Table des matières

Introduction

En mathématique, plus précisément lorsque nous sommes face à un problème d'algèbre linéaire, la réduction des endomorphismes est un outil puissant pour la détermination de plusieurs notions comme la puissance d'une matrice, l'étude des suites récurrentes linéaires, la résolution des équations différentielles et l'exponentielle d'une matrice.
Réduire un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie, c'est trouver une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de u dans cette base soit aussi simple que possible, afin de simplifier les calculs.
Le présent travail a pour but de présenter quelques types de la réduction des endomorphismes.
Ainsi, ce mémoire est divisé en quatre chapitres :
Dans le premier chapitre, on rappelle certaines définitions et propriétés concernant les endomorphismes, ses éléments propres, ses polynômes et nous rappelons également le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton.
Au second chapitre, nous nous intéressons à la diagonalisation des endomorphismes, en particulier à la diagonalisation des matrices symétriques et normales en base orthonormée.
Au troisième chapitre, nous étudions un autre type de réduction : la trigonalisation, il est intéressé aussi par un type particulier des endomorphismes, les endomorphismes nilpotents : la décomposition de Dunford et la réduction de Jordan.
Au quatrième chapitre, nous donnons quelques applications de la réduction des endomorphismes dans des problèmes mathématiques.

1

Réduction des endomorphismes

1.1 Sommes de sous-espaces, sommes directes

Étant donnés deux sous-espaces vectoriels V, W d'un espace vectoriel E, l'ensemble de tous les éléments $v + w$ où (v, w) décrit $V \times W$ est appelé somme des sous-espaces vectoriels V et W. Cette somme est notée $V + W$.

***Définition* 1.1.1.**
Soient V_1, ..., V_p des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E et V leur somme. On dit que la somme des V_i est ***directe*** *si tout $x \in V$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{i=1}^{p} v_i$ où $(v_1, \dots, v_p) \in V_1 \times \cdots \times V_p$.*
La somme directe de V_1, ..., Vp est notée $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$

Exemples :
Dans $\mathbb{R}^4$, soient les trois sous-espaces vectoriels V, W et H engendrés respectivement par $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$. Alors $V + W + H$ est une somme directe .
en effet :
Tout élément u de la somme $V + W + H$ s'écrit sous la forme :
u=$\alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, 0, 0) + \gamma(0, 0, 1, 0)$, alors u=$(\alpha, \beta, \gamma, 0)$.
Supposons que u s'écrivait aussi sous la forme : u=$\alpha'(1, 0, 0, 0) + \beta'(0, 1, 0, 0) + \gamma'(0, 0, 1, 0)$ alors u=$(\alpha', \beta', \gamma', 0)$
Mais dans $\mathbb{R}^4$: $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$=$(\alpha', \beta', \gamma', 0) \Rightarrow \alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$
donc l'écriture d'un élément de $V+W+H$ comme somme d'éléments de V, W et H est unique : $V + W + H$=$V \oplus W \oplus H$.

***Théorème* 1.1.1.**
La somme de p sous-espaces vectoriels V_1, ..., V_p d'un espace vectoriel E est directe, si et seulement si, la propriété suivante est vérifiée :
$\forall p \in \mathbb{N}$, $2 \leq p \leq n$, $(V_1 + V_2 + \ldots + V_{p-1}) \cap V_p$=$\{0\}$

Preuve
Supposons que la somme $V_1 + ... + V_p$ est directe et montrons que
$\forall p \in \mathbb{N}$, $2 \leq p \leq n$, $(V_1 + V_2 + \ldots + V_{p-1}) \cap V_p$=$\{0\}$
Soient p un entier compris entre 2 et p et v un élément de $(V_1 + V_2 + \ldots + V_{p-1}) \cap V_p$
Alors $\exists\, (v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}) \in V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_{p-1}$, tel que $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_{p-1}$
d'où $0 = v_1 + v_2 + \ldots + v_{p-1} - v$

avec $(v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}) \in V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_{p-1}$ et $v \in V_p$.
Or 0 s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de $V_1, ..., V_p$
donc $v_1 = v_2 = \ldots = v_{p-1} = v = 0$, alors $(V_1 + V_2 + \ldots + V_{p-1}) \cap V_p$=$\{0\}$.
Inversement, Supposons que la somme $V_1 + ... + Vp$ n'est pas directe et montrons que
$\exists q \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $(V_1 + V_2 + \ldots + V_{q-1}) \cap V_q \neq 0$
Alors, il existe un élément v appartenant à $V_1 + ... + Vp$ admettant deux décompositions distinctes en somme d'éléments de $V_1 + ... + V_p$
c'est-à-dire : $\exists\,(v_1, v_2, \ldots, v_p) \in V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p$, tel que $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_p$
et $\exists\,(v'_1, v'_2, \ldots, v'_n) \in V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p$, tel que $v = v'_1 + v'_2 + \ldots + v'_p$
avec $(v_1, v_2, \ldots, v_p) \neq \left(v'_1, v'_2, \ldots, v'_p\right)$
Soit q le plus grand entier compris entre 1 et p tel que $v_q \neq v'_q$ alors
$(v_1 - v'_1) + (v_2 - v'_2) + \ldots + \left(v_{q-1} - v'_{q-1}\right) = v'_q - v_q$
donc $v'_q - v_q \in (V_1 + V_2 + \ldots + V_{q-1}) \cap V_q$ d'où $(V_1 + V_2 + \ldots + V_{q-1}) \cap V_q \neq 0$.

Remarque :
Si la somme $V_1, ..., V_p$ est directe, alors la propriété suivante est vérifié : $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq p$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq p$, $i \neq j$: $F_i \cap F_j = \{0\}$.
Mais cette condition pour que la somme soit directe n'est pas suffisante.

Exemples :
Considérons le contre exemple suivant : dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soit V le sous-espace vectoriel engendré par $(1, 0)$, W le sous-espace vectoriel engendré par $(0, 1)$ et H le sous-espace vectoriel engendré par $(1, 1)$.
On a $V \cap W = \{0\}$, $V \cap H = \{0\}$ et $H \cap W = \{0\}$ et pourtant la somme $V + W + H$ n'est pas directe.
en effet :
l'élément $(1, 1)$ de $V + W + H$ se décompose en somme d'éléments de V, W et H de la manière suivante : $(1, 1) = (0, 0) + (0, 0) + (1, 1)$
mais aussi de la manière suivante : $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) + (0, 0)$
donc il n'y a pas unicité de l'écriture.

***Proposition* 1.1.1.**
Partons d'une décomposition de E en somme directe,

$$E = V_1 + ... + V_p \tag{1.1}$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de V_i. Les $\mathcal{B}_i$ sont deux à deux disjointes, et leur réunion $\mathcal{B}$ est une base de E, dite adaptée à la décomposition (1.1).
Réciproquement, soient $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $(I_1, \ldots, I_m)$ une partition de $\{1, \ldots, p\}$. Alors E est somme directe des sous-espaces $V_i := \mathrm{Vect}\,(e_h | h \in I_i)\,, 1 \leqslant i \leqslant m$.

Preuve
$\Rightarrow$ Par récurrence sur p, pour $p = 2$, $E = V_1 \oplus V_2$, et pour $i \in \{1, 2\}$ $\mathcal{B}_i$ est la base de V_i,
soient $\mathcal{B}_1 = (f_1, \ldots, f_n)$, $\mathcal{B}_2 = (g_1, \ldots, g_n)$, $x \in E$
alors d'une part $\exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ tel que $x = v_1 + v_2$
d'autre part $\exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que $v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, $v_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j$ et $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j$

soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathbb{K}^{n+m}$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j=0$
donc $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i=-\sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j$, or $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\in V_1$ et $\sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j\in V_2$ et $V_1\cap V_2=\{0\}$
Alors$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i=\sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j=0$, d'où $\forall i\in\{1,\dots,n\}\alpha_i=0$ et $\forall j\in\{1,\dots,m\}\beta_j=0$
On résulte que $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ est une base de E.
Supposons que la proposition est vraie pour $p-1$ et montrons qu'elle est vraie pour p
$E=V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_{p-1}\oplus V_p$
On pose $E_1=V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_{p-1}$ donc $E=E_1\oplus V_p$
Soient $\mathcal{B}'=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\cdots\cup\mathcal{B}_{p-1}$ base de E_1 et $\mathcal{B}_p$ base de V_p, alors on se retrouve dans le cas $p=2$, d'où la proposition est vraie pour p .
Inversement, Soient $V_i:=\operatorname{Vect}(e_h|h\in I_i)\,,1\leqslant i\leqslant m$ des sous-espaces de E, tel que $(I_1,\dots,I_m)$ une partition de $\{1,\dots,p\}$, c'est-à-dire
i. pour tout $i\in\{1,\dots,m\}I_i\neq\emptyset$
ii. $\{1,\dots,p\}=\bigcup_{i=1}^{m},I_i$
iii. pour $i\neq j$ on a : $I_i\cap I_j=\emptyset$.
alors pour tout $1\leqslant i\leqslant m, V_i\subset E$, donc $\sum_{i=1}^{m}V_i\subset E$.
$\mathcal{B}:=(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E.
Soit $x\in E$ alors $x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i\in\sum_{i=1}^{m}V_i$, donc $V_1+V_2+\cdots+V_p=E$
or la famille $\mathcal{B}:=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i, c'est-à-dire
$\forall x\in E,\exists!\,(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$ tel que $x=\sum_{n=1}^{n}\lambda_i e_i$ d'où $E=V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_m$.

***Proposition* 1.1.2.**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $V_1,\dots,V_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On a toujours : $\dim(V_1+V_2+\cdots+V_p)\leqslant\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_p)$
Cette inégalité est une égalité si, et seulement si, la somme des V_i est directe.

Preuve
Posons $F:=V_1\times V_2\times\cdots\times V_p$ et $V:=V_1+V_2+\cdots+V_p$.
Soit l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{cccc} f: & F & \to & E \\ & (x_1,x_2,\dots,x_p) & \mapsto & x_1+x_2+\cdots+x_p, \end{array}$$

lm(f) $=V$
D'après le théorème du rang : $\dim\operatorname{Im}f+\dim\ker f=\dim F$, c'est-à-dire
$\dim V+\dim\ker f=\dim F$, donc $\dim V_1+V_2+\cdots+V_p+\dim\ker f=\dim V_1\times V_2\times\cdots\times V_p$
$\dim V_1+V_2+\cdots+V_p=\dim V_1\times V_2\times\cdots\times V_p-\dim\ker f$
$\dim(V_1+V_2+\cdots+V_p)=\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_p)-\dim(\operatorname{Ker}f)$
d'où l'inégalité annoncée .
la somme des V_i est directe si, et seulement si, f est injective si, et seulement si, Ker(f) $=\{0\}$ si, et seulement si, $\dim\ker f=0$, alors on obtient $\dim(V_1+V_2+\cdots+V_p)=\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_p)$

1.2 Calculs matriciels par blocs

Une matrice par blocs est obtenue par partition de l'ensemble des indices des lignes et de l'ensemble des indices des colonnes. On note $A=A_{ij}$.

Exemples :
Soit A la matrice suivante

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -1 & -5 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 7 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice A peut être partionnée en 4 blocs 2×2, 2×3, 3×2 et 3×3.
Symboliquement, on peut écrire cette matrice de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

avec $A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_{22} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Somme et produit des matrices par blocs :

Les opérations matricielles usuelles, addition et multiplication, peuvent être effectuées « par blocs », sous certaines conditions.
• Pour l'addition, si :

$$A := \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,q} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \dots & A_{p,q} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B := \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,q} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{p,1} & B_{p,2} & \dots & B_{p,q} \end{pmatrix}$$

sont écrites par blocs de mêmes « formats », on a :

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & A_{1,2} + B_{1,2} & \dots & A_{1,q} + B_{1,q} \\ A_{2,1} + B_{2,1} & A_{2,2} + B_{2,2} & \dots & A_{2,q} + B_{2,q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p,1} + B_{p,1} & A_{p,2} + B_{p,2} & \dots & A_{p,q} + B_{p,q} \end{pmatrix}$$

• Pour le produit :
Le produit de matrices par bloc s'effectue de la même manière que le produit habituel, sauf que les coefficients sont remplacés par les blocs :

$$BA = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{i1} & B_{i2} & \cdots & B_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & a_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pj} & \cdots & A_{pm} \end{pmatrix}$$

est la matrice dont le bloc labellisé par les indices i et j est est donné par la formule :

$$[BA]_{ij} = B_{i1}A_{1j} + B_{i2}A_{2j} + \cdots + B_{ip}A_{pj} = \sum_{k=1}^{p} B_{ik}A_{kj}$$

sous réserve que les tailles des blocs soient compatibles pour pouvoir définir les produits matriciels $B_{ik}A_{kj}$.

Exemples :

$$A = \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}(9) \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc:c} -3 & -3 & -3 \\ 8 & 10 & 12 \end{array}\right)$$

***Définition* 1.2.1.**
i) Une matrice bloc-diagonale (ou diagonale par blocs) est une matrice carré qui possède des blocs matrices carrées sur la diagonale principale, tels que les blocs non diagonaux soient des matrices nulles. Une matrice bloc-diagonale A est de forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_n \end{pmatrix}$$

ii) Une matrice carrée A est dite triangulaire supérieure par blocs si et seulement si elle admet une décomposition en blocs :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ 0 & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

telle que $A_{11}, \dots, A_{nn}$ sont des matrices carrées et que les blocs sous la diagonale sont tous des matrices nulles.

***Proposition* 1.2.1.**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \neq 1$, u un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour que $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale par blocs, il faut, et il suffit, que E soit somme directe de sous-espaces non nuls $V_1, \dots, V_m$ stables par u tels que $\mathcal{B}$ soit obtenue en juxtaposant des bases de chacun des V_i.

