recherche le coefficient θ_{cr} qui, multiplié par la charge, annule, la rigidité de la structure. On est donc amené à résoudre l'équation suivante :

$$\det [K] - \theta_{cr} [K_g] = 0$$

La matrice de rigidité associée aux contraintes initiales d'un élément de poutre s'écrit :

$$[K_g] = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité aux petits déplacements d'une telle poutre est donnée par :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \end{bmatrix}$$

On prend par exemple le cas d'un poteau encastré libre divisé en 1 seul élément. On peut éliminer les lignes et les colonnes relatives aux déplacements dues aux charges axiales de la matrice $[K]$ et $[K_g]$ (ligne 1 et 4, colonne 1 et 4), parce que la restriction du poteau est négligée. L'application des conditions aux limites ($y(0) = 0$ et $y(L) = 0$) nous conduit à l'élimination de la lignes 2 et 3, de la colonnes 2 et 3 des matrices $[K]$ et $[K_g]$. Alors l'équation

$\det [K] - \theta_{cr} [K_g] = 0$ devient :

$$\det \left(\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \end{bmatrix} - \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L \\ -3L & 4L \end{bmatrix} \right) = 0$$

La résolution de cette équation donne : $N = 2.486 \frac{EI}{L^2}$.

La valeur exacte est $N = \frac{\pi^2 EI}{4 L^2} = 2.467 \frac{EI}{L^2}$. L'erreur commise est de 0.77%.

La division de la barre en plusieurs éléments augmente les dimensions de la matrice [K] et [K_g].

II.3 Resistance de barreaux réels

Les paragraphes suivants s'intéressent à la résistance des éléments industrielle selon le CCM97 et l'effet des imperfections inévitables dues au procédé de fabrication sur la réponse des structures réelles ; on va considérer tout d'abord les imperfections prises séparément, puis combinées.

Selon CCM97, la résistance de calcul d'un élément comprimé élancé à section constante et soumis à une compression constante centrique s'écrit : $N_{b,Rd} = \frac{\chi \beta_A A f_y}{\gamma_{M1}}$.

avec : $\beta_A = 1$ pour les sections pleinement efficaces en compression (classes 1 à 3);
 $\beta_A = A_{eff} / A$ Pour les sections partiellement efficaces en compression (classe 4).

Le coefficient de réduction χ est destiné à tenir compte du fait que la résistance ultime de l'élément est inférieure à celle de la section transversale en raison du phénomène de flambement. Le facteur γ_{M1} est le coefficient partiel de sécurité qui s'applique à toutes les fonctions de résistance gouvernées par l'instabilité. Normalement γ_{M1} est pris égal à 1.

La relation ci-dessus régit le flambement par flexion, dans les deux plans principaux de la section. Elle s'applique en particulier aux sections laminées à chaud doublement symétriques, communément utilisées pour réaliser des barres comprimées (sections ouvertes en I ou en H, sections creuses circulaires ou rectangulaires).

Pour les éléments comprimés à section transversale constante, sollicités en compression axiale uniforme sur leur longueur et articulés à leurs extrémités, la valeur du coefficient χ de réduction est fonction de l'élancement réduit $\bar{\lambda}$ [11]:

$$\chi = \frac{1}{1 + \sqrt{2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1$$

où : $\chi = 0.5(1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2)$ avec α le facteur d'imperfection propre à la courbe de flambement considéré. $\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\beta_A A f_y}{N_{cr}}} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \sqrt{\beta_A}$

$$\text{avec } \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93.9 \varepsilon, \quad \lambda = \frac{L_f}{i}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

λ_1 est l'élancement réduit.

L_f est la longueur de flambement

i est le rayon de giration ; $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

La contrainte critique d'Euler est donnée par la formule : $\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL_f} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

En traçant la courbe σ_{cr} en fonction λ sur un graphique (Figure II.7), et en faisant apparaître la ligne horizontale, $\sigma = f_y$, représentant la plasticité parfaite, il est intéressant de remarquer les

zones idéalisées représentant la ruine par flambement, la ruine par plastification et la zone de sécurité.

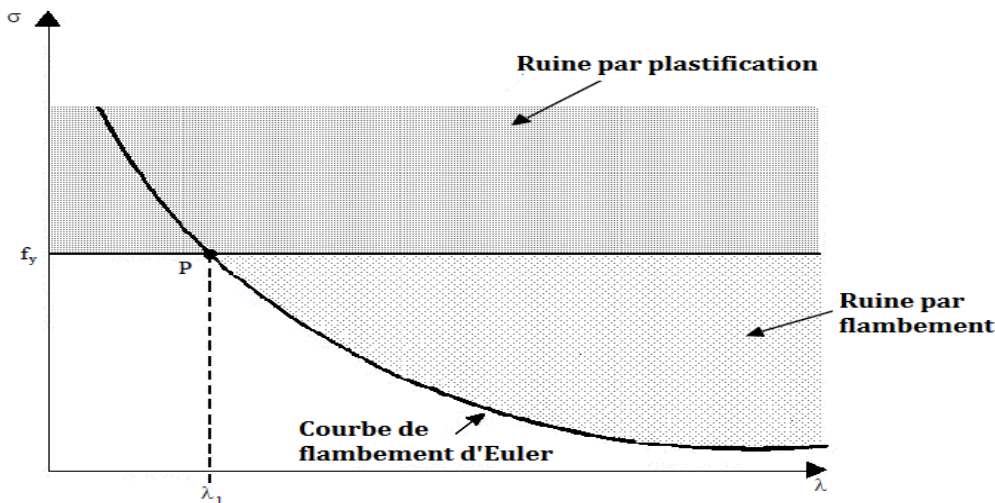


Figure II.7 : Courbe de flambement d'Euler et modes de ruine

Le point d'intersection P des deux courbes représente la valeur théorique maximale de l'élancement d'un poteau comprimé jusqu'à la limite d'élasticité. Cet élancement limite, où σ_{cr} est égal à la limite d'élasticité de l'acier.

Les courbes $\chi = f(\bar{\lambda})$ sont connues sous le nom de courbes européennes de flambement. Ces courbes, qui fournissent des valeurs caractéristiques de résistance, sont fondées sur les résultats de plus de 1000 essais réalisés sur divers types d'éléments, avec différentes valeurs d'élancement. Une approche probabiliste, utilisant la résistance expérimentale, associée à une analyse théorique, permet de dessiner des courbes décrivant la résistance des poteaux en fonction de l'élancement de référence. Une imperfection géométrique demi-sinusoïdale de grandeur égale à 1/1000 de la longueur du poteau, ainsi que l'effet de contraintes résiduelles concernant chaque type de section transversale, sont pris en compte. Les résultats d'essais fournissent des points représentatifs qui peuvent s'écarter très significativement de la courbe de flambement théorique (Figure II.8). Cette situation est due non seulement des imperfections mais aussi de l'écrouissage.

Dans le domaine des faibles élancements, la résistance des éléments est peu sensible au flambement. Les effets favorables de l'écrouissage non pris en compte dans le calcul compensent largement les effets défavorables des imperfections. Ceci explique que l'on trouve des points expérimentaux au-dessus de la courbe $\chi = f_y$. Dans le domaine des grands élancements, le flambement se produit pour ainsi dire élastiquement, donc sans plastification marquée, pour de faibles taux de contrainte; les points expérimentaux se situent sous l'hyperbole d'Euler mais restent proches de celle-ci. C'est dans le domaine des élancements intermédiaires auquel appartiennent la plupart des éléments fortement comprimés rencontrés en pratique, que l'interaction entre la plastification et l'instabilité est la plus marquée, et en particulier aux abords de λ_1 .

Un poteau peut être considéré comme élancé si son élancement est supérieur à celui correspondant au point d'inflexion de la courbe limite inférieure indiqué dans la Figure II.8. La charge de ruine ultime pour ces poteaux élancés est proche de la charge critique d'Euler (N_{cr}) et elle est donc indépendante de la limite d'élasticité de l'acier.

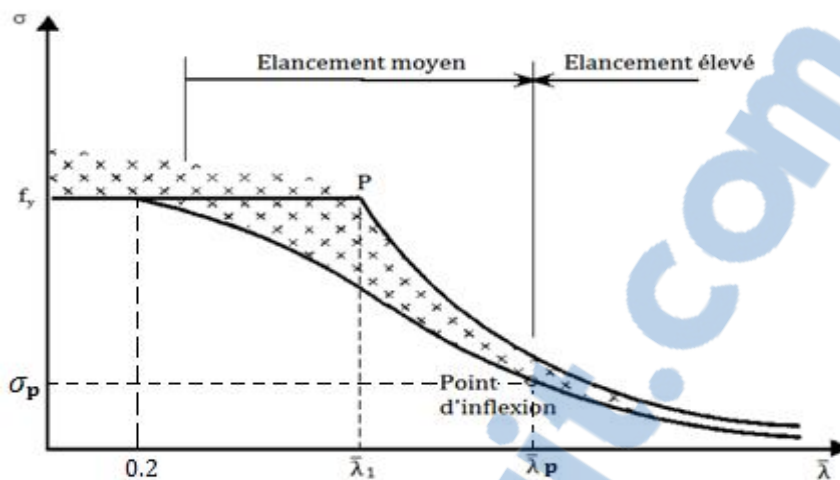


Figure II.8 : Courbes de flambement et résultats d'essais de poteaux réels

Les poteaux à élancement moyen sont ceux dont le comportement s'écarte le plus de la théorie d'Euler. Lorsque le flambement survient, la limite d'élasticité est déjà atteinte dans certaines fibres et la charge ultime ne dépend plus exclusivement de l'élancement; plus il y a d'imperfections, plus la différence entre les comportements réel et théorique est importante.

L'examen critique des résultats obtenus a révélé que les effets des imperfections sur la résistance ultime des éléments comprimés dépendent de divers facteurs [12]:

- la forme de la section transversale (I, H, sections creuses, caissons soudés, ...);
- le plan de flambement (flexion autour de l'axe fort ou autour de l'axe faible);
- la massivité de la section transversale, mesurée par le rapport hauteur/largeur;
- l'épaisseur des parois;
- le mode d'élaboration de la barre comprimée (laminage à chaud ou à froid, soudage).

Tous ces facteurs régissent principalement la distribution et l'intensité des contraintes résiduelles et, plus accessoirement, la forme et l'amplitude des défauts de rectitude. Leurs effets sont pris en charge à l'aide d'une valeur appropriée du paramètre d'imperfection α , qui croît avec l'intensité des imperfections.

Il est également apparu qu'il n'est pas possible, sous peine d'être indûment pénalisant, de couvrir toute la gamme des types de sections à l'aide d'une courbe de flambement unique. Il a donc été décidé de sélectionner quatre courbes de flambement (désignées respectivement par a , b , c et d) représentées à la Figure II.9 et caractérisées par les valeurs du paramètre α reprises au Tableau II.2.

Tableau II.2 : Valeurs du paramètre d'imperfection

Courbe	a_0	a	b	c	d
α	0.13	0.21	0.34	0.49	0.76

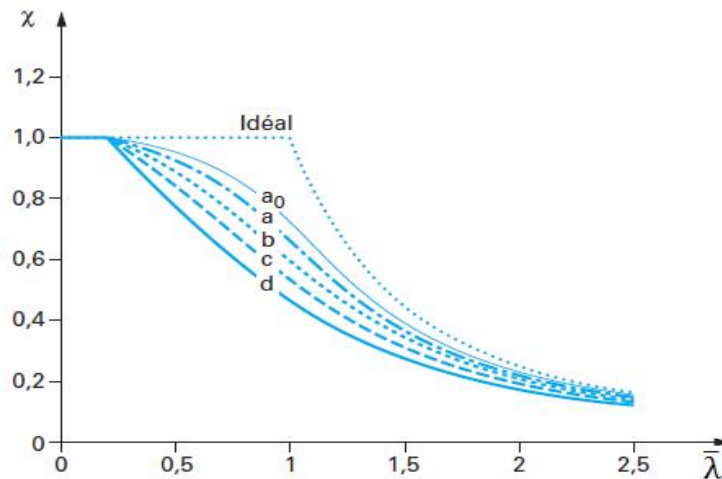


Figure II.9 : Courbes Européennes de flambement

II.3.1 Imperfection géométrique

Le flambement se caractérise par un champ de déplacement prédominant associé à la configuration après flambement de l'élément ; tout déplacement initial influera donc sur l'instabilité, de même que toute excentricité de la charge appliquée. Les effets secondaires de déstabilisation qui en résultent réduisent la capacité de charge, par rapport à celle d'un élément parfait.

Un poteau peut être géométriquement imparfait à deux égards :

- soit, il est initialement parfaitement rectiligne, mais l'effort de compression agit avec une excentricité e_0 supposée constante ;
- soit, il est chargé axialement, mais il est affecté d'une déformée initiale $y_0(x)$.

II.3.1.1 Excentricité du chargement

Pour une barre rectiligne, soumise à une force de compression appliquée à une excentricité e_0 de cette barre, avec $e_0 \ll L$ (figure II.10).

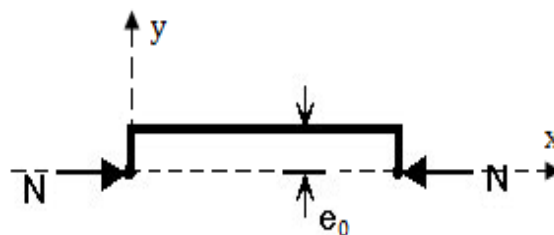


Figure II.10 : Barre soumise à une charge excentrée

L'équation différentielle de la déformée reste la même d'une barre bi-articulée avec chargement centré.

Après l'introduction des conditions aux extrémités, on trouve que la déformée s'écrit [4] :

$$y(x) = e_0 \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\beta L}{2} \right) \sin \beta L + \cos \beta L \right]$$

La flèche maximum est celle prise par le point d'abscisse $L/2$, qui vaut :

$$f = y\left(\frac{L}{2}\right) - e_0 = \frac{1 - \cos \frac{\beta L}{2}}{\cos \frac{\beta L}{2}} e_0$$

Avec $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ et $\beta = \sqrt{\frac{N}{EI}}$ on peut écrire $\frac{\beta L}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{cr}}}$

$$\text{d'où : } f = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{cr}}}}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{cr}}}} e_0 \quad \text{et} \quad M\left(\frac{L}{2}\right) = N y\left(\frac{L}{2}\right) = N e_0 \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{cr}}}}$$

Le rapport $\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{cr}}}}$ est un facteur d'amplification du moment primaire $N e_0$

L'instabilité du poteau rectiligne chargé excentriquement ne procède pas par bifurcation d'équilibre en raison de l'existence de moments de flexion dès le début de la mise en charge (figure II.11).

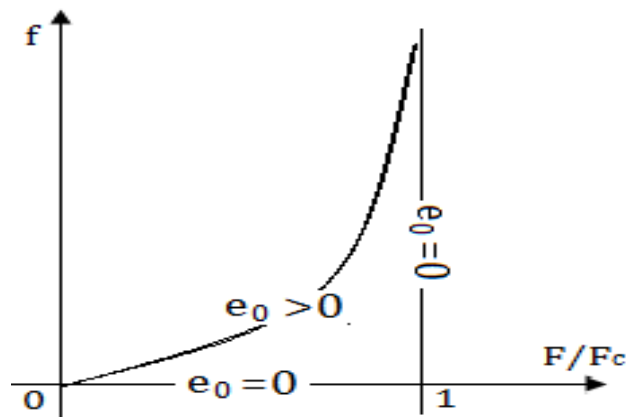


Figure II.11 : Trajectoire d'équilibre d'un poteau chargé excentriquement

II.3.1.2 Barre déformée initialement

Le défaut de rectitude de l'axe du poteau comprimé joue de très loin le plus grand rôle. Un élément comprimé qui présente un défaut de rectitude initial $y_0(x)$ est soumis, dès le début de sa mise en charge, à de la flexion composée. Dès l'application d'un effort axial, si faible soit-il, l'amplitude de la déformée initiale augmente en raison du bras de levier offert à l'effort sollicitant, et des moments de flexion qui en résultent (figure II.12). On est ainsi amené à substituer au concept de flambement par bifurcation de l'équilibre celui de flambement par divergence de l'équilibre. Les défauts de rectitude sont généralement prisent comme des demi-ondes de sinusoïde (cette forme, étant affine au mode fondamental de flambement du poteau, est la plus défavorable).

Si l'on considère une colonne bi-articulée avec une déformée initiale en demi-ondes de sinusoïde alors l'équation fondamentale s'écrit [4]:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{N(y_0(x) + y(x))}{EI} = 0 \quad \text{avec} \quad y_0(x) = e_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$



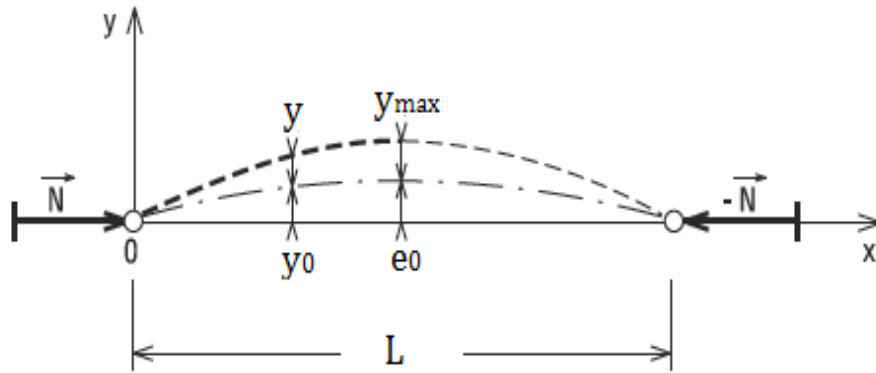


Figure II.12 : Amplification de la déformée initiale

L'intégration de l'équation différentielle ci-dessus fournit la déformée additionnelle :

$$y(x) = \frac{e_0}{1 - \frac{NL^2}{\pi^2 EI}} \sin \frac{\pi x}{L} = \frac{e_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \sin \frac{\pi x}{L}$$

La déformée est maximale à mi-longueur et la flèche vaut : $y_{max} = \frac{e_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}}$.

Cette section est la plus sollicitée; la sollicitation y est composée de l'effort de compression N et du moment fléchissant au second ordre $M = \frac{Ne_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}}$. Le moment $M_0 = Ne_0$, dit moment primaire parce que évalué par référence à la configuration initiale de l'élément, est amplifié par le facteur $1/(1 - N/N_{cr})$ dit facteur d'amplification.

Si maintenant on continue de charger en augmentant N de manière à plastifier la section, on peut définir trois phases de comportement.

- En phase 1 : Le comportement est élastique et la flèche au milieu est égale à $\frac{N_{cr}e_0}{N_{cr} - N}$.
- En phase 2 : la section au milieu est partiellement plastifiée.
- En phase 3 : il y a création d'une rotule plastique et le moment plastique transmis devient $M_p = 2.A.\sigma_e$ s'il n'est pas contrarié par la présence de N . La flèche au milieu vaudra simplement $y_{max} = M_p / N$.

On peut représenter sur un graphique (figure II.13) le comportement de cette barre. On remarque que, en dessous d'un point de bifurcation d'équilibre, ou $N = N_{cr}$ pour une barre idéalement parfaite et en équilibre, il existe une loi de comportement (phases 2 et 3) qui se traduit par une divergence d'équilibre associée à une plastification partielle. Le point d'intersection des deux courbes correspond à un point de divergence d'équilibre. Ce point correspondrait à une ruine brutale de la section.

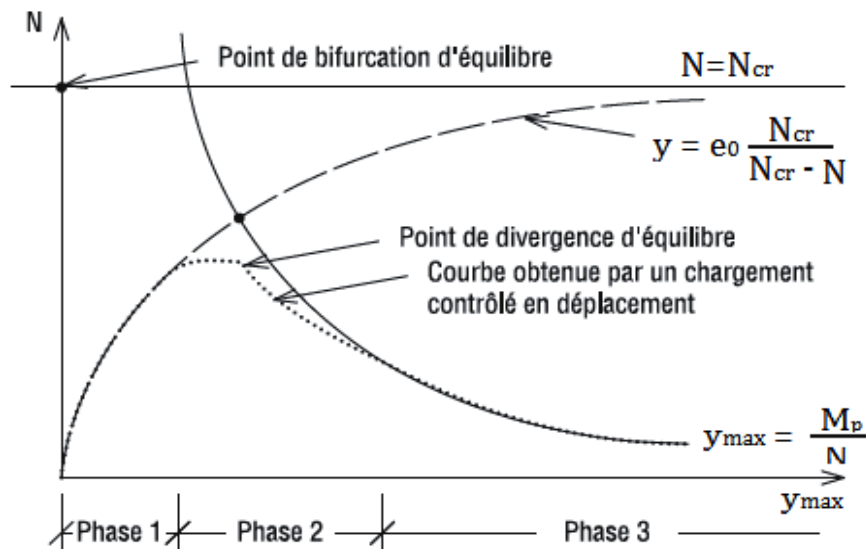


Figure II.13 : La déformée élasto-plastique

Le poteau géométriquement imparfait a un comportement strictement élastique jusqu'à une charge sous laquelle la fibre la plus comprimée atteint la limite d'élasticité f_y , et un comportement élasto-plastique au-delà de cette charge. Au niveau de la fibre la plus comprimée, la contrainte s'écrit :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{Ne_0}{1 - (N/N_{cr})} \frac{h}{I} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_0 h}{i^2} \frac{1}{1 - (N/N_{cr})} \right)$$

avec : h est la distance entre l'axe neutre élastique et la fibre comprimée

On remarquera que les facteurs d'amplification, relatifs aux deux cas examinés plus haut, sont formellement différents selon que l'imperfection géométrique est une déformée initiale ou une excentricité de la charge. Toutefois, en termes de valeurs, ils se différencient peu dans le domaine des rapports N/N_{cr} susceptibles d'être rencontrés en pratique, soit inférieurs à 0,5.

II.3.2 Imperfections structurales

Les imperfections structurales résident, d'une part, dans la variation de la limite d'élasticité à l'intérieur d'une même section, voire de section à section et, d'autre part, dans les contraintes résiduelles dont l'origine principale thermique (refroidissement différentiel lors du laminage ou après soudage).

La dispersion des valeurs mesurées de la limite d'élasticité dans une section donnée résulte du mode d'élaboration du produit, elle est en particulier liée à l'épaisseur des parois constituant la section : pour un acier de nuance donnée, la limite d'élasticité diminue avec l'accroissement de l'épaisseur de la paroi et des écarts de l'ordre de 10 % peuvent être observés. Au niveau des calculs, on néglige ces variations mais on se réfère à une valeur nominale de la limite d'élasticité, qui est aussi une valeur minimale garantie par le producteur.

Les contraintes résiduelles maximales présentes dans un profilé laminé de type H sont de l'ordre de 140 à 160 MPa. Ces valeurs, qui sont pour ainsi dire indépendantes de la valeur de la limite d'élasticité, sont principalement gouvernées par les dimensions et la configuration

de la section transversale, et, accessoirement, par les conditions d'ambiance lors du refroidissement (Figure II.14a).

L'existence de contraintes résiduelles dans une section est la cause d'une plastification prématurée. Elle a donc pour effet de précipiter le développement de la plastification en section produisant une perte de raideur et qui, par conséquence, accroît le taux de variation de la déformée totale. La réduction de la capacité portante d'un élément comprimé sera plus grande lorsque la valeur maximale des contraintes résiduelles de compression sera importante (Figure II.14b)

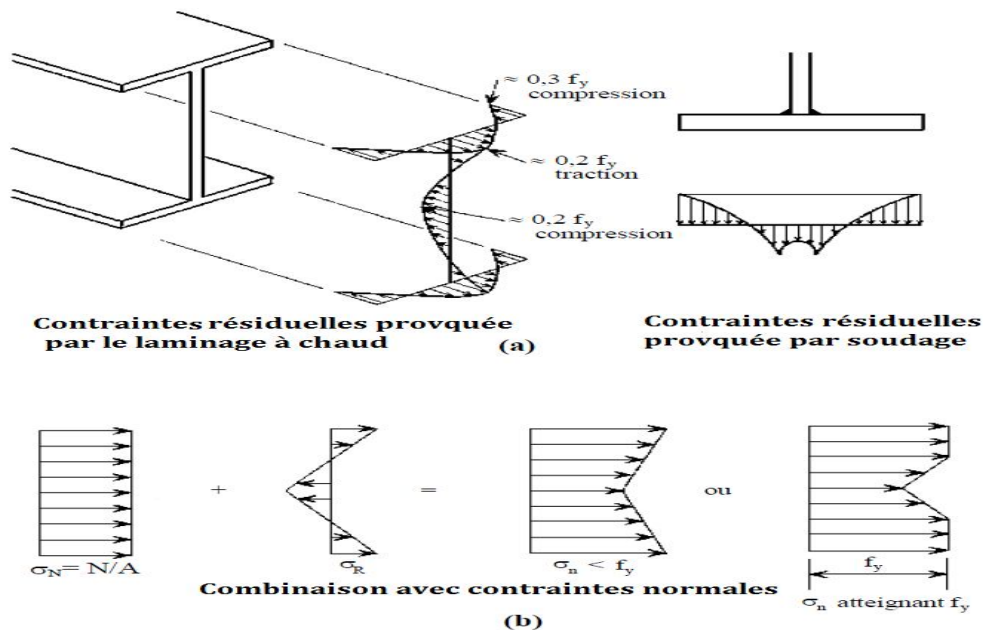


Figure II.14 : Schéma des contraintes résiduelles

Pour un poteau à faible élancement, la charge d'écroulement n'est pas affectée par les contraintes résiduelles, elle est encore égale à la charge plastique d'écrasement. De la même manière, des barreaux très élancés, dont la contrainte critique de flambement ne dépasse pas σ_p (figure II.15), flambent de manière élastique et ne sont pas affectés par les contraintes résiduelles. Cet effet des contraintes résiduelles est le plus visible dans la gamme des élancements intermédiaires ; dans ce cas, un écoulement plastique prématuré réduit la rigidité de flexion et le barreau flambe de manière inélastique pour une valeur de charge en dessous, à la fois de la charge critique élastique de flambement et de la charge plastique d'écrasement [17].

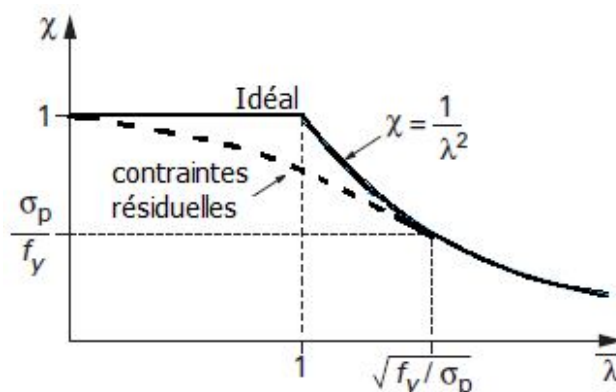


Figure II.15 : Incidence des contraintes résiduelles sur la capacité portante

II.3.3 Effets combinés des imperfections

Une courbure initiale, une excentricité initiale de la charge, des contraintes résiduelles ou un manque de clarté dans la définition du point d'écoulement plastique diminuent la résistance du poteau dans toute la gamme de l'élancement ou une partie. Par ailleurs, l'écrouissage augmente probablement la courbe de résistance, bien qu'il n'affecte que la gamme des élancements faibles. L'effet bénéfique ainsi obtenu fait en général plus que compenser la perte de résistance due aux excentricités accidentelles; dans tous les cas la courbe de résistance du poteau est considérée comme tronquée à $\sigma = f_y$, de telle sorte que l'on ignore la réserve de résistance.

Lorsque l'effort de compression atteint sa valeur ultime N_u . On a ainsi [12] :

$$\frac{N_u}{A \beta_A} + \frac{N_u e_0}{w[1-(N_u/N_{cr})]} = f_y \quad \text{ou} \quad \frac{N_u}{A \beta_A} \left(1 + \frac{e_0 h}{i^2} \frac{1}{1-(N_u/N_{cr})} \right) = f_y$$

Compte tenu des expressions définissant le facteur de réduction $\chi = N_u/N_y$ et l'élancement relatif $\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\beta_A A f_y}{N_{cr}}}$, cette dernière relation s'écrit encore : $\chi + \chi \frac{1}{1-\chi \bar{\lambda}^2} \eta_g = 1$ ou encore : $(1-\chi)(1-\chi \bar{\lambda}^2) = \chi \eta_g$.

En posant l'imperfection géométrique relative : $\frac{e_0 h}{i^2}$

Si on annule la déformée initiale e_0 (pas d'imperfection géométrique), l'équation du second degré en χ a visiblement pour solutions respectives $\chi = 1$ et $= 1/\bar{\lambda}^2$, c'est-à-dire le palier plastique et l'hyperbole d'Euler (voir figure II.15). Le produit $\chi \eta_g$ traduit l'effet de l'imperfection géométrique. Il a pour effet de générer une courbe de résistance s'inscrivant entre les courbes limites. À ce stade, on n'a pas incorporé l'effet des contraintes résiduelles; on a toutefois vu que ces dernières sont reflétées par une courbe de même allure que celle reflétant l'effet des imperfections géométriques. C'est pourquoi, il est licite de remplacer, dans la dernière relation obtenue, η_g par l'imperfection généralisée relative h couvrant les deux types d'imperfections. En raison du palier de 0,2 adopté pour les raisons développées plus haut, il importe que la courbe de résistance passe par le point de coordonnées $[\bar{\lambda} = 0.2 ; \chi = 1]$. Pour satisfaire cette exigence, il suffit d'écrire l'imperfection généralisée relative sous la forme : $\eta = \alpha(\bar{\lambda} - 0.2)$. Dès lors, toute courbe de résistance au flambement est susceptible de répondre à l'équation du second degré :

$$(1-\chi)(1-\chi \bar{\lambda}^2) = \alpha(\bar{\lambda} - 0.2)$$

Le paramètre d'imperfection généralisée α règle donc l'altitude de la courbe.

La seule solution de la dernière équation et qui ait un sens physique est :

$$\chi = \frac{1}{1 + \sqrt{2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1 \quad \text{avec} \quad \alpha = 0.5(1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2)$$

La relation de départ correspond à une analyse limite élastique. Elle n'incorpore donc aucun effet de plastification. Il suffit toutefois de calibrer la valeur du paramètre α de sorte que la charge de ruine du poteau réel, qui résulte de l'interaction entre plasticité et instabilité corresponde à celle fournie par le modèle analytique. Cette calibration s'est faite par rapport

aux valeurs tabulées des courbes de flambement (obtenues, rappelons-le, par simulations numériques).

On résume l'effet combiné des imperfections par un schéma des contraintes qui additionne la contrainte provoqué par la charge de compression $\sigma = N/A$, la contrainte de flexion σ_B provoqué par le défaut de rectitude et la contrainte résiduelle σ_R (figure II.16). Si la contrainte maximale σ_{max} est supérieure à la contrainte limite d'élasticité, la répartition finale sera partiellement plastique.

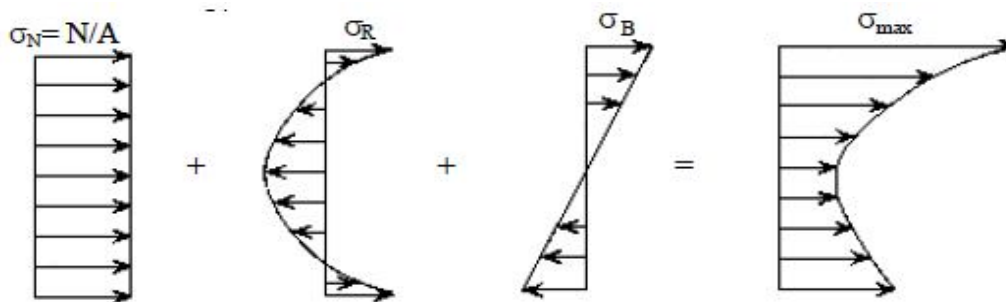


Figure II.16 : Combinaison des contraintes dans la section la plus sollicitée

L'Eurocode 3 suggère des valeurs à donner à l'amplitude e_0 d'une imperfection en arc pour étudier un poteau par la théorie du second ordre. L'effet de ces amplitudes sur le flambement du poteau est équivalent à la combinaison des deux types d'imperfection (géométrique et matérielle). La valeur de e_0 données par l'Eurocode 3 dépend de type d'analyse (élastique, plastique ou élasto-plastique) et la courbe de flambement associé (voir figure 5.5.1 de L'Eurocode 3) [12].

II.4 Conclusion

Les problèmes de stabilité sont toujours non linéaires, dans le sens que les équations d'équilibre et les conditions aux limites doivent être établies dans la configuration déformée de la structure. On ne peut donc obtenir des solutions analytiques que pour des problèmes simples de flambement, pour des structures dont le nombre de degrés de liberté est faible.

Les méthodes énergétiques donnent en fait des limites supérieures de la charge critique de flambement, ce qui n'est pas pratique en conception. La précision de ces méthode dépend de choix initiale de la déformé du flambement

Les imperfections ont pour effet de diminuer la capacité portante de l'élément comprimé. La perte de résistance la plus importante est obtenue dans le domaine des valeurs d'élancements $\lambda \approx \lambda_1$, pour lesquelles les charges plastiques d'écrasement et les charges critiques de flambement élastique coïncident presque et donc interagissent le plus.

L'effet des imperfections est faible dans la gamme des valeurs d'élancements très grands et la charge ultime est proche de la charge critique de flambement élastique.

La charge critique dépend seulement de la nature de matériau, les caractéristiques géométriques et les conditions d'appuis. Les imperfections n'ont pas une influence sur la charge critique.

Chapitre III

Méthodes de calcul du flambement des éléments à section variable linéaire

III.1 Introduction

Le comportement des profilés à inertie variable a été largement discutée dans la littérature. On trouve aussi des règlements qui utilisent généralement les résultats des études pour transformer la barre à inertie variable à une barre équivalente à inertie constante par des facteurs non dimensionnels. Certains règlements fixent le moment d'inertie et l'aire de la section transversale et ils déterminent une longueur de flambement équivalente. D'autres fixent la longueur réel de l'élément et ils déterminent un moment d'inertie et une aire équivalentes.

Les chercheurs dans leurs études utilisent des méthodes différentes pour résoudre l'équation différentielle du flambement. Le choix de la méthode dépend généralement de la forme de l'équation (l'ordre de l'équation, la loi de la variation de l'inertie, les charges appliquées...). Les plus fréquemment rencontrés sont :

- L'approche des fonctions de Bessel [9] ;
- L'approche énergétique [14];
- L'approche de Newmark [10];
- L'approche de série polynomiale [21];
- la méthode de perturbation [16], [20];
- L'approche de la fonction de noyau [27] ;
- La méthode itérative vibrationnelle [20];
- Les méthodes numériques comme : les éléments finies, les différences finies et la méthode de quadrature différentiel.

Dans cette partie, nous allons présenter certaines études réalisées et qui seront utilisées par la suite pour l'élaboration des règlements. Nous allons aussi présenter quelques règlements qui s'intéressent au flambement des barres à inertie variable sous charge axiales.

III.2 Avantages des profilés à inertie variable

Le choix d'un élément à inertie variable plutôt qu'un élément à inertie constante peut être conditionné par de nombreux facteurs. Les éléments à section constante sont dimensionnés en fonction de la section critique. Les contraintes dans cette section sont maximales et moindres dans les autres sections. De cette manière, le rendement de la section présente des valeurs faibles.