***Théorème* 1.2.1.**
Soit A une matrice triangulaire par blocs :

$$A := \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,m} \\ 0 & A_{2,2} & \dots & A_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{m,m} \end{pmatrix}$$

En particulier, $A_{1,1}, \dots, A_{m,m}$ sont des matrices carrées.

Alors $\det(A) = \det(A_{1,1}) \det(A_{2,2}) \cdots \det(A_{m,m})$

Preuve
En raisonnant par récurrence sur m, on se ramène au cas $m = 2$ puisque, si $m \neq 3$ et si l'on pose

$$A' := \begin{pmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,m} \\ 0 & A_{3,3} & \dots & A_{3,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{m,m} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A'' := (A_{1,2} A_{1,3} \dots A_{1,m})$$

On a $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A'' \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, supposons donc que $A := \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où $B \in M_p(K), C \in M_{p,q}(K)$ et $D \in M_q(K)$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $n := p + q$

On a :

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

en notant que le produit des deux premières matrices du second membre s'obtient en multipliant (à gauche) par D la deuxième ligne de $\begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et des termes diagonaux valent 1, donc $\det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = 1$. En développant par rapport à la dernière ligne, on voit que

$\det\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ vaut $\det B$ si $q = 1$ et $\det\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{q-1} \end{pmatrix}$ si $q \geqslant 2$. Par récurrence sur q, on obtient $\det\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \det B$. On montre de même que $\det\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det D$ alors, $\det\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det B \det D$ d'où la conclusion.

Exemples :

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors ,

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=3\det\begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 7 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=3 * 2\det\begin{pmatrix} 7 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=3 * 2 * 7\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=42$$

D'autre part, on peut écrire cette matrice sous la forme suivante : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$

tel que $A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ et $A_{22} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors on obtient une matrice triangulaire par blocs et d'après le théorème précédant, on a :

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11} \det A_{22}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 7 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 7 \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 42$$

1.3 Éléments propres et polynômes d'endomorphismes

***Définition* 1.3.1.**
Soit u un endomorphisme de E
• *un vecteur $x \in E$ est un* ***vecteur propre*** *de u si :*
1. x est non nul.
2. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda u$.
Le scalaire λ est appelé ***valeur propre*** *associé à x, on dit aussi que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.*
• *Soit $E_\lambda = \{x \in E; u(x) = \lambda x\} = \ker(u - \lambda Id_E)$ est appelé* ***espace propre associé à λ.***
Autrement dit,E_λ est constitué par les vecteurs propres de u associés à λ.
• *Le spectre de u est l'ensemble des valeurs propres de u.*
Ce spectre est noté $\mathrm{sp}\, u$.

***Proposition* 1.3.1.**
Soient u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. On suppose que u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$). Alors v laisse stables le noyau et l'image de u, ainsi que chaque espace propre de u.

Preuve
Soit $x \in \ker u$, alors $u(x) = 0$
$u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ alors $v(x) \in \ker u$
d'où $v(\ker u) \subset \ker u$
Soit $a \in \mathrm{Im}\, v$, alors il existe $b \in E$ tel que $a = u(b)$
$v(a) = v(u(b)) = u(v(b))$ donc $v(b) \in \mathrm{Im}\, v$
d'où $v(\mathrm{Im}\, u) \subset \mathrm{Im}\, u$
Soit λ une valeur propre de u et soit $E_\lambda = \{x \in E; u(x) = \lambda x\} = \ker(u - \lambda Id_E)$ son espace propre associé.
$v \circ (u - \lambda \mathrm{Id}_E) = v \circ u - v \circ (\lambda \mathrm{Id}_E) = u \circ v - \lambda v \circ \mathrm{Id}_E = u \circ v - \lambda \mathrm{Id}_E \circ v = (u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ v$
donc v et $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ commutent
donc v laisse stable le noyau de $u - \lambda \mathrm{Id}_E$
c'est-à-dire, v laisse stable chaque espace propre de u.

***Définition* 1.3.2.**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E.
• *On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.*
• *On peut toujours définir une application sur F à valeurs dans E par* $\begin{array}{c} F \to E \\ x \mapsto u(x) \end{array}$

Cette application est ***la restriction*** *de u à F, notée* $u|_F$*, c'est un élément de* $\mathcal{L}(F, E)$.

• *Si F soit stable par u* ($u(F) \subset F$) *alors, on peut définir une application sur F à valeurs dans F par* $\begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{array}$

Cette application est ***l'endomorphisme induit*** *par u sur F notée* u_F*, c'est un élément de* $\mathcal{L}(E)$.

***Définition* 1.3.3.**

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ *est une expression de la forme :*

$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$

$n \in \mathbb{N}$ *et* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$

L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.

Les a_i *sont appelés les coefficients du polynôme .*

***Définition* 1.3.4.**

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ *non constant, i.e. de degré* $n \neq 1$*, est dit scindé, ou scindé sur* $\mathbb{K}$*, s'il est produit de polynômes de degré* 1.

si c'est le cas,on peut écrire

$$P := a\left(X - \alpha_1\right)\left(X - \alpha_2\right) \cdots \left(X - \alpha_n\right)$$

où $a \in \mathbb{K}^*$ *est le coefficient dominant de P et* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Notons $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ *l'ensemble des racines de P. Alors P s'écrit ainsi :*

$$P := a\left(X - \lambda_1\right)^{m_1}\left(X - \lambda_2\right)^{m_2} \cdots \left(X - \lambda_p\right)^{m_p}$$

tel que chaque m_j *est un entier strictement positif, appelé multiplicité de* λ_j *dans P, et l'on a* $\sum_{j=1}^{p} m_j = n$.

Exemples :

D'aprés le théorème d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$ i.e. tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé. On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Remarque :

On dit qu'un endomorphisme u est scindé si χ_u est scindé. De même une matrice A est dite scindée si χ_A est scindé .

***Définition* 1.3.5.**

1.le ***polynôme caractéristique d'une matrice*** $A \in M_n(\mathbb{K})$ *est le déterminant de la matrice* $XI_n - A$*, il est noté* χ_A.

2.Le ***polynôme caractéristique d'un endomorphisme*** *u est, par définition, le polynôme caractéristique de la matrice de u dans n'importe quelle base de E, il est noté* χ_u .

Exemple 1 :

Si $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Alors,

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} \mathrm{X} - \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{X} - \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{X} - \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$$

Exemple 2 :
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n, et $k \in \mathbb{K}^*$.
On définit l'endomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} f_k : E &\to E \\ u &\to ku \end{aligned}$$

f_k est appelée homothétie de rapport k
alors la matrice de f dans n'importe quelle base est $\lambda \mathrm{I_n}$.
On a $\chi_{f_k} = \chi_{\lambda I_n}$

Alors, on en déduit que $\chi_{f_k} = \det \begin{pmatrix} \mathrm{X} - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{X} - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{X} - \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &= (X - \lambda) \dots (X - \lambda) \\ &= (X - \lambda)^n \end{aligned}$$

***Définition* 1.3.6.**
*Un ensemble E a **une structure d'algèbre** sur le corps $\mathbb{K}$ (on dit aussi que E est une $\mathbb{K}$-**algèbre**) s'il est muni de trois lois de composition :*
• Deux lois de composition interne (l'une notée "$+$", l'autre notée "$\times$")
• Une loi de composition externe (notée "$\cdot$")
satisfaisant aux conditions suivantes :
1. E muni de la loi $+$ et de la loi $\cdot$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
2. La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$.
3. Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, et tout couple $(x, y) \in E^2$, on a : $(a \cdot x) \times (b \cdot y) = (ab) \cdot (x \times y)$

***Définition* 1.3.7.**
Soient $(E, +, \times, \cdot)$,$(F, +, \times, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres.
*Soit $\varphi : E \to F$, alors φ est **un morphisme de** $\mathbb{K}$-**algèbres** lorsque :*
1. $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
2. $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$
3. $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u \times v) = \varphi(u) \times \varphi(v)$
4. $\varphi(1_E) = 1_F$

***Définition* 1.3.8.**
*Un ensemble I d'un anneau $(A, +, .)$ est dit un **idéal** si on a :*
- $(I, +)$ est un groupe ;
- $\forall x \in I, \forall y \in A,$ on a $xy \in I$.

Exemples :
Soit R une $\mathbb{K}$-algèbre. Étant donnée un élément x de R, il existe un unique morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[X] &\to R \\ X &\to x \end{aligned}$$

si $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$, on a $\varphi(P) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 1_A$
ce qui fait que $\varphi(P)$ est plutôt noté $P(x)$. Le noyau de φ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$
Prenons $R := \mathcal{L}(E)$ et $x := u$
Alors pour tout polynôme $P = a_nX^m + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$
on a $P(u) = a_mu^m + \cdots + a_1u + a_0 \operatorname{Id}_E$. Comme $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie et $\mathcal{L}(E)$ de dimension finie, ce morphisme n'est pas injectif, alors $\ker(\varphi) \neq \{0\}$ Comme $\mathbb{K}[X]$ est principal, l'idéal $\ker(\varphi)$ possède un unique générateur unitaire .

***Définition* 1.3.9.**
Soit u un endomorphisme de E
*On appelle **polynôme annulateur** de u un polynôme P tel que $P(u) = 0$, c'est-à-dire, un élément de $\ker\varphi$.*

***Définition* 1.3.10.**
*Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On appelle **polynôme minimal** de u et on note μ_u le générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de u. C'est aussi le polynôme annulateur de u unitaire et de plus petit degré.*

Exemple :

Soient $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P = \sum_{i=0}^{m} a_iX^i$ alors, $P(D) = \sum_{i=0}^{m} a_iD^i$
or D est diagonale donc, $D^i = \begin{pmatrix} 1^i & 0 & 0 \\ 0 & 1^i & 0 \\ 0 & 0 & 2^i \end{pmatrix}$ d'où, $P(D) = \begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 \\ 0 & P(1) & 0 \\ 0 & 0 & P(2) \end{pmatrix}$
Ainsi $P(D) = \mathbf{0}_3 \Longleftrightarrow P(1) = 0$ et $P(2) = 0$.
En particulier, on a $\mu_D(1) = \mu_D(2) = 0$ ce qui implique que $(X-1)(X-2)|\mu_D$.
De plus le polynôme $(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de D puisque

$$(X-1)(X-2)(D) = (D - I_3) \cdot (D - 2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Ceci montre que $\mu_D|(X-1)(X-2)$. Ainsi $\mu_D = (X-1)(X-2)$

***Proposition* 1.3.2.**
Les valeurs propres de u sont exactement les racines de son polynôme minimal μ_u.

Preuve
Soit λ une valeur propre de u alors, il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$
donc $u(u(x)) = u(\lambda x)$
$u^2(x) = \lambda u(x)$
$u^2(x) = \lambda^2 x$
De même,on obtient par récurrence sur k , $u^k(x) = \lambda^k x$
Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$, par linéarité, on obtient $Q(u)(x) = Q(\lambda)x$
Soit μ_u le polynôme minimal de u donc c'est un polynôme annulateur de u, c'est-à-dire $\mu_u(u) = 0$
En particulier, $\mu_u(u)(x) = 0 \Longrightarrow \mu_u(\lambda) = 0 \Longrightarrow \mu_u(\lambda) = 0$ puisque $x \neq 0$
Alors λ est une racine du polynôme minimal.
Inversement, supposons que $\mu_u(\lambda) = 0$
alors λ est une racine de μ_u
donc il existe $R \in K[X]$ tel que $\mu_u = (X - \lambda)R$
On remarque de $\deg(R) < \deg(\mu_u)$ donc $R(u) \neq 0$ car le polynôme minimal est le polynôme annulateur unitaire de l'endomorphisme de plus petit degré.
D'une part, on a $\mu_u(u) = 0$
D'autre part, $\mu_u(u) = (u - \lambda \operatorname{Id}_E) \circ R(u)$
donc, $(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \circ R(u) = 0$
d'où, $\det((u - \lambda Id_E) = 0$, on conclue que λ est une valeur propre de u.

***Proposition* 1.3.3.**
Soient V un sous-espace vectoriel non nul de E stable par u et $u_V \in \mathcal{L}(V)$ l'endomorphisme induit.
1. Le polynôme minimal de u_V divise le polynôme minimal de u.
2. Le polynôme caractéristique de u_V divise le polynôme caractéristique de u.

Preuve
1. Soit $v = u_V$ l'endomorphisme induit par u sur V.
Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ alors $Q(v) \in \mathcal{L}(V)$ donc est induit par $Q(u)$ sur V car V est stable par $Q(u)$.
En particulier, pour $Q = \mu_u$, on a $\mu_u(v)$ est induit par $\mu_u(u)$ qui égal à 0 donc $\mu_u(v) = 0$
donc, μ_v divise μ_u.
2. On pose $n = \dim E$ et $p = \dim V$
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de V, complétons-la pour obtenir une base de E, soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ cette base.
notons $A = (a_{i,j})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$
pour tout $j \in 1, \cdots, p$, on a $e_j \in V$
donc $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i \in V$, i.e. $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \in p+1, \cdots, n$
Cela montre que A s'écrit par blocs $A := \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où $B \in M_p(K)$ la matrice de v dans la base $(e_1, \ldots, e_p)$ de V, $C \in M_{p,n-p}(K)$ et $D \in M_{n-p}(K)$
puisque $XI_n - A = \begin{pmatrix} XI_p - B & -C \\ 0 & XI_{n-p} - D \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire par blocs, alors
$\chi_u = \chi_A = \det(XI_n - A) = \det(XI_p - B)\det(XI_{n-p} - D) = \chi_B \chi_D = \chi_v \chi_D$
et par suite χ_v / χ_u

***Proposition* 1.3.4.**
Supposons que E soit somme directe de sous-espaces vecto- riels $V_1, \ldots, V_p$ de E stables par u. Pour tout i, notons u_i l'endomorphisme de V_i induit par u. Alors :

1. Le polynôme minimal μ_u est le ppcm des μ_{u_i} , $i = 1, \cdots, p$.
2. Le polynôme caractéristique χ_u est le produit des χ_{u_i}, $i = 1, \cdots, p$.