L'utilisation des éléments à inertie variable est un moyen pour économiser de l'acier. Elle a pour but d'adapter la forme du profilé à la distribution des contraintes de l'élément.

L'exemple de la poutre en console soumise à un effort de flexion semble bien indiqué pour mettre en évidence ce gain de matériau. Le moment fléchissant conditionne le dimensionnement de tels éléments. Il ne faut pas oublier l'effet de l'effort tranchant. Mais il semble que dans ce cas de la poutre en console, l'utilisation d'une poutre à inertie variable serait justifiée. Le principe étant distribuer la matière suivant la répartition des contraintes.

Par fois les éléments à section variable sont utilisés seulement pour l'esthétique de l'ouvrage.

Il est difficile de dire qu'une barre à inertie variable présente un meilleur rendement qu'une barre à inertie constante. Le gain de matériau doit compenser le coût supplémentaire de fabrication des barres à inertie variable.

III.3 Hypothèses et notation

Les règlements et les études présentées dans cette partie considèrent généralement les poteaux à hauteur d'âme variable linéairement (figure III.1). Quelques études sont valables pour d'autres types de profilés à inertie variable (section rectangulaire, circulaire, en caisson...).

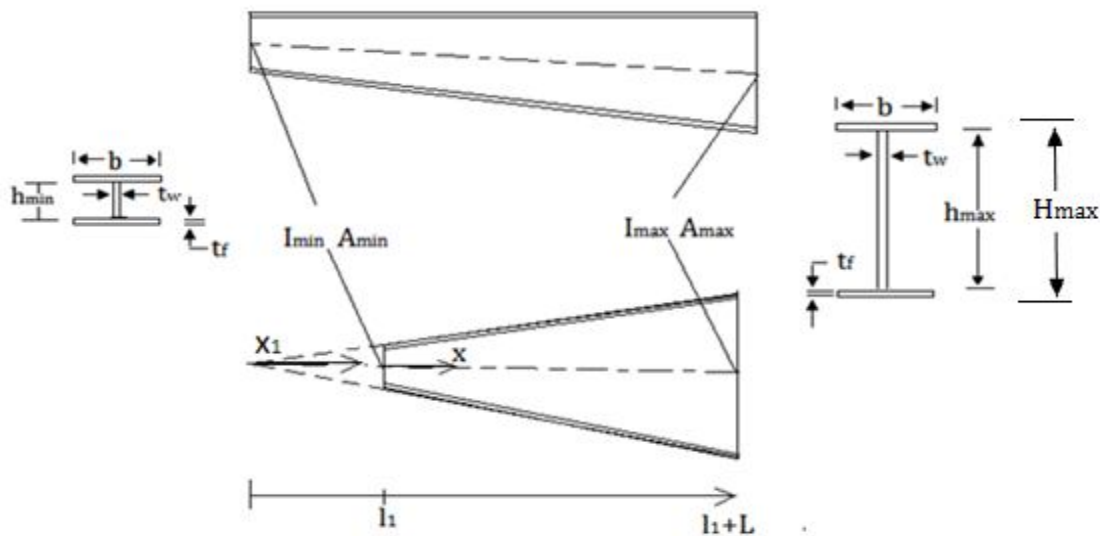


Figure III.1 : Poteaux à section variable linéairement

III.4 Longueur de flambement équivalent

Les méthodes basées sur ce principe consistent à trouver une longueur de flambement équivalente pour un élément à inertie constante. On trouve que ces méthodes subdivisent en celles qui s'appuient sur une aire de section transversale et sur un moment d'inertie correspondant à A_{min} et I_{min} et celles qui sont basées sur A_{max} et I_{max} .

III.4.1 Méthodes basées sur A_{min} et I_{min}

III.4.1.1 Méthode de Carter et Gere

L'étude de Carter et Gere porte sur le problème du flambement des poteaux de différentes formes et avec plusieurs conditions d'appuis.

Leur étude désigne les poteaux parfaitement élastiques et comprimés par une charge axiale.

La loi de variation du moment d'inertie de l'élément est la suivante [9] :

$$I(x) = I_{min} \left[1 + \left(\frac{H_{max}}{H_{min}} - 1 \right) \frac{x}{L} \right]^n \quad (III.1)$$

$$n = \log \left(\frac{I_{max}}{I_{min}} \right) / \log \left(\frac{H_{max}}{H_{min}} \right) . \quad (III.2)$$

n : est un coefficient qui dépend de la forme de la section. Dans leur étude, ils ont disposé 4 grandes familles de sections. Ceci est résumé dans le tableau (III.1).

La forme de l'équation d'inertie permet de résoudre l'équation différentielle du flambement par les fonctions de Bessel (voir l'annexe A) en utilisant le changement de variable suivant :

$$\left[1 + \left(\frac{H_{max}}{H_{min}} - 1\right) \frac{x}{L}\right] = v \implies \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \left[\left(\frac{H_{max}}{H_{min}} - 1\right) / L\right],$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dv^2} \left[\left(\frac{H_{max}}{H_{min}} - 1\right) / L\right]^2.$$

L'équation différentielle totale du flambement s'écrit

$$\frac{d^2 y}{dv^2} + \frac{P}{\left[\left(\frac{H_{max}}{H_{min}} - 1\right) / L\right]^2 EI_{min} v^n} y = \frac{f(v)}{\left[\left(\frac{H_{max}}{H_{min}} - 1\right) / L\right]^2 EI_{min} v^n}. \quad (III.3)$$

Cette loi de variation du moment d'inertie se confond avec l'équation réelle lorsque le coefficient de forme est entier et donne des valeurs tolérables si le coefficient de forme n'est pas entier.

Les 4 familles de sections sont étudiées pour 4 cas différents de conditions d'appui. Un cas concerne un poteau bi-articulé, un deuxième cas un poteau encastré en bas et libre en tête, un troisième cas un poteau encastré en bas et articulé en tête et enfin un poteau bi-encastré.

Les résultats de cette étude sont résumés en 4 graphes. Nous les avons représentés dans la figure (III.2). Ils ont défini un coefficient non dimension P^* , dont les valeurs sont fonction du rapport $\frac{h_{max}}{h_{min}}$ et de la valeur du coefficient de forme n (Tableau III.1).

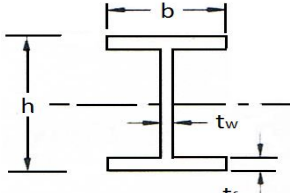
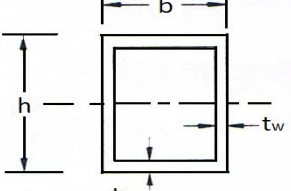
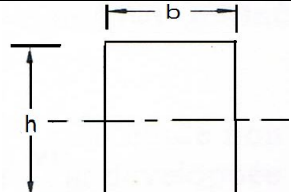
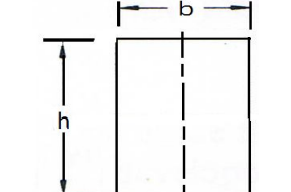
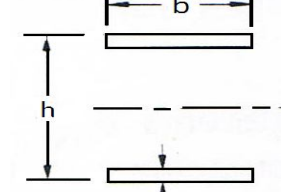
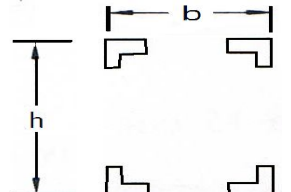
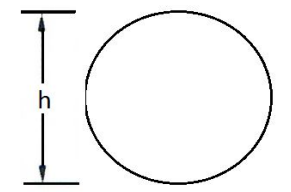
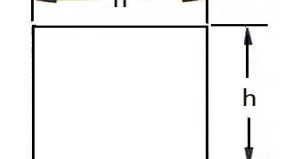
La charge critique de l'élément à inertie variable P_{cr} s'exprime en fonction de P^* de la manière suivante :

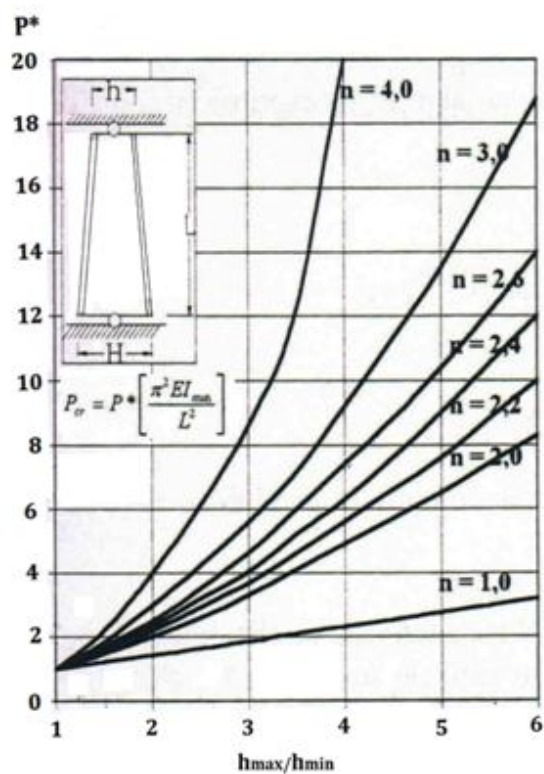
$$P_{cr} = P^* \frac{kEI_{min}}{L^2} \quad (III.4)$$

k : est un coefficient qui prend en compte les conditions d'appui pour un élément à inertie constante.

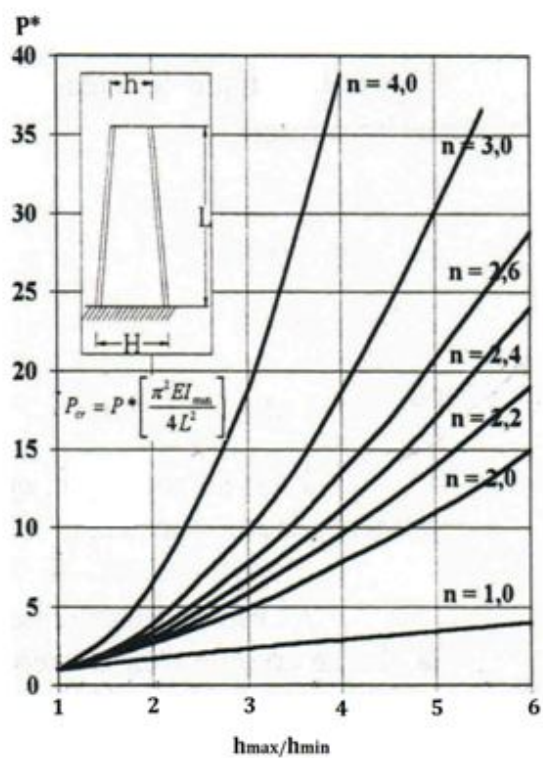
L'étude de Carter et Gere a été la base de développement de nombreuses méthodes et règlement ultérieurement.

Tableau III.1 : Définition du facteur de forme pour différents types de section

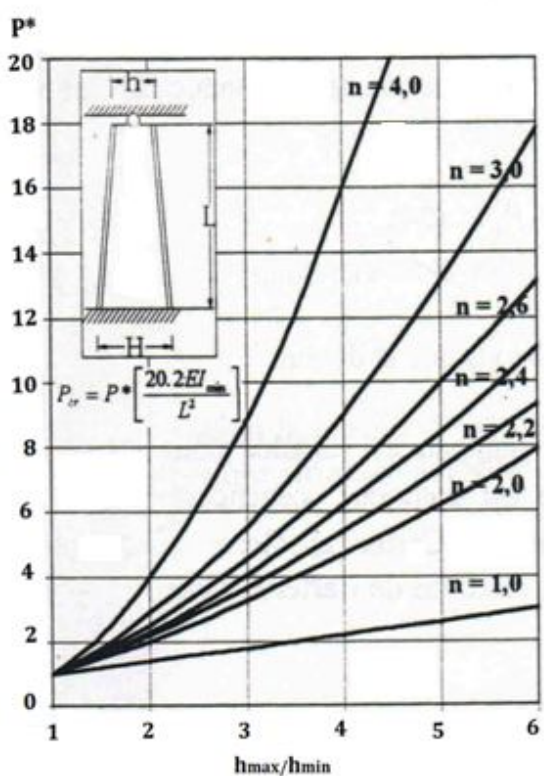
Forme de la section		Facteur de forme n
	Section en I ou en H Dimensions constantes b , t_f , t_w h est la hauteur variable Flambement autour de l'axe horizontal	2.1 à 2.5
	Section en caisson fermé Dimensions constantes b , t_f , t_w h est la hauteur variable Flambement autour de l'axe horizontal	2.1 à 2.5
	Section rectangulaire pleine Largeur constant b h est la hauteur variable Flambement autour de l'axe horizontal	3
	Section rectangulaire pleine Largeur constant b h est la hauteur variable Flambement autour de l'axe vertical	1
	Section ouverte Dimensions constantes b , t_f h est la hauteur variable Flambement autour de l'axe horizontal	2
	Section de tour Aire constante concentré autour des coins h est la hauteur variable	2
	Section circulaire pleine h est la hauteur variable	4
	Section carré pleine h est la hauteur variable	4



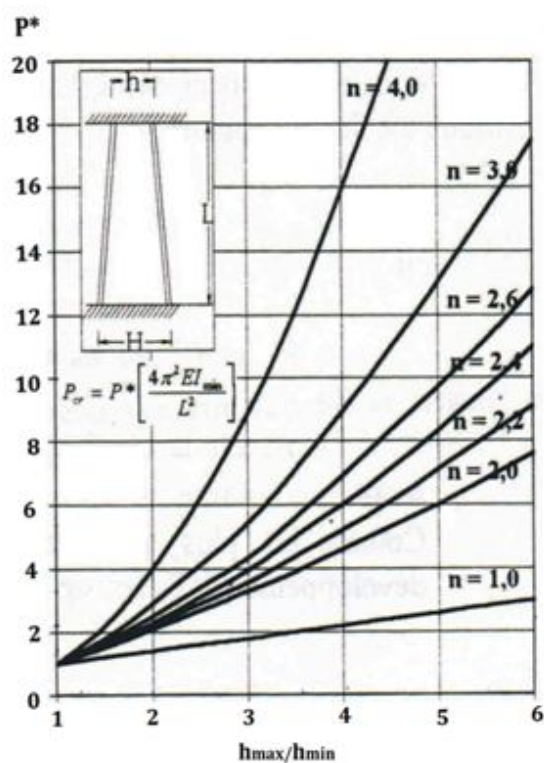
Cas 1 double articulation



Cas 2 encastrement et libre



Cas 3 encastrement articulation



Cas 4 double encastrement

Ainsi Colbert applique la méthode proposée par GERE et Carter au besoin des autoroutes. Les relations proposées par Colbert ressemblent beaucoup à celles de Gere et Carter et le déroulement des calculs se fait suivant le même fil conducteur. La charge critique est définie comme suite :

$$P_{cr} = P^* P_A \quad (III.4)$$

Où : P_{cr} et P^* ont les mêmes définitions que ci-dessus.

P_A : La charge critique de flambement calculée pour un poteau de section constante.

Colbert donne, en plus, les expressions simplifiées de P^* pour trois familles de section, mais cela sans tenir compte des conditions limites de la barre. Ces expressions sont intégrées par la suite comme s'il s'agissait d'un élément à inertie constante. Ceci permet de mieux distinguer l'influence de la nature de la section pour les problèmes de flambement de barres à inertie variable. Les expressions (III.5) correspondent à un poteau bi-articulé, n est le coefficient de forme comme défini dans le tableau (III.1).

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad P^* = \left(\frac{H_{max}}{H_{min}} \right)^{0.6} \quad (III.5a)$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad P^* = \left(\frac{H_{max}}{H_{min}} \right)^{1.6} \quad (III.5b)$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad P^* = \left(\frac{H_{max}}{H_{min}} \right)^2 \quad (III.5c)$$

III.4.1.2 Méthode de Galéa

Galéa a étudié les poteaux à inertie variable sur toutes la longueur et celles à inertie variable sur une partie du poteau. La variabilité de l'inertie est due à la variabilité du hauteur d'ame.

Les lois de variation qu'il a adopté sont les suivantes :

$$I(x_1) = I_{min} \left(\frac{x_1}{L} \right)^2 \quad \text{ou} \quad I(x) = \left(\frac{x}{L} (\sqrt{I_{max}} - \sqrt{I_{min}}) + \sqrt{I_{min}} \right)^2 \quad (III.6)$$

$$\text{Pour l'aire de la section } A(x_1) = A_{min} + \frac{(A_{max} - A_{min})(x_1 - l)}{L} . \quad (III.7)$$

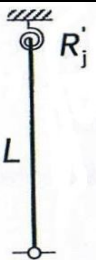
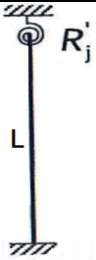
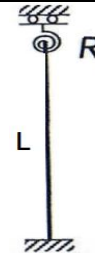
Il donne la charge critique pour un poteau articulé en tête intégré dans une structure à nœuds fixes ou mobiles.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(r L_f)^2} \quad (III.8)$$

Où :

L_f : est la longueur de flambement d'une barre à inertie constante soumise au même environnement que la barre à inertie variable. Elle peut être calculée selon l'annexe E de l'eurocode 3, ou par le tebleau (III.2) donné par Galéa dans l'article [13].

Tableau III.2 : Longueur de flambement des poteaux pour des portiques à un niveau

	Nœuds fixes		Nœuds mobiles	
Cas				
L_F	$L_F = L \frac{3 + 0.7R_j}{3 + R_j}$	$L_F = L \frac{0.7 + 0.16R_j}{1 + 0.32R_j}$	$L_F = L \sqrt{4 + \frac{9.6}{R_j}}$	$L_F = L \sqrt{\frac{4 + 1.25R_j}{1 + 1.25R_j}}$

r : est un coefficient qui intervient sur la longueur de flambement et qui prend en compte la variation linéaire de la hauteur de la barre. Ce coefficient est donné par des courbes figurant dans l'article [13], il est fonction du rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}}$ ainsi que d'un coefficient K .

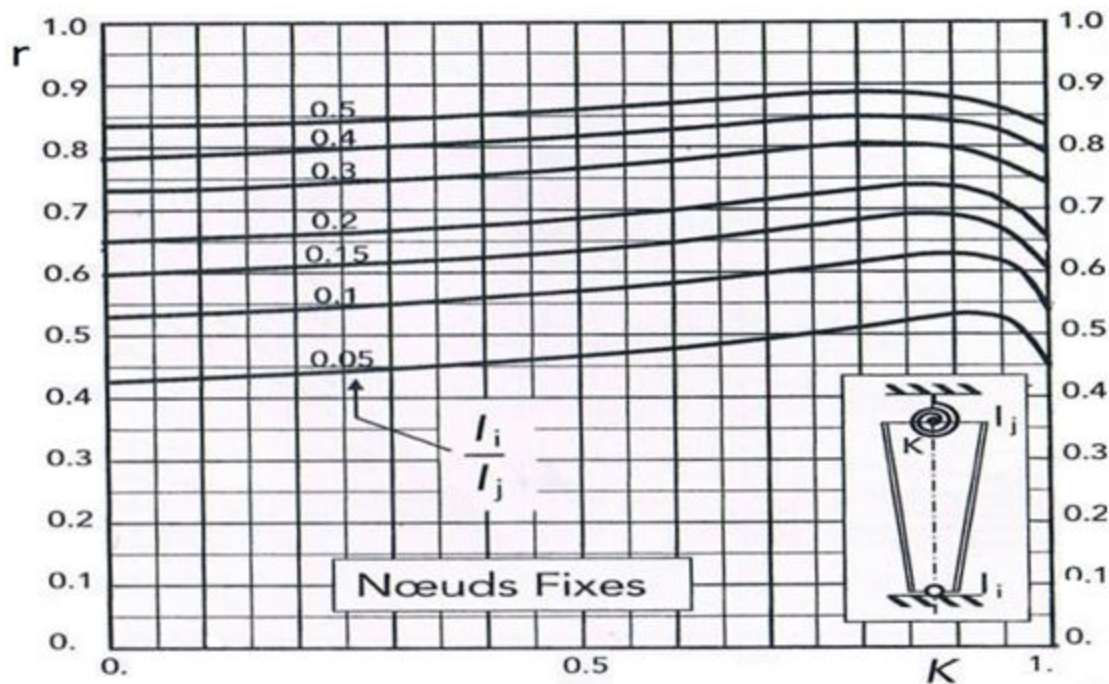
K : coefficient traduisant la rigidité du ressort de liaison en tête du poteau

$K = \frac{R_j}{R_j + 1}$ avec $R_j = R_j \frac{L}{EI_{min}}$, R_j : ressort d'encastrement élastique en tête du poteau.

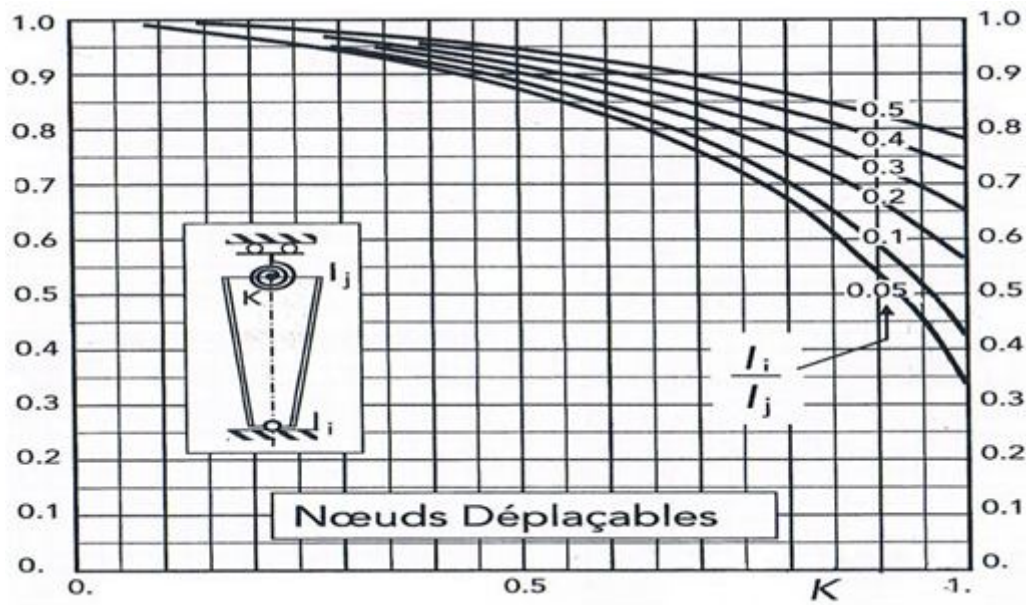
$R_j = \frac{EI}{L_v}$ pour les nœuds fixes et $R_j = 3 \frac{EI}{L_v}$ pour les nœuds mobiles.

L_v : demi-longueur du traverse.

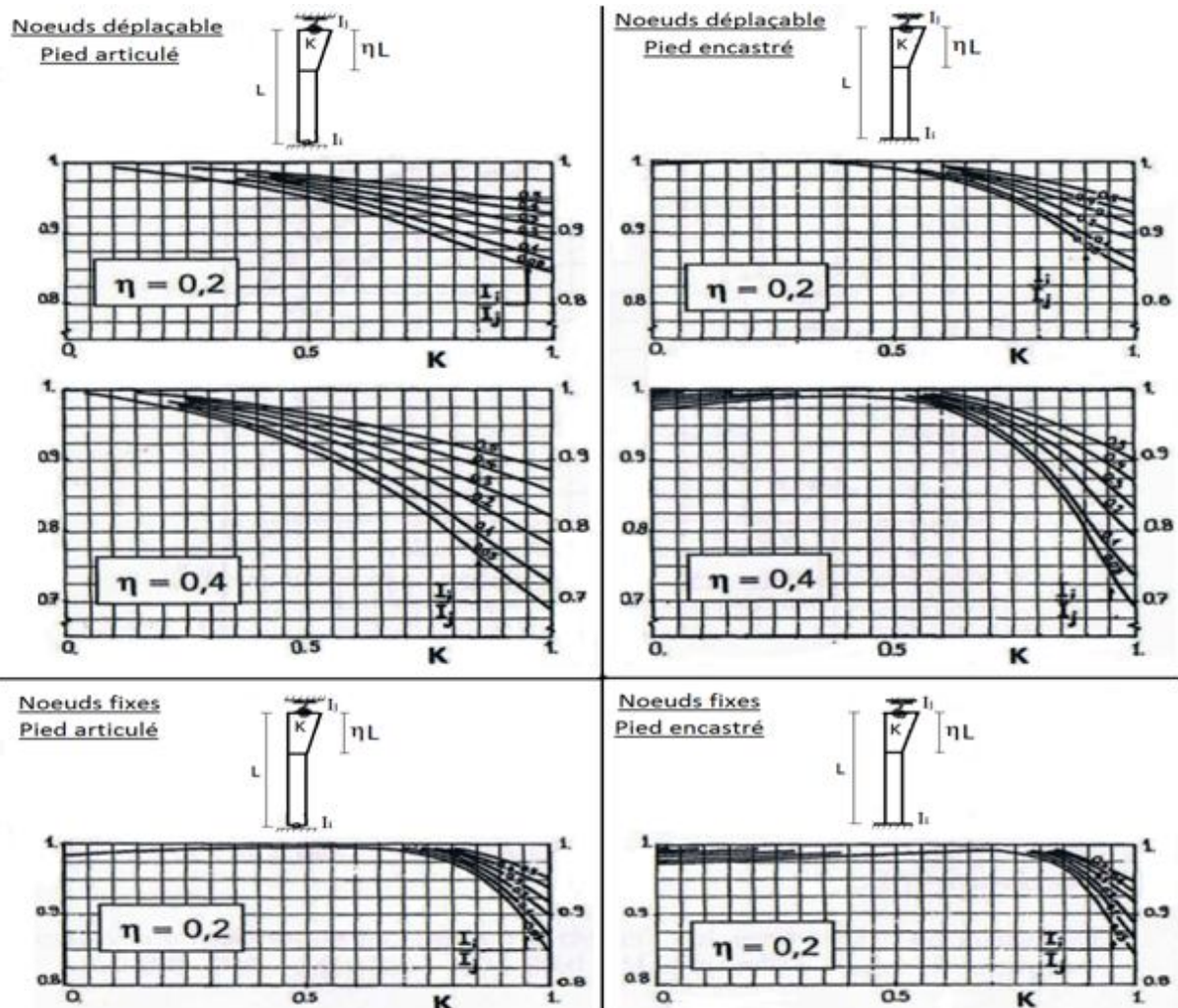
Les figures (III.3) , (III.4) et (III.5) donnent les valeurs de r pour des structures à nœuds fixes et à nœuds mobiles et les poteaux à jarrets.



Figures III.3 : Le coefficient r pour une structure à nœuds fixes



Figures III.4 : Le coefficient r pour une structure à nœuds mobiles



Figures III.5 : Coefficient r pour un poteau à jarrets

III.4.1.3 Méthode de Shiomi et Kurata

Cette méthode définit un coefficient de longueur équivalent en prenant pour base l'aire et le moment d'inertie de la plus petite section extrême. Une de leurs hypothèses repose sur le fait que la charge ultime doit être calculée avec la courbe a des courbes européennes de flambement pour le flambement selon l'axe fort et avec la courbe b pour le flambement selon l'axe faible.

Ils posent un rapport qui résume parfaitement leur démarche [23]:

$$\frac{\text{charge ultime dunélément à inertie variable de longueur } L}{\text{charge ultime dunélément à inertie constante de longueur } gL} = 1$$

Ils ont de cette manière défini plusieurs coefficients g qui correspondent chacun à des cas bien particuliers. Ces coefficients sont calculés en fonction de deux paramètres :

$$\gamma = \frac{h_{max} - h_{min}}{h_{min}} \quad (III.9) \quad , \quad \vartheta_d = \tan^{-1} \left[\frac{h_{max} - h_{min}}{2L} \right] \left(\frac{180}{\pi} \right) \quad (III.10)$$

Les barres en I ont des relations différentes pour le flambement suivant l'axe fort (relation III.11) et l'axe faible (relation III.12) qui sont respectivement pour une étude non élastique :

$$g_{pI} = \frac{1}{1.85\vartheta_d + 1} \quad (III.11)$$

$$g_{pO} = \frac{1}{0.6\vartheta_d + 1} \quad \text{si } \vartheta_d < 1 \quad (III.12a)$$

$$g_{pO} = 0.625 \quad \text{si } \vartheta_d \geq 1 \quad (III.12b)$$

Pour les sections rectangulaires, deux relations en fonction du type d'étude, soit élastique (relation III.13), ou non élastique (relation III.14) :

$$g_{eB} = \frac{1}{0.733\gamma + 1} \quad (III.13)$$

$$g_{pB} = \frac{1}{6.6\vartheta_d^2 + 1.4\vartheta_d + 1} \quad (III.14)$$

La figure (III.6) donne la représentation de la dispersion des résultats de la charge ultime avec un coefficient de longueur équivalente g_{pI} .

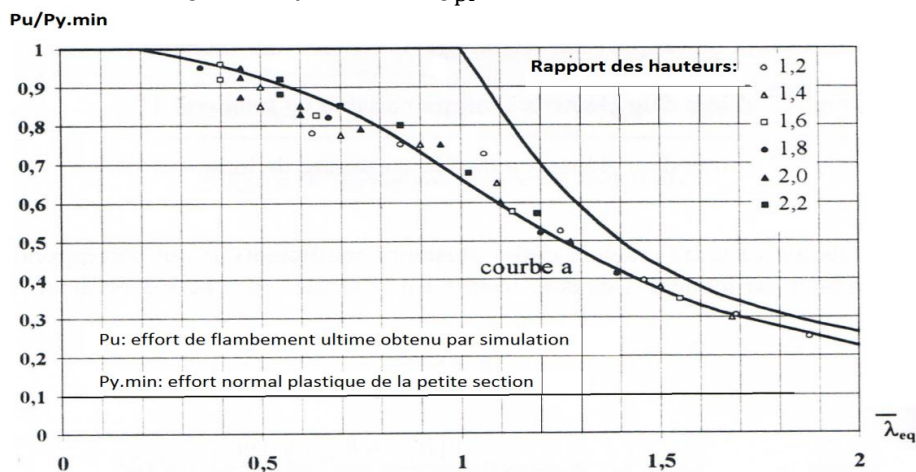


Figure III.6 : Dispersion des résultats autour de la courbe a de flambement

$$\text{L'élancement équivalent est aussi défini : } \bar{\lambda}_{(eq)e} = \frac{g_{pI} L}{\pi i_{min}} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (III.15)$$

i_{min} : Le rayon de giration de la plus petite section extrême.

III.4.1.4 Méthode de Mendera

La méthode de Mendera se rapproche de celle de Galéa, notamment les expressions des charges critiques de flambement.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\gamma u L)^2} \quad (III.16)$$

γ : coefficient de passage d'un élément à inertie variable de longueur L à un élément équivalent de section constante A_{min} et de longueur γL .

u : est un facteur de longueur efficace pour les barres prismatiques.

Le coefficient γ [18] peut être comparé au coefficient r de Galia et au coefficient g de Shiomi et Kurata [23]. Mais il a une grande similitude avec le coefficient r , c'est qu'il est lui aussi fonction du rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}}$.

III.4.1.5 Méthode adoptée par le LFRD

Le règlement américain L.F.R.D de 1986 [2] se base sur un élément équivalent qui aurait une aire de section transversale A_{min} et un moment d'inertie I_{min} et qui serait définie par un élancement réduit.

$$\bar{\lambda}_{eff} = \frac{K_y L}{\pi i_{min}} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (III.17)$$

Cette expression de l'élancement est identique à celle définie par Shiomi et kurata à la relation (III.15), il suffit de remplacer le facteur K_y par g_{PI} . Normalement ces deux facteurs doivent être identiques pour donner les mêmes résultats d'élancement.

L'élément doit vérifier la relation suivante :

$$\frac{N_{sd}}{\chi_y A_{min} f_y} \leq 1 \quad (III.18)$$

N_{sd} : La charge appliquée.

χ_y : est un facteur de flambement. Ce facteur est une fonction de la variation de l'inertie de la barre mais il s'exprime de la même façon que le facteur χ de l'Eurocode 3. Il se place trop en sécurité selon Mendera et cela surtout pour les barres qui ont un élancement modéré.

III.4.1.6 Méthode adoptée par le SSRC

Le SSRC 76 [24] propose une méthode de calcul de la charge critique basée sur la plus petite section. Leur raisonnement ressemble à celui de Shiomi et Kurata[23], ils posent un rapport :

$$\frac{\text{résistance de l'élément à inertie variable}}{\text{résistance de l'élément à inertie constante (section min)}} = f(\gamma, h_{min}, h_{max}, L)$$

Ils l'écrivent encore d'une autre manière : $P_{\text{inertie variable}} = P_{\text{inertie constante}} f(\gamma, h_{min}, h_{max}, L)$

Ils ont défini la charge critique pour le flambement suivant les deux axes, l'axe de faible et forte inertie.

Ils ont négligé le facteur modificateur lorsqu'il y a une faible variation du rayon de giration. Cela est valable pour l'axe faible.

Pour l'axe fort, ils ont remplacé la fonction f par le facteur $\frac{1}{g^2}$, donc la charge critique est

$$\text{donné par l'expression suivante : } (N_{cr,ex})_\gamma = \frac{\pi^2 EI_{min} \cdot x}{(gL)^2} \quad (III.19)$$

$I_{min. x}$: L'inertie de la plus petite section suivant l'axe fort.

$$g = \gamma - 0.375 \gamma + 0.08 \gamma^2 (1 - 0.0775 \gamma) \quad (III.20)$$

avec

$$\gamma = \frac{h_{max} - h_{min}}{h_{min}} \quad (III.21)$$

L'expression de g montre que la formule de la charge critique donnée ci-dessus correspond à une barre articulée à ses extrémités. Pour les autres conditions d'appui le SSRC76 définit un coefficient K_γ qui remplace g . Il prend en compte la variation de l'inertie du poteau et les inerties des poutres.

Le SSRC définit des courbes pour le calcul de K_γ des structures à nœuds fixes et mobiles dont les variantes sont les géométries des poutres et le coefficient γ du poteau (figure III.7).