Preuve
1. Soit $P = ppcm\left(\mu_{u_1}, \ldots, \mu_{u_p}\right)$
D'après la proposition précédente, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ μ_{ui}/μ_u
donc $ppcm\left(\mu_{u_1}, \ldots, \mu_u\right)/\mu_u$
Alors P/μ_u.
Reste à montrer que μ_u/P
Soit $x \in E$ $x = v_1(x) + v_2(x) + \cdots + v_p(x) \in V_1 + V_2 + \cdots + V_p$
Alors on
$$\begin{aligned} P(u)x &= P(u)(v_1(x) + v_2(x) + \cdots + v_p(x)) \\ &= P(u)v_1(x) + P(u)v_2(x) + \cdots + P(u)v_p(x) \\ &= P\left(u_{V1}\right)v_1(x) + P\left(u_{V2}\right)v_2(x) + \cdots + P\left(u_{Vp}\right)v_p(x) \end{aligned}$$
tel que u_{Vi} l'endomorphisme induit par u sur V_i
On sait que μ_{u_i}/P $i \in \{1, \ldots, p\}$
c'est-à-dire, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \mu_{u_i}R$
donc $P(u_i) = \mu_{u_i}(u_i)R(u_i) = 0$ car $\mu_{u_i}(u_i) = 0$
Donc P est un polynôme annulateur de u_i pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, d'où $P(u)x = 0$
On conclue que P est un polynôme annulateur de u.
Donc μ_u/P
2. Pour tout i, soient $\mathcal{B}_i$ une base de V_i
posons $n_i := \dim\left(V_i\right), A_i := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(u_i\right)$
La réunion $\mathcal{B}$ des $\mathcal{B}_i$ est une base de E, et $A := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs.
$A = \operatorname{Diag}\left(A_1, \ldots, A_p\right)$ D'où $XI_n - A = \operatorname{Diag}\left(XI_{n_1} - A_1, \ldots, XI_{n_p} - A_p\right)$
$XI_n - A = \operatorname{Diag}\left(XI_{n_1} - A_1, \ldots, XI_{n_p} - A_p\right)$
donc $\det\left(XI_n - A\right) = \det\left(XI_{n_1} - A\right)\det\left(XI_{n_2} - A\right)\cdots\det\left(XI_{n_p} - A\right)$
d'où $\chi_u = \chi_{u_1}\chi_{u_2}\cdots\chi_{u_p}$.

1.4 Lemme des noyaux

***Lemme* 1.4.1. Lemme des noyaux**
Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soient $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entres eux. On pose $P = \prod_{i=1}^{m} P_i \in \mathbb{K}[X]$, alors :
• $\operatorname{Ker}(P(u)) = \oplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}\left(P_i(u)\right)$.
• *Pour tout $i \in [1, m]$ le projecteur de* $\operatorname{Ker}(P(u))$ sur $\operatorname{Ker}\left(P_i(u)\right) \subset \operatorname{Ker}(P(u))$ *est un polynôme en u .*

Preuve
On procède par récurrence sur m
Initialisation au rang $m = 2$:
PGCD $\left(P_1, P_2\right) = 1 \Rightarrow \exists\left(A_1, A_2\right) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A_1P_1 + A_2P_2 = 1$ (Bézout).
• Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(P_1(u)\right) \cap \operatorname{Ker}\left(P_2(u)\right)$ alors d'après la relation précédente
$$x = \left[\left(A_1P_1\right)(u)\right](x) + \left[\left(A_2P_2\right)(u)\right](x) = 0$$
Donc $\operatorname{Ker}\left(P_1(u)\right) \cap \operatorname{Ker}\left(P_2(u)\right) = \{0\}$

• Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(P_1(u)\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(P_2(u)\right)$ alors $\exists!\left(x_1, x_2\right) \in \operatorname{Ker}\left(P_1(u)\right) \times \operatorname{Ker}\left(P_2(u)\right)$

tel que $x = x_1 + x_2$ et :

$$\begin{aligned}(P(u))(x) &= \left[P_1 P_2(u)\right](x) \\ &= \left[P_1 P_2(u)\right](x_1) + \left[P_1 P_2(u)\right](x_2) \\ &= \left[P_2(u) \circ P_1(u)\right](x_1) + \left[P_1(u) \circ P_2(u)\right](x_2) \text{ (Car les polynômes en } u \text{ commutent)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(u)) \subset \operatorname{Ker}(P(u))$

• Soit $x \in \operatorname{Ker}(P(u))$ alors d'après la relation de Bézout : $x = \left[(A_1 P_1)(u)\right](x) + \left[(A_2 P_2)(u)\right]$
$x_1 = \left[(A_1 P_1)(u)\right](x)$ $x_2 = \left[(A_2 P_2)(u)\right](x)$
Il vient alors :

$$\begin{aligned}(P_2(u))(x_1) &= \left[(P_2 A_1 P_1)(u)\right](x) \\ &= \left[(A_1 P_1 P_1)(u)\right](x) \text{(Car les polynômes en } u \text{ commutent)} \\ &= \left[A_1(u) \circ P(u)\right](x) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 \in \operatorname{Ker}(P_2(u))$

$$\begin{aligned}(P_1(u))(x_2) &= \left[(P_1 A_2 P_2)(u)\right](x) \\ &= \left[(A_2 P_1 P_2)(u)\right](x) \text{(Car les polynômes en } u \text{ commutent)} \\ &= \left[A_2(u) \circ P(u)\right](x) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_2 \in \operatorname{Ker}(P_1(u))$
Donc $x = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in \operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(u))$
Donc $\operatorname{Ker}(P(u)) \subset \operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(u))$
On a ainsi montré que $\operatorname{Ker}(P(u)) = \operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(u))$ et que le projecteur de $\operatorname{Ker}(P(u))$
Supposons la propriété vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$, montrons la propriété vraie pour $m+1$
Soient $P_1, \ldots, P_{m+1} \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entres eux.
Posons $P = \prod_{i=1}^{m+1} P_i = \left(\prod_{i=1}^{m} P_i\right) P_{m+1}$, comme $\prod_{i=1}^{m} P_i$ et P_{m+1} sont deux polynômes premiers entres eux d'après le cas $m = 2$:
$\operatorname{Ker}(P(u)) = \operatorname{Ker}((P_1 \ldots P_m)(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_{m+1}(u))$
et les projecteurs π_{m+1} de $\operatorname{Ker}(P(u))$ sur $\operatorname{Ker}(P_{m+1}(u))$ et π' de $\operatorname{Ker}(P(u))$ sur $\operatorname{Ker}((P_1 \ldots P_m)(u))$ sont des polynômes en u.
On a ainsi que $\operatorname{Ker}(P(u)) = \oplus_{i=1}^{m+1} \operatorname{Ker}(P_i(u))$
Puis le projecteur de $\operatorname{Ker}(P(u))$ sur $\operatorname{Ker}(P_{m+1}(u))$ est π_{m+1} qui est un polynôme en u et pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$ le projecteur de $\operatorname{Ker}(P(u))$ sur $\operatorname{Ker}(P_i(u))$ est $\pi_i \circ \pi'$ qui est bien un polynôme en u. Ce qui clôt la récurrence.

Exemple 1 :

On considère le polynôme $P = (X^2+1) \cdot (X-1) \in \mathbb{R}[X]$. Les polynômes $(X^2+1), (X-1)$ sont premiers entre eux puisque leur **pgcd** est égal à 1. Considérons l'endomorphismes $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ de matrice représentative $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base B.

On a $P(A) = (A^2 + \mathrm{Id}_4) \cdot (A - \mathrm{Id}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$X \in \ker(P(A)) \iff AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff 5z = -5t.$$

et donc $(e_1, e_2, e_3 - e_4)$ est une base de $\ker(P(A))$

De plus ,

$$A^2 + \mathrm{Id}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ donc } \ker\left(A^2 + \mathrm{Id}_4\right) = \mathrm{Vect}\left(e_1, e_2\right)$$

et

$$A - \mathrm{Id}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \ker\left(A - \mathrm{Id}_4\right) = \mathrm{Vect}\left(\tfrac{1}{2}e_1 - \tfrac{3}{2}e_2 - e_3 + e_4\right)$$

$\mathrm{Vect}\left(e_1, e_2, \right) \cap \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_2 - e_3 + e_4\right) = \{0\}$

$\mathrm{Vect}\left(e_1, e_2, \right) + \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_2 - e_3 + e_4\right) = \mathrm{Vect}\left(e_1, e_2, e_3 - e_4\right)$, en effet,

soit $x \in \mathrm{Vect}\left(e_1, e_2, \right) + \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_2 - e_3 + e_4\right)$

donc, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3(\frac{1}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_2 - e_3 + e_4)$

$\quad\quad =(x_1 + \frac{1}{2}x_3)e_1 + (x_2 - \frac{3}{2}x_3)e_2 + (-x_3)(e_3 - e_4)$

D'où :

$$\ker\ P(f) = \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}\right) \oplus \ker(f - \mathrm{Id})$$

Exemple 2 :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection, c'est-à-dire $p^2 = p$, alors, $p^2 - p = 0$. Le polynôme $X(X-1)$ est donc un polynôme annulateur. Puisque les polynômes X et $X - 1$ sont premiers entre-eux, on a d'après le lemme des noyaux que

$$E = \ker p \oplus \ker(p - \mathrm{Id})$$

Si $\mathcal{B}$ est une base de E de la forme $\mathcal{B} = \left(\underbrace{e_1, \ldots, e_p}_{\text{base de ker } p}, \underbrace{e_{p+1}, \ldots, e_n}_{\text{base de ker } p-\mathrm{Id}}\right)$

$\forall i \in \{1, \cdots, p\}, p(e_i) = 0$

et $\forall i \in \{p+1, \cdots, n\}, (p - Id)(e_i) = 0$ donc $p(e_i) = e_i$

D'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & I_{n-p} \end{array}\right)$.

Exemple 3 :
Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie, c'est-à-dire $s^2 = 1$ donc, $s^2 - 1 = 0$ Le polynôme $(X+1)(X-1)$ est donc un polynôme annulateur. Les polynômes $X-1$ et $X+1$ sont premiers entre eux .
Dans ce cas on a $E = \ker(s - \mathrm{Id}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id})$

Si $\mathcal{B}$ est une base de E de la forme $\mathcal{B} = \left(\underbrace{e_1, \ldots, e_p}_{\text{base de ker } s-\mathrm{Id}} , \underbrace{e_{p+1}, \ldots, e_n}_{\text{base de ker } s+\mathrm{Id}} \right)$

$\forall i \in \{1, \cdots, p\}, (s - Id)(e_i) = 0$ donc $s(e_i) = e_i$

et $\forall i \in \{p+1, \cdots, n\}, (s + Id)(e_i) = 0$ donc $s(e_i) = -e_i$

D'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -I_{n-p} \end{array}\right)$

1.5 Théorème de Cayley-Hamilton

Matrice compagnon :

Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ polynôme unitaire, on définit la matrice compagnon de P :

$$\mathcal{C}(P) := \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Pour $n = 1$, P s'écrit $X + a_0$ et $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(X + a_0) = (-a_0)$
$\mathcal{C}(P)$ s'appelle matrice compagnon pour la raison que son polynôme caractéristique est $\chi_{\mathcal{C}(P)} = P$.

Preuve
Par réccurence :
pour $n = 2$, on a $P = X^2 + a_1X + a_0$ et $\mathcal{C}(P) := \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Or } \chi_{\mathcal{C}(P)} = \begin{vmatrix} X & a_0 \\ -1 & X + a_1 \end{vmatrix}$$
$$= X(X + a_1) + a_0$$
$$= X^2 + a_1X + a_0$$
$$= P$$

Supposons que le résultat est vraie pour n, montrons que le résultat est vraie pour $n+1$.

Alors, on a $P = X^{n+1} + a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ et $\mathcal{C}(P) := \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-1} \\ & & 1 & -a_n \end{pmatrix}$

$$\text{Dans ce cas , on a } \chi_{\mathcal{C}(P)} = \begin{vmatrix} X & & & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & X & a_{n-1} \\ & & -1 & X + a_n \end{vmatrix}$$

$$= X \begin{vmatrix} X & & & a_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & X & a_{n-1} \\ & & -1 & X + a_n \end{vmatrix} + (-1)^n a_0 \begin{vmatrix} -1 & X & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & X \\ & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$= X(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1) + (-1)^n(-1)^n a_0$$

$$= X(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1) + a_0$$

$$= P = X^{n+1} + a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

$$= P$$

Exemple :
Soit $P := X^2 + 3X + 1$,
donc sa matrice compagnon est

$$C_P := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

***Théorème* 1.5.1.**
Le polynôme caractéristique χ_u de u annule u, c'est-à-dire $\chi_u(u) = 0$. En d'autres termes, le polynôme minimal μ_u de u divise le polynôme caractéristique χ_u. De même $\chi_A(A) = 0$, autrement dit μ_A divise χ_A.

Preuve

Soient $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ et sa matrice compagnon $\mathcal{C}(P) := \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Soit $x \in E$ et soit p le plus petit entier tel que la famille $(x, u(x), \ldots, u^p(x))$ soit liée.
Par minimalité, la famille $(f^i(x))_{0 \leq i \leq p-1}$ est libre, et donc il existe $a_0, \ldots, a_{p-1}$ tel que

$$f^p(x) + \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^i(x) = 0_E$$

En posant $P_x = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, on a l'égalité $P_x(u)(x) = 0_E$.

On complète $(f^i(x))_{0 \leq i \leq p-1}$ en une base $\mathcal{B}$ de E.

La matrice de u dans cette base est alors $\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{C}\left(P_x\right) & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$

On obtient $\chi_u = P_x \cdot \chi_B$ et $\chi_u(u) = P_x(u) \circ \chi_B(u) = \chi_B(u) \circ P_x(u)$.

En appliquant en x, on trouve $\chi_u(u)(x) = \chi_B(u) \circ P_x(u)(x) = \chi_B(u)\left(P_x(u)(x)\right) = 0_E$

Ceci étant vrai pour tout x, on a le résultat.

Exemple :
Soit A la matrice définie par :

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\chi_A = (X+1)(X-1)^2$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, nous savons que μ_A divise χ_A et a les mêmes racines que χ_A, à savoir 1 et -1. Il n'y a donc que deux possibilités : $\mu_A = X^2 - 1$ ou $\mu_A = (X+1)(X-1)^2$. Le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $A^2 \neq I_2$, i.e. $X^2 - 1$ n'annule pas A. Il en résulte que $\mu_A = (X+1)(X-1)^2$

2

Diagonalisation en dimension finie

***Définition* 2.0.1.**
On dit que l'endomorphisme u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit diagonale.
La matrice $A \in M_n(K)$ est dite diagonalisable si, et seulement si, elle soit semblable à une matrice diagonale.

***Théorème* 2.0.1.**
Les conditions suivantes sont équivalentes :
1. L'endomorphisme u est diagonalisable.
2. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .

Preuve
Supposons qu'il existe $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ tel que $Ae_i = \lambda e_i$
Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ & & e_i & \mapsto & Ae_i \end{array}$ l'endomorphisme canonique de $\mathbb{K}^n$
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) := \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les λ_i sont les valeurs propres de u .
Si $P = Pass(\mathcal{B}_c, \mathcal{B})$ tel que $\mathcal{B}_c$ est la base canonique, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP$ donc A et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sont semblables.
Inversement, supposons que u est diagonalisable alors, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est semblable à une matrice diagonale M, c'est-à-dire $\mathrm{Mat}_M(u) := \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
Si $j \in \{1, \ldots, n\}, u\,(e_j) = \lambda_j e_j$, donc e_j est vecteur propre de u.

***Théorème* 2.0.2.**
L'endomorphisme u de E est diagonalisable si, et seulement si, l'espace E est somme directe des espaces propres $E_\lambda(u)$ pour $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$

Preuve
Supposons $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$, alors tout élément de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de chaque E_{λ_j}, il suffit alors de considérer une base pour chaque sous-espace vectoriel E_{λ_j}. La réunion sur les p espaces propres de ces vecteurs de bases forme une base de E de vecteurs propres alors u est diagonalisable.
Inversement, supposons que u est diagonalisable alors, soit $\mathcal{B}$ la base de E formée de vecteurs propres de u .
on regroupe les vecteurs de $\mathcal{B}$ associés à une même valeur propre et on obtient
$\mathcal{B}' := (e_{1,1}, \ldots, e_{p,1}, \ldots, e_{1,q}, \ldots, e_{p,q})$ où $e_{i,j}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_j

pour $j \in \{1,\dots,q\}$
On pose $F_j = Vect\,(e_{1,j},\dots,e_{p,j})$ donc, $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$
Or $F_j \subset E_{\lambda_k}$ car les vecteurs de la base de F_j sont des vecteurs propres de u associés à une même valeur propre
et pour tout $i \neq j$, on a$F_j \subset E_{\lambda_k}$ et $F_i \subset E_{\lambda_{k'}}$ tel que $F_i \cap F_j = \emptyset$
Donc $\sum_{j=1}^{q} F_j \subset \sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ donc $E \subset \sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$, d'où $E = \sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$
on résulte $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$.

***Théorème* 2.0.3.**
L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension de l'espace propre associé.

Preuve
Supposons que χ_{u} soit scindé sur $\mathbb{K}$ et que l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre soit égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.
Posons $\chi_{\mathrm{u}} = \prod_{i=1}^{\mathrm{p}} (\mathrm{X} - \lambda_{\mathrm{i}})^{\alpha_i}$ où les $\lambda_{\mathrm{i}}, 1 \leqslant \mathfrak{i} \leqslant \mathfrak{p}$, sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u et les α_i sont leurs ordres de multiplicité respectifs.
Pour $i \in \ \{1,\dots,p\}$, posons encore $n_i = \dim E_i$. Par hypotèse $\forall i \in \{1,\dots,p\}$, $\alpha_i = n_i$.
Mais alors $\mathrm{n} = \deg(\chi_{\mathrm{u}}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{p}} \alpha_{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{p}} \mathfrak{n}_{\mathrm{i}}$
Alors E est somme directe de sous espaces propres $E_\lambda(u)$ pour $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$
d'où u est diagonalisable
Supposons que u soit diagonalisable alors, E est donc somme directe des sous-espaces propres de u, $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{E}_{\lambda_p}$ où $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u.
Pour $\mathfrak{i} \in \{1,\dots,p\}$, posons $\mathfrak{n}_{\mathrm{i}} = \dim(\mathrm{E}_{\lambda_{\mathrm{i}}})$.
Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{E}_{\lambda_i}$, la matrice de u est

$$\mathrm{D} = \mathrm{diag}\left(\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_1}_{n_1},\dots,\underbrace{\lambda_p,\dots,\lambda_p}_{n_p}\right)$$

Mais alors, $\chi_{\mathrm{f}} = \chi_{\mathrm{D}} = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{p}} (\mathrm{X} - \lambda_{\mathrm{i}})^{\mathrm{n_i}}$
En particulier, χ_{f} est scindé sur $\mathbb{K}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

***Théorème* 2.0.4.**
Les conditions suivantes sont équivalentes :
1. L'endomorphisme u est diagonalisable.
2. Le polynôme minimal μ_u de u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.
3. Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, scindé à racines simples, tel que $P(u) = 0$ et $P \neq 0$.

Preuve
$1 \Longrightarrow 2$:Supposons que u est diagonalisable
alors, il existe une base de vecteurs propres $\{e_1,\dots,e_n\}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale, tel que les coefficients diagonaux sont les valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ apparaissant avec des multiplicités α_i donc, E est somme directe des sous-espaces propres E_{λ_i}
Le polynôme $P = (X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_s)$ annule u.
donc le polynôme minimal μ est un diviseur de P, donc il est scindé à racines simples.

2$\Longrightarrow$ 3 : Supposons le polynôme minimal μ_u de u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$
par définition du polynôme minimal, on a $\mu_u(u) = 0$ alors, Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, scindé à racines simples, tel que $P(u) = 0$ et $P \neq 0$.
3$\Longrightarrow$ 1 : Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, scindé à racines simples, tel que $P(u) = 0$ et $P \neq 0$.
D'après le lemme des noyaux, E est somme directe des $V_\lambda := \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$, λ décrivant l'ensemble R des racines de P.
Si $\lambda \in R$, ou bien $\lambda \in \operatorname{sp}(u)$, auquel cas $V_\lambda = E_\lambda(u)$, ou bien $\lambda \notin \operatorname{sp}(u)$, auquel cas $V_\lambda = \{0\}$.
Il en résulte que E est somme des $E_\lambda(u)$ lorsque λ décrit $R \cap \operatorname{sp}(u)$,
Alors, E est somme des $E_\lambda(u)$, $\lambda \in \operatorname{sp}(u)$, donc u est diagonalisable.

Exemple :
Soit p une projection, alors le polynôme $R = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de p, or R est scindé à racines simples donc p est diagonalisable.

Cordiagonalisation :

***Proposition* 2.0.1.**
*Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent.
Alors il existe une base commune de diagonalisation.*

Preuve
Supposons que u et v sont deux endomorphismes diagonalisables de $\mathcal{L}(E)$qui commutent.
Montrons d'abord que tout sous-espace propre de u est stable par v.
En effet, soit E_λ un sous-espace propre de u et soit $x \in E_\lambda$.
$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$. Donc $v(x) \in E_\lambda$
Considérons $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de u et $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ les sous-espaces propres associés.
Pour tout $1 \leq i \leq k, E_{\lambda_i}$ est stable par v et la restriction de v à E_{λ_i} induit un endomorphisme diagonalisable de E_{λ_i} .
Il existe donc une base B_i de E_{λ_i} de vecteurs propres de v et aussi de u puisque $u_{|E_{\lambda_i}} = \lambda_i \operatorname{Id}_{E_{\lambda_i}}$
On sait que $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$ et donc $B = (B_1, \ldots, B_k)$ est une base de diagonalisation commune de u et v.

***Corollaire* 2.0.1.**
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent. Alors $u + v$ est diagonalisable.

Preuve
Si u et v deux endomorphismes diagonalisables de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent alors il existe une base B de vecteurs propres commune à u et v.
La base B est aussi une base de vecteurs propres de $u + v$. Donc $u + v$ est aussi digonalisable.

2.1 Orthogonalité

***Définition* 2.1.1.**
Deux vecteurs u et v d'un espace euclidien E sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul $< u, v >= 0$.

***Définition* 2.1.2.**
Deux sous-espaces U et W (d'un même espace vectoriel) sont orthogonaux si $\mathbf{u}^\top \mathbf{w} = 0$ pour chaque vecteur $\mathbf{u} \in U$ et chaque vecteur $\mathbf{w} \in W$.

***Définition* 2.1.3. Famille orthogonale**
Dans un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire, une famille $(e_1, \dots, e_k)$ est dite orthogonale si $< e_i, e_j >= 0$ pour tous i, j avec $1 \leq i, j \leq k$ et $i \neq j$.

***Proposition* 2.1.1.**
Dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, une famille orthogonale $(e_1, \dots, e_k)$ sans vecteur nul est une famille libre.

Preuve
Supposons qu'on ait $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k = 0$. Pour tout i tel que $1 \leq i \leq k$ on a :

$$< \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k, e_i >= \lambda_i \left\| e_i \right\|^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0$$

où $\|e_i\|$ est la norme de e_i.

***Définition* 2.1.4. bases orthogonales et orthonormées**
Dans un espace euclidien E de dimension n, une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est dite :
- *Orthogonale si $< e_i, e_j >= 0$ pour tous i, j avec $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$.*
- *Orthonormée si elle est orthogonale et si $\|e_i\| = 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$*

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthogonale, la base $\left(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right)$ est orthonormée.

Construction de bases orthogonales : procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. Le procédé d'orthogonalisation permet de construire à partir de $\mathcal{B}$ une base orthogonale $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ telle que

$$\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i) \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

Une telle base $\mathcal{C}$ se construit par récurrence.
1. On pose d'abord $\varepsilon_1 = e_1$.
2. On construit ε_2 dans $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ sous la forme $e_2 + \lambda \varepsilon_1$ en déterminant λ pour que ε_2 soit orthogonal à ε_1. On doit avoir $< \varepsilon_2, \varepsilon_1 >= 0$, ce qui donne :

$$< e_2 + \lambda \varepsilon_1, \varepsilon_1 >= 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{< e_2, \varepsilon_1 >}{\left\| \varepsilon_1 \right\|^2}$$

3. Supposons la famille construite jusqu'au rang i. On cherche ε_{i+1} sous la forme $\varepsilon_{i+1} = e_{i+1} + \sum_{k=1}^{i} \lambda_k \varepsilon_k$. Pour $1 \leq k \leq i$, la condition d'orthogonalité de ε_{i+1} et de ε_k donne

$$< \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_k >=< e_{i+1} + \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \varepsilon_j, \varepsilon_k >=< e_{i+1}, \varepsilon_k > + \lambda_k < \varepsilon_k, \varepsilon_k >= 0$$

d'où

$$\lambda_k = -\frac{< e_{i+1}, \varepsilon_k >}{\|\varepsilon_k\|^2}$$

On détermine alors ε_{i+1}

4. Récapitulatif :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 \\ \varepsilon_2 = e_2 - \frac{<e_2,\varepsilon_1>}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 = e_3 - \frac{<e_3,\varepsilon_1>}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1 - \frac{<e_3,\varepsilon_2>}{\|\varepsilon_2\|^2}\varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n = e_n - \frac{<e_n,\varepsilon_1>}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1 - \frac{<e_n,\varepsilon_2>}{\|\varepsilon_2\|^2}\varepsilon_2 - \ldots - \frac{<e_n,\varepsilon_{n-1}>}{\|\varepsilon_{n-1}\|^2}\varepsilon_{n-1} \end{cases}$$

Pour obtenir une base orthonormée, il suffit de diviser chaque ε_i par sa norme.

Exemple :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Orthogonalisons $\mathcal{B}$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

On pose $\varepsilon_1 = e_1$. Calculons $\varepsilon_2 = e_2 - \frac{<e_2,\varepsilon_1>}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1$

$$< e_2, \varepsilon_1 >=< e_2, e_1 >= 3, \quad \|\varepsilon_1\|^2 =< \varepsilon_1, \varepsilon_1 >= 14$$

Donc

$$\varepsilon_2 = e_2 - \frac{3}{14}\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

On vérifie $< \varepsilon_1, \varepsilon_2 >= 11 - 27 + 16 = 0$

Calculons $\varepsilon_3 = e_3 - \frac{<e_3,\varepsilon_1>}{\|\varepsilon_1\|^2}\varepsilon_1 - \frac{<e_3,\varepsilon_2>}{\|\varepsilon_2\|^2}\varepsilon_2$:

$$\begin{cases} < e_3, \varepsilon_1 >= 7, \quad \|\varepsilon_1\|^2 = 14 \\ < e_3, \varepsilon_2 >= -\frac{7}{14}, \quad \|\varepsilon_2\|^2 = \frac{19}{14} \end{cases}$$

d'où

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{7}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{19}\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{38}\left[\begin{pmatrix} 38 \\ 76 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $< \varepsilon_3, \varepsilon_1 >= 0$ et $< \varepsilon_3, \varepsilon_2 >= 0$

La base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est orthogonale. On obtient une base orthonormée en divisant par la norme des vecteurs :

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \sqrt{\frac{14}{19}}\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{266}}\begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varepsilon}_3 = \sqrt{\frac{1}{1900}}\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix}$$

2.2 Diagonalisation des matrices symétriques

***Définition* 2.2.1.**
Soit $A \in M_{m,n}(K)$ tel que $A = (a_{i,j})$
On appelle transposée de A et l'on note ${}^tA$ la matrice à n lignes et m colonnes de terme général définie par : ${}^tA = (a_{j,i})$.