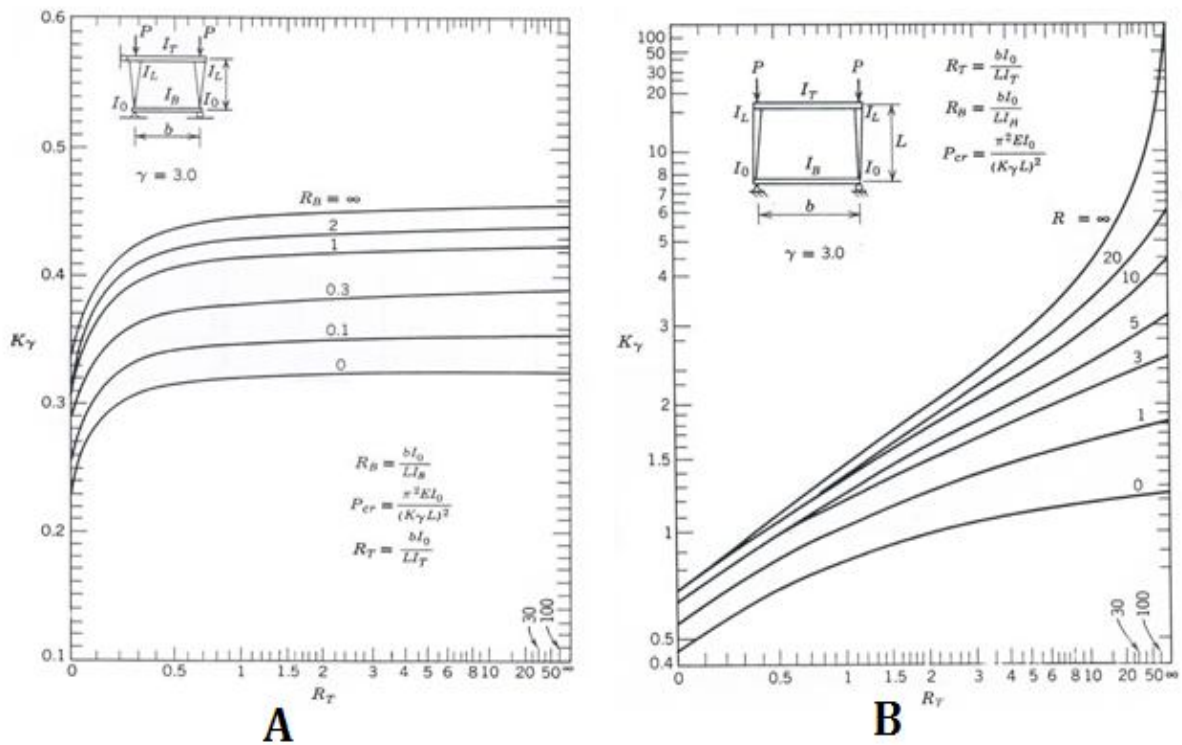


Figure III.7 : Facteur de longueur équivalente d'un poteau à inertie variable d'une structure à nœuds fixes (A) et une structure à nœud mobile (B) avec $\gamma = 3$.

Une étude non élastique de la charge critique suivant l'axe fort de la section est également développée dans ce chapitre du recueil du SSRC :

Si le rapport qui donne l'élancement soit $\frac{L}{i_{min}}$ est plus petit que $C_c = \sqrt{\frac{2 E \pi^2}{f_y}}$, alors la charge critique non élastique $(N_{cr,x})_\gamma$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$(N_{cr,x})_\gamma = \left[1 - \frac{(gL/i_{min})^2}{2C_c} \right] f_y A_{min} \quad (III.21)$$

III.4.2 Méthodes basée sur A_{max} et I_{max}

III.4.2.1 Méthode de Mendera

Dans le même article de Mendera [18] cité ci-dessus. Il propose un modèle de calcul basé sur l'inertie maximale. Les expressions ressemblent à celles basée sur l'inertie la plus petite. La charge critique est donnée par l'expression suivante :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\beta u L)^2} \quad (III.22)$$

u : est définie au paragraphe (III.4.1.4)

β : une fonction de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$ qui permet le passage d'une barre à inertie variable de longueur L à une barre prismatique de section A_{max} et de longueur .

III.4.2.2 Méthode de Butler et Anderson

Cette étude ressemble à celle du Carter et Gere. Ils font appel à la notation de facteur de forme, puis ils étudient les 4 cas de conditions d'appui identique à ceux de l'étude de Carter et Gere [8].

Ils ont déduit la formule de l'inertie à partir de celle donnée par Carter et Gere [3]:

Le type de variation d'inertie étudié par Butler et Anderson, varie en fonction de la hauteur et la largeur de l'élément.

Ils définissent la charge critique par l'expression suivante : $P_{cr} = \mu \frac{\pi^2 EI_{max}}{L^2}$ (III.23)

Où : μ est un coefficient dépend de n , du rapport $\frac{b_{min}}{b_{max}}$ et les conditions d'appui .

Nous n'avons pas donné les résultats de leur étude parce qu'elles sont en accord avec ceux de l'étude de Carter et Gere.

III.4.2.3 Méthode adoptée par le CSN

Le règlement Tchèque, CSN [3] définit l'élancement d'un élément de section variable comme suite :

$$\lambda = \beta L_f \sqrt{\frac{A(x)}{I_{max}}} \quad (III.24)$$

β : est le coefficient d'élancement de l'élément. Il est donné dans des tableaux en fonction de la forme de l'élément, de la section transversale et du rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}}$.

$A(x)$: est l'aire de la section transversale à l'abscisse x .

Cependant Mendera [18] a des doutes à propos de la validité de la valeur de l'élancement, car l'élancement représente la valeur d'une intégration et non pas une valeur locale, comme c'est le cas dans ce règlement.

Le CSN définit aussi un facteur équivalent de flambement $\bar{\chi}(x)$:

$$\bar{\chi}(x) = 1 - [1 - \chi(x)] \sin\left(\frac{\pi x}{L_f}\right) \quad (III.25)$$

Où : $\chi(x)$ est le facteur de flambement qui est fonction de l'abscisse x .

Selon ce règlement l'élément comprimé doit vérifier aux états limites ultimes la relation suivante :

$$\frac{N_{sd}}{\bar{\chi}(x)A(x)f_y} \leq 1 \quad (\text{III.26})$$

III.4.2.4 Méthode adoptée par le TGL

Le règlement Allemand TGL de 1982 [3] donne une longueur de flambement équivalente :

$$L_f = \beta L \quad (\text{III.27})$$

β : est un coefficient qui dépend de $\nu = \sqrt{\frac{I_{min}}{I_{max}}}$ et de la forme de l'élément.

ν est définie dans le tableau B1 de l'annexe B.

Ce règlement a considérablement surestimé la capacité réelle de l'élément étudié [3], ceci étant lié à la force critique de flambement déterminée pour un élément équivalent.

III.4.2.5 Méthode de JASPART

Jaspart [16] a étudié les poteaux dont la forme est représentée à la figure (III.8). Il définit une longueur de flambement équivalente [16]: $L_f = CL$ (III.28)

Il adopte une loi de variation de l'inertie dans le l'axe fort comme suite : $I(x_1) = I_{min} \left(\frac{x_1}{a} \right)^2$

D'où : $C = 1/\sqrt{0.08 + 0.92r}$ avec $r = \sqrt{\frac{I_{min}}{I_{max}}}$ pour le cas a de la figure (III.6a),

$$C = \frac{L}{L_1 \sqrt{0.08 + 0.92r + (0.32 + 4\sqrt{r} - 4.32r)}} \quad \text{pour le cas b de la figure (III.8b),}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{0.08 + 0.92r + (0.32 + 4\sqrt{r} - 4.32r) \left(\frac{L_1}{L} \right)}} \quad \text{pour le cas c de la figure (III.8c).}$$

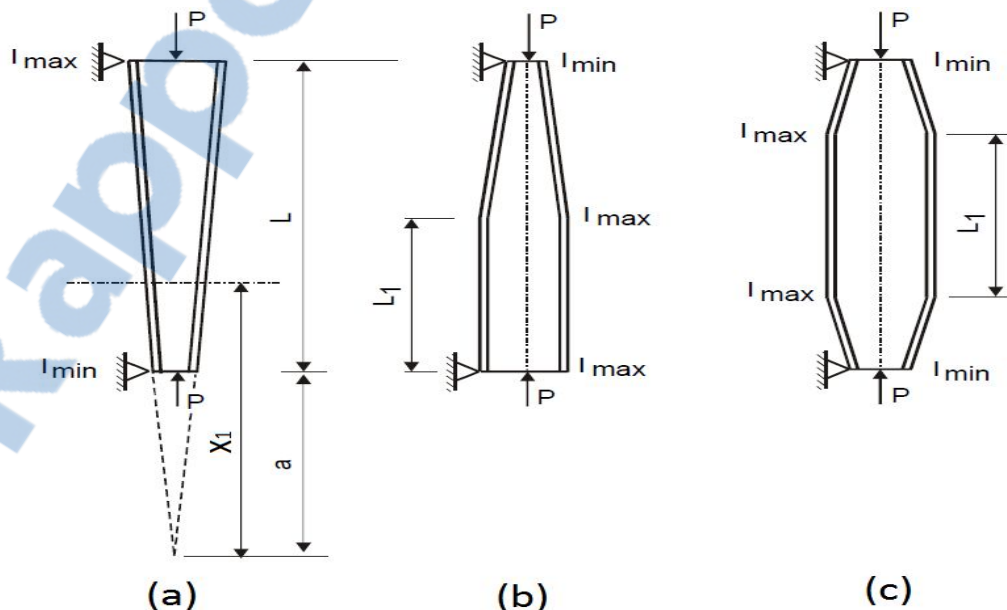


Figure III.8 : Forme du poteau étudié par Jaspart

Les expressions de C sont des approximations. Elles sont soumises à la condition que $L_1 \leq 0.5 L$. On adopte $C = 1$ pour $L_1 \geq 0.8 L$ et on utilise une interpolation linéaire entre les valeurs de C relatives respectivement à $L_1 = 0.5 L$, $L_1 = 0.8 L$ dans le cas où L_1 est compris entre ces limites.

Les expressions du coefficient C reposent sur le concept d'élancement équivalent. Elles sont tirées de l'égalité des charges critiques élastiques de flambement respectives du poteau réel, d'une part, et du poteau de substitution à moment d'inertie constant, d'autre part. En d'autres termes, nous calculons l'élancement du poteau en considérant le rayon de giration:

$$i = \sqrt{\frac{I_{max}}{C^2 \Omega}} \quad (III.29)$$

Où Ω est la section moyenne de la barre ou, mieux, l'aire de la section transversale correspondant à $\frac{I_{max}}{C^2}$.

La détermination de la charge critique de flambement élastique est alors immédiate:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{max}}{L_f^2} \quad (III.30)$$

III.5 Aire et moment d'inertie équivalents

III.5.1 Méthode de Mendera [18]

Il définit une charge critique de forme : $P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_e}{(\mu L)^2}$ (III.31)

Où μ coefficient dépend des conditions d'appui pour un élément à inertie constante.

I_e : Moment d'inertie équivalent $I_e = \alpha I_{max}$ avec α un facteur qui est fonction du rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}}$. La relation qui le définit est donnée par : $\alpha = p \sqrt{\left(\frac{I_{min}}{I_{max}}\right)} + (1 - p)^4 \sqrt{\left(\frac{I_{min}}{I_{max}}\right)}$ (III.32)

P : est un facteur qui dépend de la forme des éléments. Il est donné dans le tableau (III.3).

Tableau III.3 : Valeur du coefficient p en fonction de la nature de l'élément

Nature de l'élément	p
Moment d'inertie variable Aire de la section constante	0.1
Moment d'inertie variable Aire de la section variable Section en I	0.15
Moment d'inertie variable Aire de la section variable Section tubulaire	0.25

La section équivalente définie par Mendera est celle qui correspond effectivement au moment d'inertie équivalent I_e .

Tandis que le modèle de Mendera basé sur A_{min} et I_{min} surestime la capacité portante de la barre à inertie variable, et que le modèle basé sur A_{max} et I_{max} sous-estime, le modèle basé sur A_{eq} et I_{eq} donne une estimation moyenne de cette capacité. Selon Mendera, c'est ce

dernier modèle qui caractérise le mieux le poteau à inertie variable. De plus, ce modèle est le seul qui accepte une déformée initiale équivalente à celle de l'élément à inertie variable.

III.5.2 Méthode de Lind

Cette étude vient dans la discussion qui suit l'article de Gere et Carter [9]. Sa méthode prend les mêmes bases pour définir la charge critique d'un élément à inertie variable. Il définit deux moments d'inertie équivalents suivant la forme de l'élément.

$$\text{Pour les poteaux à nœuds fixes : } I_{1/2} = I_{min} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{H_{max}}{H_{min}} \right) \right]^n \quad (\text{III.33})$$

$$\text{Pour les poteaux à nœuds mobiles : } I_{2/3} = I_{min} \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{H_{max}}{H_{min}} \right) \right]^n \quad (\text{III.34})$$

Notant que n est le facteur de forme défini au tableau (III.1).

$$\text{La charge critique proposée par Lind a l'expression : } P_{cr} = \frac{K\pi^2 EI_e}{L^2} \quad (\text{III.35})$$

où :

I_e : l'inertie équivalent soit égale à $I_{1/2}$ ou $I_{2/3}$ selon les cas donnée avant

K : un coefficient qui dépend de l'inertie équivalent $I_{1/2}$ ou $I_{2/3}$, les conditions d'appui, le rapport $\frac{H_{max}}{H_{min}}$ et le coefficient de forme n .

Pour la section équivalente, Lind définit une abscisse relative, donnée par la relation suivante : $\frac{x}{L} = \frac{\sqrt[n]{P^* - 1}}{\left(\frac{H_{max}}{H_{min}} \right) - 1}$ avec : P^* est la charge critique non-dimensionnelle définie dans l'étude de Carter et Gere.

III.5.3 Méthode de Fraser

L'étude de Fraser [3] concerne les cadres de type bien déterminé, poteaux et poutres à inertie variable (figure III.9). Cette méthode donne la charge critique du cadre en employant un moment d'inertie équivalent :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_e}{(KL)^2} \quad (\text{III.36})$$

K : réfère aux conditions d'appui et concerne les formules habituelles pour les éléments à inertie constante.

I_e : L'inertie équivalente, elle est donné par :

- $I_e = 0.93 I_{min} \left(\frac{I_{max}}{I_{min}} \right)^{0.57}$ si encastrement en base
- $I_e = 1.16 I_{min} \left(\frac{H}{h} \right)^{0.18} \left(\frac{H}{S} \right)^{0.23} \left(\frac{I_{max}}{I_{min}} \right)^{0.67}$ si rotule en base

Les dimensions du portique h , H , S sont présentées sur la figure (III.9).

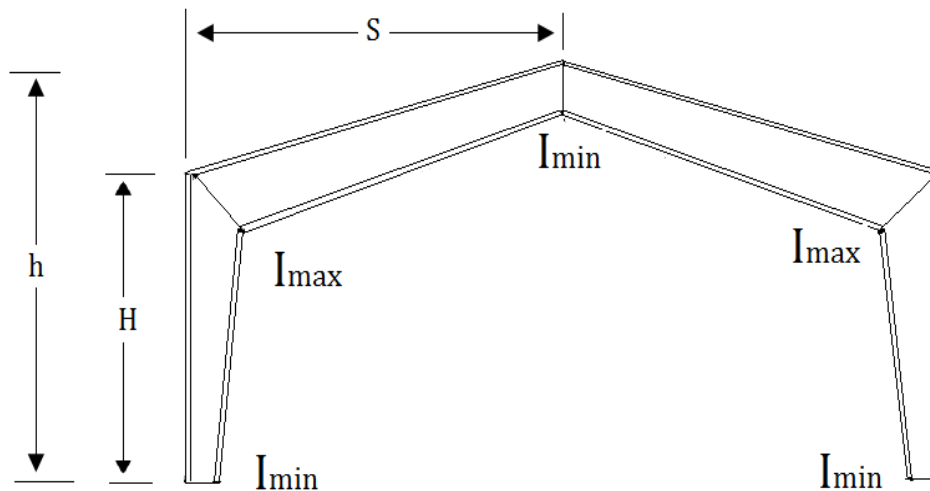


Figure III.9 : Type de cadre étudié par Fraser

III.5.4 Méthode adoptée par le DIN

L'Institut Allemand de normalisation (DIN) [3] définit un moment d'inertie et une section équivalents par la manière suivante : $I_e = cI_{max}$ et $A_e = 0.5(A_{min} + A_{max})$

Le coefficient c est donné dans le tableau B1 de l'annexe B. ce coefficient dépend de deux paramètres :

- La forme de l'élément
- Le coefficient ν , $\nu = \sqrt{\frac{I_{min}}{I_{max}}}$

Cette procédure se base sur la recherche d'un élément à inertie constante dont la longueur serait la même que celle de l'élément à inertie variable. Il s'agit d'une approche rationnelle du problème, mais qui peut néanmoins surestimer la capacité de charge portante de l'élément. Afin d'obtenir des résultats plus précis, il aurait fallu adopter un modèle de calcul de la barre avec une imperfection initiale en arc, comme le recommande l'Eurocode 3 à travers la figure 5.5.1 [3].

III.6 Flambement des poteaux comprimés et fléchis à inertie variable

Le choix des poteaux à inertie variable est lié généralement à la présence des moments fléchissant qui domine le dimensionnement des poteaux. Pour cela, nous avons décidé de présenter les plus importants études qui ont été prises comme des références pour les études ultérieures.

Le phénomène d'instabilité par déversement ne nous intéresse pas. Les études présentées dans cette partie se concentrent plus sur les éléments empêchés au flambement latéral.

Les études sur les éléments comprimés fléchis montrent que la détermination de la charge critique de compression seule est indispensable pour formuler les lois d'interaction effort normale moment fléchissant. La présence d'un moment ou une courbure initiale engendre une amplification des contraintes par le facteur $\frac{1}{[1-(P/P_{ce})]}$.

III.6.1 Méthode de Shiomi et Kurata

La formule d'interaction entre l'effort normal et le moment fléchissant présenté par Shiomi et Kurata [23] est la suivante : $\frac{P}{P_{u(eq)}} + \frac{M}{M_{p(max)} \left[1 - \frac{P}{P_{EX(eq)}} \right]} = 1$ (déversement empêché).

$P_{u(eq)}$: est la charge axiale conduisant au flambement non élastique du poteau prismatique de longueur équivalente gL , et qui la même section que celle de la plus petite des extrémités du poteau à inertie variable. g est défini en III.3.1.3.

P : est la charge normale appliquée.

$$P_{EX(eq)} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(gL)^2} \quad (III.37)$$

$M_{p(max)}$: est le moment plastique correspondant à la plus grande section. Lorsqu'on considère qu'il n'y a pas de déversement. Le terme $M_{p(max)}$ change par $M_{u(eq)}$ (le moment fléchissant conduisant à la ruine non élastique de la barre prismatique de longueur équivalente $h_1 L$, et une section identique à la section maximale du poteau à inertie variable).

Avec h_1 , un facteur qui permet le passage d'une barre à inertie variable à une barre à inertie constante.

III.6.2 Méthode de Butler et Anderson

Butler et Anderson définissent une loi d'interaction pour les éléments à inertie variable soumise à un chargement combiné d'un effort normal et transversale comme suite [3]:

$$\left(\frac{P}{P_{cr}} \right) + \left(\frac{T}{T_{cr}} \right)^2 = 1 \quad (III.38)$$

Où : P_{cr} est la charge critique élastique en l'absence de charge transversale, T_{cr} est la charge critique transversale en l'absence d'effort normal.

P, T sont la charge normale et la charge transversale appliquées sur la même barre.

Butler et Anderson comparent leurs résultats avec ceux de Salvadori [3]. Cette comparaison est représentée sur la figure (III.10).

Les séries des essais donnés sur la figure (III.10) correspondent aux différents rapports entre l'aire maximale et minimale de la barre [3].

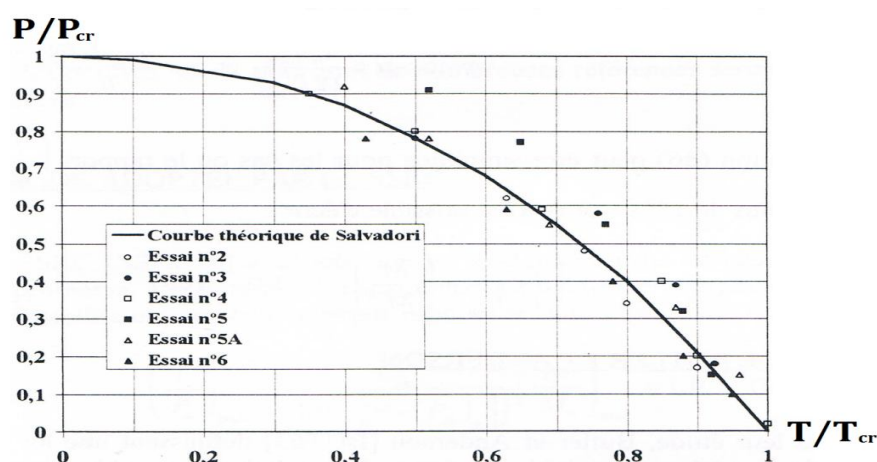


Figure III.10 : Interaction des efforts dans les barres à inertie variable

III.6.3 Méthode adoptée par le SSRC (Structural Stability Research Concil)

Le SSRC 76 [24] adopte une loi d'interaction qui se base sur la solution exacte du problème :

$$\left(\frac{P}{P_u}\right)_{min} + \frac{C_E}{\{1 - [P/(P_{cr,ex})_\gamma]\}} \left(\frac{M}{M_u}\right)_{max} = 1 \quad (III.39)$$

$P_{u\ min}$: est la charge axiale produisant la rupture en absence de moment fléchissant, calculé par rapport à la section de la petite extrémité.

$M_{u\ min}$: est le moment qui produit la ruine en l'absence de charge axiale, calculé à partir à partir de la section de la grande extrémité.

$(P_{cr,ex})_\gamma$: est la charge critique élastique de flambement, elle a déjà été définie dans le paragraphe III.3.1.5 .

$$(P_{cr,ex})_\gamma = \frac{\pi^2 EI_{min} \cdot x}{(K_\gamma L)^2}$$

C_E : est une fonction qui prend la forme : $C_E = 1 + a \left[\frac{P}{(P_{cr,ex})_\gamma} \right] + b \left[\frac{P}{(P_{cr,ex})_\gamma} \right]^2$ (III.40)

Avec : $a = 0.1 \left[-9 + 5.5 \left(\frac{\alpha}{k} \right) + 4.5 \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \right]$, $b = 0.15 \left[4 + \left(\frac{\alpha}{k} \right) - 3 \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \right]$

$\alpha = \frac{M_{min}}{M_{max}}$ est le gradient de moment, $k = \pm \frac{1}{(1+\gamma)(1+\mu\gamma)}$, $\mu = \frac{t_w h_{min}^3}{12 I_{min} x}$ et $\gamma = \frac{h_{max} - h_{min}}{h_{min}}$

L'équation de l'interaction peut s'écrire : $\left(\frac{P}{P_u}\right)_{min} + \left(\frac{M}{M_u}\right)_{max} = 1$, si le rapport $\frac{P}{P_u}$ est inférieur à 0.15.

III.7 Conclusion

Le problème des profilés à inertie variable a été résolu par la détermination d'un coefficient permettant de transformer un élément à section variable vers un élément à section constante afin de pouvoir appliquer les règles de ce dernier.

Les études expérimentales montrent que le comportement des éléments à inertie variable ressemble à celle des éléments à inertie constante. Pour cela les règlements Européenne autorisent la transformation d'un élément à inertie variable un élément à inertie constante.

Chapitre IV

ETUDE PARAMETRIQUE

IV.1 INTRODUCTION

L'objectif de cette partie est d'étudier l'influence de la variation de l'inertie sur la charge critique. Nous avons proposé une comparaison entre les charges critiques de deux profilés identiques en poids et en hauteur mais l'un est à inertie constante et l'autre à inertie variable.

Cette comparaison concerne les profilés reconstitués soudé en I ou H à hauteur d'âme variable linéairement ou à largeur des semelles variable linéairement. Elle est limitée sur ce qui est effectivement produit au niveau industriel.

L'étude a été faite dans les deux plans d'inertie (plan de forte inertie et le plan de faible inertie).

Le calcul de la charge critique a été effectué par 4 méthodes différentes pour comparer et affirmer les résultats. La différence entre ces 4 méthodes c'est que chacune est basée sur un type différent de la résolution de l'équation différentielle d'équilibre. En plus, elles utilisent des formules de variation de l'inertie distinctes. Nous avons trois de ces 4 méthodes, basées sur un calcul numérique (La Méthode de la différence finie, la Méthode basée sur les fonctions de Bessel et celle qui utilise logiciel Robot Structural) et la quatrième représente l'utilisation des abaques de Carter et Gere [9].

Notre étude regroupe 5 cas spécifiques de conditions d'appuis (double articulation, double encastrement, articulation-encastrement, encastrement-extrémité libre et encastrement-extrémité bloqué en rotation et libre en translation). Pour chaque cas nous avons soit, tracé des graphes ou dessiné des tableaux qui permettent le calcul des charges critiques.

Nous avons aussi étudié l'effet de la variation de l'inertie sur la déformé des barres à hauteur d'âme variable linéairement.

On employant la méthode de la différence finie, nous avons pu représenter l'influence de la rigidité des nœuds sur la charge critique sous forme des abaques.

Le flambement des poteaux constitués de deux tronçons et soumis à des forces concentrées appliquées en des points différents a été abordé. Le choix des types d'appuis pour l'étude a été fixé sur les deux cas les plus fréquemment rencontrés (encastrement en bas et libre en tête ou double articulés). Notre étude sur ce type de poteau consiste en premier lieu à déterminer un coefficient qui permette le calcul de la charge critique en utilisant l'inertie maximale. En deuxième lieu, on utilise ce coefficient pour étudier l'influence de la variation de l'inertie sur la charge critique, par la comparaison des résultats de trois modèles différents.

IV .2 Hypothèses de calcul

Afin de pouvoir utiliser les résultats pour calculer l'élancement du poteau et le coefficient de réduction χ du flambement nous avons adopté les mêmes hypothèses des profilés à inertie constante, c'est-à-dire :

- 1- La loi de comportement du matériau est élastique.
- 2- Le poteau est supposé rectiligne et chargé axialement.
- 3- Le déplacement latéral est négligeable pour les structures à nœud fixe et importants pour les structures à nœud déplaçable.
- 4- Le raccourcissement des poteaux est négligé.
- 5- Tous les poteaux sont supposés flambés simultanément.
- 6- L'effet des contraintes résiduels et les défauts géométriques sur les barres à section constantes reste le même pour les barres à section variable.

Notre étude concerne le flambement par flexion des profilés en H ou I.
L'étude a été faite pour des poteaux isolés de la structure. L'influence de l'environnement du poteau dans une structure sur la charge critique est négligée.

IV.3 Principe d'étude

➤ Principe1 :

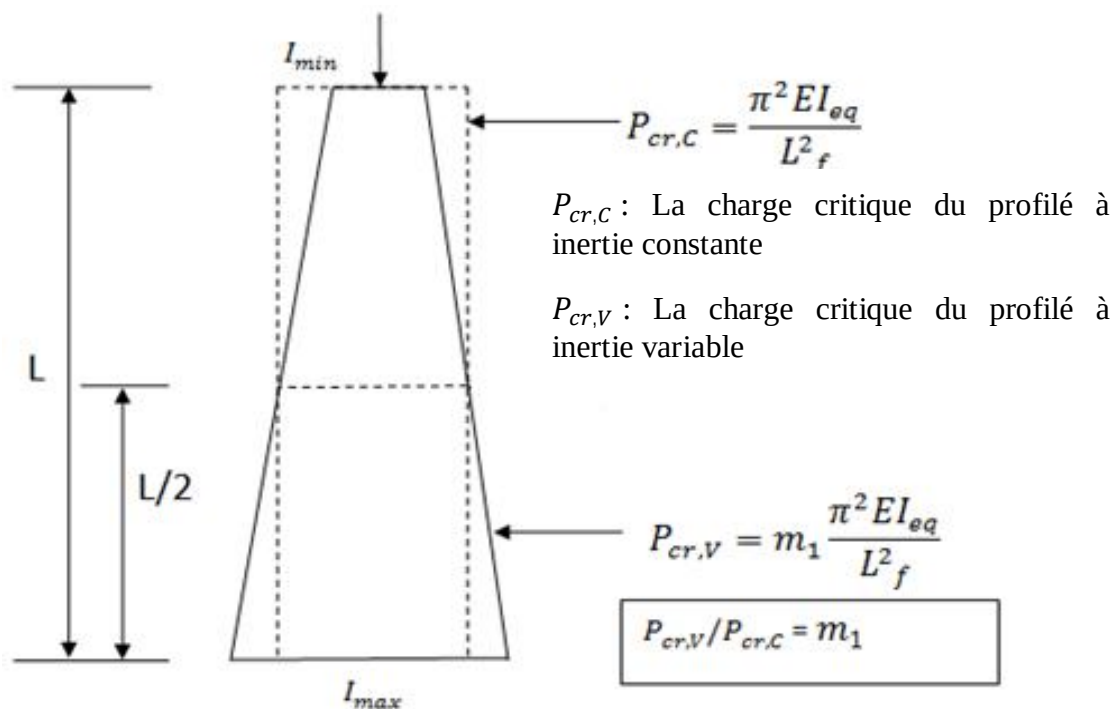


Figure IV.1 : Schéma de principe d'étude d'un poteau à géométrie variable linéairement

Quelques soit la variation linéaire sur la hauteur d'âme ou sur la largeur des semelles les deux poteaux présentés dans la figure (IV.1) sont identiques en quantité de matière (le poids). La comparaison entre $P_{cr,C}$ et $P_{cr,V}$ pour différentes valeurs du rapport I_{min}/I_{max} nous donne l'influence de la variation de l'inertie sur la charge critique du poteau.

L'objectif est de tracer la courbe m_1 en fonction de $(\frac{I_{min}}{I_{max}})$. Le coefficient m_1 est calculé par les 4 méthodes différentes pour permettre la comparaison les résultats

➤ **Principe2 :**

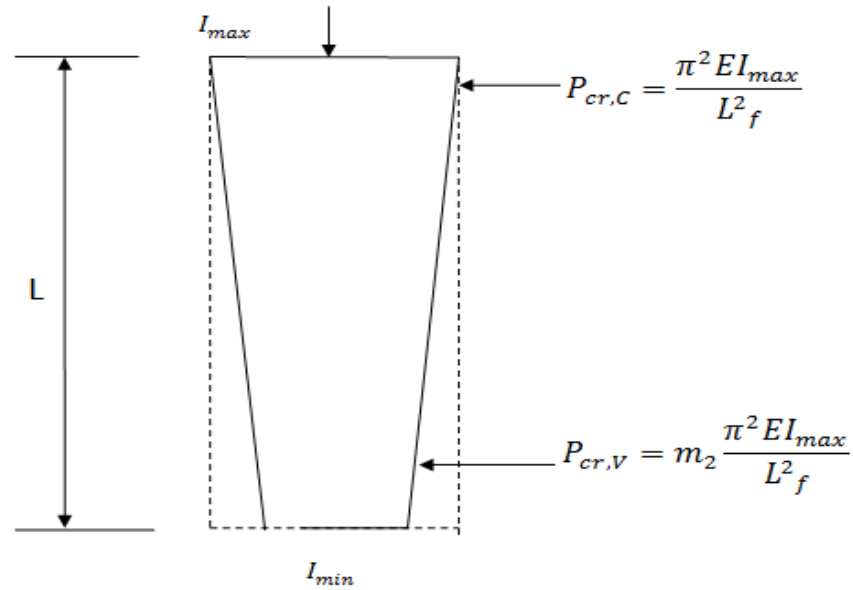


Figure IV.2 : Schéma de principe d'étude d'un poteau à géométrie variable linéairement

En général, lorsque le moment fléchissant conditionne le dimensionnement de tels éléments, le projeteur se trouve entre le choix d'un poteau à inertie constante I_{max} ou d'un poteau à inertie variable qui résiste aux mêmes charges appliquées comme indiqué dans la figure (IV.2). Il est évident que ce dernier a une charge critique moins. Donc Il serait important de mesurer la diminution de la charge critique.

On définit un coefficient $m_2 = \frac{P_{cr,V}}{P_{cr,C}}$, puis on trace la courbe de m_2 en fonction du rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}}$. Le coefficient m_2 permette non seulement le calcul de la charge critique en fonction de I_{max} mais aussi il donne le pourcentage de la diminution de la force critique.

IV.4 Description des méthodes de calculs

IV.4.1 La Méthode des différences finies

Considérons le flambement d'une colonne élastique à section variable de longueur L soumise à une force de compression axiale P à son extrémité supérieure figure (IV.3).

Lorsque l'effet du poids propre n'est pas pris en compte, l'équation régissant le flambage d'une telle colonne est [21] :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (IV.1a)$$

On peut exprimer l'équation (IV.1a) sous la forme suivante :

$$I(x) \frac{d^4 y}{dx^4} + 2 \frac{dI(x)}{dx} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 I(x)}{dx^2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{E} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (IV.1b)$$

Avec E module de Yong, $I(x)$ moment d'inertie et y la déformé latérale du poteau.

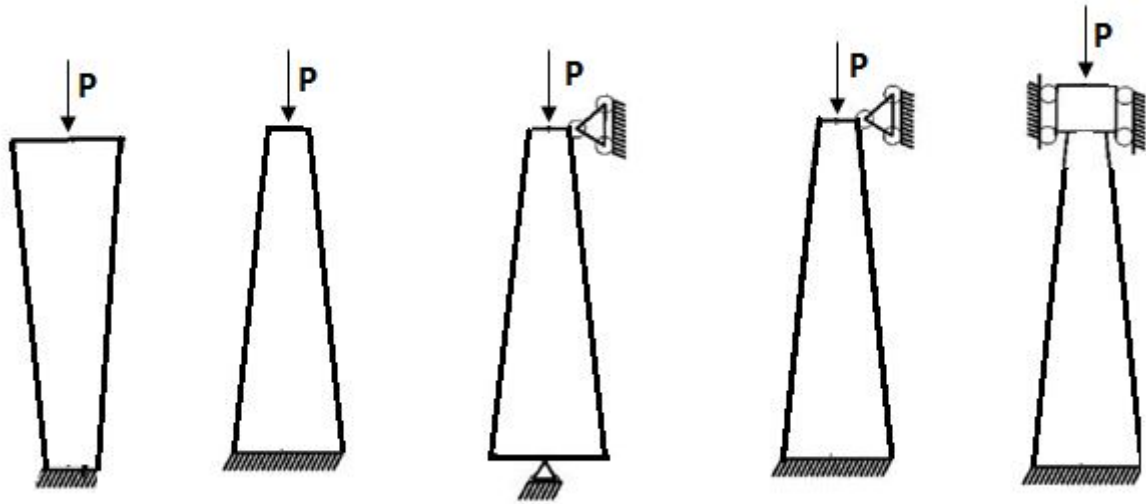


Figure IV.3 : Schématisation des cas de conditions aux limites étudiées

L'utilisation de la différence finie consiste à diviser la déformée (a,b) en (n+1) sous intervalles égaux de longueur h comme montre la figure (IV.4).