***Définition* 2.2.2.**
Une matrice $A \in M_n(K)$ est dit symétrique si elle vérifie l'égalié suivante : ${}^tA = A$

***Proposition* 2.2.1.**
Toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique à coefficients réels sont réelles.

Preuve
Toute matrice à coefficients réels admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$(le théorème d'Alembert-Gauss). Considérons $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe d'une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Afin de montrer que cette valeur propre est réelle, on va montrer qu'elle est égale à son conjugué, c'est-à-dire que $\lambda = \overline{\lambda}$.
Soit $v \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ ; on a

$$Av = \lambda v \tag{2.1}$$

D'une part, en multipliant l'égalité (2.1) par ${}^t\overline{v}$ à gauche, on obtient

$${}^t\overline{v}\mathrm{Av} = \lambda^t\overline{v}v \tag{2.2}$$

D'autre part, en transposant l'égalité (2.1), on a ${}^tv^tA = \lambda^tv$.
Puisque la matrice A est symétrique, on en déduit ${}^tvA = \lambda^tv$.
En prenant le conjugué de cette égalité, on a $\overline{{}^tvA} = \overline{\lambda}^t\overline{v}$
La matrice A étant réelle, on obtient $\overline{{}^tv}A = \overline{\lambda}^t\overline{v}$
Enfin, en multipliant cette égalité par v á droite, on a

$$\overline{{}^tv}Av = \overline{\lambda}^t\overline{v}v \tag{2.3}$$

Les relations (2.2) et (2.3) permettent d'affirmer que $\overline{\lambda}^t\overline{v}v = \lambda^t\overline{v}v$
puisque $v = (v_1, \ldots, v_n)$ est non nul, on a ${}^t\overline{v}v = |v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2 \neq 0$.
On en déduit donc que $\lambda = \overline{\lambda}$, autrement dit $\lambda \in \mathbb{R}$.

***Proposition* 2.2.2.**
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique à coefficients réels sont deux à deux orthogonaux.

Preuve
Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de la matrice A donc, ces valeurs propres sont réelles.
Considérons deux sous-espaces propres E_λ et E_μ associés respectivement aux deux valeurs λ et μ. Pour montrer que E_λ est orthogonal à E_μ, il faut montrer que pour tous $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$ on a ${}^txy = 0$
La matrice A étant symétrique on a ${}^t\left({}^txAy\right) =^t y^tAx =^t yAx$.
Or, par définition d'un sous-espace propre, on a $Ax = \lambda x$ et $Ay = \mu y$.
donc ${}^t\left({}^txAy\right) =^t yAx$ implique que $\lambda^tyx = \mu^t\left({}^txy\right)$, c'est-à-dire que $(\lambda - \mu)^tyx = 0$. Puisque $\lambda \neq \mu$, on en conclut que ${}^tyx = 0$.

Définition 2.2.3.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dit orthogonale si elle vérifie l'égalité suivante : ${}^tAA = A^tA = I_n$ où ${}^tA$ est la matrice transposée de A et I_n est la matrice identité. Dans le cas complexe, la matrice orthogonale est appelée orthogonale.

Théorème 2.2.1.
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale. Autrement dit, si A matrice symétrique réelle alors, il existe une matrice orthogonale P telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit une matrice diagonale réelle.

Exemple :
Soit la matrice définie par :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisons en base orthonormée la matrice symétrique M_1 :
•Le polynôme caractéristique de M_1 est :

$$\begin{aligned}
\det(M_1 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) - ((1-\lambda) - 1) + (1 - (1-\lambda)) \\
&= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) + \lambda + \lambda = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) + 2\lambda \\
&= \lambda((1-\lambda)(\lambda-2) + 2) = \lambda\left(-\lambda^2 + 3\lambda - 2 + 2\right) \\
&= \lambda^2(3-\lambda)
\end{aligned}$$

Les trois valeurs propres de M_1 sont donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 3$
•Les vecteurs propres des valeurs propres
⋆Les vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 0.$:
Posons $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$M_1 v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x+y+z=0$$

Ceci montre que l'espace des valeurs propres associées à la valeur propre 1 est de dimension 2. Choisissons un vecteur dans ce plan $v = (1, -1, 0)$. Puisque nous voulons diagonaliser en base orthonormée, calculons $\|v\|$ puis prenons $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$ de norme 1. On a $\|v\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$
donc $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

Cherchons un deuxième vecteur propre qui soit à la fois dans le plan $x+y+z=0$ et orthogonal à v_1 (c'est-à-dire leur produit scalaire est nul). On a

$$\left\{\begin{array}{l} M_1 v = 0 \\ v\cdot v_1 = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 0z = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x=y \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2y \\ x=y \end{array}\right. \Longleftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -2y \end{pmatrix}$$

Déterminons les valeurs de y pour lesquels ce vecteur est de norme 1 :

$$\|v\| = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{y^2+y^2+(-2y)^2} = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{6}|y| = 1 \Longleftrightarrow |y| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Prenons $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$\star$Les vecteurs propres associés à $\lambda_3 = 3.$:

$$M_1 v = v \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y+z & =3x \\ x+y+z & =3y \\ x+y+z & =3z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} -2x+y+z=0 & (L_1) \\ x-2y+z=0 & (L_2) \\ x+y-2z=0 & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} -2x+y+z=0 & (L_1) \\ 3x-3y=0 & (L_2-L_1) \\ -3x+3y=0 & (L_3+2L_1) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=2x-y \\ x=y \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=x \\ y=x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs de x pour lesquelles v est de norme 1 :

$$\|v\| = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+x^2+x^2} = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{3x^2} = 1 \Longleftrightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Prenons $v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

• diagonalisation.

La matrice M_1 étant symétrique, elle est diagonalisable en base orthonormée. Les trois vecteurs propres propres v_1, v_2 et v_3 sont de norme 1 et sont deux à deux orthogonaux. En effet, par construction, $v_1 \perp v_2$ et, puisque v_3 d'une part et v_1 et v_2 d'autre part sont associés à des valeurs propres différentes, on a $v_1 \perp v_3$ et $v_2 \perp v_3$. La famille (v_1, v_2, v_3) constitue donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de M_1.

Si on pose $Q = \mathrm{Mat}\,(v_1, v_2, v_3)$, la matrice Q est orthogonale donc $Q^{-1} =^t Q$. Alors, on a

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} =^t Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

et

$$Q^{-1}M_1Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.3 Diagonalisation des matrices normales

***Définition* 2.3.1.**
Soit $A \in M_{m,n}(K)$ tel que $A = (a_{i,j})$
On appelle matrice adjointe de A la matrice notée par A^* définie par :
$A^* = {}^t\overline{A} = \overline{{}^tA} = \overline{(a_{j,i})} \in M_{n,m}(K)$

***Définition* 2.3.2.**
Une matrice $A \in M_{m,n}(K)$ est normale si elle commute avec son adjointe, c'est-à-dire $AA^* = A^*A$.

***Théorème* 2.3.1. Schur**
Toute matrice carrée réelle ou complexe est semblable à une matrice triangulaire supérieure dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$. Autrement dit, $\exists U$ matrice unitaire tel que $U^*AU = T$ est triangulaire supérieure.

***Proposition* 2.3.1.**
Toute matrice normale est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$. Autrement dit, il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ matrice unitaire tel que $U^*AU = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Preuve
Supposons, il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ matrice unitaire tel que $U^*AU = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$:
Montrons que A est normale :
D'une part, on a :

$$A^*A = (UDU^*)^* \cdot (UDU^*)$$
$$A^*A = (UD^*U^*) \cdot (UDU^*)$$
$$A^*A = UD^*DU^*$$

D'autre part, on a :

$$AA^* = (UDU^*) \cdot (UDU^*)^*$$
$$AA^* = UDD^*U^*$$
$$AA^* = A^*A$$

donc A est normale .
Inversement, supposons que A est normale et montrons qu'il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ matrice unitaire tel que $U^*AU = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$
D'aprés le théoréme de Schur, il existe U unitaire tel que : $T = U^*AU$ (T matrice triangulaire supérieur)
Et comme A est normale on a :

$$\begin{aligned} AA^* = A^*A &\Longleftrightarrow UT^*TU^* = UTT^*U^* \\ &\Longleftrightarrow T^*T = TT^* \end{aligned}$$

Donc T est normale.
Pour démontrer que T est diagonale, comparons les coefficients de T^*T et TT^* d'indice 11
$T = (t_{ij})_{1\le i,j\le n}, t_{ij} = 0$ si $j < i$

D'une part, $(T^*T)_{11} = \sum_{i=1}^{n} \overline{t_{i1}} t_{i1} = |t_{11}|^2$

D'autre part, $(TT^*)_{11} = \sum_{i=1}^{n} \overline{t_{1i}} t_{1i} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \cdots + |t_{1n}|^2$

ce qui donne : $t_{12} = t_{13} = \cdots = t_{1n} = 0$. On refait la même chose avec les coefficients d'indice 22 pour démontrer que les coefficients de la deuxième ligne de T en dehors de la diagonale sont nuls, puis avec les coefficients d'indice 33, etc

Exemple :
Soit la matrice définie par :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalisons en base orthonormée la matrice normale M_2 :

• Le polynôme caractéristique de M_2

$$\begin{aligned} \det(M_2 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 0 \\ &= (2-\lambda)(-\lambda(2-\lambda) - 4) - 2 \times (2(2-\lambda) - 0) \\ &= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 4\right) - 4(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 4 - 4\right) \\ &= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 8\right) \end{aligned}$$

Le polynôme $X^2 - 2X - 8$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36$ donc les racines de ce polynôme sont :

$$x_1 = \frac{2-6}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+6}{2} = 4$$

On a par conséquent :

$$\det(M_2 - \lambda I) = (2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-4)$$

Les trois valeurs propres de M_2 sont donc $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = -2$

•Les vecteurs propres des valeurs propres

Posons $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

⋆Les vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 2$:

$$M_2 v = 2v \iff \begin{cases} 2x + 2y = 2x \\ 2x + 2z = 2y \\ 2y + 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x + z = y \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -x \end{array} \right. \Longleftrightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs de x pour lesquels v est de norme 1 :

$$\begin{aligned} \|v\| = 1 &\Longleftrightarrow \sqrt{x^2 + 0^2 + (-x)^2} = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{2x^2} = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{2}|x| = 1 \\ &\Longleftrightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Prenons $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\star$Les vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 4$:

$$M_2 v = 4v \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y = 4x \\ 2x + 2z = 4y \\ 2y + 2z = 4z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ x + z = 2y \\ y = z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow x = y = z \Longleftrightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs de x pour lesquels v est de norme 1 :

$$\begin{aligned} \|v\| = 1 &\Longleftrightarrow \sqrt{x^2 + x^2 + x^2} = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{3x^2} = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{3}|x| = 1 \\ &\Longleftrightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Prenons $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$\star$Les vecteurs propres associés à $\lambda_3 = -2$:

$$M_2 v = -2v \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y = -2x \\ 2x + 2z = -2y \\ 2y + 2z = -2z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ x + z = -y \\ y = -2z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ x + z = 2x \\ y = -2z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ z = x \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs de x pour lesquels v est de norme 1 :

$$\begin{aligned} \|v\| = 1 &\Longleftrightarrow \sqrt{x^2 + (-2x)^2 + x^2} = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{6x^2} = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{6}|x| = 1 \\ &\Longleftrightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Prenons $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

• Diagonalisation

La matrice M_2 étant normale, elle est diagonalisable en base orthonormée. Les trois vecteurs propres propres propres propres v_1, v_2 et v_3 sont de norme 1 et sont deux à deux orthogonaux. La famille (v_1, v_2, v_3) constitue donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de M_1 .

Si on pose $Q = \mathrm{Mat}\,(v_1, v_2, v_3)$, la matrice Q est orthogonale donc $Q^{-1} =^t Q$. Alors ,on a

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1} =^t Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

et

$$Q^{-1} M_2 Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3

Trigonalisation

3.1 Définitions

***Définition* 3.1.1.**
On dit qu'un endomorphisme u de E est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si l'endomorphisme correspondant de $\mathbb{K}^n$ est trigonalisable, c'est-à-dire si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

***Théorème* 3.1.1.**
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
1. u est trigonalisable.
2. le polynôme caractéristique χ de u est scindé.

Preuve
$1 \Rightarrow 2$. Le polynôme caractéristique de u est le polynôme caractéristique de la matrice de u dans une base quelconque.
Si u est trigonalisable, on peut choisir une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure, On a alors

$$\chi(X) = \det\left(X\,\mathrm{ld} - \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} X - a_{11} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & X - a_{nn} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $\chi(X) = (X - a_{11}) \dots (X - a_{nn})$ qui est scindé.
$2 \Rightarrow 1$. Montrons par récurrence sur l'entier $m \geqslant 1$ que tout endomorphisme scindé v d'un espace vectoriel F de dimension m est trigonalisable.
Pour $m = 1$, le résultat est vrai, supposons que le résultat est vrai à l'ordre $m - 1$, montrons que le résultat est vrai à l'ordre m.
Pour cela, soient F un espace vectoriel de dimension m et v un endomorphisme scindé de F. En particulier, χ_v possède au moins une racine λ_m, qui est une valeur propre de v. Soit e_m un vecteur propre de v associé à λ_m. Complétons la famille libre (e_m) en une base $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_m)$ de F.
Puisque $v(e_m) = \lambda_m e_m$, la matrice $A := \mathrm{Mat}_B(v)$ s'écrit par blocs $A := \begin{pmatrix} M & U \\ 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$
où $M \in M_{m-1}(K)$ et $U \in M_{m-1,1}(K)$.

Le calcul d'un déterminant par blocs montre que $\chi_A = (X - \lambda_m)\,\chi_M$, car c'est une matrice triangulaire par blocs.
Le polynôme χ_M est donc scindé, puisqu'il divise χ_A .
Vu l'hypothèse de récurrence, il existe $Q \in GL_{m-1}(K)$ telle que $T := Q^{-1}MQ$ soit triangulaire supérieure. La matrice $P := \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_m(K)$ est inversible car Q est inversible,
son inverse étant $\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On en déduit que $P^{-1}AP$ est triangulaire, et donc que v est trigonalisable. En effet, $P^{-1}AP$ vaut :

$$\begin{aligned} P^{-1}\begin{pmatrix} M & U \\ 0 & \lambda_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} MQ & U \\ 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q^{-1}MQ & Q^{-1}U \\ 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et la dernière matrice est triangulaire supérieure parce que $Q^{-1}MQ$ l'est.

***Corollaire* 3.1.1.**
Sur un corps algébriquement clos, toute matrice carrée (et tout endomorphisme en dimension finie) est trigonalisable.

Preuve
Cela vient du fait que tout polynôme non constant à coefficients dans un corps algébriquement clos est scindé.
Exemple :
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Commençons par vérifier si f est trigonalisable en factorisant son polynôme caractéristique :

$$\chi_f(x) = \det(A - xI_4) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2-x & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 4-x & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} -2-x & -3 & -3 \\ 4 & 4-x & 3 \\ -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (1-x)\left(-\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4-x & 3 \end{vmatrix} + (1-x)\begin{vmatrix} -2-x & -3 \\ 4 & 4-x \end{vmatrix}\right) \\ &= (1-x)\left(3x - 3 + (1-x)\begin{vmatrix} -2-x & -3 \\ 4 & 4-x \end{vmatrix}\right) \\ &= (1-x)^2\left(-3 + \begin{vmatrix} -2-x & -3 \\ 4 & 4-x \end{vmatrix}\right) = (1-x)^2\,(1 - 2x - x^2) = (1-x)^4 \end{aligned}$$

Puisque χ_f est scindé, f est bien trigonalisable. Déterminons une base de son unique sous-espace propre E_1.E_1 est l'ensemble des vecteurs $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$(A-I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit encore : $\left[\begin{array}{c} 4x-3y-3z-3t=0 \\ 4y+3z+3t=0 \\ -2x-y=0 \end{array}\right.$

ou encore, en rajoutant à la première équation les deux autres :

$$\left[\begin{array}{l} 2x=0 \\ 4y+3z+3t=0 \\ -2x-y=0 \end{array}\right. \qquad \text{c'est-à-dire,} \qquad \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ z+t=0 \end{array}\right.$$

Ainsi, on a $E_1 = \operatorname{Ker}(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}) = \{(0,0,z,-z); z \in \mathbb{R}\}$, autrement dit, E_1 est la droite vectorielle Vect (u_1) engendrée par le vecteur $u_1=(0,0,1,-1)$. Comme $\chi_f(x)=(1-x)^4$, toute matrice triangulaire supérieure représentant f sera nécessairement de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & b' & c' \\ 0 & 0 & 1 & c'' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Afin de trouver un vecteur de base u_2 tel que $f(u_2)=au_1+u_2$, complétons le vecteur u_1 en une base de $\mathbb{R}^4$ par les vecteurs $e_1=(1,0,0,0)$ et $e_2=(0,1,0,0)$ et $e_3=(0,0,1,0)$ de sa base canonique $\mathcal{B}$. (u_1,e_1,e_2,e_3) est bien une base de $\mathbb{R}^4$ car :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1;e_3;e_3;u_1) = \det_{\mathcal{B}}(e_1;e_2;e_3;e_3) - \det_{\mathcal{B}}(e_1;e_2;e_3;e_4) = 0-1 \neq 0$$

Cherchons donc u_2 sous la forme d'une combinaison linéaire de ces vecteurs additionnels e_1,e_2,e_3 : $u_2 = xe_1+ye_2+ze_3 = (x,y,z,0)$. La seconde colonne de la matrice T impose : $f(u_2) = au_1+u_2$.

Cette relation s'écrit sur la base canonique $\mathcal{B}$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\left[\begin{array}{ccc} x & = & x \\ 4x-2y-3z & = & y \\ 4y+4z & = & a+z \\ -2x-y & = & -a \end{array}\right.$$

Le système a pour solutions (a,x,y,z) tels que : $x=0$, $y=a$ et $z=-y$. Choisissons $a=1$ et $u_2=(0,1,-1,0)$.

Afin de trouver un vecteur u_3 tel que $f(u_3) = bu_1 + b'u_2 + u_3$, complétons maintenant le système libre (u_1, u_2) en une base de $\mathbb{R}^4$ par les vecteurs e_1, e_2 de sa base canonique $\mathcal{B}$. (u_1, u_2, e_1, e_2) est bien une base de $\mathbb{R}^4$ car :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1; e_2; u_2; u_1) = \det_{\mathcal{B}}(e_1; e_2; e_2; u_1) - \det_{\mathcal{B}}(e_1; e_2; e_3; u_1) = 0 - (-1) \neq 0$$

Cherchons donc u_3 sous la forme d'une combinaison linéaire de ces vecteurs additionnels e_1, e_2 : $u_2 = xe_1 + ye_2 = (x, y, 0, 0)$. La troisième colonne de la matrice T impose : $f(u_3) = bu_1 + b'u_2 + u_3$
Cette relation s'écrit sur la base canonique $\mathcal{B}$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\left[\begin{array}{rl} x &= x \\ 4x - 2y &= b' + y \\ 4y &= b - b' \\ -2x - y &= -b \end{array}\right.$$

Le système a pour solutions (b, b', x, y) tels que : $x = 0$, $y = b$ et $b' = -3b$. Choisissons $b = 1$, $b' = -3$ et $u_3 = (0, 1, 0, 0)$.

Complétons le système libre (u_1, u_2, u_3) par n'importe quel vecteur u_4 tel que (u_1, u_2, u_3, u_4) soit une base de $\mathbb{R}^4$. Choisissons $u_4 = e_1$.
(u_1, u_2, u_3, u_4) est alors une base de $\mathbb{R}^4$. La dernière colonne de la matrice T impose la relation : $f(u_4) = cu_1 + c'u_2 + c''u_3 + u_4$, et celle-ci s'écrit sur la base canonique $\mathcal{B}$:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c''\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\left[\begin{array}{rl} 1 &= 1 \\ 4 &= c' + c'' \\ 0 &= c - c' \\ -2 &= -c \end{array}\right.$$

d'où $c = c' = c'' = 2$
Ainsi, la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2, u_3, u_4) et la matrice de f dans cette dernière sont respectivement :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Endomorphismes nilpotents

***Définition* 3.2.1.**
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que l'endomorphisme u est nilpotent s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $u^m = 0$. On appelle alors indice de nilpotence le plus petit entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^m = 0$.
De même, une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ sera dite nilpotente s'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = O_p$. On appelle aussi indice de nilpotence le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

Remarque :
• L'endomorphisme nul 0 est nilpotent avec $m = 1$.
• Si u est nilpotent alors $\operatorname{Ker}(u) \neq \{0_E\}$. En effet, si $m \geq 1$ est un entier tel que $u^m = 0$, alors, $\det(u^m) = \det(u)^m = \det(0) = 0$, d'où $\det(u) = 0$.
• Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire stricte (matrice triangulaire à diagonale nulle) est nilpotente. En effet, dans ce cas $\chi_A = X^n$, or d'après le théorème de **Cayley-Hamilton** $\chi_A(A) = 0$, donc $A^n = 0$.

***Proposition* 3.2.1.**
Soient n et n' deux endomorphismes nilpotents de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent.
Alors $n + n'$ est nilpotent.

Preuve
Soient n et n' deux endomorphisme nilpotents qui commutent. Soient alors r et r' les indices de nilpotence respectifs de n et n'.
Donc d'après la formule de Binôme,on a $(n+n')^{r+r'} = \sum_{k=0}^{r+r'} \left(\begin{array}{c} r+r' \\ k \end{array} \right) n^k n^{r+r'-k}$
Si $k < r$ alors, $r + r' - k > r'$ et dans ce cas $n'^{r+r+r'-k} = 0$
Si $k \geq r$ alors, $n^k = 0$.
Donc tous les termes de la somme sont nuls et on aura toujours : $(n+n')^{r+r'} = 0$.

***Proposition* 3.2.2.**
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence entre les assertions :
i. u est nilpotent
ii. $\chi_u = X^n$, où $n = \dim(E)$)
On a le même résultat pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Preuve
• *$i \Rightarrow ii$.* On suppose que u est nilpotent d'indice p.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant u dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E. La matrice A est trigonalisable dans $M_n(\mathrm{C})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. Alors on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$.
Or $A^p = 0$ donc $\lambda^p X = 0$ avec $X \neq 0$, d'où $\lambda^p = 0$. Ainsi, $\lambda = 0$, donc 0 est la seule valeur propre de A . A étant trigonalisable, son polynôme caractéristique est donc $\chi_A = X^n$. Par suite, $\chi_u = \chi_A = X^n$.
• *$ii \Rightarrow i$.* On suppose $\chi_u = X^n$. Comme χ_u est scindé, u est trigonalisable et donc il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice T de u est triangulaire stricte, car 0 est la seule valeur propre de u.
Or T est nilpotente car triangulaire stricte, donc il existe $k \geq 1$ tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(u^k\right) = T^k = 0_n$. Ainsi, $u^k = 0$.

***Corollaire* 3.2.1.**
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est nilpotent si, et seulement si, u est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

Preuve
On a u est nilpotent si, et seulement si, $\chi_u = X^n$ si, et seulement si, u est trigonalisable et son unique valeur propre est 0.

***Proposition* 3.2.3.**
Soit u un endomorphismes diagonalisable de $\mathcal{L}(E)$. Si u est nilpotent alors $u = 0$.

Preuve
Soit u un endomorphisme diagonalisable et nilpotent. Soit r l'indice de nilpotence de u.
Donc par définition du polynôme minimal, on a : $\mu_u(X) = X^r$. Or u est diagonalisable et donc μ_u est scindé à racines simples, c'est-à-dire que $r = 1$.
Dans ce cas $\mu_u(X) = X$. Puisque $\mu_u(u) = 0$, alors $u = 0$.

***Proposition* 3.2.4.**
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est nilpotent d'indice p, alors :
- *pour tout $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$, la famille , $\mathcal{F}(x,u) = (x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre ;*
- $p \leq n = \dim(E)$
- *De plus, le sev de dimension* p : F(x, u) = Vec($\mathcal{F}(x,u)$) *de base $\mathcal{F}(x,u)$, est u-stable.*

Preuve
• Soit $a_0, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x) = 0_E$. On a :

$$0_E = u^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x)\right) = a_0 u^{p-1}(x)$$

donc $a_0 = 0 \,\text{car}\, u^{p-1}(x) \neq 0_E$, puis, on a :

$$0_E = u^{p-2}\left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i u^i(x)\right) = a_1 u^{p-1}(x)$$

d'où $a_1 = 0$. On continue ainsi de proche en proche pour trouver finalement :
$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$$
Donc $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est une famille libre.

• Comme p est le plus petit entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$, alors $u^{p-1} \neq 0$.
Par suite, il existe $x \neq 0_E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Ainsi, en utilisant le point précédent, la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est une famille libre de E de p vecteurs, par suite, $p \leq \dim(E)$.
En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton : on a $\chi_u = X^n$, donc $u^n = 0$ d'où $p \leq n = \dim(E)$ par minimalité de l'indice de nilpotence p.

• Soit $y \in F(x,u)$
$y = y_1 x + y_2 \cdot u(x) + \ldots + y_{p-1} \cdot u^{p-2}(x) + y_p \cdot u^{p-1}(x)$
Donc, $u(y) = y_2 \cdot u(x) + \ldots + y_{p-1} \cdot u^{p-2}(x) + y_p \cdot u^{p-1}(x)$ car, pour tout $k, u\left(u^k(x)\right) = u^{k+1}(x)$
D'où $u(y) \in F(x,u)$. Donc $F(x,u)$ est un sev de E u-stable.

3.3 La décomposition de Dunford

***Théorème* 3.3.1.**
Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont

le polynôme minimal est scindé. Alors il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ *tel que :*
•$u = d + n$
•d *est diagonalisable*
•n *est nilpotent*
•n *et* d *commutent :* $n \circ d = d \circ n$
De plus n *et* d *sont des polynômes en* u.