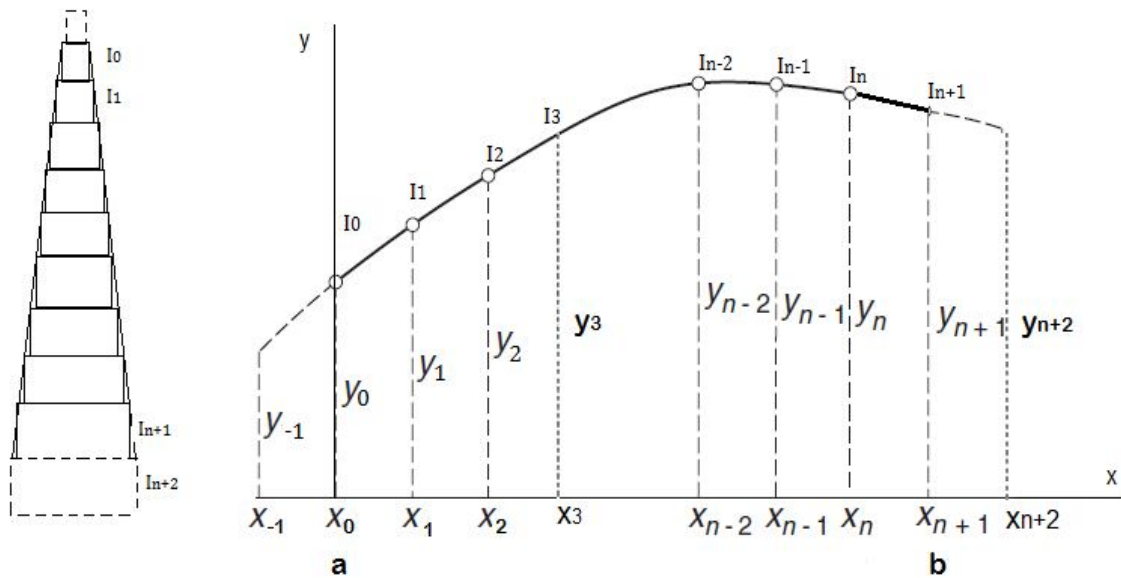


Figure IV.4 : Division de la déformée en (n+1) segment

Les dérivées de l'équation différentielle (IV.1) sont remplacées par les expressions d'approximations suivantes pour résoudre le problème des conditions aux limites [15].

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x_i) = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \quad y'''(x_i) = \frac{-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2h^3}$$

$$, \quad y^{(4)}(x_i) = \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4} \quad (IV.2)$$

Pour $i = -1, 0, 1, \dots, n+2$

remplaçant ces approximations dans l'équation (IV.1b) nous obtenons l'équation suivante :

$$y_{i-2} \left(\frac{I(x)}{h^2} - \frac{dI(x)}{2hdx} \right) + y_{i-1} \left(-\frac{4I(x)}{h^2} + \frac{2dI(x)}{2hdx} + \frac{d^2I(x)}{dx^2} \right) + y_i \left(\frac{6I(x)}{h^2} - 2\frac{d^2I(x)}{dx^2} \right)$$

$$+ y_{i+1} \left(-\frac{4I(x)}{h^2} - \frac{2dI(x)}{2hdx} + \frac{d^2I(x)}{dx^2} \right) + y_{i+2} \left(\frac{I(x)}{h^2} + \frac{dI(x)}{2hdx} \right) + \frac{P}{E} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = 0 \quad (IV.3)$$

D'après l'équation (IV.3) il existe quatre inconnus n'appartenant pas au domaine de la solution : $y_{-1}, y_0, y_{n+1}, y_{n+2}$. On peut éliminer ces termes par l'application des conditions aux limites, une tâche qui est facilitée par le tableau (IV.1)

Tableau IV.1 : Les expressions équivalentes des différentes conditions aux limites.

Condition d'appuis	L'expression équivalente de la différence finie
$y(a) = \alpha$ $y'(a) = \alpha$ $y''(a) = \alpha$ $y'''(a) = \alpha$	$y_1 = \alpha$ $y_0 = y_2 - 2h\alpha$ $y_0 = 2y_1 - y_2 + h^2\alpha$ $y_{-1} = 2y_0 - y_2 + y_3 - 2h^3\alpha$
$y(b) = \beta$ $y'(b) = \beta$ $y''(b) = \beta$ $y'''(b) = \beta$	$y_n = \beta$ $y_{n+1} = y_{n-1} - 2h\beta$ $y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2\beta$ $y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_{n-1} + y_{n-2} - 2h^3\beta$

Poutre doublement articulée $\longrightarrow y(0) = 0, y'(0) = 0, y(l) = 0$ et $y'(l) = 0$
 $y_0 = 0, y_{-1} = -y_1, y_{n+1} = 0, y_{n+2} = -y_n$.

Poutre articulée encastrée $\longrightarrow y(0) = 0, y'(0) = 0, y(l) = 0$ et $y'(l) = 0$
 $y_0 = 0, y_{-1} = -y_1, y_{n+1} = 0, y_{n+2} = y_n$.

Poutre doublement encastrée $\longrightarrow y(0) = 0, y'(0) = 0, y(l) = 0$ et $y'(l) = 0$
 $y_0 = 0, y_{-1} = y_1, y_{n+1} = 0, y_{n+2} = y_n$.

Poutre encastrée - libre $\longrightarrow y(0) = 0, y'(0) = 0, y(l) = 0, y'(l) = Py(l)$
 $y_0 = 0, y_{-1} = -y_1, y_{n+2} = y_n, y_{n+1} = \phi y_n, \phi = \frac{2EI_2}{2EI_2 - 2Ph^2}$.

Pour $i=1,2,3,\dots,n$, nous obtenons le système d'équation suivant :

$$\left[[T] - \frac{P}{E} [B] \right] [y] = 0 \quad (IV.4)$$

Avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} 5A_2 - 2A_2'' & -4A_2 - 2A_2' + A_2'' & A_2 + A_2' & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -4A_3 + 2A_3' + A_3'' & 6A_3 - 2A_3'' & -4A_3 - 6A_3' - 2A_3''A_3' + A_3'' & A_3 + A_3' & 0 & \dots & 0 \\ A_4 - A_4' & -4A_4 + 2A_4' + A_4'' & 6A_4 - 2A_4'' & -4A_4 - 2A_4' + A_4'' & A_4 + A_4' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{n-2} - A_{n-2}' & -4A_{n-2} + 2A_{n-2}' + A_{n-2}'' & 6A_{n-2} - 2A_{n-2}'' & -4A_{n-2} - 2A_{n-2}' + A_{n-2}'' & A_{n-2} + A_{n-2}' \\ 0 & \dots & 0 & A_{n-1} - A_{n-1}' & -4A_{n-1} + 2A_{n-1}' + A_{n-1}'' & 6A_{n-1} - 2A_{n-1}'' & -4A_{n-1} - 2A_{n-1}' + A_{n-1}'' \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_n - A_n' & -4A_n + 2A_n' + A_n'' & 7A_n - 2A_n'' \end{bmatrix}$$

d'où : $A_i = \frac{I_i}{h^2}, \quad A_i' = \frac{dI_i}{2h dx}, \quad A_i'' = \frac{d^2 I_i}{dx^2}$

La matrice [T] ci-dessus caractérise une poutre articulée-encastrée, le seul changement pour les autres cas, c'est que :

$T(n,n) = 5A_n - 2A_n''$ pour la poutre doublement articulée ;

$T(1,1) = 7A_2 - 2A_2$ pour le poteau double encasté ;

$T(n,n) = 7A_n - 2A_n + \emptyset(-4A_n - 2A_n + A_n)$ et $T(n-1, n) = -4A_{n-1} - 2A_{n-1} + A_{n-1} + \emptyset(A_{n-1} + A_{n-1})$ pour le poteau libre encasté.

$$[y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{P}{E}.$$

La matrice $[B]$ subit une modification pour le cas d'un poteau libre encasté c'est que le $B(n, n) = 2 - \emptyset$, pour les autres cas elle reste la même.

La charge critique du premier mode de flambement de l'équation (IV.4) est obtenue lorsque le déterminant de $[T] + \frac{P}{E}[B]$ égale à 0.

Il existe de nombreuses méthodes pour résoudre l'équation (IV.4), nous avons choisi la méthode de Jacobi qui facilite l'obtention de la déformé de la barre.

La formule de l'inertie $I(x)$ dépend de l'élément variable (hauteur d'ame ou largeur des semelles) et le plan d'inertie considérée figure(IV.5).

$$I_y(x) = \frac{t_w h^3(x)}{12} + 2 \left[\frac{b(x) t_f^3}{12} + t_f b(x) \left(\frac{t_f + h}{2} \right)^2 \right] \quad (IV.5)$$

$$I_z(x) = \frac{h(x) t_w^3}{12} + 2 \left[\frac{t_f b^3(x)}{12} \right] \quad (IV.6)$$

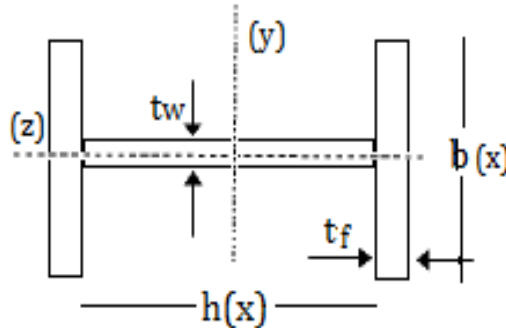


Figure IV.5 : Schématisation d'une section à inertie variable

Si la hauteur de l'ame est variable linièrement alors $h(x) = h_{min} + (h_{max} - h_{min}) \frac{x}{L}$.

Si la largeur des semelles est variable linièrement alors $b(x) = b_{min} + (b_{max} - b_{min}) \frac{x}{L}$.

Les résultats obtenus par cette méthode sont représentés sur les figures suivantes.

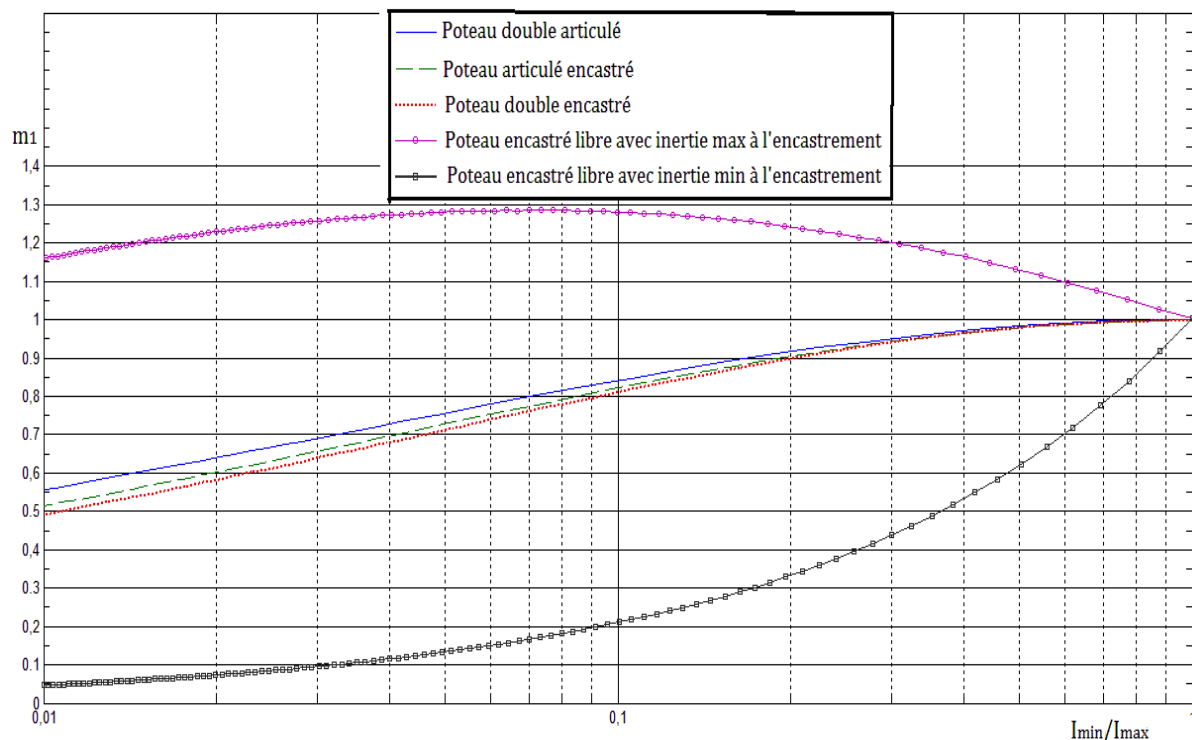


Figure IV.6 : Coefficient m_1 pour un Poteau à hauteur d'âme variable linéairement dans le plan de forte inertie

La lecture des courbes doit se faire de droite vers la gauche, c'est-à-dire on commence par le poteau à inertie constante $\frac{I_{min}}{I_{max}} = 1$.

On constate qu'il y a 3 comportements différents remarquables dans la figure IV.6. Le premier concerne le poteau encastré-libre avec inertie maximale à l'encastrement. Dans ce cas le coefficient m_1 augmente par la diminution de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$ jusqu'à la valeur de 1.29 pour $\frac{I_{min}}{I_{max}} = 0.08$, puis il commence à diminuer tout en restant toujours supérieur à 1.

Le deuxième comportement concerne les poteaux à nœuds fixes. Le coefficient m_1 reste proche de la valeur 1 pour $\frac{I_{min}}{I_{max}} \geq 0.3$; pour $\frac{I_{min}}{I_{max}} \leq 0.4$, on remarque que les 3 courbes prennent une forme presque linéaire dans un graphe à échelle logarithmique. On peut dire que le coefficient m_1 varie avec $\frac{I_{min}}{I_{max}}$ par une fonction logarithmique. Le coefficient m_1 des poteaux à nœuds fixes est toujours inférieur à 1, donc il y a une perte de résistance due à la variation de l'inertie.

Le troisième comportement concerne le poteau encastré-libre avec inertie minimale à l'encastrement. Le coefficient m_1 est inférieure à 1 et diminue brusquement. Par exemple ce poteau perd 80% de la charge critique pour $\frac{I_{min}}{I_{max}} = 0.1$ et 95% pour $\frac{I_{min}}{I_{max}} = 0.01$. Ce type de poteau ne convient ni avec la distribution des contraintes réelles (moment maximale à l'encastrement) ni avec l'objectif d'améliorer la résistance en utilisant l'inertie variable. La comparaison entre ce poteau et celui encastré-libre avec inertie maximale à l'encastrement montre que la distribution de la matière est un facteur capital pour la résistance d'un élément à section variable.

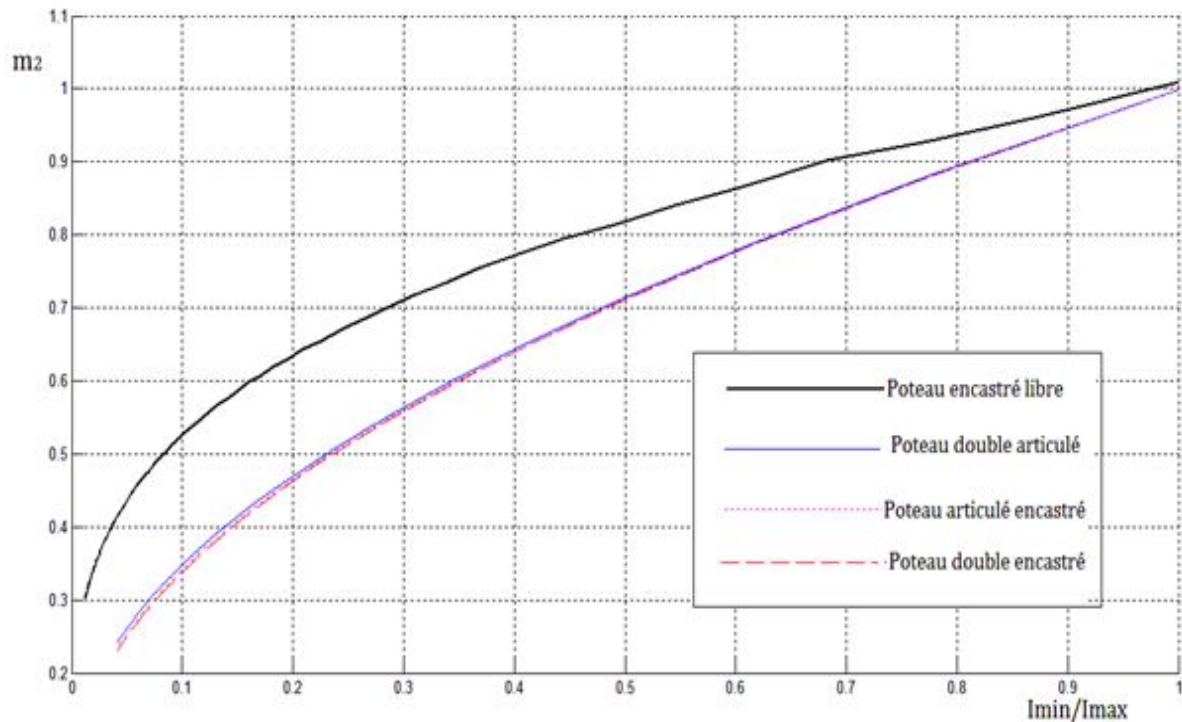


Figure IV.7 : Coefficient m_2 pour un Poteau à hauteur d'âme variable linéairement dans le plan de forte inertie

Les courbes de la figure IV.7 permettent de calculer la charge critique en se basant sur l'inertie maximale du poteau et elles donnent aussi la diminution de la charge critique provenant par l'utilisation d'un poteau à inertie variable au lieu d'un poteau à inertie constante de I_{max} . Par exemple pour un poteau bi-articulé qui possède un rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}}$ égal à 5, sa charge critique vaut : $P_{cr} = 0.71 \frac{\pi^2 EI_{max}}{L^2}$, donc la diminution de la charge critique est $1 - 0.71 = 0.29$ (29%).

On remarque que les courbes des poteaux à nœuds fixes sont presque superposables. Ils ont un comportement semblable vis à vis de la variation de l'inertie. L'emploi de l'échelle logarithmique facilite la distinction entre les trois courbes des poteaux à nœuds fixes comme à la figure IV.6.

Pour le poteau encastré-libre, la pente de variation du coefficient m_2 change significativement à partir de $\frac{I_{min}}{I_{max}} = 0.08$, ce qui est remarquable aussi dans la figure IV.6.

Remarque : Pour le plan de faible inertie, l'âme du poteau donne une faible inertie par rapport à celle donnée par les semelles (voir formule IV.6), donc l'effet de la variation de l'inertie sur la charge critique est négligée et la charge critique peut être calculé sur la base d'une inertie constante. .

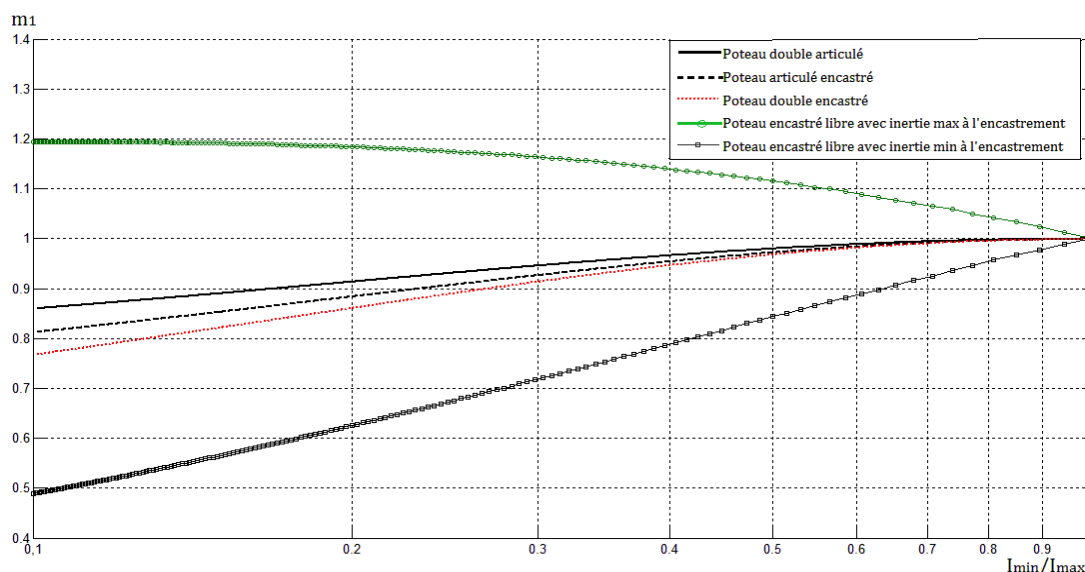


Figure IV.8 : Coefficient m_1 pour un Poteau à largeur des semelles variables linéairement dans le plan de forte inertie

Les commentaires de la figure IV.6 restent valables pour la figure IV.8.

On note qu'il y a changement de la valeur ultime du poteau encastré-libre ($m_1 = 1.2$), le coefficient m_1 des poteaux à nœuds fixes reste proche de la valeur 1 pour $\frac{I_{min}}{I_{max}} \geq 0.6$, le coefficient m_1 du poteau encastré-libre avec inertie minimale à l'encastrement prend la forme d'une droite.

Nous avons limité le calcul du coefficient m_1 au rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}} = 0.1$ au lieu de 0.01 indiqué à la figure IV.6 parce que le domaine de la variation de la hauteur d'âme et celle de la largeur des semelles n'est pas identique.

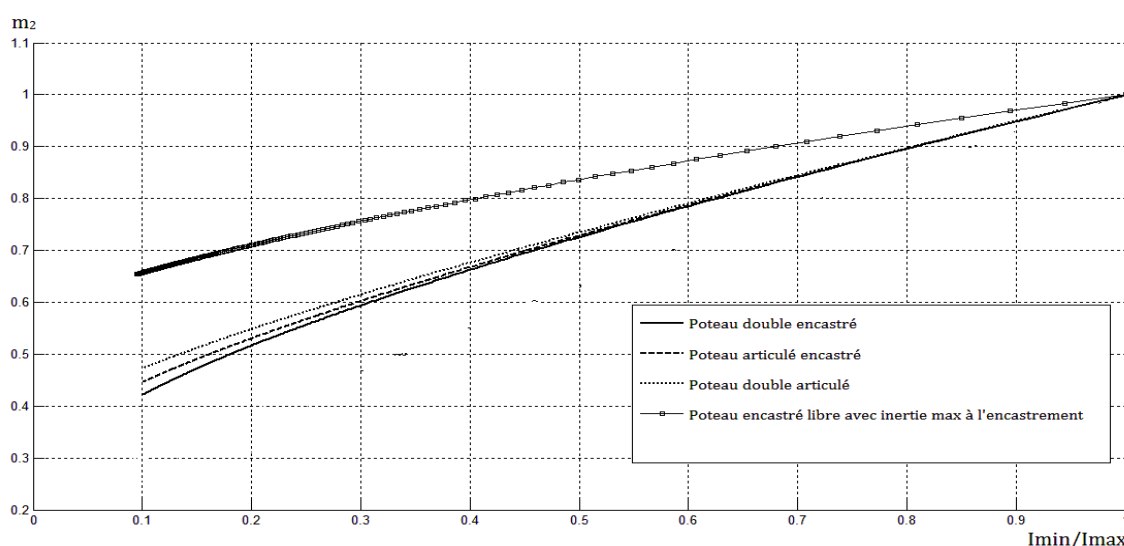


Figure IV.9 : Coefficient m_2 pour un Poteau à largeur des semelles variables linéairement dans le plan de forte inertie

Les courbes des poteaux à nœuds fixes sont superposables pour $\frac{I_{min}}{I_{max}} \leq 0.4$.

La courbe du poteau encastré-libre prend la forme d'une droite et varie entre 1 et 0.65

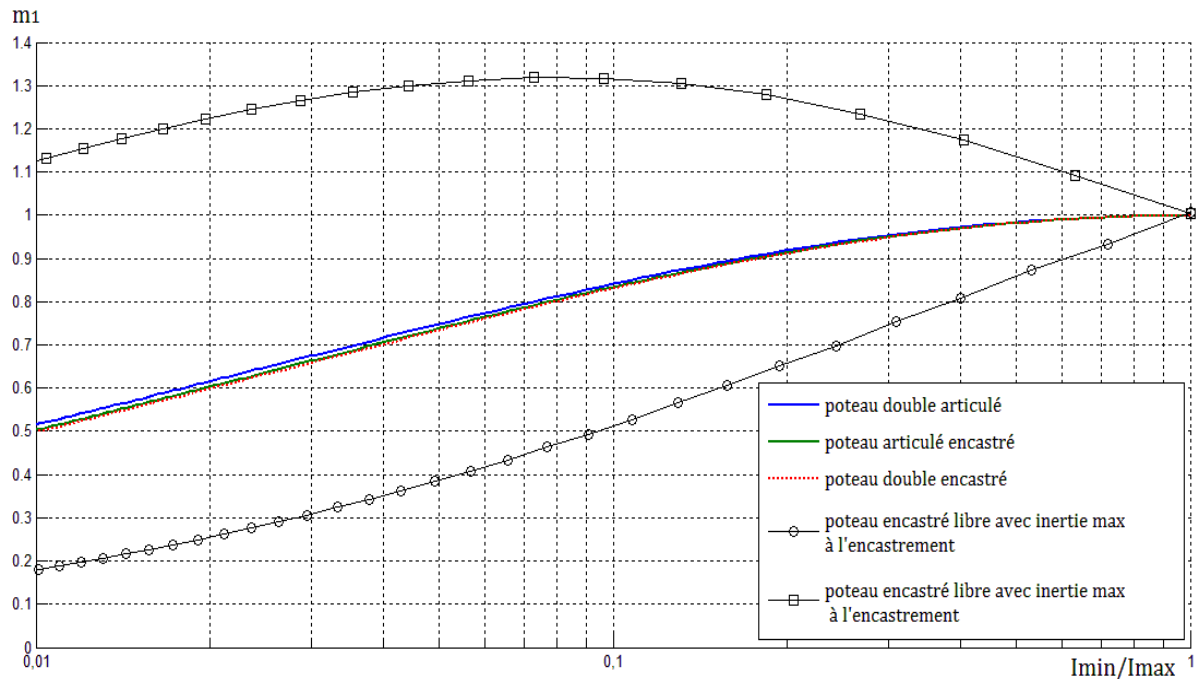


Figure IV.10 : Coefficient m_1 pour un Poteau à largeur des semelles variables linéairement dans le plan de faible inertie

Les commentaires de la figure IV.6 restent valables pour la figure IV.10.

On note qu'il y a changement de la valeur ultime du poteau encastré-libre à inertie maximale à l'encastrement ($m_1 = 1.31$).

Le coefficient m_1 des poteaux à nœuds fixes reste proche de la valeur 1 pour $\frac{I_{min}}{I_{max}} \geq 0.7$.

La courbe du poteau encastré-libre avec inertie minimale à l'encastrement est différente à celle de la figure IV.6 et ressemble à celle de la figure IV.8.

IV.4.2 Méthode basé sur les fonctions de Bessel

La forme de l'équation de l'inertie joue un role très important dans le choix de la méthode de la résolution de l'équation différentielle de flambement et la détermination de la charge critique.

Nous avons choisi une méthode basée sur les fonctions de Bessel pour l'intégration de l'équation différentielle de la courbe élastique (voir annexe A).

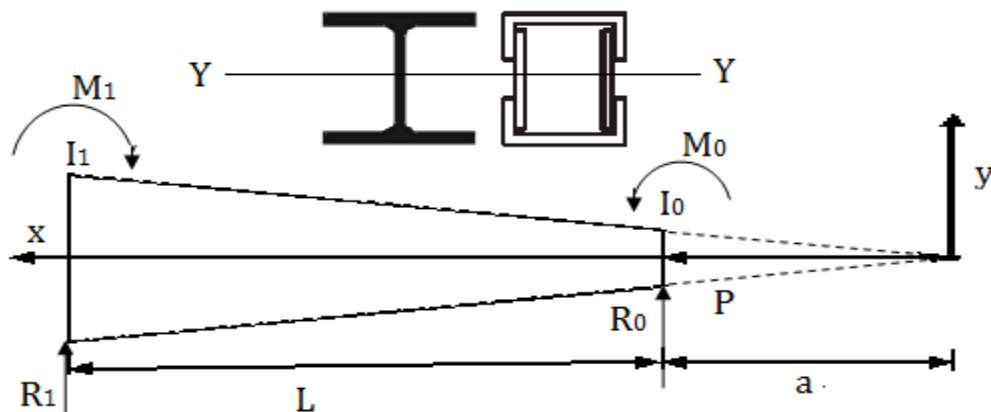


Figure IV.11 : Schéma de l'étude d'un poteau

Si l'inertie est représentée par l'équation $I(x) = I_0 \left(\frac{x}{a}\right)^n$ [25], alors l'équation différentielle peut être résolue à l'aide des fonctions de Bessel. L'hypothèse $n=2$ représente avec une exactitude suffisante le cas d'un poteau à ame variable linéairement ou d'une colonne consistant en cornières réunies par des diagonales figure(IV.11).

Pour étudier la courbe élastique d'une barre de ce genre, nous adopterons les axes de coordonnées, représentés sur la figure (IV.11). L'équation différentielle de la courbe sera :

$$EI_0 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + py = M_0 + R_0(x - a) \quad (IV.7)$$

Dans ce cas la solution totale de l'équation (IV.7) sera égale à la solution homogène plus la solution particulière. Pour trouver la solution homogène il faut résoudre l'équation

$$EI_0 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + py = 0 \quad (IV.8)$$

$$\text{En posant } \frac{x}{a} = e^z \implies \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{x dz} \implies \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{x^2 dz^2} - \frac{dy}{x^2 dz} \quad (IV.9)$$

$$\text{Si on porte l'équation (IV.9) dans (IV.8), on trouve } \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + \frac{Pa^2}{EI_0} y = 0 \quad (IV.10)$$

D'après l'annexe A la solution de l'équation (IV.10) est :

$$y = \sqrt{e^z} (A \cos(\beta z) + B \sin(\beta z)) \quad (IV.11a)$$

Où A, B sont les constantes d'intégration et $\beta = \sqrt{\frac{Pa^2}{EI_0} - \frac{1}{4}}$, β est supposée réelle et

$$\text{positive. } e^z = \frac{x}{a} \implies y = \sqrt{\frac{x}{a}} \left(A \cos\left(\beta \ln \frac{x}{a}\right) + B \sin\left(\beta \ln \frac{x}{a}\right) \right) \quad (IV.11b)$$

On pose que la solution particulière à la forme suivante : $y_p = \alpha x + \delta$

Remplaçant y de l'équation (IV.7) par y_p , on trouve : $\alpha = R_0/p$ et $\delta = (M_0 - R_0 a)/P$.

La solution totale de l'équation (IV.7) est :

$$y = \sqrt{\frac{x}{a}} \left(A \cos\left(\beta \ln \frac{x}{a}\right) + B \sin\left(\beta \ln \frac{x}{a}\right) \right) + \frac{R_0}{p} x + \frac{(M_0 - R_0 a)}{p} \quad (IV.12)$$

La charge critique P est obtenue après l'application de conditions d'appuis dans la formule (IV.12).

Poteau doublement articulé $\implies y(a) = 0, y(a + L) = 0, M_0 = 0$

Poteau articulé encastré $\implies y(a) = 0, y(a + L) = 0, y'(a) = 0, M_0 = 0$

Poteau doublement encastré $\implies y(a) = 0, y(a + L) = 0, y'(a) = 0, y'(a + L) = 0$

Poteau libre encastré $\implies y(a) = 0, y(a + L) = 0, R_0 = 0$

Pour chaque cas de conditions d'appuis, il revient à résoudre les équations suivantes :

$$\sin\left[\beta \ln\left(1 + \frac{L}{a}\right)\right] = 0 \quad (\text{Poteau doublement articulé}).$$

$$\tan\left[\beta \ln\left(1 + \frac{L}{a}\right)\right] - \frac{\beta}{\frac{1}{2} + \frac{L}{a}} = 0 \quad (\text{Poteau articulé encastré}).$$

$$\tan\left[\beta \ln\left(1 + \frac{L}{a}\right)\right] + 2\beta = 0 \quad (\text{Poteau libre encastré}).$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{P} \\ \frac{1}{2a} & \frac{\beta}{a} & \frac{1}{P} & 0 \\ \omega \cos \psi & \omega \sin \psi & \frac{L}{P} & \frac{1}{P} \\ \Omega \left(\frac{1}{2} \cos \psi - \beta \sin \psi \right) & \Omega \left(\beta \cos \psi + \frac{1}{2} \beta \sin \psi \right) & \frac{1}{P} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad (\text{Poteau doublement encastré}).$$

Avec $\omega = \left(\frac{L}{a} + 1 \right)^{0.5}$, $\psi = \beta \ln \left(\frac{L}{a} + 1 \right)$ et $\Omega = \left(\frac{L}{a} + 1 \right)^{-0.5}$.

Nous connaissons a , L et I_0 dans chaque cas particulier et en déduisons la plus faible valeur de P satisfaisant les équations précédentes. La charge critique s'écrit sous la forme

$$P_{cr,V} = m_1 \frac{\pi^2 E I_{eq}}{L^2_f} \quad (\text{IV.13})$$

Les résultats obtenus par cette méthode sont données dans le tableau IV.2 et IV.3.

Tableau IV.2 : Coefficient m_1 pour un Poteau à hauteur d'âme variable linéairement

	Type d'appuis du poteau	$I_{\min}/I_{\max}$					
		1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
m_1	Doublement articulé	1	0.999	0.997	0.995	0.99	0.983
	Articulé encastré	1	0.999	0.996	0.994	0.99	0.98
	Doublement encastré	1	1	0.997	0.995	0.99	0.98
	Encastré libre (inertie maximale à l'encastrement)	1	1.03	1.05	1.075	1.10	1.125
	Encastré libre (inertie minimale à l'encastrement)	1	0.98	0.95	0.92	0.89	0.85

Tableau IV.3 : Coefficient m_1 pour un Poteau à hauteur d'âme variable linéairement

	Type d'appuis du poteau	$I_{\min}/I_{\max}$					
		0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02
m_1	Doublement articulé	0.97	0.95	0.915	0.84	0.76	0.65
	Articulé encastré	0.968	0.941	0.90	0.82	0.73	0.60
	Doublement encastré	0.96	0.94	0.90	0.80	0.70	0.58
	Encastré libre (inertie maximale à l'encastrement)	1.16	1.195	1.233	1.264	1.258	1.21
	Encastré libre (inertie minimale à l'encastrement)	0.80	0.73	0.64	0.50	0.37	0.245

IV.4.3 Méthode basé sur les abaques de Carter et Gere

Le calcul du coefficient m_1 à partir de l'étude de Carter et Gere (Paragraphe III.4.1.1) se fait en égalant la charge critique donnée par ces deux derniers avec notre formule :

$$p^* \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2_f} = m_1 \frac{\pi^2 E I_{eq}}{L^2_f}$$

Donc : $m_1 = \frac{p^* I_{min}}{I_{eq}}$, p^* est déterminé à partir des abaques de Carter et Gere (figure III.2).