Preuve
Existence :
Soit $\chi_u = (X-\lambda_1)^{m_1} \ldots (X-\lambda_r)^{m_r}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et les entiers $m_i \geq 1$.
D'après le lemme de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques
$F_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i Id)^{m_i}$: $E = \oplus_{i=1}^{r} F_i$
$\forall i \in \{1 \cdots r\}$ le projecteur p_i de E sur $\operatorname{Ker}(u - \lambda_i ld)^{m_i}$ est un polynôme en u.
On pose $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$ et $n = u - d$
On a bien que $u = n + d$ et que n et d sont des polynômes en u et donc commutent.
$\forall i \in \{1, ..., r\}$ soit $\mathcal{B}_i = (b_i)$ une base de $\operatorname{Ker}(u - \lambda_i/d)^{m_i}$
Alors $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$ est une base de E vérifiant $d(b_i) = \lambda_i b_i$
D'oú d est diagonalisable.
$\forall x \in E, x = x_1 + x_2 + \ldots + x_r$ de façon unique, car E est une somme directe .
Soit $m = \max\{m_i\}$ alors, $n^m(x) = \sum_{i=1}^{r} n^m(x_i) = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i/d)^m (x_i) = 0$. Alors n est nilpotent.
Unicité :
Par l'absurde, supposons qu'il existe un autre couple $(d', n') \in \mathcal{L}(E)^2$ qui vérifie les conditions de la décomposition de Dunford alors, on a $d - d' = n - n'$.
Comme d' commute avec n', il commute aussi avec u, donc avec tout polynôme en u.
En particulier d' commute avec d
Ainsi d et d' sont codiagonalisable et donc $d' - d$ est diagonalisable.
De même n commute avec n'. Il en découle que $n - n'$ est nilpotent. Le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent étant 0 on a $d = d'$ et $n = n'$

***Corollaire* 3.3.1.**
Si E *est* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors tout endomorphisme de* $\mathcal{L}(E)$ *admet une décomposition de Dunford.*

Preuve
$\mathbb{C}[X]$ est algébriquement clos, donc tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé. En particulier, tout polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$ est scindé.

Remarque :
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, alors sa décomposition de Dunford est $u = u + \mathbf{0}$.

Exemple :
Soit A la matrice définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.
• Le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\begin{vmatrix} -X & -1 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\left(X^2-2X\right) + (1-X) \\ &= (1-X)\left(X^2-2X+1\right) = (1-X)^3\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de A admet une valeur propre triple $\lambda = 1$.
• Les sous-espaces propres et caractéristiques de A :
La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace $E_1 = \ker(A - I)$, et on a

$$(x, y, z) \in E_1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x - y = x \\ x - z = y \\ -x + 2z = z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = 0 \\ x = z \end{array}\right.$$

Le sous-espace E_1 est engendrée par le vecteur $(1, 0, 1)$. Le sous-espace caractéristique de A, associé à l'unique valeur propre $\lambda = 1$, est le sous-espace $F_1 = \ker(A - I)^3$, or, compte tenu du théorème de Cayley-Hamilton, on sait que $\chi_A(A) = 0$ ainsi, la matrice $(A - I)^3$ est la matrice nulle, ce qui implique $F_1 = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.
• Démontrons l'existence d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous cherchons des vecteurs e_1, e_2 et e_3 tels que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 + e_2$ et $Ae_3 = e_2 + e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1 = \ker(A-I)$, et $\ker(A-I)$ est la droite d'équations : $\{y = 0, x = z\}$.
On détermine $e_2 = (x, y, z)$ tel que $Ae_2 = e_1 + e_2$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ 1+y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x - y = 1 + x \\ x - z = y \\ -x + 2z = 1 + z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = -1 \\ x - z = -1 \end{array}\right.$$

Ainsi, le vecteur $e_2 = (-1, -1, 0)$ convient. Il reste à chercher un vecteur e_3 tel que $Ae_3 = e_2 + e_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x - y = x - 1 \\ x - z = y - 1 \\ -x + 2z = z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = 1 \\ x = z \end{array}\right.$$

Le vecteur $e_3 = (0, 1, 0)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Décomposition de Dunford :
On a

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Les deux matrices commutent car l'une est égale à I. Or, il existe un unique couple de matrices D et N, D diagonalisable et N nilpotente, telles que $B=D+N$ et $DN=ND$. Or si

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

On a

$$N^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

et $N^3=0$. La décomposition $B=D+N$ est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

3.4 Réduction de Jordan :

Sous-espace caractéristique

***Définition* 3.4.1.**
Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et soit λ_i une valeur propre de u de multiplicité α_i dans χ_u. On appelle sous-espace caractéristique de u associée à λ_i le s.e.v : $\quad F_{\lambda_i}:=\ker\left(u-\lambda_i\mathrm{Id}\right)^{\alpha_i}$

***Proposition* 3.4.1.**
Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé : $\chi_u=\prod_{i=1}^{k}\left(X-\lambda_i\right)^{\alpha_i}$ O on a :
1. F_{λ_i} est stable par u
2. $E=F_{\lambda_1}\oplus F_{\lambda_2}\oplus\ldots\oplus F_{\lambda_k}$
3. $\dim F_{\lambda_i}=\alpha_i$

Preuve
1. Soit $x\in F_{\lambda_i}$. Puisque $\left(u-\lambda_i \text{ Id }\right)^{\alpha_i}$ est un polynôme en u, u et $\left(u-\lambda_i \text{ Id }\right)^{\alpha_i}$ commutent.
On a alors : $\left(u-\lambda_i\mathrm{Id}\right)^{\alpha_i}(u(x))=\left(u-\lambda_i \text{ Id }\right)^{\alpha_i}\circ u(x)=u\circ(u-\lambda\mathrm{Id})^{\alpha_i}(x)=u(0)=0$
et donc $u(x)\in F_\lambda$
2. Les polynômes $\left(u-\lambda_i \text{ Id }\right)^{\alpha_i}$ n'ont pas une racine commune, alors ils sont premiers entre eux donc, d'après le Lemme des noyaux, on a le résultat.
3. L'endomorphisme v induit par de u sur F_{λ_i} :

$$\begin{array}{rccc} v & : & F_{\lambda_i} & \rightarrow & F_{\lambda_i}\\ & & x & \mapsto & (u-\lambda\mathrm{Id})(x)\end{array}$$

est nilpotente par définition.
On sait donc que le polynôme caractéristique de v est $\chi_v=X^{\dim F_{\lambda_i}}$.
Comme il divise μ_u, on a on a dim $F_{\lambda_i}\leq\alpha_i$.
Puisque $\sum\dim F_{\lambda_i}=\sum\alpha_i=n$, on a le résultat.

Réduction de Jordan :

La réduction de Jordan sert à montrer que toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est semblable à une matrice diagonale par blocs.

***Définition* 3.4.2.**
Un bloc de Jordan pour l'endomorphisme u est un sous-espace stable muni d'une base $e_1, \ldots, e_m$ telle que $f(e_1) = \lambda e_1, f(e_2) = \lambda e_2 + e_1, \ldots, f(e_m) = \lambda e_m + e_{m-1}$.
Ce sous-espace est contenu dans le sous-espace caractéristique E^λ
La matrice de u dans cette base s'appelle aussi bloc de Jordan notée $J_m(\lambda)$

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{K})$$

En d'autres termes, $J_m(\lambda)$ a des λ sur la diagonale, des 1 juste au-dessus, et des 0 ailleurs.

***Proposition* 3.4.2. Réduction des endomorphismes nilpotents**
Soit u un endomorphisme nilpotent, d'indice p, dans un espace vectoriel E de dimension p. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure, les termes au-dessus de la diagonale valant 1, les autres étant nuls. Cette matrice s'appelle bloc de Jordan d'ordre n.

$$J_p(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve
Par hypothèse, u^{p-1} est non nul, donc il existe $v \in E$ tel que $u^{p-1}(v) \neq 0$. Nécessairement les p vecteurs $u^{p-1}(v), u^{p-2}(v), \ldots, u(v), v$ sont tous non nuls.
Les p vecteurs $u^{p-1}(v), u^{p-2}(v), \ldots, u(v), v$ forment une famille libre, donc une base puisque l'espace est de dimension p.
Donc la matrice de u dans cette base est bien $J_p(0)$

***Proposition* 3.4.3.**
Soit u un endomorphisme nilpotent. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{m_\nu}(0) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

où $m_1, \ldots, m_\nu \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $m_1 + \cdots + m_\nu = n = \dim(E)$

***Théorème* 3.4.1. Réduction de Jordan**
Soit u un endomorphisme sur un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et tel

que son polynôme caractéristique χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$
$\chi_u = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$
Alors il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{m_\nu}(\lambda_\nu) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

où $\nu \in \mathbb{N}^*, m_1 + \cdots + m_\nu = n = \dim(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de u.

Preuve
On note $n = \dim(E)$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres (distinctes) de u. Il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\chi_u(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$
D'après le lemme des noyaux, on a $E = \bigoplus_{j=1}^k \ker\left((u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)^{\alpha_k}\right)$
Pour $j \in \{1, ..., k\}$ on note $F_j = \ker\left((u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)^{\alpha_k}\right)$. Alors F_j est stable par u
et $u|_{F_j} = \lambda_j \operatorname{Id}_{F_j} + F_j$ oú $F_j = (u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)|_{F_j}$ est un endomorphisme nilpotent.
D'après la proposition précédente, il existe une base β_j de F_j dans la matrice de N_j est diagonale par blocs avec des blocs de la forme $J(0)$, donc la matrice de $u|_{F_j}$ est formée de blocs $J(\lambda_j)$. En concaténant les bases ainsi obtenues pour chaque sous-espace caractéristique, on obtient une base de E dans laquelle la matrice de u a bien la forme voulue.

L'algorithme de calcul de la réduction de Jordan :

L'algorithme de calcul de la réduction de Jordan est le suivant :
1. Factoriser le polynôme caractéristique
2. Trouver une base de chaque sous-espace propre
3. Compléter cette base s'il y a lieu

Si la multiplicité de la valeur propre λ est m alors qu'il n'y a que $l < m$ vecteurs propres indépendants il faut trouver encore $m - l$ vecteurs. Pour chaque vecteur propre v déjà trouvé, nous résolvons le système $(A - \lambda I)w = v$, où v est un vecteur propre déjà écrit. Nous vérifions que la solution w est linéairement indépendante des vecteurs déjà écrits. S'il manque encore des vecteurs, nous résolvons le système $(A - \lambda I)u = w$

Exemple 1 :
Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrons que A n'est pas diagonalisable.
Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&=(1-\lambda)(2-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)+1) \\
&=(1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda-2)^2 \\
&=(1-\lambda)(2-\lambda)^3
\end{aligned}
$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 (simple) et 2 (triple).
Calculons les sous-espaces propres correspondants.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$
\begin{aligned}
X \in E_1(f) \Longleftrightarrow AX = X \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} x = x \\ -x+3y-z+t = y \\ -x+y+z = z \\ 2t = t \end{cases} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} y = x \\ y = x \\ z = x \\ t = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc on a

$$
E_1(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = Vect(u)
$$

$$
\begin{aligned}
X \in E_2(f) \Longleftrightarrow AX = 2X \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 2t \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} x = 2x \\ -x+3y-z+t = 2y \\ -x+y+z = 2z \\ 2t = 2t \end{cases} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = y \\ t = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc on a

$$E_2(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

On remarque donc en particulier que dim $(E_2(f)) \neq 3$: f n'est donc pas diagonalisable.

2. Déterminons une réduite de Jordan en précisant la base et la matrice de passage.

$\lambda = 1$ étant une valeur propre simple, le bloc de Jordan est entièrement déterminé.
Construisons donc la suite de noyaux des puissances de $M = A - 2I_4$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad \dim(\mathrm{Ker}(M)) = 1$$

On peut déjà dire qu'il y aura 1 unique bloc de Jordan associé à la valeur propre 2.
et

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que $\ker(M^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$: de dimension 2.

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $\ker(M^3)$=Vect$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$: de dimension 3

Cela signifie que la taille du bloc de Jordan (unique) associé à la valeur propre 2 est de taille 3.

On prend $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M^3) \setminus \mathrm{Ker}(M^2)$

Puis, $v_2 = Mv_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors dans la base (u, v_3, v_2, v_1), la réduite de Jordan de A est de la forme

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

Soit la matrice $$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

• Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -1-X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-X & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -X & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3-X \end{vmatrix} = (X+1)^2(X-1)(X-2)$$

• Les trois sous-espaces caractéristiques sont :

$$\ker(A - I_4) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ engendrée par } f_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - 2I_4) = \ker \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ engendrée par } f_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A + I_4) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ est la droite engendrée par } f_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

une base de Jordan pour A est alors (f_1, f_2, f_3, f_4), où f_4 est n'importe quel antécédent de f_3 par $A + I_4$, par exemple $f_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ainsi

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ est la réduite de Jordan de } A$$

4

Application dans des problèmes mathématiques

4.1 Calcul de puissance d'une matrice

Exemple par la méthode de diagonalisation :

Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. Ona $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Solution :

1. Les valeurs propres de M sont les réels λ tels que $\det(M - \lambda Id) = 0$

$$\begin{aligned}\det(M - \lambda Id) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 \\ &= \left(\lambda^2 - 4\right)\left(\lambda^2 - 9\right) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda + 3)\end{aligned}$$

Les valeurs propres de M sont donc $2, -2, 3$ et -3. Notons E_2, E_{-2}, E_3 et E_{-3} les sous-espaces propres associés.

$$\begin{aligned}E_2 &= \left\{X \in \mathbb{R}^4, MX = 2X\right\} \\ &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, 2x - z = 2y, 7y + 6t = 2z, 3z = 2t\right\}\end{aligned}$$

or $\begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 2y \\ 7y + 6t = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 14x + 9z = 2z \\ 14x + 9z = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \\ z = -3x \end{cases}$

ainsi, E_2 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = (1, 2, -2, -3)$

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \left\{X \in \mathbb{R}^4, MX = -2X\right\} \\ &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = -2x, 2x - z = -2y, 7y + 6t = -2z, 3z = -2t\right\} \end{aligned}$$

or $\begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = -2y \\ 7y + 6t = -2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ -14x - 9z = 2z \\ -14x - 9z = 2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = -2x \\ t = 3x \end{cases}$

ainsi, E_{-2} est engendrée par le vecteur $u_2 = (1, -2, -2, 3)$

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{X \in \mathbb{R}^4, MX = 3X\right\} \\ &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = 3x, 2x - z = 3y, 7y + 6t = 3z, 3z = 3t\right\} \end{aligned}$$

or $\begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 3y \\ 7y + 6t = 3z \\ 3z = 3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ 21x + 6t = 3z \\ 21x + 6t = 3z \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ z = -7x \\ t = -7x \end{cases}$

ainsi, E_3 est engendrée par le vecteur $u_3 = (1, 3, -7, -7)$

$$\begin{aligned} E_{-3} &= \left\{X \in \mathbb{R}^4, MX = -3X\right\} \\ &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = -3x, 2x - z = -3y, 7y + 6t = -3z, 3z = -3t\right\} \end{aligned}$$

or $\begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = -3y \\ 7y + 6t = -3z \\ 3z = -3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = 9x \\ -21x - 6z = -3z \\ z = -t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ z = -7x \\ t = 7x \end{cases}$

ainsi, E_{-3} est engendrée par le vecteur $u_4 = (1, -3, -7, 7)$

2.Le polynôme caractéristique de la matrice M est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension de l'espace propre associé, donc M est diagonalisable.