D'après la formule (III.1) $I_{eq} = I_{min} \left[1 + \left(\frac{H_{max}}{H_{min}} - 1 \right) \frac{1}{2} \right]^n$

Le tableau (III.1) donne le facteur de forme n pour un poteau à hauteur d'âme variable linéairement qui est situé entre 2.1 et 2.5. Si on prend une valeur moyenne de 2.3 et l'on

applique dans la formule (III.2) alors on trouve : $\frac{H_{max}}{H_{min}} = \left(\frac{I_{max}}{I_{min}} \right)^{\frac{1}{2.3}}$

Portant ce résultat dans la formule (III.1), on trouve que :

$$I_{eq} = I \left(\frac{L}{2} \right) = I_{min} \left[1 + \left(\left(\frac{I_{max}}{I_{min}} \right)^{\frac{1}{2.3}} - 1 \right) \frac{1}{2} \right]^{2.3} \quad \text{et} \quad m_1 = \frac{p^*}{\left[\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{I_{min}}{I_{max}} \right)^{-0.434} \right) \right]^{2.3}} .$$

Les résultats obtenus par cette méthode sont données dans les tableaux suivant :

Tableau IV.4: Coefficient m_1 pour un Poteau bi-articulé à hauteur d'âme variable linéairement

I_{min}/I_{max}	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02
H_{min}/H_{max}	1	1.05	1.10	1.16	1.24	1.35	1.49	1.68	2.01	2.72	3.67	5.50
P^*	1	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	2.2	2.6	5.1	10
m_1	1	1.00	0.99	0.98	0.97	0.95	0.90	0.90	0.83	0.82	0.72	0.67

Tableau IV.5 : Coefficient m_1 pour un Poteau articulé - encasté à hauteur d'âme variable linéairement

I_{min}/I_{max}	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02
H_{min}/H_{max}	1	1.05	1.10	1.16	1.25	1.35	1.50	1.70	2.00	2.75	3.70	5.50
P^*	1	1.05	1.10	1.15	1.25	1.35	1.50	1.75	2.1	3.25	5.10	9.40
m_1	1	0.99	0.98	0.96	0.95	0.90	0.90	0.87	0.81	0.77	0.71	0.62

Tableau IV.6 : Coefficient m_1 pour un Poteau bi-encasté à hauteur d'âme variable linéairement

I_{min}/I_{max}	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02
H_{min}/H_{max}	1	1.05	1.10	1.16	1.24	1.35	1.50	1.70	2.00	2.75	3.70	5.50
P^*	1	1.05	1.10	1.15	1.25	1.35	1.50	1.70	2.1	3.15	5.00	9.10
m_1	1	0.99	0.98	0.96	0.95	0.90	0.90	0.85	0.81	0.75	0.70	0.60

Tableau IV.7 : Coefficient m_1 pour un Poteau encasté libre à hauteur d'âme variable linéairement

I_{min}/I_{max}	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02
H_{min}/H_{max}	1	1.05	1.10	1.16	1.25	1.35	1.50	1.70	2.00	2.75	3.70	5.50
P^*	1	1.10	1.20	1.30	1.45	1.65	1.90	2.40	3.2	5.80	8.50	17.50
m_1	1	1.04	1.06	1.07	1.10	1.13	1.14	1.21	1.24	1.39	1.20	1.16

IV.4.4 Méthode basée sur l'utilisation d'un logiciel (éléments finis)

Logiciel Robot Structural Analysis 2010 basé sur la méthode des éléments finis permet de définir facilement des barres de formes différentes et à section variable linéairement. Il permet aussi de calculer la charge critique pour toutes conditions d'appui. Le coefficient m_1 est déduit à partir de la charge critique.

Les résultats obtenus par cette méthode sont résumés dans la figure suivante.

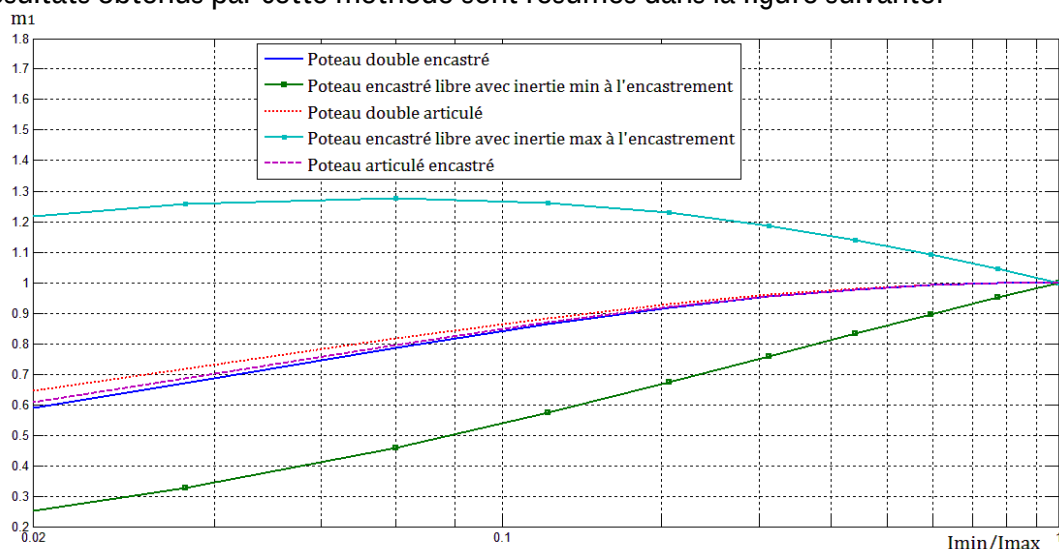


Figure IV.12 : Coefficient m_1 calculé par la méthode des éléments finis pour un Poteau à hauteur d'âme variable linéairement dans le plan de forte inertie

Les commentaires de la figure IV.6 restent valables pour la figure IV.12.

IV.5 Comparaison des résultats obtenus par les 4 méthodes précédentes

Pour comparer les résultats, nous avons calculé l'écart entre le coefficient m_1 calculé par la méthode des différences finies pour un poteau à hauteur d'âme variable et celui calculé par les autres méthodes.

On définit l'écart par la formule suivante :

Ecart =

$$\frac{\text{valeur } m_1 \text{ calculé par la méthode des différences finies} - \text{valeur } m_1 \text{ calculé par les autres méthodes}}{\text{valeur } m_1 \text{ calculé par la méthode des différences finies}}$$

Les écarts sont calculés pour un poteau à hauteur d'âme variable linéairement et sous différentes conditions d'appuis. Ils sont exprimés dans les tableaux (IV.8), (IV.9)... et (IV.12).

On utilise les notations suivants en raison de simplifier la représentation des Tableau

Méthode(1) : Méthode basé sur les fonctions de Bessel.

Méthode(2) : Méthode basé sur les abaques de Carter et Gere.

Méthode(3) : Méthode des éléments finis.

Tableau IV.8 : Valeurs de l'écart d'un Poteau Bi-articulé :

$\frac{I_{min}}{I_{max}}$	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02
Méthodes												
(1)	0	0	+0.1	+0.1	0	+0.1	0	0	+0.5	0	-1.33	-2
(2)	0	-0.1	+0.8	+1.6	+2	+3.4	+7	+4	+9.8	+2	+4	-4
(3)	0.00	0.00	0.00	0.10	-0.10	0.10	0.00	0.00	0.54	0.36	0.00	-1.59

Tableau IV.9 : Valeurs de l'écart d'un Poteau articulé encastré :

$\frac{I_{min}}{I_{max}}$ Méthodes	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02
(1)	0	0	-0.1	-0.2	-0.1	0	-0.1	0	-1.7	+0.6	0	0
(2)	0	+0.1	+0.7	+3.2	+4	+8.2	+7	+8.4	+10	+6.7	+2.7	-3.3
(3)	0.00	0.10	-0.20	-0.20	0.00	-0.10	0.10	0.53	-0.56	0.61	1.37	0.00

Tableau IV.10 : Valeurs de l'écart d'un Poteau Bi-encastré :

$\frac{I_{min}}{I_{max}}$ Méthodes	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02
(1)	0	-0.1	-0.2	-0.5	-0.3	-0.2	-0.5	0	0	+1.2	+2.8	+1.7
(2)	0	+0.1	+1.5	+3	+3.7	+8	+6.7	+9.6	+10	+7.4	+2.8	-1.7
(3)	0.00	0.00	-0.30	-0.40	-0.20	-0.31	0.00	-0.43	0.00	-0.37	1.39	0.85

Tableau IV.11 : Valeurs de l'écart d'un Poteau encastré libre (inertie maximale à l'encastrement)

$\frac{I_{min}}{I_{max}}$ Méthodes	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02
(1)	0	-0.1	-0.5	-0.5	0	+0.4	0	+0.4	+0.8	+1.25	+1.7	+1.6
(2)	-1	-1	0	0	0	+0.3	0	+0.4	+0.9	+1.25	+1.7	+1.6
(3)	0	0	0	0	0	0	0	0	0.24	0.55	1.25	1.14

Tableau IV.12 : Valeurs de l'écart d'un Poteau encastré libre (inertie minimale à l'encastrement):

$\frac{I_{min}}{I_{max}}$ Méthodes	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02
(1)	0	-1	0	1.1	0.3	0	0	+0.7	+0.8	+0	+2.6	+2
(3)	0.00	-0.62	-0.32	0.75	0.34	0.00	0.00	0.27	0.78	0.00	2.63	1.20

A partir des valeurs données aux tableaux ci-dessus il est possible de constater que les écarts se changent d'une méthode à l'autre en valeur et en signe. Cela montre que le choix de la méthode de calcul a une influence sur la charge critique obtenue.

Les écarts de la méthode(2) sont généralement importants par rapport aux autres méthodes (elles peuvent dépasser 10%). On explique cela par l'existence d'une accumulation des erreurs de lecture et les erreurs dues à notre choix d'une valeur moyenne de coefficient de forme ($n=2.3$) et la nature approximative de la formule d'inertie adaptée par Carter et Gere. Il faut aussi noter que l'apparence d'un petit écart pour la méthode (1) et (3) est expliqué par :

- La non égalité des formules d'inertie entre la méthode (1) et la méthode de la différence finie.

- La précision de la méthode des éléments finis n'est pas identique à celle de la méthode des différences finis.

Il est remarquable que les écarts prennent ses valeurs maximales lorsque les rapports $\frac{I_{min}}{I_{max}}$ sont minimales ($\frac{I_{min}}{I_{max}} = 0.05$ ou 0.02). On explique cela par l'augmentation de la surface des parties négligées représentées dans la figure (IV.13) en fonction de la diminution du rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}}$.

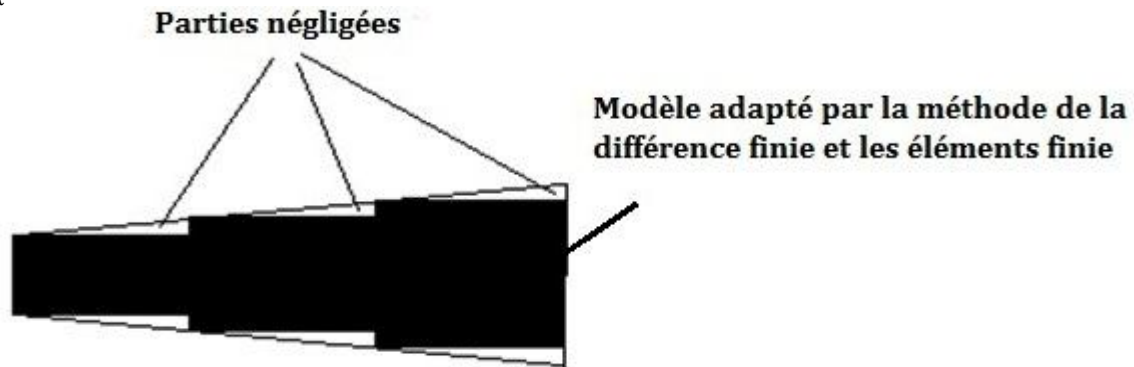


Figure IV.13 : Division du poteau aux parties à inertie constante

La comparaison entre la charge critique d'un poteau à inertie constante et celle d'un poteau à inertie variable avec une égalité en poids nous a conduit aux résultats suivants :

La charge critique d'un poteau à inertie variable est inférieure à celle d'un poteau à inertie constante pour les cas des nœuds fixes. Elle se diminue en fonction du rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}}$. Cependant, il est facile de constater un comportement semblable des poteaux à nœuds fixes d'après l'observation des graphes $m_1 = f\left(\frac{I_{min}}{I_{max}}\right)$ ou $m_2 = f\left(\frac{I_{min}}{I_{max}}\right)$.

En ce qui concerne les résultats d'un poteau encasturé-libre, la longueur de flambement augmente lorsqu'on augmente la section au niveau de l'encastrement, ce qui donne une amélioration de la résistance.

IV.6 Etude de généralisation des résultats

L'étude précédente a été réalisée sur un poteau dont les dimensions données dans le tableau (IV.13).

Tableau IV.13 : Les dimensions du poteau étudié.

Paramètre	Hauteur d'âme variable (mm)	Largeur des semelles variable (mm)
Epaisseur de l'âme	6	6
Epaisseur des semelles	12	12
Largeur des semelles	280	variable
Hauteur de l'âme	variable	500

Dans cette partie nous allons étudier la possibilité de généraliser les résultats obtenus précédemment sur les poteaux trouvés au niveau du marché. Cette étude consiste à recalculer le coefficient m_1 des poteaux dont les dimensions limitées par les intervalles

donnés au tableau (IV.14), et de comparer les résultats avec celle du poteau donné au tableau (IV.13).

La présence de 3 paramètres qui peuvent influencer sur la valeur de m_1 nous a obligé d'étudier les 8 combinaisons possibles. Chaque paramètre peut prendre deux valeurs (minimale ou maximale). Notant que la valeur de m_1 varie d'une manière continue avec les trois paramètres, donc il suffit d'étudier les cas extrêmes de chaque paramètre.

Tableau IV.14 : L'intervalle dimensionnel de l'étude

Paramètre	Intervalle (mm)
Epaisseur de l'âme	6 → 18
Epaisseur des semelles	10 → 45
Largeur des semelles	100 → 500
Hauteur de l'âme	200 → 1500

La comparaison a montré l'existence d'un écart qui augmente inversement en fonction du rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}}$. Il prend un maximum qui ne dépasse pas les 2% pour $\frac{I_{min}}{I_{max}} = 0.02$.

IV.6.1 Conclusion

Cette étude justifie notre choix d'utiliser le rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}}$ au lieu de $\frac{h_{min}}{h_{max}}$, notant également que l'effet des dimensions supposées constantes est remarquable dans le graphe $m_1 = f\left(\frac{h_{min}}{h_{max}}\right)$.

Avec une erreur qui ne dépasse pas 2% calculé pour les cas les plus extrêmes, on peut dire que les graphes $m_1 = f\left(\frac{I_{min}}{I_{max}}\right)$ sont valables pour tout poteau appartenant à l'intervalle dimensionnel de vérification (Tableau IV.14).

IV.7 Etude de la déformée

Nous avons figuré la déformée d'un poteau à hauteur d'âme variable pour 4 conditions d'appuis différentes, avec plusieurs valeurs du rapport h_{min}/h_{max} (figure IV.14, IV.15, IV.16 et IV.17). La représentation de la déformée est adimensionnelle. Ainsi nous pensons que cette étude permet de se rendre compte de l'influence de la variation d'inertie sur la déformée du profilé.

IV.7.1 Poteau bi-articulé

Déformé normalisé

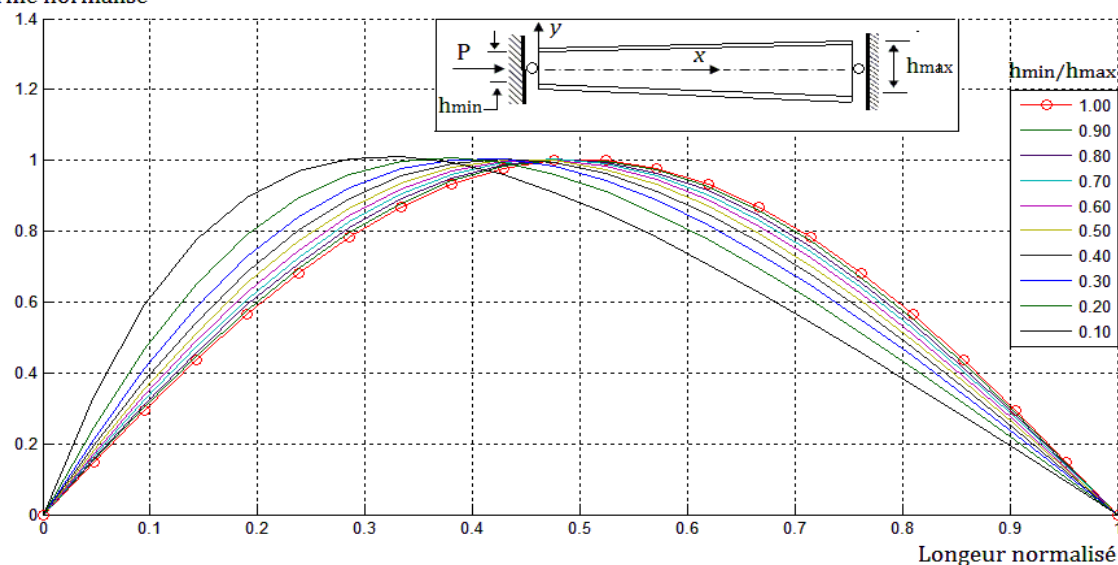


Figure IV.14 : Allure de déformée d'un poteau à hauteur d'âme variable, bi-articulés avec différentes valeurs de h_{min}/h_{max}

Il est remarquable que la variation de l'inertie a une influence sur la déformée du flambement. La comparaison avec la déformée d'un poteau à inertie constante montre que la flèche maximale se rapproche au côté de la section minimale par la diminution du rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}}$. L'augmentation de la section provoque une diminution de la flèche, et l'inverse pour le côté de la section minimale.

IV.7.2 Poteau articulé-encasté

Déformé normalisé

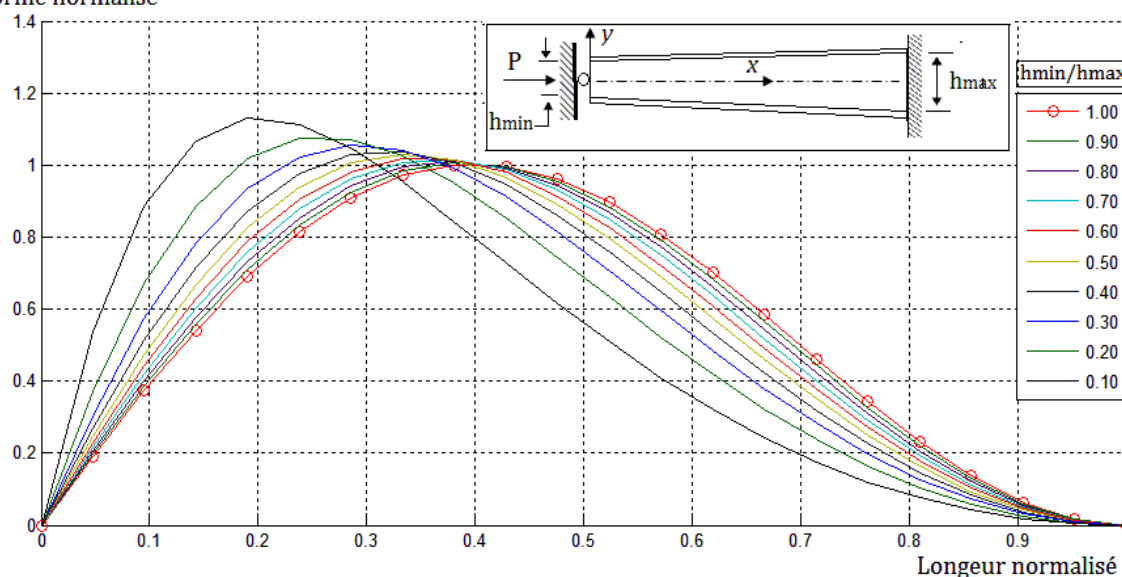


Figure IV.15 : Allure de déformée d'un poteau à hauteur d'âme variable, articulé-encasté avec différentes valeurs de h_{min}/h_{max}

Les commentaires de la figure IV.14 restent valables pour la figure IV.15.

IV.7.3 Poteau bi-encasté

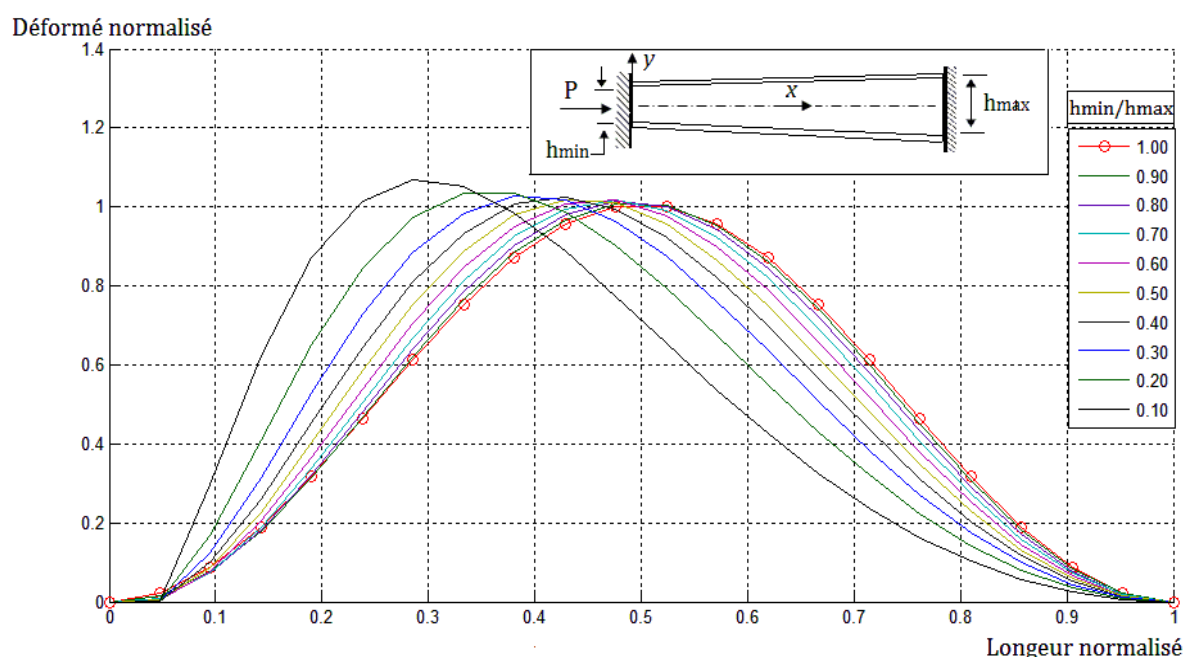


Figure IV.16 : Allure de déformée d'un poteau à hauteur d'âme variable bi-encasté avec différentes valeurs de h_{min}/h_{max}

Les commentaires de la figure IV.14 restent valables pour la figure IV.15.

IV.7.4 Poteau encasté-libre

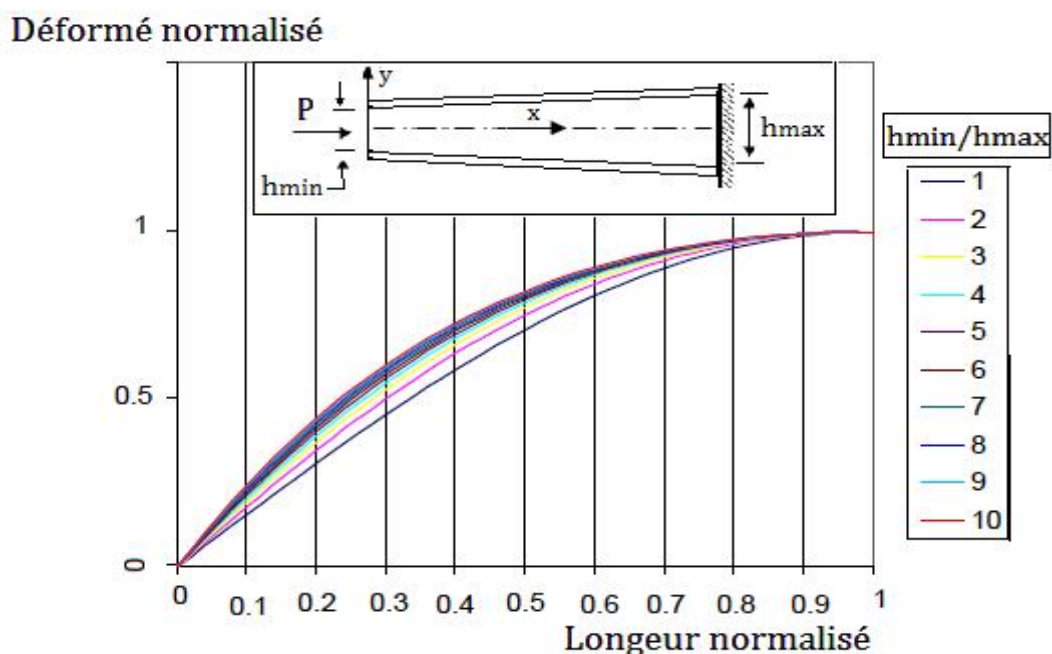


Figure IV.17 : Allure de déformée d'un poteau à hauteur d'âme variable, encasté-libre avec différentes valeurs de h_{min}/h_{max}

On remarque que la flèche du poteau diminue par l'augmentation de la section à l'encastrement. La partie indéformable à l'encastrement varie inversement avec le rapport h_{min}/h_{max} . La quantité de la matière à l'encastrement modifie la longueur du flambement.

IV.7.5 Conclusion

La déformée du flambement des poteaux à inertie variable dépend de la distribution de la matière. On constate que l'augmentation de la flèche maximale des poteaux à inertie variable par rapport à celle d'un poteau à inertie constante engendre des moments de second ordre supplémentaire.

La modification de la déformée du poteau causée par la variation de l'inertie influe sur la répartition des moments, cela peut modifier la position de la section critique du dimensionnement.

IV.8 Calcul de la charge critique en fonction de la formule de variation de l'inertie

IV.8.1 Définition des étapes de la résolution

On sait que si une équation différentielle est composée par des sous équations, alors la solution générale sera égale à la somme des solutions de ces sous équations.

On peut employer cette caractéristique pour notre problème lorsque l'équation de l'inertie a la forme suivante : $I(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots f_n(x)$. (IV.14)

Introduisant l'équation (IV.14) dans l'équation (IV.1) et nous obtenons l'équation (IV.15)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E(f_1(x) + f_2(x) + \dots f_n(x)) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (IV.15)$$

Ajoutant le poids propre du poteau, l'équation (IV.15) devienne [27] :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E(f_1(x) + f_2(x) + \dots f_n(x)) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + P \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[Q(x) \frac{dy}{dx} \right] = 0 \quad (IV.16)$$

$Q(x)$: représente la distribution de la force axiale le long du poteau due au poids propre.
D'après le paragraphe précédent, Nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E(f_1(x)) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + P_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[Q_1(x) \frac{dy}{dx} \right] = 0. \quad (IV.17)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E(f_2(x)) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + P_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[Q_2(x) \frac{dy}{dx} \right] = 0. \quad (IV.18)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E(f_n(x)) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + P_n \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[Q_n(x) \frac{dy}{dx} \right] = 0. \quad (IV.19)$$

$$\text{Notant que } P_{cr} = P_{1 cr} + P_{2 cr} + \dots + P_{n cr}. \quad (IV.20)$$

Notre choix des fonctions d'inertie pour l'étude a été fixé les plus fréquemment utilisées. Elles sont : $f_1(x) = I_o(1 + \alpha x)$, $f_2(x) = I_o(1 + \alpha x)^2$, $f_3(x) = I_o(1 + \alpha x)^3$ (figure IV.18).

$f_1(x)$: caractérise la loi de la variation d'inertie de la plaque A.

$f_2(x)$: caractérise la loi de la variation d'inertie de la plaque B.

$f_3(x)$: caractérise la loi de la variation d'inertie de la plaque C.

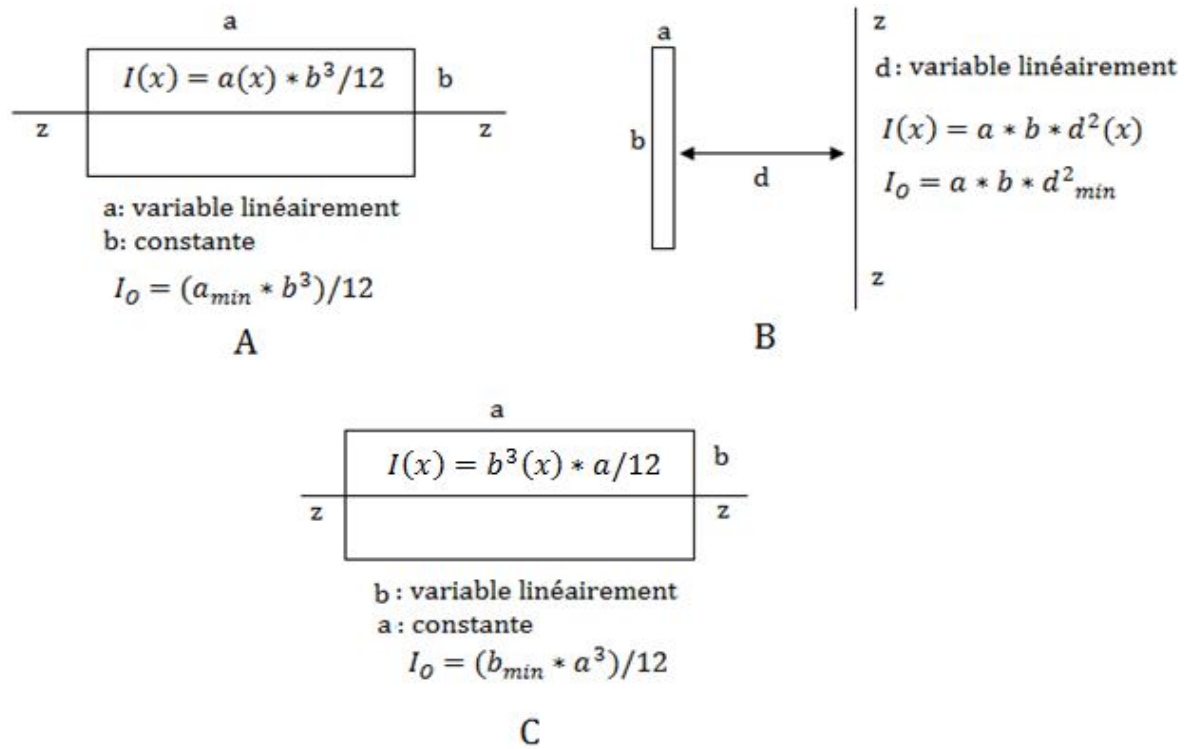


Figure IV.18 : Cas fréquemment rencontrés des équations de l'inertie

$Q(x) = q_0 \int_0^x (1 + \alpha x) dx$ avec $\alpha = \frac{a_{min} - a_{max}}{L a_{max}}$ pour le cas où la section maximale se trouve en bas du poteau ou $\alpha = \frac{a_{max} - a_{min}}{L a_{min}}$ pour le cas où la section maximale se trouve en haut du poteau, voir figure (IV.19).

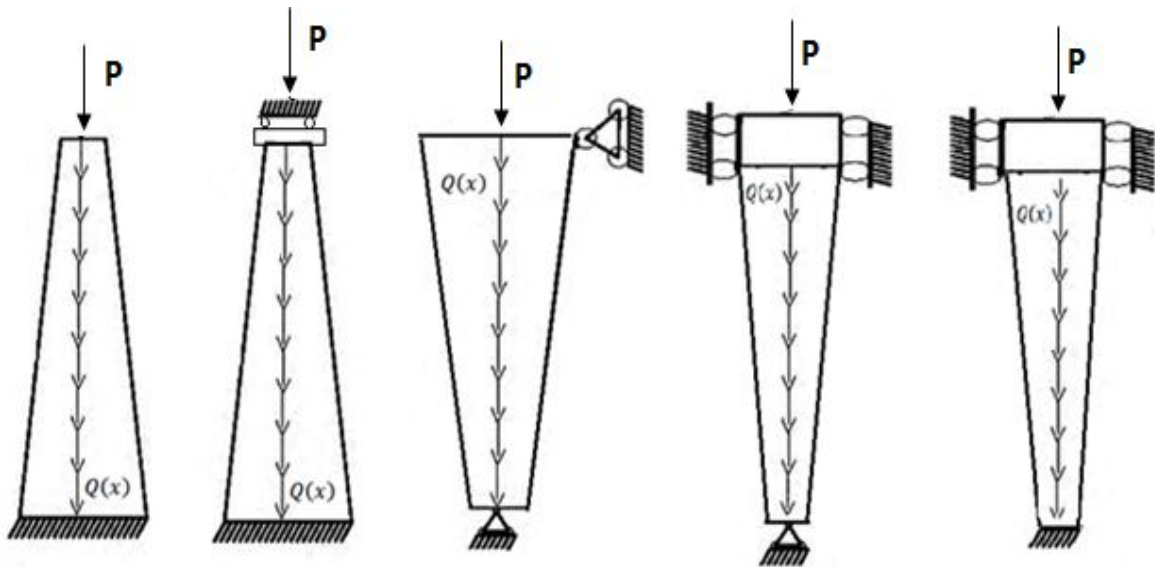


Figure IV.19 : Les conditions d'appuis étudiées

Remplaçant la formule de $Q(x)$ dans le terme du poids propre de l'équation (IV.16).

$$\frac{d}{dx} \left[q_0 \int_0^x (1 + \alpha x) dx \frac{dy}{dx} \right] = q_0 (1 + \alpha x) \frac{dy}{dx} + q_0 x (1 + \alpha x) \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (IV.21)$$

Après le remplacement des dérivés de l'équation (IV.21) par les expressions d'approximation de la méthode des différences finies (formules IV.2), on obtient les deux matrices suivantes :

$$[C] = \frac{q_0}{2h} \begin{bmatrix} 0 & (1 + \alpha x_2) & 0 & \dots & 0 \\ -(1 + \alpha x_3) & 0 & (1 + \alpha x_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -(1 + \alpha x_{n-1}) & 0 & (1 + \alpha x_{n-1}) \\ 0 & \dots & 0 & -(1 + \alpha x_n) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{q_0}{h^2} \begin{bmatrix} -2x_2(1 + \frac{\alpha}{2}x_2) & x_2(1 + \frac{\alpha}{2}x_2) & 0 & \dots & 0 \\ x_3(1 + \frac{\alpha}{2}x_3) & -2x_3(1 + \frac{\alpha}{2}x_3) & x_3(1 + \frac{\alpha}{2}x_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x_{n-1}(1 + \frac{\alpha}{2}x_{n-1}) & -2x_{n-1}(1 + \frac{\alpha}{2}x_{n-1}) & x_{n-1}(1 + \frac{\alpha}{2}x_{n-1}) \\ 0 & \dots & 0 & x_n(1 + \frac{\alpha}{2}x_n) & -2x_n(1 + \frac{\alpha}{2}x_n) \end{bmatrix}$$

La charge critique est obtenu lorsque le déterminant de la matrice $\left[\frac{[T]}{h} + \frac{P}{E} \frac{[B]}{h} + [D] \frac{h}{E} + [C] \frac{h}{E} \right]$ est égale à 0.

Avec : la matrice [T] et [B] sont donnés au paragraphe **IV.4.1**.

Nous avons remplacé l'effet du poids propre sur P_{cr} par une charge équivalent appliquée au sommet de la barre. Nous avons exprimé la charge critique sous la forme :

$$\gamma_2 \frac{\pi^2 EI_{max}}{L_F^2} = \gamma_1 \frac{\pi^2 EI_{max}}{L_F^2} - \mu PP \quad (IV.22)$$

$$PP : \text{Poids propre du poteau. } PP = \left(\frac{a_{min} + a_{max}}{2} \right) b L M \quad (IV.23)$$

M : poids volumique du matériau, $M = 78 \text{KN/m}^3$ pour l'acier.

L_F : Longueur de flambement du poteau à inertie constante.

$$\text{A partir de l'équation (IV.22) : } \mu = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) \pi^2 EI_{max}}{L_F^2 PP} \quad (IV.24)$$

γ_1 : Coefficient non dimensionnelle calculé sans prise en compte du poids propre du poteau. Il dépend du rapport $\frac{a_{min}}{a_{max}}$.

γ_2 : Même définition de γ_1 avec la prise en compte du poids propre.

Le logiciel Matlab nous a permet de définir des polynômes d'ajustement pour les coefficients γ_1 et μ (voir l'exemple présenté dans la figure IV.19 et IV.20).

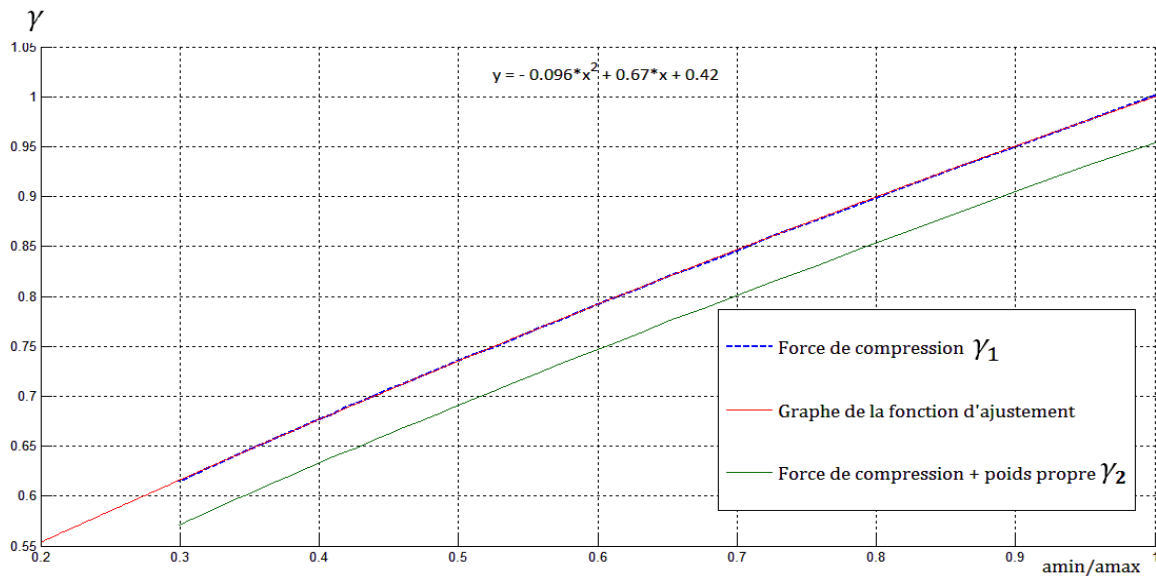


Figure IV.20 : Ajustement de coefficient γ_1 d'un poteau double articulé à inertie variable suivant la loi $I(x) = I_0(1 + \alpha x)$

Les graphes des fonctions d'ajustement de coefficient γ_1 sont presque confondus totalement avec les graphes de coefficient γ_1 . Un polynôme de degré 2 suffit pour représenter la variation de γ_1 . La courbe en couleur verte désigne la variation de γ_2 . On remarque que la différence entre γ_1 et γ_2 reste constante en fonction du rapport $\frac{a_{\min}}{a_{\max}}$. On explique cela par la coïncidence de la forme de variation de l'inertie et du poids propre. Pour les lois de l'inertie $I(x) = I_0(1 + \alpha x)^2$ et $I(x) = I_0(1 + \alpha x)^3$, la courbe de γ_2 converge vers la courbe de γ_1 par la diminution du rapport $\frac{a_{\min}}{a_{\max}}$.

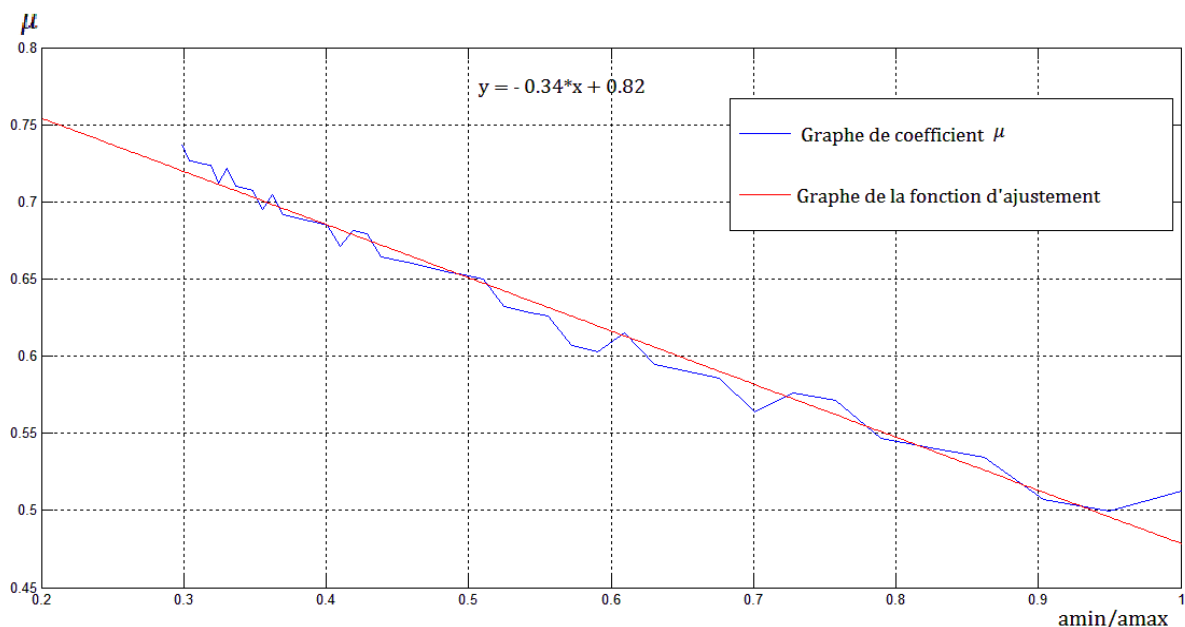


Figure IV.21 : Ajustement de coefficient μ d'un poteau bi-articulé à inertie variable suivant la loi $I(x) = I_0(1 + \alpha x)$

L'accumulation des erreurs de calcul de γ_1 et γ_2 sont remarquées par la forme de la courbe de μ . La fonction d'ajustement prend la forme générale de μ .

IV.8.2 Les résultats

$$R = \frac{a_{min}}{a_{max}} \text{ pour le cas A.} \quad R = \frac{d_{min}}{d_{max}} \text{ pour le cas B.} \quad R = \frac{b_{min}}{b_{max}} \text{ pour le cas C.}$$

Le cas A

Tableau IV.15 : le coefficient γ_1 et μ d'un profilé à inertie variable par l'équation $I(x) = I_0(1 + \alpha x)$.

Coefficient Condition d'appui	γ_1	μ
Bi-articulation	$-0.096R^2 + 0.67R + 0.42$	$-0.34R + 0.82$
Articulé-encastéré	$-0.13R^2 + 0.73R + 0.40$	$-0.31R + 0.95$
Bi- encastrement	$-0.15R^2 + 0.77R + 0.38$	$-0.37R + 0.85$
Encastré-libre	$-0.095R^2 + 0.47R + 0.62$	$-0.11R^2 + 0.3R + 0.12$
Encastré-bloqué en rotation	$-0.15R^2 + 0.78R + 0.38$	$-0.25R^2 + 0.6R + 0.16$

Le cas B

Tableau IV.16 : le coefficient γ_1 d'un profilé à inertie variable par l'équation $I(x) = I_0(1 + \alpha x)^2$

Coefficient Condition d'appui	γ_1
Bi-articulation	$0.1R^2 + 0.794R + 0.1$
Articulé-encastéré	$0.081R^2 + 0.84R + 0.083$
Bi- encastrement	$0.07R^2 + 0.86R + 0.073$
Encastré-libre	$-0.12R^2 + 0.81R + 0.31$
Encastré-bloqué en rotation	$0.096R^2 + 0.8R + 0.1$

Le cas C

Tableau IV.17 : le coefficient γ_1 et μ d'un profilé à inertie variable par l'équation $I(x) = I_0(1 + \alpha x)^3$

Coefficient Condition d'appui	γ_1	μ
Bi-articulation	$0.49R^2 + 0.53R - 0.02$	$-0.41R + 0.88$
Articulé-encastéré	$0.48R^2 + 0.55R - 0.03$	$-0.34R + 1$
Bi- encastrement	$0.48R^2 + 0.54R - 0.028$	$-0.51R + 1$
Encastré-libre	$-0.078R^2 + R + 0.043$	$-0.27R^2 + 0.63R - 0.05$
Encastré-bloqué en rotation	$0.51R^2 + 0.48R + 0.015$	$0.68R^2 - 0.45R + 0.35$

Les équations de coefficient μ prouve que :

k_{ij} : La rigidités effectives de la poutres ij , elle est calculé selon l'annexe A de CCM97.

E_{ij} : Module d'élasticité de la poutre ij .

$\beta = H/\delta$ avec H est la force de retenue élastique appliqué par la structure sur le nœud déplaçable (figure IV.14).

Le calcul de K d'un poteau continue se fait en ajoutant la rigidité effective des tronçons de poteau adjacents au numérateur et dénominateur de la formule de K .

Par la méthode des différences finies, nous avons pu calculer la charge critique pour différentes valeurs de coefficient K et R . Nous avons considéré que l'une des appuis du poteau soit encastré ou articulé et l'autre à un coefficient d'élasticité variable.

Nous avons utilisé les mêmes conditions d'appuis cités au paragraphe (IV.4.1) et en ajoutant pour l'appui élastique les relations suivantes :

- Les barres à nœuds fixes

$M(0) = w \theta(0)$ (M : le moment, θ : la rotation, w : ressort d'encastrement $w=0$ cas d'articulation et $w = \infty$ cas d'encastrement).

On sait que $M(0) = EI(0) \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2}$, $\theta(0) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$ et $y_0 = 0$.

$$\text{Donc : } y_{-1} = \frac{\frac{w}{2} - \frac{EI(0)}{h}}{\frac{w}{2} + \frac{EI(0)}{h}} y_1.$$

- Les barres à nœuds mobiles

$M(L) = M(0) + Py(L) + HL$ avec : $M(0) = EI(0) \frac{y_{-1} + y_1}{h^2}$, $(L) = y_{n+1}$, $H = \beta y(L)$.

Dans tous les cas étudiés nous avons écrit la charge critique sous la forme :

$$P_{cr} = \alpha \frac{\pi^2 EI_{max}}{L^2}$$

avec α : coefficient non dimensionnel, L : longueur du poteau, I_{max} : inertie maximale

Nous avons étudié le cas d'un poteau à hauteur d'âme variable linéairement dans le plan de forte inertie ainsi que le cas d'un poteau à largeur des semelles variable linéairement dans les deux plans de l'inertie. Pour chaque cas nous avons traité 4 cas de conditions d'appui, 2 cas pour les poteaux à nœuds fixes et 2 autres cas pour les poteaux à nœuds mobiles.

Cas 1 : Poteau articulé-encastré élastiquement (figure IV.23, IV.27, IV.31).

Cas 2 : Poteau encastré-encastré élastiquement (figure IV.24, IV.28, IV.32).

Cas3 : Poteau encastré-libre en translation et bloqué en rotation élastiquement (figure IV.25, IV.29, IV.33).

Cas4 : Poteau encastré-bloqué élastiquement en translation (figure IV.26, IV.30, IV.34).

Pour $\beta = 0$, il s'agit d'une articulation et si $K = 1$ implique le cas d'un encastrement.

Pour $R = 0$, il s'agit d'une liberté en translation et si $R = 1$ implique le cas d'un nœud fixe.

Les figures ci-dessous relient le coefficient α avec les coefficients K ou R pour différents rapports $\frac{I_{min}}{I_{max}}$.

IV.9.1 Les résultats

IV.9.1.1 Poteau à hauteur d'âme variable linéairement (plan de forte inertie)

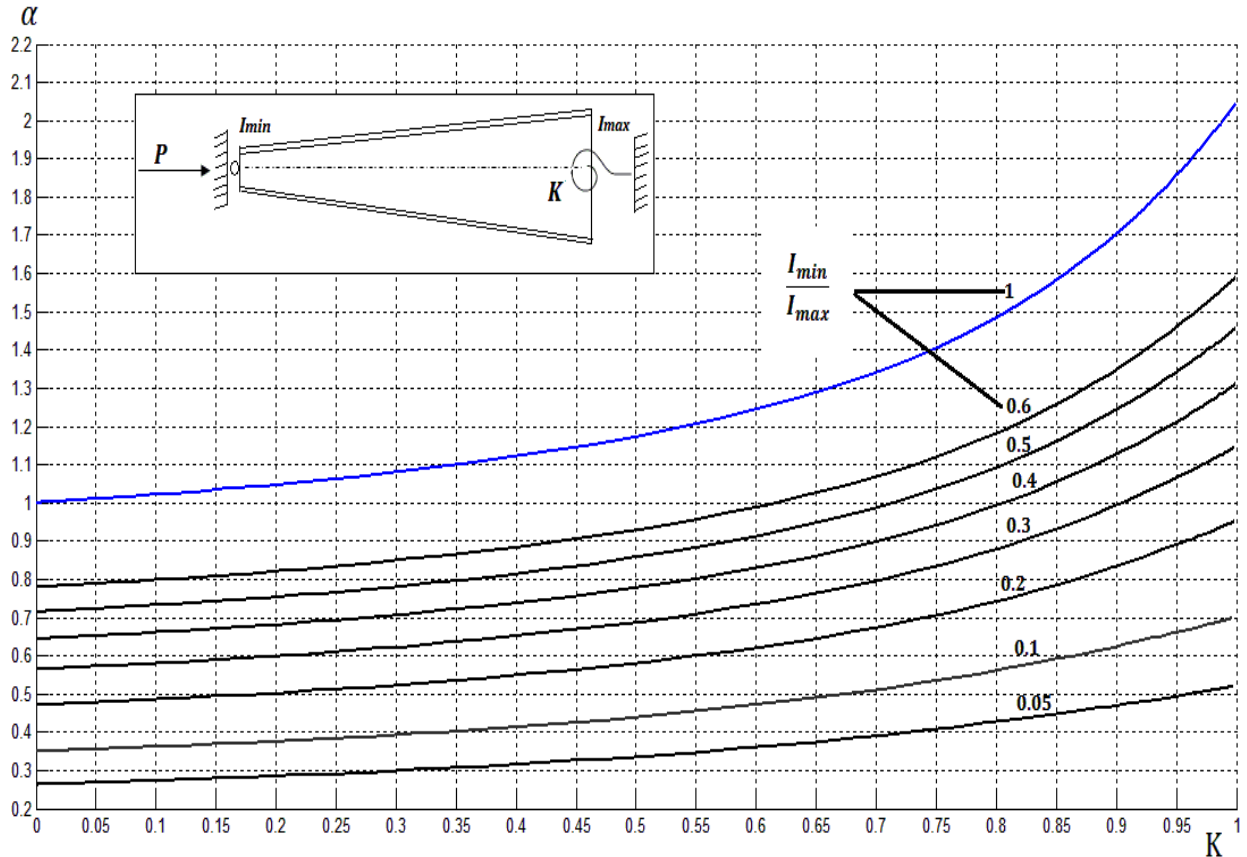


Figure IV.23 : Coefficient α pour un poteau articulé en pied et bloqué en tête par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$

Les courbes obtenues ont une forme parabolique qui relie le cas d'un poteau bi-articulé ($K = 0$) et un poteau articulé-encasté ($K = 1$). On peut vérifier les valeurs de α pour $K = 0$ et $K = 1$ par recours aux résultats obtenues au paragraphe **IV.4.1**.

La majorité des poteaux à hauteur d'âme variable linéairement ont un rapport $\frac{I_{min}}{I_{max}}$ varie entre 0.6 et 0.05. Pour cela cette étude concentre sur cet intervalle.

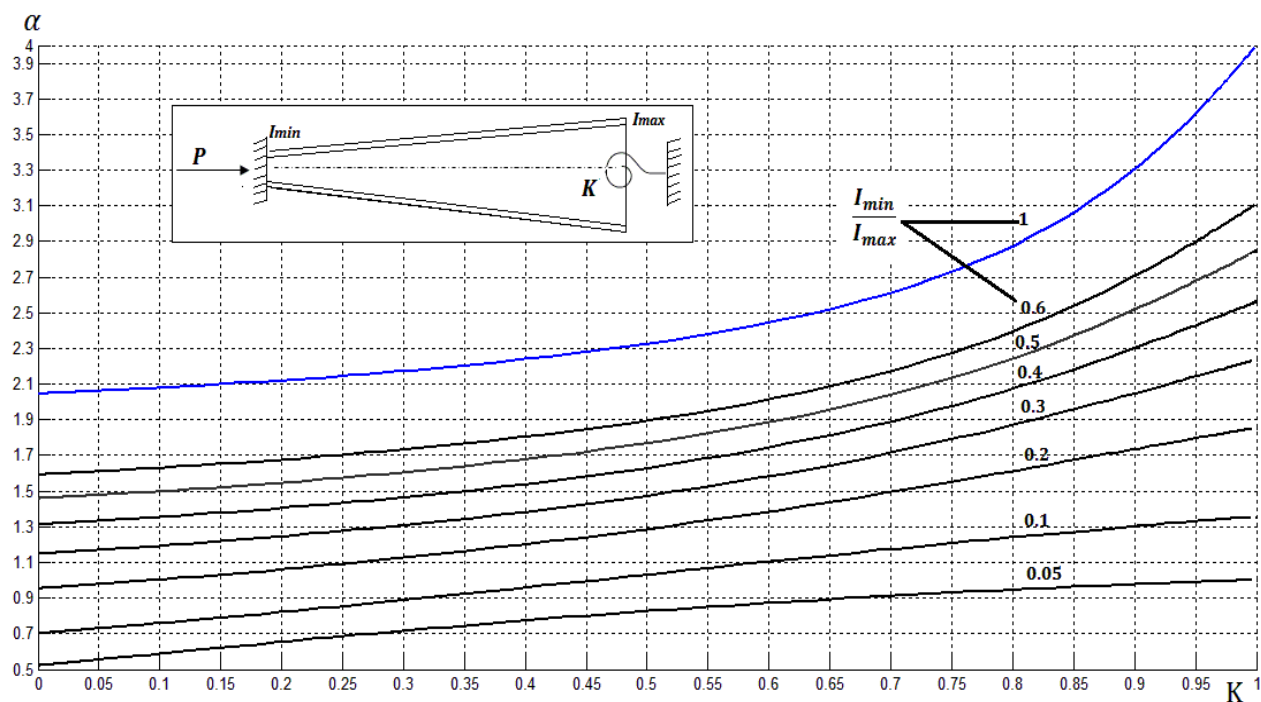


Figure IV.24 : Coefficient α pour un poteau encasté en pied et bloqué en tête par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$

Les courbes obtenues ont une forme parabolique qui relie le cas d'un poteau articulé-encasté ($K = 0$) et un poteau bi-encasté ($K = 1$). On peut vérifier les valeurs de α pour $K = 0$ et $K = 1$ par recours aux résultats obtenues au paragraphe IV.4.1.

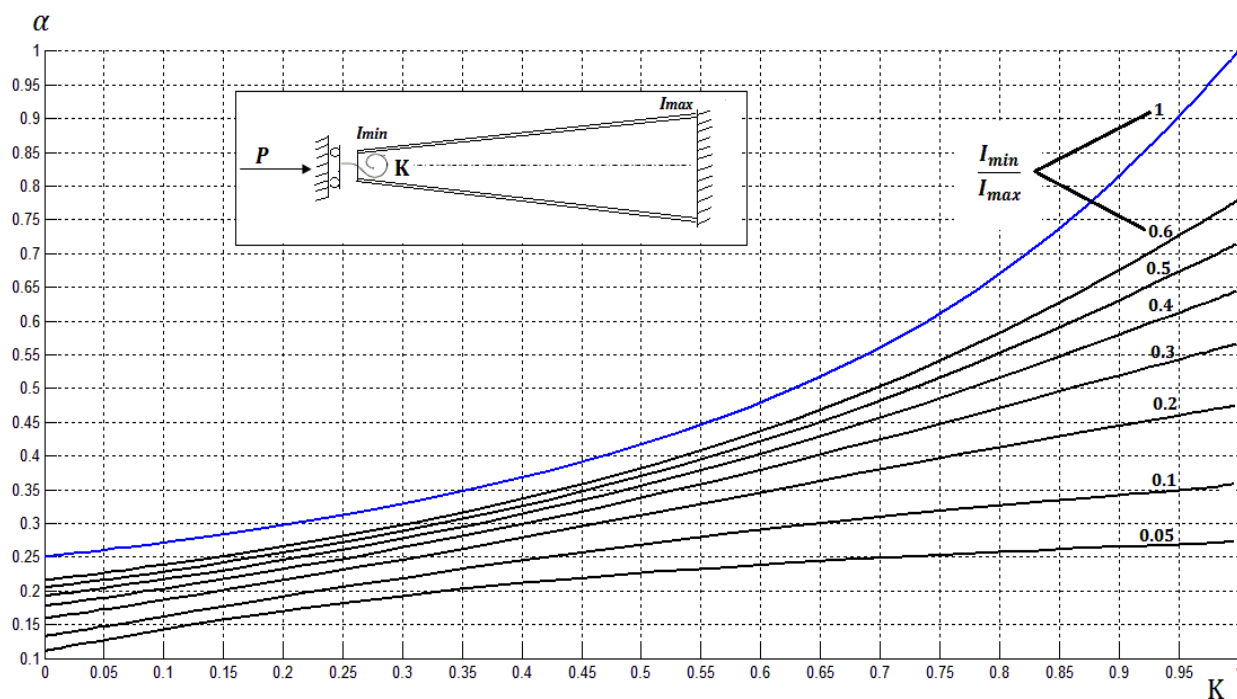


Figure IV.25 : Coefficient α pour un poteau encasté en pied, déplaçable en tête et bloqué en rotation par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$

Les courbes obtenues relient le cas d'un poteau encasté-libre ($K = 0$) et un poteau encasté-bloqué en rotation ($K = 1$).

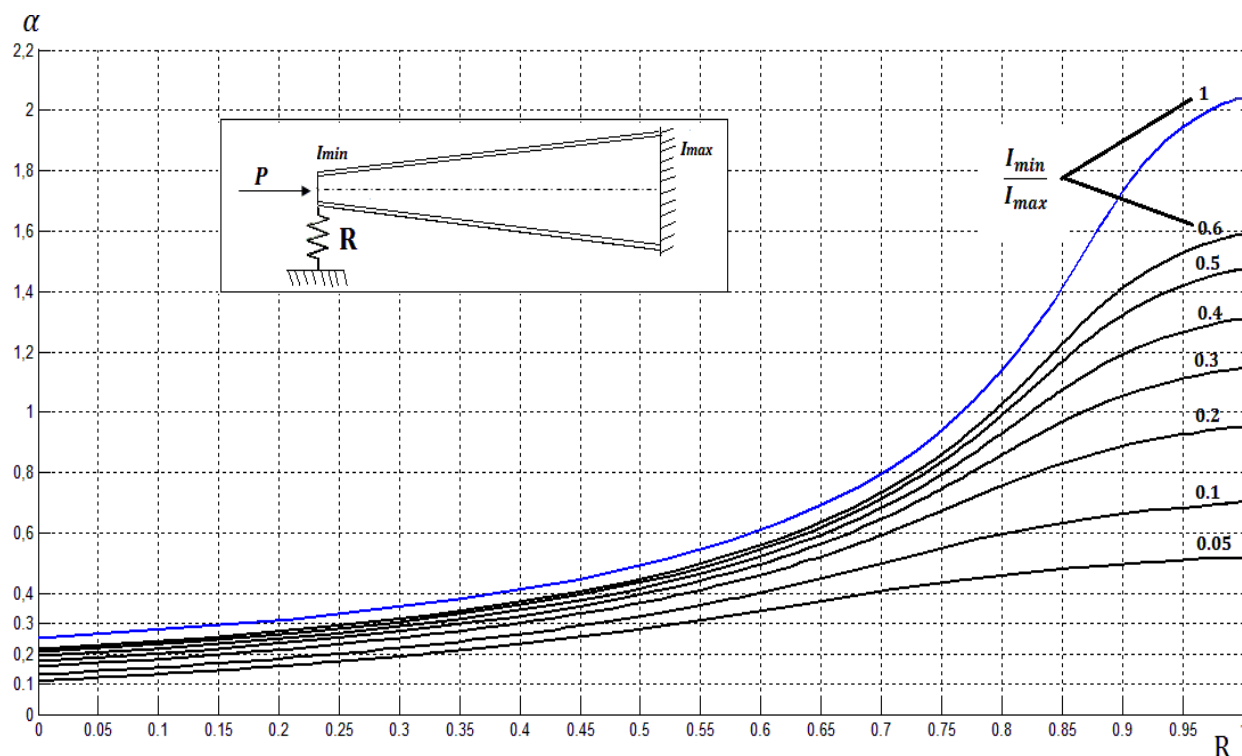


Figure IV.26 : Coefficient α pour un poteau encasté en pied, bloqué en translation par un ressort avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$

Les courbes obtenues relient le cas d'un poteau encasté-libre ($K = 0$) et un poteau encasté-articulé ($K = 1$).

IV.9.1.2 Poteau à largeur des semelles variable linéairement (plan de forte inertie)

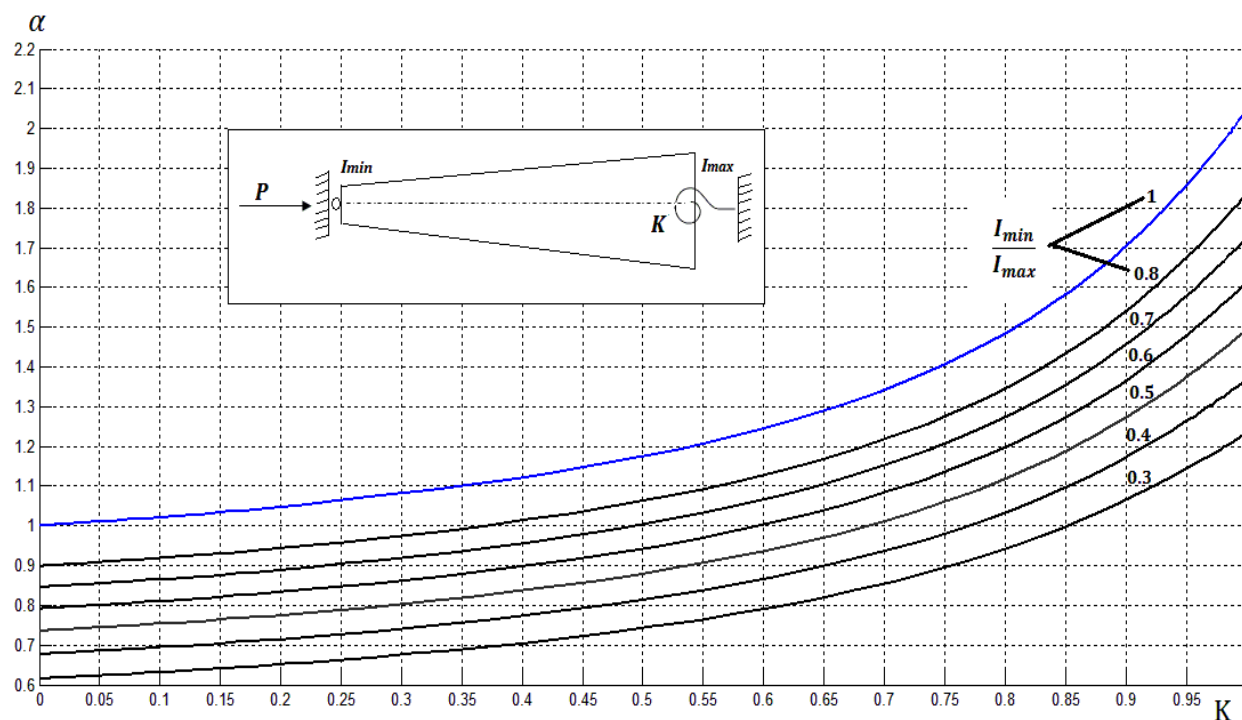


Figure IV.27 : Coefficient α pour un poteau articulé en pied et bloqué en tête par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$

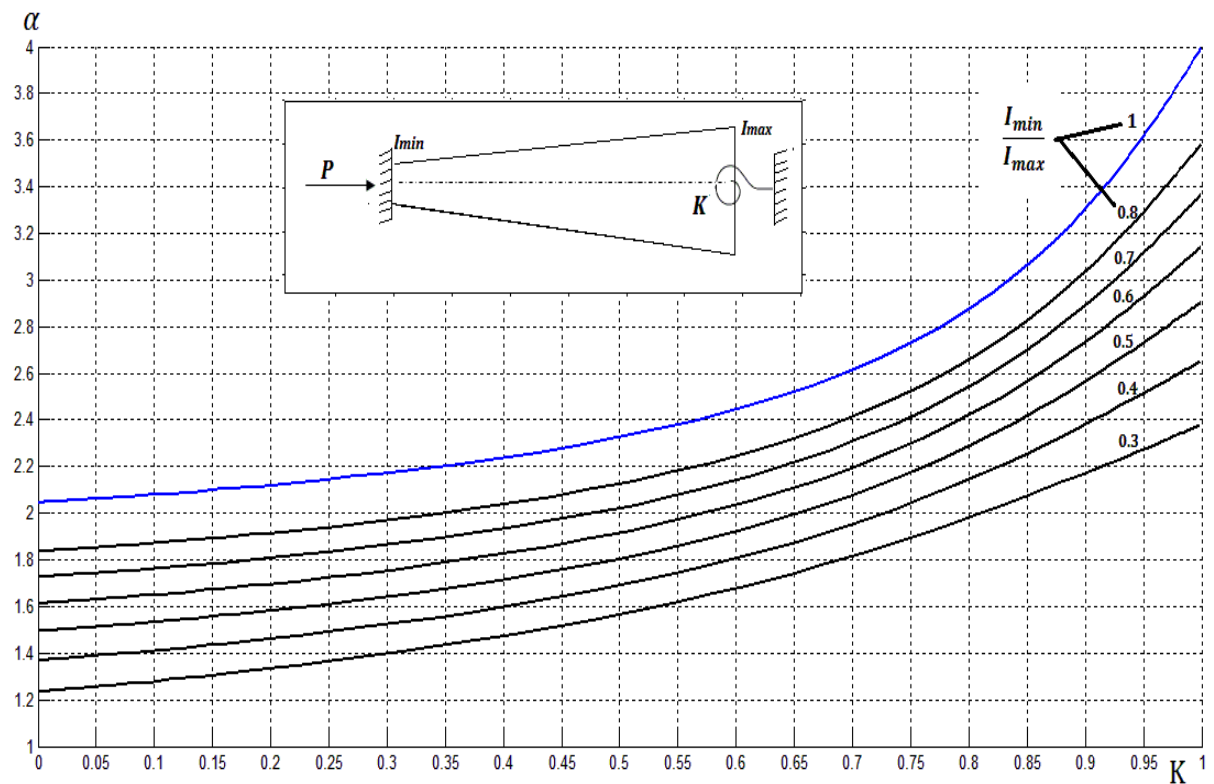


Figure IV.28 : Coefficient α pour un poteau encasté en pied et bloqué en tête par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$

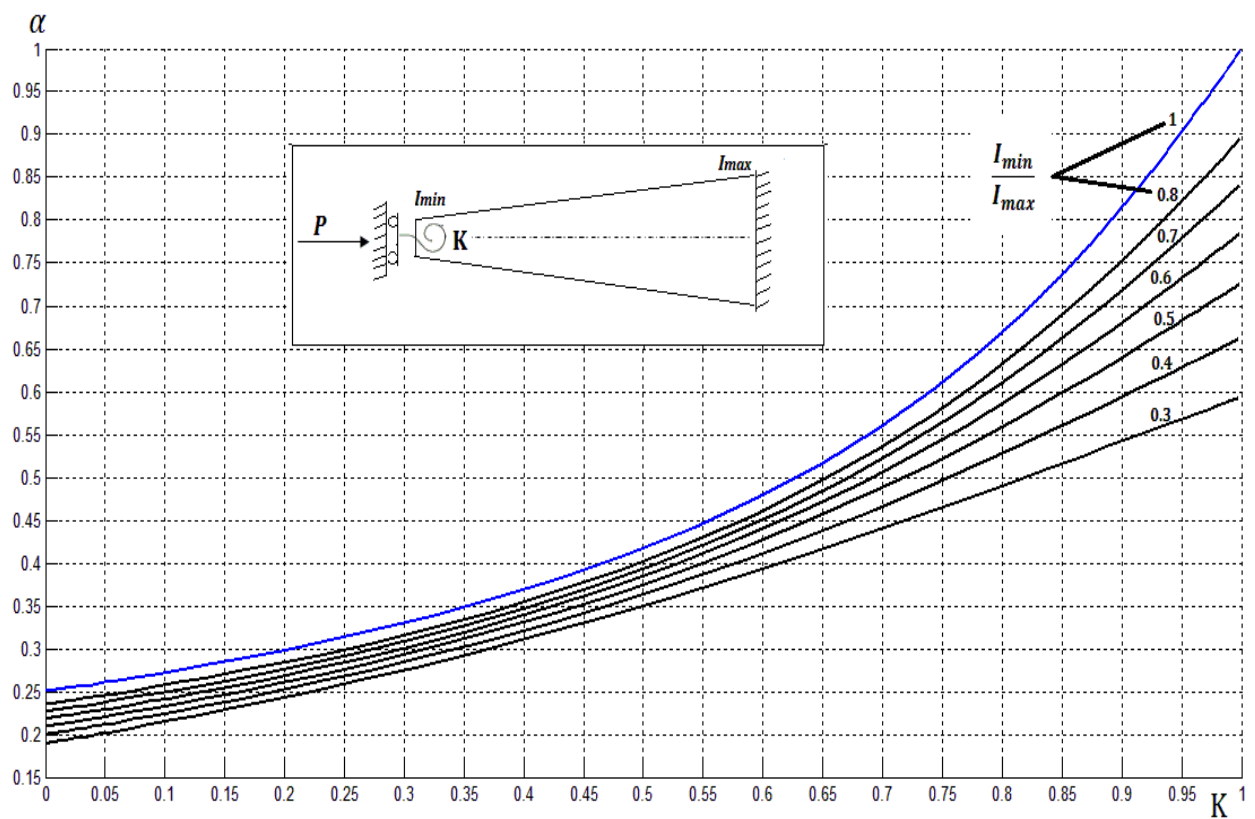


Figure IV.29 : Coefficient α pour un poteau encasté en pied, déplaçable en tête et bloqué en rotation par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$