3. Une base de vecteurs propres a été déterminée dans les questions précédentes.C'est la base (u_1, u_2, u_3, u_4) et la matrice de passage est la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.
On a

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix} \text{ donc } D^k=\begin{pmatrix}2^k&0&0&0\\0&(-2)^k&0&0\\0&0&3^k&0\\0&0&0&(-3)^k\end{pmatrix}$$

Mais, $M=PDP^{-1}$, d'où, pour $k\in\mathbb{N}, M^k=\left(PDP^{-1}\right)^k=PD^kP^{-1}$

Pour calculer M^k, il faut donc déterminer la matrice P^{-1} qui exprime les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ dans la base (u_1,u_2,u_3,u_4)
Après calcul,

$$P^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}7&7&1&3\\7&-7&1&-3\\-2&-3&-1&-2\\-2&3&-1&2\end{pmatrix}$$

On obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}M^k&=PD^kP^{-1}\\&=\tfrac{1}{10}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&-2&3&-3\\-2&-2&-7&-7\\-3&3&7&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&0&0&0\\0&(-2)^k&0&0\\0&0&3^k&0\\0&0&0&(-3)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&7&1&3\\7&-7&1&-3\\-2&-3&-1&-2\\-2&3&-1&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemple en utilisant le théoème de Cayley-Hamilton :

Soit

$$A=\begin{pmatrix}0&3&2\\-2&5&2\\2&-3&0\end{pmatrix}$$

Un polynôme annulateur de A est χ_A d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

$$\chi_A=\begin{vmatrix}X&-3&-2\\2&X-5&-2\\-2&3&X\end{vmatrix}=X\left(X^2-5X+6\right)-2(-3X+6)-2(2X-4)$$

$$=X(X-2)(X-3)+6(X-2)-4(X-2)=(X-2)(X(X-3)+2)=(X-1)(X-2)^2$$

Soit n $\in\mathbb{N}$. La division euclidienne de X^{n} par χ_{A} s'écrit $X^n=Q\times\chi_A+a_nX^2+b_nX+c_n(*)$ où Q est un polynôme et a_n,b_n et c_n sont trois réels. En évaluant en A et en tentant compte de $\chi_(A)=0$, on obtient

$$A^n=a_nA^2+b_nA+c_nI_3$$

Déterminons a_n,b_n et c_n. On évalue les deux membres de $(*)$ en 1 et 2 (en tenant compte de $\chi_A(1)=\chi_A(2)=0$) puis on dérive les deux membres de $(*)$ et on évalue de nouveau en 2 (en se rappelant que $\chi_{\mathrm{A}}(2)=\chi'_A(2)=0$ puisque 2 est une racine double de χ_A). On obtient :

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 4a_n + b_n = n2^{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_n = -4a_n + n2^{n-1} \\ a_n + (-4a_n + n2^{n-1}) + c_n = 1 \\ 4a_n + 2\left(-4a_n + n2^{n-1}\right) + c_n = 2^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_n = -4a_n + n2^{n-1} \\ -3a_n + c_n = 1 - \frac{n}{2}2^n \\ -4a_n + c_n = (1-n)2^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)2^n \\ b_n = -4\left(1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)2^n\right) + \frac{n}{2}2^n \\ c_n = 3\left(1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)2^n\right) + 1 - \frac{n}{2}2^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)2^n \\ b_n = -4 + \left(-\frac{3n}{2} + 4\right)2^n \\ c_n = 4 + (n-3)2^n \end{cases}$$

De plus, $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 \\ -6 & 13 & 6 \\ 6 & -9 & -2 \end{pmatrix}$ et donc

$$A^n = \left(1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)2^n\right)\begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 \\ -6 & 13 & 6 \\ 6 & -9 & -2 \end{pmatrix} + \left(-4 + \left(-\frac{3n}{2} + 4\right)2^n\right)\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (4 + (n-3)2^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 2^n & -3 + 3 \times 2^n & -2 + 2 \times 2^n \\ 2 - 2 \times 2^n & -3 + 4 \times 2^n & -2 + 2 \times 2^n \\ -2 + 2 \times 2^n & 3 - 3 \times 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

4.2 Application à l'exponentiel d'une matrice

Exemple par le théorème de Cayley-Hamilton :

Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Le polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 2 \\ 1 & -X & 1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix} = (3-X)\left(X^2 - 1\right) - (-2X-2) - (2X+2) = -(X+1)(X-1)(X-3)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = Q_n \times \chi_A + a_nX^2 + b_nX + c_n$ où $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$. En évaluant les deux membres de cette égalité en -1, 1 et 3 on obtient

$$\begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right) \\ a_n + c_n = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) \\ 8a_n + \frac{3}{2}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) = 3^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{8}\left(3^n - 2 + (-1)^n\right) \\ b_n = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right) \\ c_n = \frac{1}{8}\left(-3^n + 6 + 3(-1)^n\right) \end{cases}$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON fournit alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{8}\left(\left(3^n - 2 + (-1)^n\right)A^2 + 4\left(1-(-1)^n\right)A + \left(-3^n + 6 + 3(-1)^n\right)I_3\right)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc, pour tout réel t
$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \frac{1}{8}\left(\left(3^n - 2 + (-1)^n\right)A^2 + 4\left(1-(-1)^n\right)A + \left(-3^n + 6 + 3(-1)^n\right)I_3\right)$

$$= \frac{e^{3t}-2e^t+e^{-t}}{8}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \frac{4\left(e^t-e^{-t}\right)}{8}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{-e^{3t}+6e^t+3e^{-t}}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8e^{3t} & 8e^{3t}-8e^t & 8e^{3t}-8e^t \\ 2e^{3t}-2e^{-t} & 2e^{3t}+6e^{-t} & 2e^{3t}-2e^{-t} \\ -2e^{3t}+2e^{-t} & -2e^{3t}+8e^t-6e^{-t} & 2e^{3t}+8e^t+2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t}-4e^t & 4e^{3t}-4e^t \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+3e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ -e^{3t}+e^{-t} & -e^{3t}+4e^t-3e^{-t} & e^{3t}+4e^t+e^{-t} \end{pmatrix}$$

4.3 Application aux suites récurrentes

Exemple par la diagonalisation :

On considère les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

pour $n \geq 0$.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4u_n - 6v_n \\ 3u_n + 5v_n \\ 3u_n + 6v_n + 5 \end{pmatrix}$

Donc

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} X_n$$

Alors ,on a $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Par récurrence, on a $X_n = A^n X_0$

On calcule le polynôme caractéristique de A . On trouve

$$\chi_A(X) = (X+1)(X-2)(X-5)$$

Alors A a trois valeurs propres, $-1, 2, 5$:
Cherchons les sous-espaces propres associés.
Pour -1, on a, pour $X = (x, y, z)$

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \\ 3x + 6y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Le vecteur $(2, -1, 0)$ est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1. De même, avec 2, et on trouve le vecteur propre $(1, -1, 1)$ et pour 5, et on trouve le vecteur propre $(0, 0, 1)$. Ainsi, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

On a $PDP^{-1} = A$. Le calcul de P^{-1} donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui entraîne par récurrence $A^n = PD^nP^{-1}$

D^n se calcule facilement en mettant les coefficients de la diagonale à la puissance n.
En effectuant les deux produits de matrice, on trouve :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2.5^n & 5^n \end{pmatrix}$$

Alors on déduit que

$$\begin{cases} u_n = (2(-1)^n - 2^n)\, u_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})\, v_0 \\ v_n = ((-1)^{n+1} + 2^n)\, u_0 + ((-1)^{n+1} + 2^{n+1})\, v_0 \\ w_n = (-2^n + 5^n)\, u_0 + (-2^{n+1} + 2.5^n)\, v_0 + 5^n w_0 \end{cases}$$

4.4 Systèmes différentiels

Exemple par la méthode de diagonalisation :

Soit le système différentiel réel suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{array}\right.$$

où $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont deux fonctions inconnues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ avec $x_0 = x(0)$ et $y_0 = y(0)$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et cherchons à diagonaliser A.
Calculons donc son polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Comme ce polynôme caractéristique admet deux racines distinctes simples
Recherchons le sous espace propre associé à $\lambda_1 = 2$. il faut résoudre

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 3 \\ 1 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'ou $x = 3y$ et donc $(x, y) = y(3, 1)$ et donc $\{(3, 1)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(A - 2I)$

Recherchons le sous espace propre associé à $\lambda_1 = -2$. Il faut résoudre

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 3 \\ 1 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $x + y = 0$ et donc $(x, y) = x(1, -1)$ et donc $\{(1, -1)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(A + 2I)$

Posons $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
En termes de système différentiel :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = DP^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Posons donc $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X'(t) = 2X(t) \\ Y'(t) = -2Y(t) \end{array}\right.$$

Ainsi la diagonalisation a découplé les nouvelles fonctions inconnues. II existe deux constantes réelles k_1 et k telles que $X(t) = k_1 \mathrm{e}^{2t}$ et $Y(t) = k_2 \mathrm{e}^{-2t}$. En revenant à la définition de X et de Y

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^{2t} \\ k_2 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Pour $t = 0$ il reste

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

La solution du système est

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3x_0+3y_0}{4} \mathrm{e}^{2t} + \frac{x_0-3y_0}{4} \mathrm{e}^{-2t} \\ y(t) = \frac{x_0+y_0}{4} \mathrm{e}^{2t} - \frac{x_0-3y_0}{4} \mathrm{e}^{-2t} \end{cases}$$

où encore

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t} & \frac{3}{4}\left(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) \\ \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) & \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Exemple par la décomposition de Dunford :

Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

• Donnons les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette décomposition de $A = D + N$ est sa décomposition de Dunford si et seulement si N est nilpotente, D est diagonale et si $ND = DN$.
Vérifions que N est nilpotente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi la matrice N est bien nilpotente quelques soient les valeurs de a et b .
Déterminons pour quelles valeurs de a et b les matrices commutent.

$$D \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$N.D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $ND = DN$ si, et seulement si, $b = 2b$, c'est-à-dire si $b = 0$. Le paramètre a peut prendre n'importe quelle valeur.

• Soit le système différentiel suivant :

$$\mathscr{E} : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t) \end{cases}$$

Soit $X = (x_1, x_2, x_3)$, donc $X' = (x_1', x_2', x_3')$, d'où le système $\mathscr{E}$ s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La solution générale du système s'écrit $X(t) = \exp(tA)V$ où $V = (a, b, c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$
.

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp(tD) \cdot \exp(tN) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot (I + tN) \quad \text{car } N^2 = O \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solution générale du système $\mathscr{E}$ s'écrit donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{cases} x_1(t) = (a + 2bt)e^t + 2ce^{2t} \\ x_2(t) = be^t + ce^{2t} \\ x_3(t) = ce^{2t} \end{cases}$$

Conclusion

Dans le cadre de ce projet, le travail qu'on a effectué consistait à l'étude des différentes réductions d'endomorphismes ainsi que ses différentes applications allant de la diagonalisation jusqu'à la réduction de Jordan en passant par la trigonalisation et la décomposition de Dunford.Et pour compléter le travail, on a fait des applications dans des problèmes mathématiques. La réduction des endomorphismes peut aussi être appliquer dans plusieurs domaines, autres que les mathématiques, par exemple le domaine informatique.

Bibliographie

[1] Jean-Pierre RAMIS, André WARUSFEL, Xavier BUFF • Emmanuel HALBERSTADT, François MOULIN • Monique RAMIS, Jacques SAULOY : ►*Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 2 : Cours complet, exemples et exercices corrigés*

[2] http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00055.pdf

[3] https://www.ilemaths.net/maths_p-reduction-jordan.php.

[4] http://www.bibmath.net

[5] http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00136.pdf

[6] http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00058.pdf

[7] https://www.ilemaths.net/maths_p-reduction-jordan.php

[8] https://books.google.co.ma/books?id=Ihh2u0XnRQcC&pg=PA503&lpg=PA503&dq=matrice+sym\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19e\egroup\spacefactor\accent@spacefactortrique+diagonalisable+d\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19e\egroup\spacefactor\accent@spacefactormonstration+analyse&source=bl&ots=dUjTpJKfbI&sig=ACfU3U0OXxjZni_lMgEAGp39kEFVuKx_7g&hl=fr&sa=X&ved=2ahUKEwiQx5rnlNXiAhUPHxoKHb5aCmEQ6AEwCHoECAoQAQ#v=onepage&q=matrice

[9] https://www.maths-france.fr/MathSpe/Cours/02-reduction.pdf

[10] https://perso.univ-rennes2.fr/system/files/users/rouviere_l/cours_algebre.pdf

[11] http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/lemme_noyaux.pdf