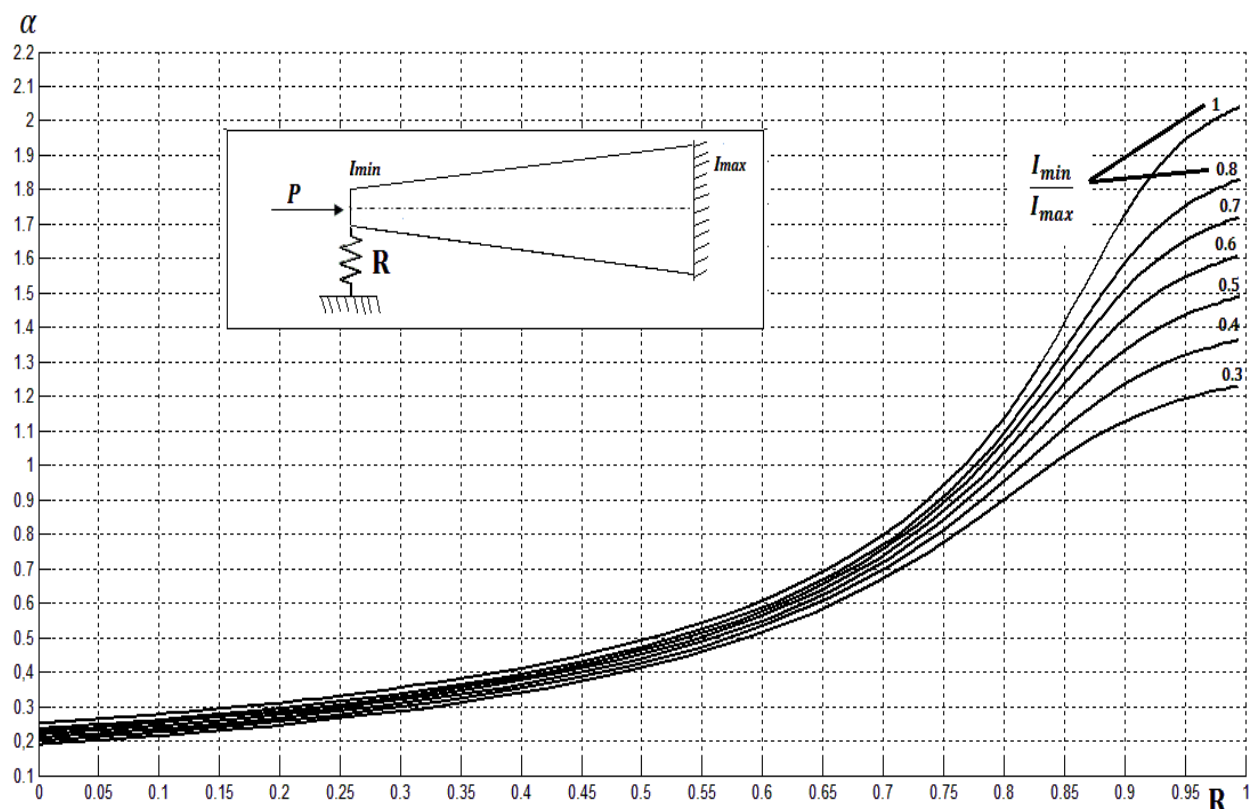


Figure IV.30 : Coefficient α pour un poteau encastré en pied, bloqué en translation par un ressort avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$

IV.9.1.3 Poteau à largeur des semelles variable linéairement (plan de faible inertie)

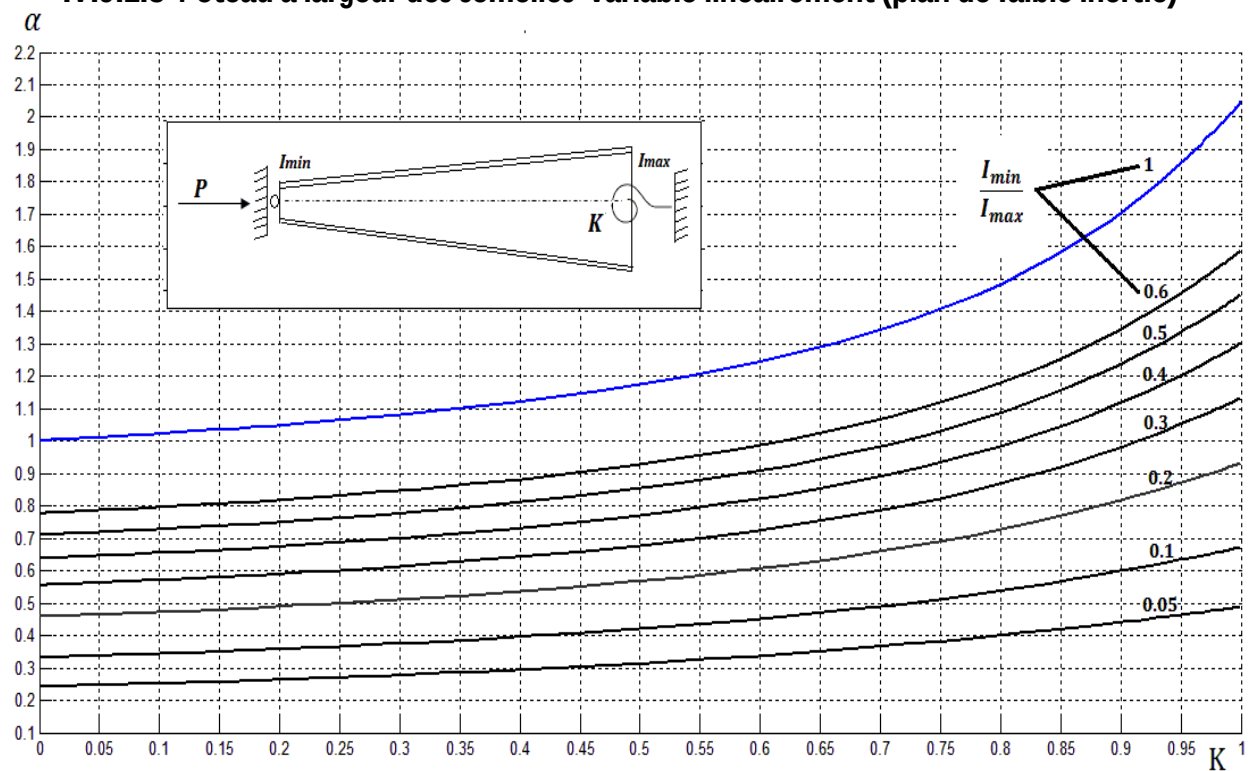


Figure IV.31 : Coefficient α pour un poteau articulé en pied et bloqué en tête par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$

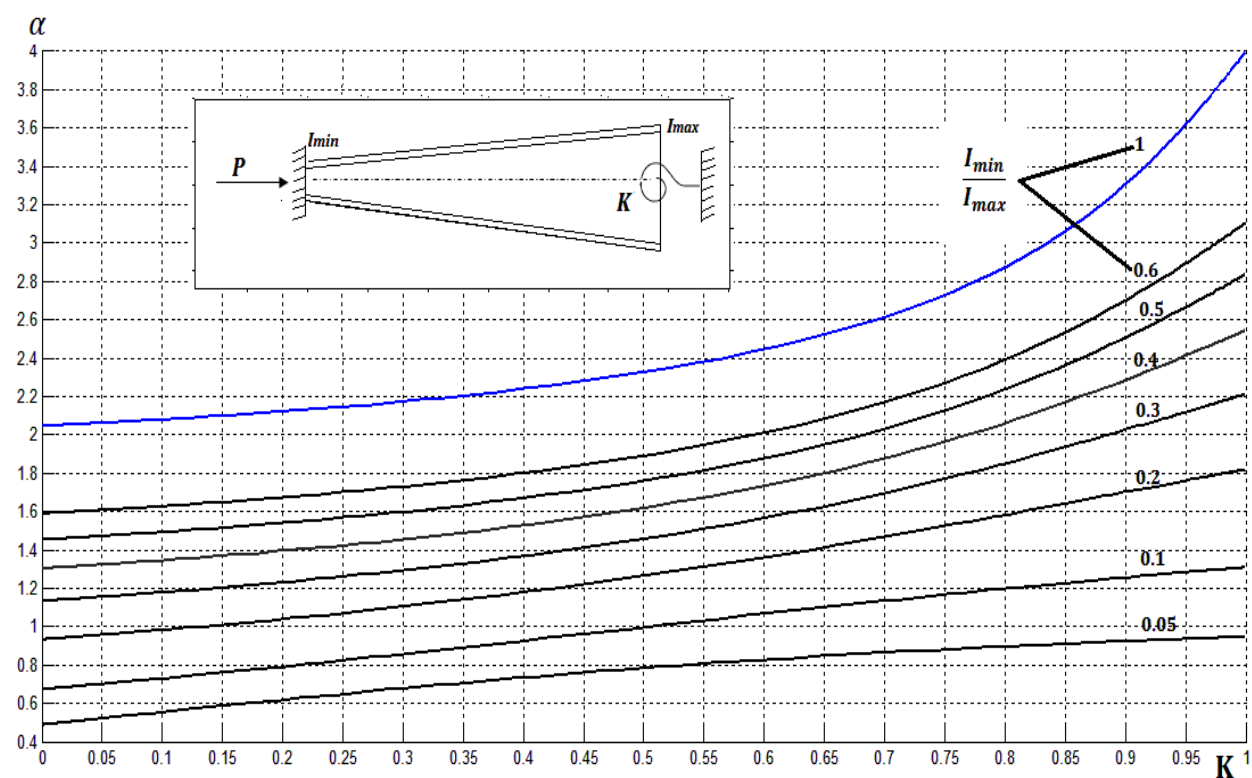


Figure IV.32 : Coefficient α pour un poteau encastré en pied et bloqué en tête par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$

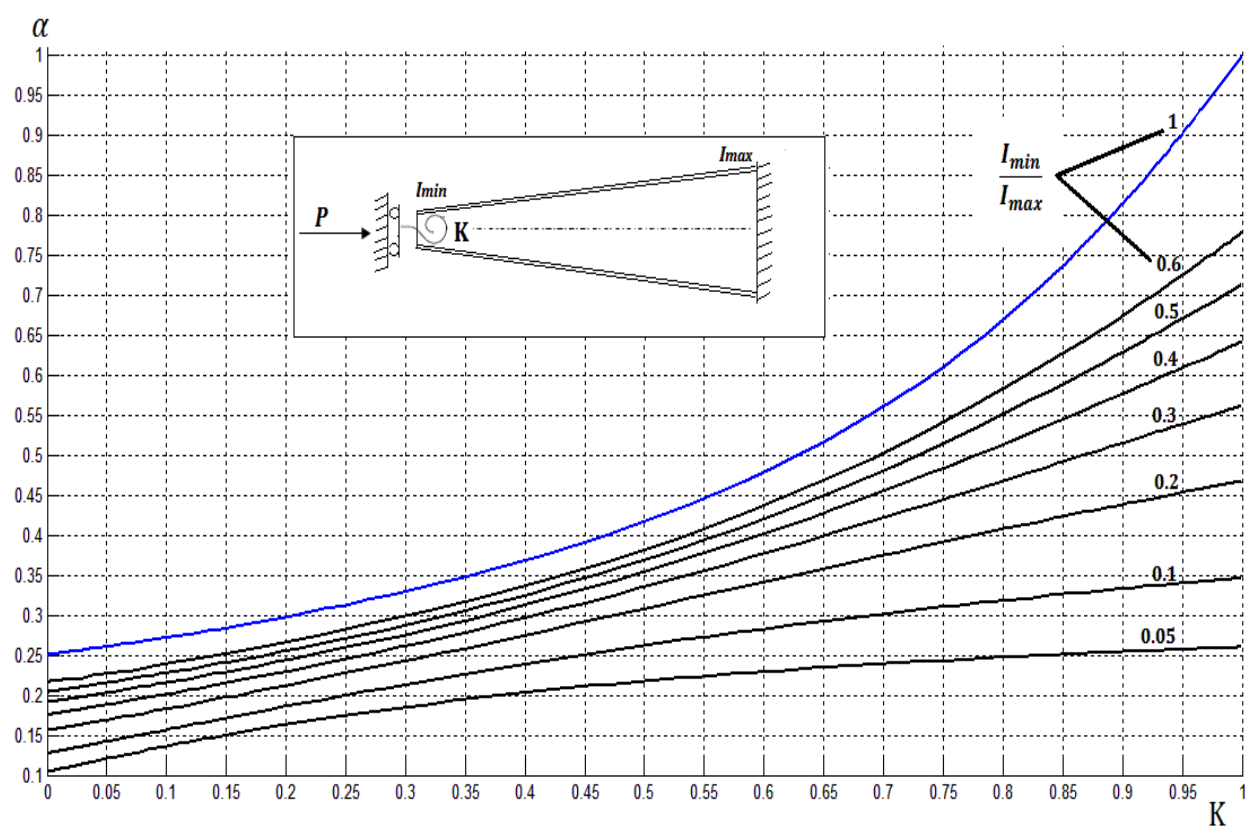


Figure IV.33 : Coefficient α pour un poteau encastré en pied, déplaçable en tête et bloqué en rotation par un ressort d'encastrement avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$

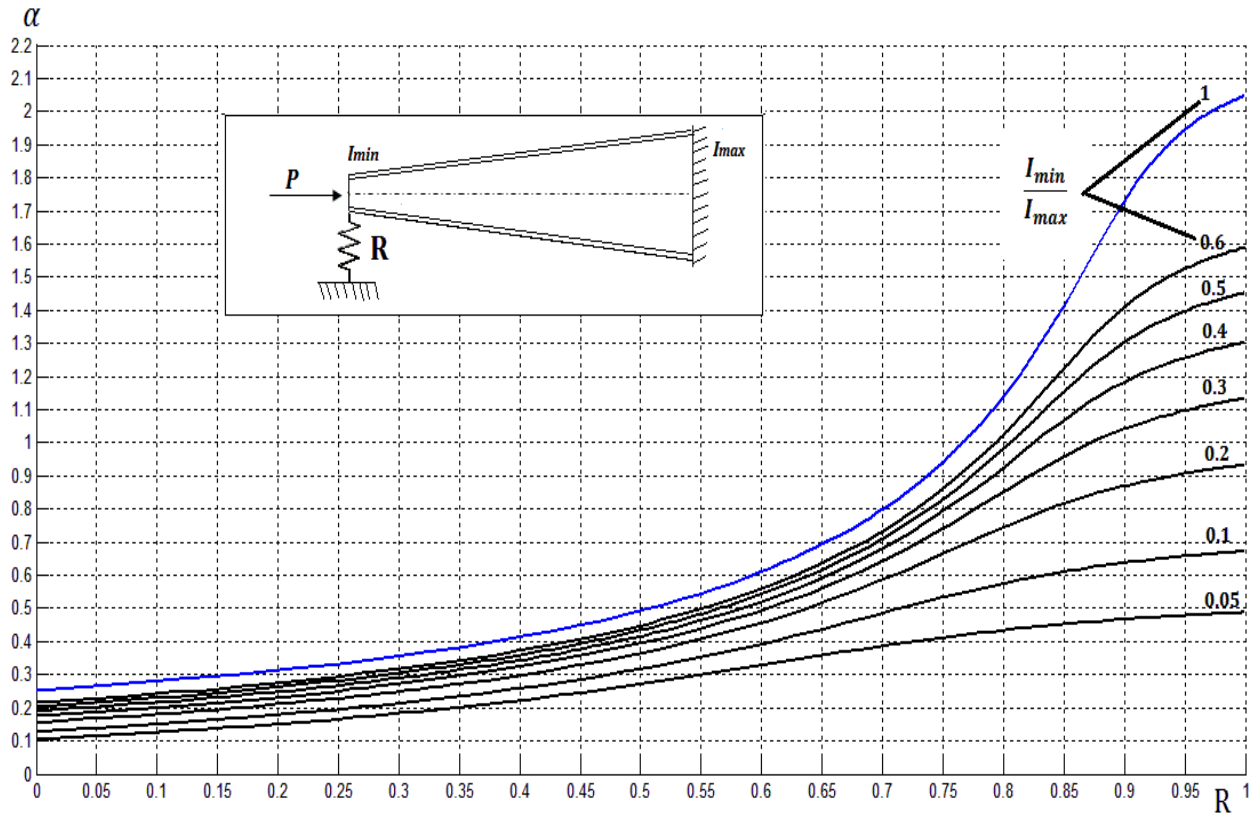


Figure IV.34 : Coefficient α pour un poteau encasté en pied, bloqué en translation par un ressort avec différents valeurs de $\frac{I_{min}}{I_{max}}$

Remarque : l'équation de l'inertie d'un profilé à semelle variable dans le plan de faible inertie est donnée comme suit : $I(x) = \frac{h t_w^3}{12} + 2 \left[\frac{t_f b^3(x)}{12} \right]$, le terme $\frac{h t_w^3}{12}$ est généralement négligeable devant le deuxième terme $2 \left[\frac{t_f b^3(x)}{12} \right]$, donc l'équation de l'inertie s'écrit :

$I(x) = 2 \left[\frac{t_f b^3(x)}{12} \right]$. Cette formule est semblable à la loi de l'inertie d'un poteau rectangulaire à hauteur variable linéairement : $I(x) = \left[\frac{b h^3(x)}{12} \right]$ ou $I(x) = I_{min}(1 + \gamma x)^3$ avec $\gamma = \left(\frac{h_{max}}{h_{min}} - 1 \right) / L$.

Donc on peut employer les abaques concernant un profilé à largeur des semelles variable dans le plan de faible inertie pour le cas d'un poteau rectangulaire à hauteur variable.

IV.9.1 Conclusion

La longueur du flambement des éléments à inertie variable et à inertie constante est influée par la rigidité des nœuds. Le coefficient α résume l'effet de la variation de l'inertie et l'effet de la rigidité des nœuds. Par contre l'étude de Galia (voir III.4.1.2) différencie entre l'effet de la variation de l'inertie et l'effet de la rigidité des nœuds par la définition de la longueur du flambement L_f et le coefficient r .

Les graphes du poteau à largeur des semelles variable dans le plan de faible inertie sont presque identiques à celle du poteau à hauteur d'âme variable à cause de la forme des équations de l'inertie qui sont proches entre eux.

IV.10 Poteau à variation par tronçons

Ce type de poteau convient particulièrement lorsque, outre la charge reportée par la traverse en tête du poteau, il faut transmettre une charge axiale significative à un certain niveau de la hauteur du poteau. Ce cas se rencontre fréquemment dans les pièces comprimées supportant une poutre de roulement d'un pont-roulant de forte capacité de levage. Un tel poteau est assez souvent conçu comme encasturé à sa base et libre en tête. Nous pouvons toutefois rencontrer des situations où les deux extrémités sont assimilées à des articulations. Le poteau est donc soumis à des efforts essentiellement axiaux dont l'intensité varie brusquement par tronçons.

IV.10.1 Le Principe

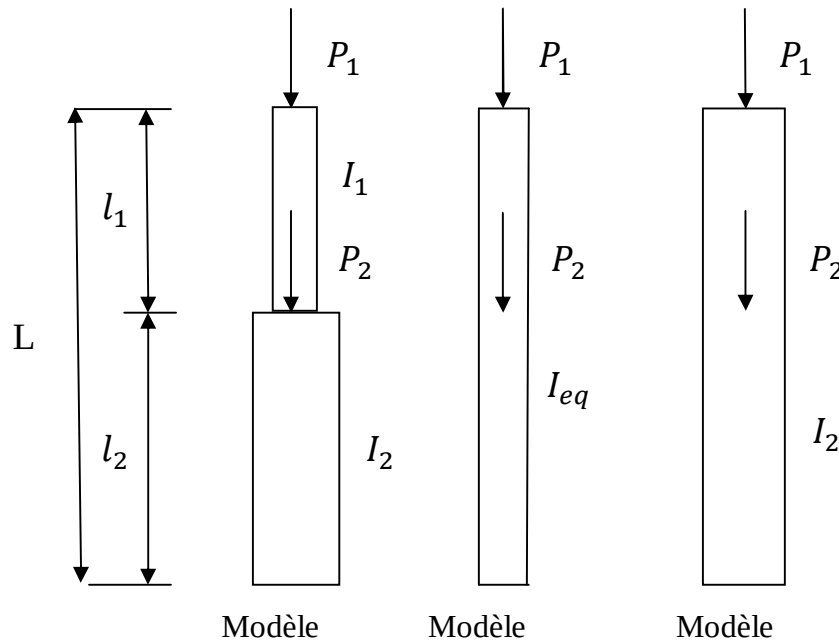


Figure IV.35 : Schématisation du principe d'étude des poteaux constitués par tronçon

Pour pouvoir étudier l'influence de la variation de l'inertie sur la charge critique du poteau, on définit trois modèles représentés dans la figure (IV.34). Notre étude consiste à comparer les charges critiques de modèle (1) avec les deux autres modèles.

Le modèle (1) présente le cas à étudier. Il a une charge critique de forme suivante :

$$P_{1,cr} = c \frac{\pi^2 E I_2}{(L_f)^2} \quad (IV.27)$$

Avec L_f : longueur de flambement pour un poteau à inertie constante.

Le modèle (2) basé sur l'inertie équivalente, la charge critique de ce dernier est donné sous la forme suivante :

$$P_{2,cr} = \phi \frac{\pi^2 E I_{eq}}{(L_f)^2} \quad (IV.28)$$

Avec : $I_{eq} = \frac{I_1 l_1 + I_2 l_2}{L} = \frac{l_1}{L} \frac{I_1}{I_2} + \frac{l_2}{L}$ et ϕ un coefficient non dimensionnelle.

Entre les deux tronçons du poteau, si l'élément variable (l'épaisseur des semelles ou l'âme, largeur des semelles...) a une puissance de (1) dans l'équation de l'inertie, le modèle (2) devient non seulement équivalent en inertie mais aussi en poids.

Généralement, le concepteur a le choix d'utiliser le modèle (3) qui résiste dans toute section à la charge P_1+P_2 , ou d'économiser la matière par l'utilisation du modèle (1) qui résiste à la charge P_1 pour le tronçon à inertie minimale et à la charge P_1+P_2 pour le deuxième tronçon. Mais l'emploi du modèle (1) provoque une diminution de la charge critique par rapport au modèle (3). Donc, il serait important d'étudier cette variation en fonction du rapport $(I_{\max}/I_{\min})$, l_2/L et P_2/P_1 .

En donne la charge critique du modèle (3) sous la forme : $P_{3,cr} = \lambda \frac{\pi^2 EI_2}{(L_f)^2}$ (IV.29)

Cette comparaison entre les trois modèles est basée sur l'inertie du profilée donc elle est valable pour tout type de poteau et dans les deux plans de l'inertie.

IV.10.2 Poteau encastré-libre

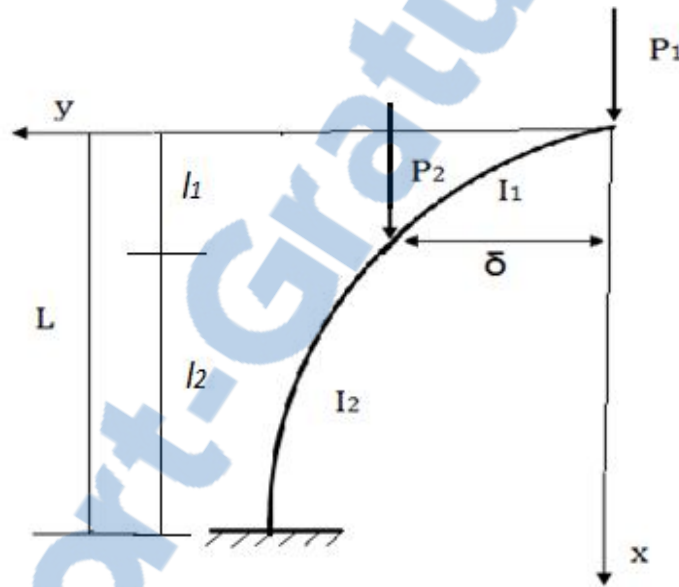


Figure IV.36 : Schéma de la déformée d'un profilé encastré libre à deux tronçons

Les équations de la déformée sont :

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{P_1}{EI_1} y_1 = 0 \quad 0 \leq x \leq l_1 \quad (IV.30)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{P_1+P_2}{EI_2} y_2 = \frac{P_2}{EI_2} \delta \quad l_1 \leq x \leq L \quad (IV.31)$$

Si on pose $P_2 = \alpha P_1$ l'équation (IV.31) devient : $\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{P_1(1+\alpha)}{EI_2} y_2 = \frac{P_1 \alpha}{EI_2} \delta$

En posant pour abrégier $k_1^2 = \frac{P_1}{EI_1}$ $k_2^2 = \frac{P_1(1+\alpha)}{EI_2}$

Les solutions des équations (IV.30) et (IV.31) sont :

$$y_1 = A_1 \cos K_1 x + B_1 \sin K_1 x \quad (IV.32)$$

$$y_2 = A_2 \cos K_2 x + B_2 \sin K_2 x + \frac{\alpha \delta}{1+\alpha} \quad (IV.33)$$

Les constantes d'intégration A_1, A_2, B_1 et B_2 s'obtiennent par la condition qu'au sommet de la colonne la flèche est nulle et qu'au point $x = \delta$ la flèche et la rotation sont les mêmes pour les deux portions. En ajoutant la condition qu'au point $x = L$ la rotation est empêchée

$$\begin{aligned}
 y_1(0) = 0 &\implies y_1 = B_1 \sin K_1 x \\
 y_1(l_1) = y_2(l_1) = \delta &\implies \left[1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right] B_1 \sin K_1 l_1 - A_2 \cos K_2 l_1 - B_2 \sin K_2 l_1 = 0 \\
 y_1'(l_1) = y_2'(l_1) &\implies B_1 K_1 \sin K_1 l_1 + A_2 K_2 \cos K_2 l_1 - B_2 K_2 \sin K_2 l_1 = 0 \\
 y_2'(L) = 0 &\implies A_2 \sin K_2 L - B_2 \cos K_2 L = 0
 \end{aligned}$$

On peut transformer le système d'équation vers le déterminant ci-dessous pour faciliter le calcul numérique :

$$\begin{vmatrix}
 0 & \sin k_2 l & -\cos k_2 l \\
 k_1 \cos k_1 l_1 & k_2 \sin k_2 l_1 & -k_2 \cos k_2 l_1 \\
 \left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \sin k_1 l_1 & -\cos k_2 l_1 & -\sin k_2 l_1
 \end{vmatrix} = 0$$

(IV.34)

Connaissant les rapports P_2/P_1 , l_2/L et l_1/l_2 on peut trouver la plus petite valeur de P_1 qui satisfait l'équation (IV.34) dans chaque cas particulier.

La valeur critique de la charge est représentée dans ce cas par la formule :

$$P_{1,cr} = c \frac{\pi^2 E I_2}{(2L)^2}. \quad (IV.35)$$

Les valeurs de coefficient non dimensionnel C sont données au tableau (IV.18).

IV.10.3 Poteau doublement articulé

la figure(IV.36) représente une bare AC doublement articulée flambant sous l'action d'une force P_1 appliquée en A et une force P_2 appliquée en B.

Soit δ la fleche en B ; les réactions latérales aux supports deviennent : $R = \frac{\delta P_2}{L}$

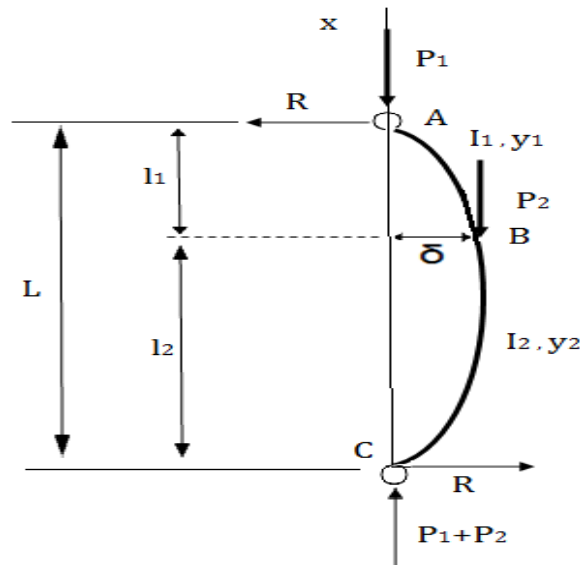


Figure IV.37 : Schéma de la déformée d'un profilé bi-articulé à deux tronçons

Les équations différentielles de la courbe élastique pour les deux portions de la barre sont [25] :

$$EI_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -P_1 y_1 - R(L - x) = -P_1 y_1 - \frac{\delta P_2}{L} (L - x) \quad (\text{IV.36})$$

$$EI_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -P_1 y_2 - R(L - x) + P_2(\delta - y_2) = -(P_1 + P_2)y_2 + P_2 \left(\frac{\delta x}{L} \right) \quad (\text{IV.37})$$

En employant les notations suivantes

$$\alpha = \frac{P_2}{P_1}, \quad k_1^2 = \frac{P_1}{EI_1}, \quad k_2^2 = \frac{P_1 \alpha}{EI_2}, \quad k_3^2 = \frac{P_1(1+\alpha)}{EI_2}$$

Les équations (IV.36) et (IV.37) deviennent :

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + k_1^2 y_1 = k_1^2 \frac{\alpha \delta}{L} (x - L) \quad (\text{IV.38})$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + k_3^2 y_2 = k_2^2 \frac{\delta}{L} x \quad (\text{IV.39})$$

Les intégrales générales des équations (IV.38) et (IV.39) seront

$$y_1 = A_1 \cos K_1 x + B_1 \sin K_1 x + \frac{\alpha \delta}{L} (x - L), \quad l_2 \leq x \leq L$$

$$y_2 = A_2 \cos K_3 x + B_2 \sin K_3 x + \frac{\alpha \delta}{L(1+\alpha)} x, \quad 0 \leq x \leq l_2.$$

Les constantes d'intégration A_1, A_2, B_1 et B_2 s'obtiennent par les conditions aux extrémités suivantes :

$$y_1(L) = 0, \quad y_1(l_2) = \delta, \quad y_2(0) = 0.$$

En ajoute les conditions de continuité en B ; $y_1(l_2) = y_2(l_2), \quad y_1'(l_2) = y_2'(l_2)$

On arrive à l'équation suivante pour le calcul des charges critiques

$$\frac{L + \alpha l_1}{\text{tg}(K_1 l_1)} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{(1 + \alpha)L - \alpha l_2}{(1 + \alpha)\text{tg}(K_3 l_2)} - \alpha = 0 \quad (\text{IV.40})$$

Pour chaque cas particulier, connaissant les rapports $l_2/l_1, P_2/P_1, l_2/L$.

On peut trouver la plus petite valeur de la charge P_1 pour laquelle l'équation (IV.40) est satisfaite. Elle peut toujours être représentée par la formule :

$$P_{1,cr} = c \frac{\pi^2 EI_2}{(L)^2} \quad (\text{IV.41})$$

On peut obtenir les valeurs de C en se servant du tableau (IV.15).

IV.10.4 Comparaisons du modèle (1) avec le modèle (2)

On définit un coefficient non dimensionnel $\Omega_1 = \frac{P_{1,cr}}{P_{2,cr}} = \frac{c}{\phi \left(\frac{l_1}{L} \frac{l_1 + l_2}{l_2} \right)}$.

Les valeurs de ϕ sont données dans la colonne où $l_1/l_2 = 1$ (inertie constante) au tableau (IV.18) pour le cas du poteau encasturé-libre et au tableau (IV.21) pour le cas du poteau doublement articulé.

Les valeurs de Ω_1 sont résumées dans le tableau (IV.19) pour le poteau encastré-libre et dans le tableau (IV.22) pour le poteau doublement articulé.

IV.10.5 Comparaisons du modèle (1) avec le modèle (3)

En définit un coefficient non dimensionnel $\Omega_2 = \frac{P_{1,cr}}{P_{3,cr}} = \frac{c}{\lambda}$.

Les valeurs de Ω_2 sont résumées dans le tableau (IV.20) pour le poteau encastré-libre et dans le tableau (IV.23) pour le poteau doublement articulé.

IV.10.6 interprétation des résultats

Suivant les tableaux (IV.19 et IV.22), dans les cas où $\Omega_1 < 1$ il serait mieux d'utiliser le modèle(2) au lieu de modèle (1) en terme du charge critique.

Dans le cas où $\Omega_1 > 1$, le modèle (1) est favorable par rapport au modèle (2).

La majorité des valeurs de Ω_1 données dans le tableau (IV.19) est supérieur à 1. Cela signifie que l'utilisation d'un poteau à deux tronçons encastrés en bas et libre en tête donne des charges critiques plus élevées et par conséquent, une amélioration de la résistance du profilé.

Les valeurs Ω_1 et Ω_2 augmentent toujours en fonction du rapport P_2/P_1 . Cela montre que l'utilisation d'un profilé à variation par tronçon devient plus intéressante pour des valeurs de P_2 élevées.

Pour le poteau encastré libre, il est remarquable que les valeurs de Ω_1 prennent le maximale pour des points d'application de la force P_2 situé environ au milieu du poteau.

Pour le poteau doublement articulé les valeurs de Ω_1 prennent leurs maximale pour des charges P_2 agissant vers le sommet du poteau.

Remarques :

1. Pour déterminer les valeurs de C non indiquées dans le tableau (IV.18) ou (IV.21), on peut utiliser l'interpolation linéaire. Les valeurs trouvées sont proches aux valeurs réelles. L'écart estimé suivant plusieurs mesures ne dépassant pas 5% .
Exemple : le cas où $l_2/l_1 = 3$, $l_2/l = 0.416$ et $P_2/P_1 = 0.75$ (poteau encastré libre).
La valeur de C réelle égale à 0.605 et celle calculer par l'interpolation linéaire égale à 0.620 , donc l'écart = $(0.605 - 0.62)/0.605 = -2.4\%$.
2. Antonio RIBERO [3] a montré que l'utilisation d'un modèle de deux tronçons à inertie constante pour calculer P_{cr} d'un poteau à section variable linéairement (les poteaux en I) donne un résultat qui converge à la valeur exacte lorsque les inerties équivalentes sont calculées à partir des sections équivalents se trouve à une distance de $7L/12$ de la section minimale.
On peut facilement démontrer que la valeur $7L/12$ est proche à l'abscisse d'une section correspond à l'inertie moyenne d'une barre en I ou H (figure IV.37).

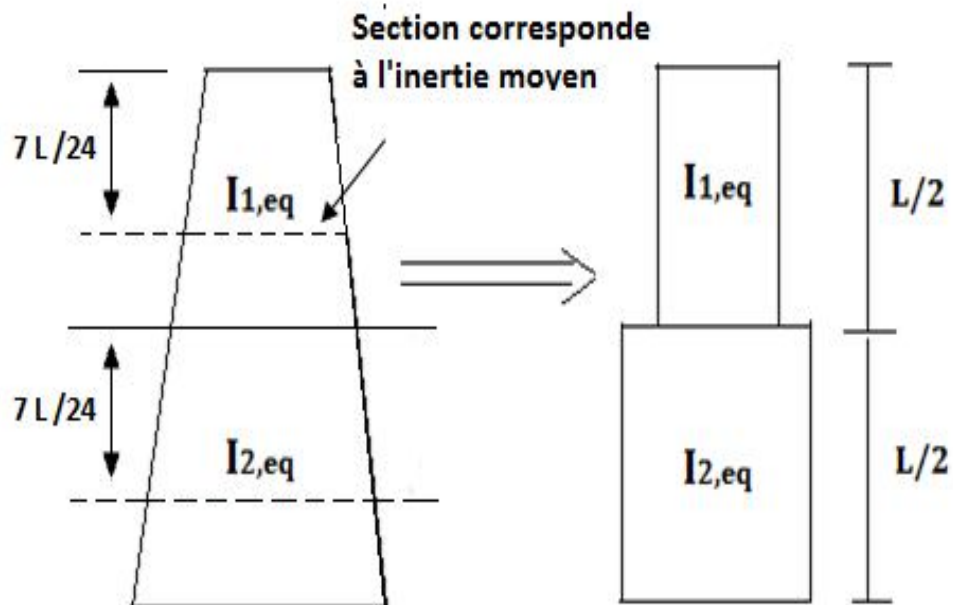


Figure IV.38 : Le modèle équivalent à deux tronçons d'un profilé à section variable linéairement

On peut calculer les inerties équivalentes (inertie moyen) par les formules suivantes :

$$I_{1,eq} = \frac{1}{L/2} \int_0^{L/2} I(x) dx \quad (\text{IV.42}) \quad , \quad I_{2,eq} = \frac{1}{L/2} \int_{L/2}^L I(x) dx \quad (\text{IV.42})$$

Les valeurs de coefficient C (tableau IV.18 et IV.21) que l'on peut utiliser pour un poteau à section variable linéairement correspond au cas de $\frac{l_2}{L} = \frac{1}{2}$ et $\frac{P_2}{P_1} = 0$.

Tableau IV.18 : Valeurs de coefficient C pour un poteau encastré libre

l_2/l_1	1				1.5				2				4			
$\begin{matrix} l_2/L \\ P_2/P_1 \end{matrix}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
0	1	1	1	1	0.832	0.912	0.970	0.994	0.708	0.838	0.942	0.992	0.442	0.614	0.831	0.976
0.5	0.972	0.912	0.832	0.748	0.816	0.845	0.816	0.744	0.700	0.786	0.798	0.744	0.439	0.595	0.732	0.736
1	0.948	0.84	0.708	0.600	0.797	0.786	0.696	0.594	0.690	0.740	0.690	0.592	0.437	0.576	0.648	0.590
2	0.888	0.712	0.544	0.420	0.762	0.682	0.541	0.421	0.670	0.652	0.534	0.420	0.432	0.537	0.518	0.420
4	0.780	0.536	0.368	0.264	0.696	0.525	0.368	0.264	0.628	0.514	0.368	0.264	0.422	0.457	0.362	0.266

Tableau IV.19 : Valeurs de coefficient Ω_1 pour un poteau encastré libre

l_2/l_1	1.5				2				4			
$\begin{matrix} l_2/L \\ P_2/P_1 \end{matrix}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
0	1.07	1.09	1.09	1.05	1.06	1.11	1.13	1.08	0.88	0.98	1.10	1.11
0.5	1.08	1.11	1.10	1.05	1.08	1.15	1.15	1.08	0.90	1.04	1.16	1.12
1	1.08	1.12	1.10	1.06	1.09	1.17	1.17	1.09	0.92	1.09	1.21	1.12
2	1.10	1.15	1.12	1.06	1.13	1.22	1.18	1.09	0.97	1.21	1.27	1.14
4	1.14	1.17	1.12	1.06	1.20	1.27	1.20	1.09	1.07	1.36	1.30	1.15

Tableau IV.20 : Valeurs de coefficient Ω_2 pour un poteau encastré libre

l_2/l_1	1.5				2				4			
$\begin{matrix} l_2/L \\ P_2/P_1 \end{matrix}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
0	0.832	0.912	0.970	0.994	0.708	0.838	0.942	0.992	0.442	0.614	0.831	0.976
0.5	0.839	0.926	0.980	0.994	0.720	0.862	0.960	0.994	0.451	0.652	0.880	0.984
1	0.840	0.935	0.983	0.990	0.727	0.880	0.974	0.995	0.461	0.685	0.915	0.984
2	0.858	0.957	0.994	1	0.754	0.915	0.981	1	0.486	0.754	0.952	1
4	0.892	0.980	1	1	0.805	0.96	1	1	0.541	0.852	0.983	1

Tableau IV.21 : Valeurs de coefficient C pour un poteau doublement articulé

l_2/l_1	1				1.5				2				4			
$\begin{matrix} l_2/L \\ P_2/P_1 \end{matrix}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
0	1	1	1	1	0.710	0.786	0.904	0.986	0.549	0.648	0.816	0.970	0.286	0.370	0.562	0.901
0.5	0.806	0.797	0.789	0.740	0.581	0.644	0.727	0.732	0.454	0.534	0.669	0.726	0.240	0.311	0.480	0.695
1	0.672	0.663	0.646	0.584	0.490	0.542	0.605	0.580	0.384	0.454	0.563	0.576	0.205	0.268	0.418	0.560
2	0.501	0.493	0.473	0.410	0.371	0.410	0.450	0.408	0.293	0.347	0.425	0.407	0.159	0.210	0.330	0.400
4	0.331	0.325	0.307	0.256	0.248	0.274	0.294	0.255	0.198	0.235	0.283	0.255	0.108	0.145	0.230	0.252

Tableau IV.22 : Valeurs de coefficient Ω_1 pour un poteau doublement articulé

l_2/l_1	1.5				2				4			
$\begin{matrix} l_2/L \\ P_2/P_1 \end{matrix}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
0	0.91	0.94	1.01	1.04	0.82	0.86	0.98	1.06	0.57	0.60	0.75	1.03
0.5	0.92	0.97	1.03	1.04	0.84	0.89	1.01	1.07	0.59	0.62	0.81	1.07
1	0.93	0.98	1.05	1.05	0.85	0.91	1.04	1.07	0.61	0.64	0.86	1.09
2	0.95	0.99	1.07	1.05	0.87	0.94	1.07	1.08	0.63	0.68	0.93	1.11
4	0.96	1.01	1.08	1.05	0.90	0.96	1.10	1.08	0.65	0.71	1.00	1.12

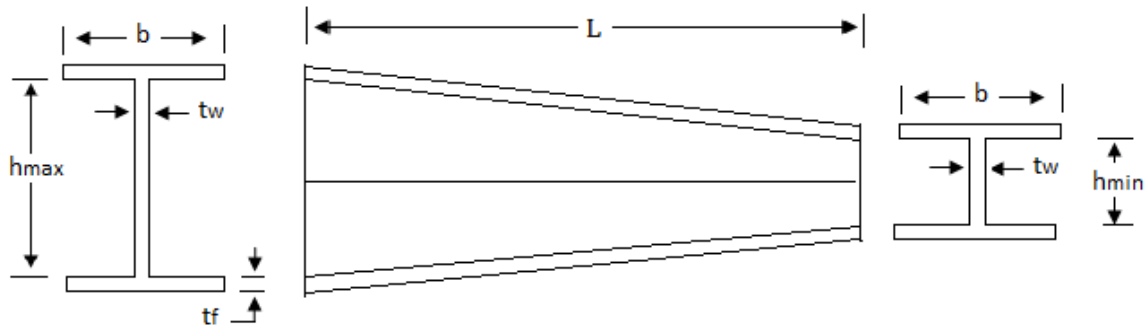
Tableau IV.23 : Valeurs de coefficient Ω_2 pour un poteau doublement articulé

l_2/l_1	1.5				2				4			
$\begin{matrix} l_2/L \\ P_2/P_1 \end{matrix}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
0	0.70	0.78	0.90	0.98	0.54	0.64	0.82	0.97	0.28	0.37	0.56	0.90
0.5	0.71	0.81	0.92	0.98	0.56	0.67	0.84	0.98	0.29	0.39	0.60	0.94
1	0.72	0.82	0.93	0.99	0.57	0.68	0.87	0.98	0.30	0.40	0.64	0.95
2	0.74	0.83	0.95	0.99	0.58	0.70	0.89	0.99	0.31	0.42	0.70	0.97
4	0.75	0.84	0.96	0.99	0.60	0.72	0.92	0.99	0.32	0.44	0.75	0.98

IV.11 Exemple de calcul de l'effort critique

Nous allons calculer l'effort critique élastique pour un poteau bi-articulé par différentes méthode.

Cet exemple porte sur un poteau dont les caractéristiques géométriques et matérielles sont représentées sur la figure IV.39.



$$\begin{aligned}
 E &= 210 \text{ GPa} , f_y = 235 \text{ MPa} , L = 800 \text{ cm} , h_{\max} = 80 \text{ cm} , h_{\min} = 40 \text{ cm} , b = 25 \text{ cm} \\
 t_f &= 1.4 \text{ cm} , t_w = 1.0 \text{ cm} , I_{\max} = 158632.4 \text{ cm}^4 , I_{\min} = 35339.06 \text{ cm}^4 , I_{eq} = 83985.73 \\
 A_{\max} &= 150 \text{ cm}^2 , A_{\min} = 110 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Figure IV.39 : Caractéristiques géométriques et matérielles du poteau

IV.11.1 Méthodes du chapitre IV

1. par la méthode des différences finies que nous avons proposée dans le paragraphe IV.4.1, on a calculé trois charges critiques du poteau présenté sur la figure IV.39.

La valeur donnée directement par un calcul sur Matlab vaut : **25241.46 KN**

Par l'utilisation de coefficient m_1 (figure IV.6), on a :

$$I_{\min}/I_{\max} = 0.22 \longrightarrow m_1 = 0.91 \longrightarrow P_{cr} = m_1 \frac{\pi^2 E I_{eq}}{L^2 f} = \mathbf{24750.61 \text{ KN}} .$$

Par l'utilisation de coefficient m_2 (figure IV.7), on a :

$$m_2 = 0.48 \longrightarrow P_{cr,V} = m_2 \frac{\pi^2 E I_{\max}}{L^2 f} = \mathbf{24658.81 \text{ KN}} .$$

2. Ainsi la méthode utilisée dans le paragraphe IV.4.2, qui est basée sur la loi de variation de l'inertie, $I(x) = I_0 \left(\frac{x}{a}\right)^2$ donne une valeur directe calculé par Matlab, **25929.81KN**.

Par l'utilisation de coefficient m_1 (tableau IV.4), on a :

$$I_0 = I_{\min} , a = \frac{L h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}} , I_{\max} = I_{\min} \left(\frac{a+L}{a}\right)^2 = 4 I_{\min} \longrightarrow I_{\min}/I_{\max} = 0.25$$

L'interpolation linéaire entre $I_{\min}/I_{\max} = 0.20$ et $I_{\min}/I_{\max} = 0.30$ donne une valeur de $m_1 = 0.9325 \longrightarrow P_{cr} = m_1 \frac{\pi^2 E I_{eq}}{L^2 f} = \mathbf{25362.57 \text{ KN}} .$

3. Nous avons divisé le poteau de la figure IV.38 en 20 éléments en utilisant Logiciel Robot Structural. On trouve une charge critique vaut : **25243.78 KN**
4. On peut calculer la charge critique en utilisant les résultats de paragraphe IV.8 (tableau IV.15, IV.16 et IV.17). on calcule la charge critique des semelles et l'âme séparément.

- Charge critique associé à l'âme du poteau :

L'inertie due à l'âme est donné par la formule $I_{l'âme}(x) = \frac{t_w h^3(x)}{12}$

$$I_{l'âme}(x) = \frac{t_w}{12} \left[h_{min} + (h_{max} - h_{min}) \frac{x}{L} \right]^3$$

$$I_{l'âme}(x) = \frac{t_w}{12} h_{min}^3 \left[1 + \left(\frac{h_{max}}{h_{min}} - 1 \right) \frac{x}{L} \right]^3 = I_0(1 + \alpha x)^3$$

L'inertie de l'âme à la forme de la fonction $I(x) = I_0(1 + \alpha x)^3$ donc on peut utiliser les équations du tableau IV.17.

$$\gamma_1 = 0.49 \left(\frac{h_{min}}{h_{max}} \right)^2 + 0.53 \left(\frac{h_{min}}{h_{max}} \right) - 0.02 = 0.3675$$

$$P_{cr, l'âme} = \gamma_1 \frac{\pi^2 E I_{max, l'âme}}{L^2} = 5077.91 \text{ KN}$$

- Charge critique associé aux semelles du poteau :

$$I_{semelles}(x) = \frac{b t_f^3}{6} + \frac{b t_f}{2} [t_f + h(x)]^2 = \frac{b t_f}{2} h^2(x) + b t_f^2 h(x) + \frac{2b t_f^3}{3}$$

Par les mêmes étapes utilisées pour l'inertie de l'âme, on trouve que L'inertie due aux semelles à la forme de la fonction $I(x) = I_1(1 + \alpha x)^2 + I_2(1 + \alpha x) + I_3$

$$\text{Avec : } \alpha = \left(\frac{h_{max}}{h_{min}} - 1 \right) \frac{1}{L}, \quad I_1 = \frac{b t_f}{2} h_{min}^2, \quad I_2 = b t_f^2 h_{min}, \quad I_3 = \frac{2b t_f^3}{3}$$

$$P_{cr, semelles} = \frac{\pi^2 E I_{max, 1}}{L^2} \left[0.1 \left(\frac{h_{min}}{h_{max}} \right)^2 + 0.794 \left(\frac{h_{min}}{h_{max}} \right) + 0.1 \right] + \frac{\pi^2 E I_{max, 2}}{L^2} \left[-0.096 \left(\frac{h_{min}}{h_{max}} \right)^2 + 0.67 \left(\frac{h_{min}}{h_{max}} \right) + 0.42 \right] + \frac{\pi^2 E I_3}{L^2}$$

$$\text{Avec : } I_{max, 1} = I_1(1 + \alpha L)^2, \quad I_{max, 2} = I_2(1 + \alpha L)$$

$$P_{cr, semelles} = 18933.35 + 928 + 14.81 = 19876.16 \text{ KN}$$

$$P_{cr} = P_{cr, l'âme} + P_{cr, semelles} = 24954.07 \text{ KN}$$

5. D'après la deuxième remarque en IV.10.6, on peut calculer par valeur approchée la charge critique d'un poteau à section variable linéairement par l'utilisation des résultats d'un poteau variable par tronçon (tableau IV.18 et IV.21).

$$I_{1,eq} = \frac{1}{L/2} \int_0^{L/2} I(x) dx = \frac{1}{L/2} \int_0^{L/2} (I_0(1 + \alpha x)^3 + I_1(1 + \alpha x)^2 + I_2(1 + \alpha x) + I_3) dx$$

$$I_{2,eq} = \frac{1}{L/2} \int_{L/2}^L I(x) dx = \frac{1}{L/2} \int_{L/2}^L (I_0(1 + \alpha x)^3 + I_1(1 + \alpha x)^2 + I_2(1 + \alpha x) + I_3) dx$$

Avec α, I_0, I_1, I_2 et I_3 sont donnés ci-dessus

$$I_{1,eq} = 57662.4, \quad I_{2,eq} = 118975.73, \quad \frac{I_{2,eq}}{I_{1,eq}} = 2.06$$

À partir du tableau IV.21, le coefficient C égale à 0.648 pour $\frac{I_2}{I_1} = 2$ et 0.37 pour $\frac{I_2}{I_1} = 4$. L'interpolation linéaire entre 0.648 et 0.37 pour $\frac{I_{2,eq}}{I_{1,eq}} = 2.06$ nous donne une valeur de 0.6396.

$$P_{cr} = c \frac{\pi^2 E I_{2,eq}}{(L)^2} = 24646.01 \text{ KN}$$

IV.11.2 Méthodes analytiques du chapitre III

1. Méthode de Carter et Gere [9]

$$n = \log\left(\frac{I_{max}}{I_{min}}\right) / \log\left(\frac{2t_f + h_{max}}{2t_f + h_{min}}\right) = 2.275 \longrightarrow P^* = 2.3 \text{ (Projection dans la figure III.2)} \longrightarrow P_{cr} = P^* \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2} = 26322.17 \text{ KN}$$

2. Méthode de Galéa [13]

$$L_f = L, \quad K = 0 \text{ et } I_{min}/I_{max} = 0.22 \longrightarrow r = 0.67 \longrightarrow P_{cr} = 25494.38 \text{ KN}$$

3. Le règlement SSRC [24]

$$\gamma = \frac{h_{max} - h_{min}}{h_{min}} = 1, \quad g = \gamma - 0.375\gamma + 0.08\gamma^2(1 - 0.0775\gamma) = 0.6988$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(gL)^2} = 23436.25 \text{ KN}$$

4. Méthode de JASPART [16]

$$r = \sqrt{\frac{I_{min}}{I_{max}}} = 0.472, \quad C = 1/\sqrt{0.08 + 0.92r} = 1.39, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{max}}{(CL)^2} = 26588.96 \text{ KN}$$

5. Méthode de Lind [3]

$$\text{L'abscisse relative de la section équivalente } x = \frac{\sqrt[n]{P^*} - 1}{\left(\frac{2t_f + h_{max}}{2t_f + h_{min}}\right) - 1} L = 378.45 \text{ cm}$$

Pour cette abscisse relative et en ayant pour base la plus petite section, le moment d'inertie vaut : $I_e = I_{min} \left[1 + \left(\frac{2t_f + h_{max}}{2t_f + h_{min}} - 1 \right) \frac{378.45}{L} \right]^{2.275} = 81279.20 \text{ cm}^4$.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_e}{L^2} = 26322.00 \text{ KN}$$

6. Une méthode de calcul couplant les résultats du tableau de la référence [1] situé en annexe B et les relations de l'Eurocode 3 [11], donne le résultat suivant :

D'abord le calcul de l'élancement de la barre à inertie variable $v = \sqrt{\frac{I_{min}}{I_{max}}} = 0.471$

De cette valeur de v , il est possible de définir le coefficient c à partir du tableau de l'annexe B :

$$c = 0.48$$

Le rayon de giration est défini à partir de ce coefficient c par la relation suivante [1] :

$$i_k = \sqrt{\frac{c I_{max}}{A_{moy}}} = 24.20 \text{ et l'élancement est définie comme traditionnellement}$$

$$\lambda = \frac{L}{i_k} = 33.05$$

La relation de l'Eurocode 3 donne l'effort critique de l'élément en fonction de l'élancement [11] : $P_{cr} = A_{moy} f_y \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^2 = 24660.36 \text{ KN}$.

Nous avons supposé que la valeur donnée par logiciel Autodesk Robot, la plus précise. Elle est prise comme valeur de référence pour la comparaison des méthodes.

Tableau IV.24 : Valeurs de l'effort critique calculé par les méthodes du chapitre IV

Méthode de calcul		P _{cr} (KN)	Comparaison par rapport à la valeur do logiciel Robot Structural (%)
Différences finies	Valeur calculé numériquement	25241.46	-0.01
	Par la figure IV.6	24750.61	-1.95
	Par la figure IV.7	24658.81	-2.32
	Par les fonctions d'ajustements du IV.8	24954.07	-1.14
Fonctions de Bessel	Valeur calculé numériquement	25929.81	+1.72
	Par le tableau IV.4	25362.57	+ 0.47
Modèle équivalent en deux tronçons		24646.01	- 2.37

Tableau IV.25 : Valeurs de l'effort critique calculé par les méthodes analytiques du chapitre III

Méthode de calcul	P _{cr} (KN)	Comparaison par rapport à la valeur du logiciel Robot Structural (%)
Carter et Gere	26322.17	+ 4.27
Galéa	25494.38	+0.99
SSRC	23436.25	-7.16
JASPART	26588.96	+5.33
Lind	26322.00	+4.27
Eurocode 3	24660.36	-2.31

IV.11.3 Calcul de l'effort critique d'un poteau encasté élastiquement

On suppose que le poteau représenté dans la figure IV.39 est articulé-encasté élastiquement par un coefficient $K = 0.75$. Notant que $K = \frac{\sum E_{ij}k_{ij}}{EI_{max}/L + \sum E_{ij}k_{ij}}$

Avec : $\sum E_{ij}k_{ij}$ est le ressort d'encastrement élastique en tête du poteau

- Selon la figure IV.23 $\alpha = 0.72 \longrightarrow P_{cr} = \alpha \frac{\pi^2 EI_{max}}{L^2} = 36988.22 \text{ KN.}$

- Par la méthode de Galia (III.4.1.2) $L_F = L \frac{3+0.7R'_j}{3+R'_j}$, $R'_j = R_j \frac{L}{EI_{min}}$
 R_j : Ressort d'encastrement élastique en tête du poteau $\longrightarrow R_j = \sum E_{ij} k_{ij}$
 $K = \frac{\sum E_{ij} k_{ij}}{EI_{max}/L + \sum E_{ij} k_{ij}} = \frac{R_j}{EI_{max}/L + R_j} = 0.75 \longrightarrow R_j = 12492301.5 \text{ KN} * \text{cm/rad}$
 $R'_j = R_j \frac{L}{EI_{min}} = 13.46 \longrightarrow L_F = 0.754 L$
Le coefficient K définie par Galia $K = \frac{R'_j}{R'_j + 1} = 0.93$
Nous avons $I_{min}/I_{max} = 0.22$ et $K = 0.93$, la projection sur la figure III.3 donne :
 $r = 0.75$, $\longrightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(rL_F)^2} = 35787.30 \text{ KN}$.
- On peut définir une appui élastique par le logiciel Robot Structurel qui a un coefficient d'élasticité égal à $\sum E_{ij} k_{ij}$, donc : $12492301.5 \text{ KN} * \text{cm/rad}$
On divise le poteau en 20 éléments, l'analyse du poteau au flambement nous donne une charge critique de 37780.20 KN .

Tableau IV.26 : Valeurs de l'effort critique d'un poteau encasté élastiquement

Méthode de calcul	P_{cr} (KN)	Comparaison par rapport à la valeur du logiciel Robot Structural (%)
Différences finies	36988.22	-2.1%
Galéa	35787.30	-5.27%

IV.11.4 Conclusion

Les résultats des différents auteurs sont en générale assez proches les uns des autres. Ainsi la valeur minimale est trouvée en appliquant la méthode des différences finies et la valeur la plus élevée est trouvée en appliquant les relations de SSRC.

La comparaison des résultats obtenus par les méthodes du chapitre IV avec les autres formules analytiques, nous permet de dire que nos résultats sont bien calibrés.

On ne peut pas juger sur la précision d'une méthode à partir de cet exemple. L'écart dépend de plusieurs paramètres (le rapport I_{min}/I_{max} , les conditions d'appui...).

L'utilisation des graphes donne naissance à des erreurs de lecture. Ces erreurs sont remarquables dans les résultats proviennent de l'abaque IV.6, IV.7 et le tableau IV.3.

Conclusion Générale

Les éléments à section variable constituent une alternative économique, rationnelle et élégante à l'utilisation de barres prismatiques plus classique, et méritent en ce sens une attention particulière. En effet le problème des éléments à section variable porte un grand intérêt des chercheurs et des constructeurs.

L'effet de la variation linéaire de la section sur la résistance de l'élément doit être prise en compte dans la conception et le dimensionnement des poteaux à inertie variable, surtout lorsque la variation de l'inertie présente des valeurs élevées.

Dans la vérification de résistance au flambement, on peut remplacer l'effet du poids propre du poteau par une force appliquée au sommet du poteau. Cette force est toujours inférieure au poids propre du poteau.

La méthode des différences finies présente un outil efficace pour résoudre les problèmes d'instabilité. En effet elle permet d'appliquer les différentes conditions d'appui, mais elle nécessite des développements mathématiques dans les cas compliqués d'appui et de chargement.

On conclut aussi que le flambement soit, des éléments à sections constantes ou à section variable est un phénomène de la non linéarité. Ce comportement est la combinaison du non linéarité géométrique et matérielle, puisqu'il faut à la ruine, tenir compte du comportement réel du matériau ; Le phénomène se produit toujours par divergence. L'instabilité par bifurcation est irréalisable en pratique ; la charge critique d'Euler est une limite essentiellement mathématique, qui ne correspond pas à la réalité. Pour cela, il y a lieu de réfléchir à l'effet de la non linéarité d'une part et du comportement élasto-plastique d'autre part sur le problème du flambement.

Une étude du déversement des poutres à inertie variable serait sans aucun doute intéressante à cause de leurs utilisations fréquentes et par manque de règles suffisamment précises qui permettent au projeteur de vérifier la stabilité.

Références bibliographiques

- [1] **ALVAREZ R.A. (1975)** “La estructura Metalica Hoy” Tomo I, vol 1^o , 2^a Edición, Madrid.
- [2] **American Institute of Steel Construction (AISC) (2001).** *Load and Resistance Factor Design for Structural Steel Buildings, 3rd Ed.* AISC .
- [3] **ANTONIO R.I. (1995)** – “Etude de la résistance au flambement des poteaux à inertie variable” Mémoire de fin d’étude, Département de génie civil, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand 2 (France).
- [4] **APK (Association pour la Promotion de l’enseignement de la construction acier).** “Stabilité appliqué ” <http://www.mmaya.fr/Insta/amphi>
- [5] **BAPTISTA A.M. MUZEAU J.P. (2002)** “Elastic design of tapered beams-columns subjected to concentrated axial and transversal loads” Proceedings of the 3rd European Conference on Steel Structures, Eurosteel, Coimbra.
- [6] **BOISSONNADE N. (2002)** “ Mise au point d’un élément finie de type poutre à section variable et autre application à la construction métallique” Thèse de doctorat, Département de génie civil, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand 2 (France).
- [7] **BROWN J.C.(1984)** “Approximate Stiffness Matrix for Tapered Beams” ASCE/Journal of Structural Engineering Vol. 111 – ST 12, p 3050 – 3055.
- [8] **BUTLER D.J. – ANDERSON G.B.(1963)** “The Elastic Buckling of Tapered Beam-Columns” The Welding journal Vol. 42 – N° 1, p 29S - 36S .
- [9] **CARTER W.O. – GERE J.M.(1963)** “Critical Buckling Loads for Tapered Columns” Transaction of ASCE Vol. 128 Part II, p 736 – 754.
- [10] **CHARLES E. RILEY (2003)** “ Elastic buckling loads of slender columns with variable cross section by the Newark method” Master’s Thesis Department of Civil Engineering, Colorado State University (USA).
- [11] **Eurocode 3** design of steel structures - part 1-1: general rules and rules for buildings, Norme française.
- [12] **FREY F. (2000)** “Analyse des structures et milieux continus ” L’Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne Vol. 2, p 320 - 375 .
- [13] **GALÉA Y. (2009)** “Instabilité des barres de portique en acier” Centre technique Industriel Construction Métallique (CTICM), p 103 – 130.
- [14] **GARTER S. (1988)** “Analytic Solution For Tapered Column Buckling” computers & Structures Vol. 28, No. 5, p 677 – 681.
- [15] **JAAN K.** “ Numerical Methods in Engineering with MATLAB’’, www.cambridge.org

- [16] **LI QS, (2000)** "Buckling of elastically restrained non-uniform columns" Journal of Engineering Structures 22, p 1231–1243.
- [17] **MAQUOI R. (2009)** "Instabilités structurales des barres - Flambement et déversement" la base documentaire, *L'expertise technique et scientifique de référence*, document C 2 511.
- [18] **MENDERA Z. (1994)** "Design Rules of Tapered Steel Columns" TEMPUS JEP 2184 Workshop Cracow, university of Technology, p 91 – 103.
- [19] **Règle de conception et de calcul des structures en acier « CCM97 »** MINISTERE DE L'HABITAT ET DE L'URBANISME, (Algérie).
- [20] **SAFA B. C. - BAKI Ö.** "Elastic Stability Analysis of Euler Columns Using Analytical Approximate Techniques" Kocaeli University, Faculty of Engineering, Department of Civil Engineering Kocaeli, (Turkey).
- [21] **SAMIR Z. SADDER.AL (2004)** "Exact expressions for stability functions of a general non-prismatic beam-column member" Journal of Constructional Steel Research 60, p 1561–1584.
- [22] **LAROZE S.(1984)** "Résistance des matériaux et structure" Ecole nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Tome 2, p 160 – 194.
- [23] **SHIOMI H. – KURATA M. (1984)** "Strength Formula for Tapered Beam-Columns" ASCE/ Journal of Structural Engineering, Vol. 110 – ST 7 – p 1630 – 1643.
- [24] **(SSRC76) STRUCTURAL STABILITY RESEARCH COUNCIL (1976)** "Guide to stability design criteria for metal structures" 3^o Edition, Edited by G. Johnston, New York, Chapter 11: Tapered Structural Members – p 330 – 357.
- [25] **TIMOSHENKO S.P - GERE J.M.(1961)** "Theory of Elastic Stability", McGraw Hill, New York.
- [26] **VERNIER J.M. (2000)** "Flambement des poteaux de portiques à section constante avec compression variable sur la longueur" revue de la construction métallique CTICM.
- [27] **WEI D.J. - YAN S.X. - ZHANG Z.P - Li X.F. (2010)** "Critical load for buckling of non-prismatic columns under self-weight and tip force" Mechanics Research Communications 37, p 554 – 558.

ANNEXE A : Fonctions de Bessel

Fonctions de Bessel de première espèce d'ordre p , définies par

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \quad (\underline{p \text{ réel}})$$

(Pour n un entier non nul, on considère que $\Gamma(-n)^{-1} \approx 0$, ce qui permet de conserver l'écriture précédente pour J_{-n}).

- $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, i.e. pour tout nombre entier n , J_{-n} est proportionnel à J_n , (faux pour p non entier).
- $x \frac{dJ_p}{dx} = p J_p - x J_{p+1}$ et $x \frac{dJ_p}{dx} = -p J_p + x J_{p-1}$ Csq : $2p J_p = x (J_{p+1} + J_{p-1})$ et $\frac{dJ_0}{dx} = -J_1$
- $J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x)$ • $\int_0^1 x J_p(\alpha x) J_p(\beta x) dx = 0$ si $\alpha \neq \beta$ ou $\frac{1}{2} (J_{p+1}(\alpha))^2$ si $\alpha = \beta$
- $J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x)$ α et β sont deux racines de J_p

Fonctions de Bessel de seconde espèce d'ordre p , définies par : $N_p(x) = \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}$

Pour p non entier, N_p n'est qu'une combinaison linéaire de J_p et J_{-p} . Pour $p = n$ entier, la formule précédente est une forme indéterminée $0 / 0$, qui cependant admet une limite pour tout x , permettant ainsi de définir N_n .

Solutions de l'équation : $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2) y = 0$ avec p un nombre réel positif.

J_p, J_{-p}, N_p sont toujours solutions de l'équation précédente.

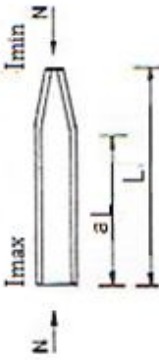
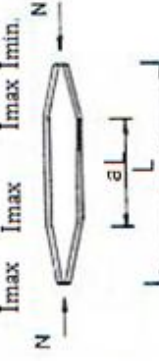
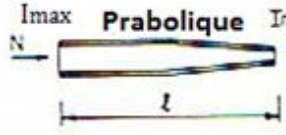
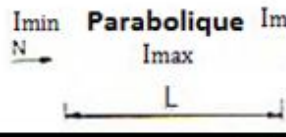
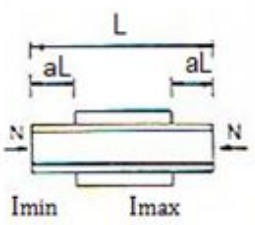
La question est de savoir quelle est la forme générale des solutions y .

- Pour p non entier : $y(x) = A J_p(x) + B J_{-p}(x)$ (N_p dans ce cas est une combinaison linéaire de J_p , J_{-p})
- Pour $p = n + 1/2$ demi entier, l'écriture précédente est toujours valable, mais $J_{-n-1/2}$ et $J_{n+1/2}$ s'expriment en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
- Pour $p = n$ entier, $y(x) = A J_n(x) + B N_n(x)$ (J_{-n} dans ce cas est proportionnel à J_n : $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$)

Solutions de l'équation : $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1-2a}{x} \frac{dy}{dx} + \left[(bc x^{c-1})^2 + \frac{a^2 - p^2 c^2}{x^2} \right] y = 0$ avec p un nombre réel positif

- Pour p non entier : $y(x) = A x^a J_p(b x^c) + B x^a J_{-p}(b x^c)$
- Pour $p = n$ entier : $y(x) = A x^a J_n(b x^c) + B x^a N_n(b x^c)$

ANNEXE B : Valeurs de coefficient C en fonction de ν

Variation de la section		Coefficient c en fonction de $\nu = \sqrt{I_{min}/I_{max}}$									
	ν	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	a										
	0	0,121	0,220	0,316	0,412	0,509	0,606	0,703	0,801	0,900	1,000
	0.1	0,140	0,247	0,348	0,447	0,542	0,636	0,729	0,820	0,911	1,000
	0.2	0,166	0,284	0,391	0,490	0,585	0,675	0,761	0,844	0,923	1,000
	0.3	0,203	0,333	0,446	0,547	0,639	0,722	0,800	0,871	0,938	1,000
	0.4	0,257	0,403	0,521	0,620	0,705	0,779	0,844	0,902	0,953	1,000
	0.5	0,340	0,502	0,620	0,711	0,784	0,843	0,892	0,933	0,969	1,000
	0.6	0,477	0,641	0,745	0,815	0,867	0,906	0,936	0,961	0,982	1,000
	0.7	0,697	0,814	0,875	0,913	0,938	0,957	0,971	0,983	0,992	1,000
	0.8	0,922	0,951	0,966	0,976	0,983	0,988	0,992	0,995	0,998	1,000
	≥ 0.9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	0	0,259	0,389	0,493	0,583	0,665	0,740	0,810	0,877	0,940	1,000
	0.1	0,308	0,448	0,555	0,643	0,719	0,786	0,846	0,902	0,953	1,000
	0.2	0,371	0,520	0,625	0,707	0,775	0,832	0,881	0,925	0,965	1,000
	0.3	0,453	0,605	0,703	0,775	0,830	0,867	0,914	0,947	0,975	1,000
	0.4	0,558	0,702	0,784	0,841	0,883	0,915	0,942	0,965	0,984	1,000
	0.5	0,686	0,801	0,861	0,900	0,927	0,948	0,965	0,979	0,990	1,000
	0.6	0,819	0,890	0,925	0,946	0,962	0,973	0,982	0,989	0,995	1,000
	0.7	0,925	0,954	0,968	0,978	0,984	0,989	0,992	0,996	0,998	1,000
	0.8	0,982	0,988	0,992	0,994	0,996	0,997	0,999	0,999	0,999	1,000
	≥ 0.9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		0,273	0,402	0,506	0,595	0,676	0,749	0,817	0,882	0,942	1,000
		0,536	0,652	0,728	0,786	0,834	0,875	0,911	0,943	0,943	1,000
	0.1	0,221	0,626	0,846	0,924	0,958	0,976	0,986	0,993	0,997	1,000
	0.2	0,060	0,220	0,421	0,605	0,743	0,837	0,902	0,946	0,977	1,000
	0.3	0,027	0,105	0,221	0,359	0,502	0,635	0,753	0,852	0,933	1,000
	0.4	0,016	0,061	0,134	0,231	0,345	0,472	0,606	0,741	0,873	1,000
	0.5	0,010	0,040	0,090	0,160	0,250	0,360	0,490	0,640	0,810	1,000
La variation linéaire ou parabolique désigne la forme de la pièce et non son moment d'inertie Les valeurs intermédiaires peuvent être interpolées linéairement											