

## Table des matières

|  |    |
|--|----|
| CHAPITRE 1.....  | 13 |
| INTRODUCTION .....   | 13 |
| 1. 1 Introduction .....  | 13 |
| 1. 2 Problématique.....  | 13 |
| 1. 3 Objectifs.....  | 14 |
| 1. 4 Méthodologie.....   | 14 |
| CHAPITRE 2.....  | 17 |
| REVUES DE LITTÉRATURE .....  | 17 |
| 2.1 Introduction .....   | 17 |
| 2.2 Sollicitations.....  | 17 |
| 2.3 Contraintes et vibrations .....  | 19 |
| 2.4 Calcul des charges et conception des autocars.....                         | 21 |
| 2.5 Utilisation de l'aluminium .....   | 25 |
| 2.6 Conclusion.....  | 29 |
| CHAPITRE 3.....  | 30 |
| MODÈLES D'AUTOBUS ET CHOIX DE CHÂSSIS .....                                    | 30 |
| 3.1 Modèle d'autobus .....   | 30 |
| 3.2 Modèle du châssis .....  | 34 |
| 3.3 Modèle du châssis d'autocar choisi pour l'étude .....                      | 37 |
| 3.4 Conclusion .....   | 43 |
| CHAPITRE 4.....  | 44 |
| DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE DYNAMIQUE DE L'AUTOCAR.....                            | 44 |
| 4.1 Introduction.....  | 44 |
| 4.2 Profil de la route .....   | 46 |
| 4.3 Modèle à deux dimensions simplifié.....                                    | 48 |
| 4.4 Modèle à deux dimensions .....   | 52 |
| 4.5 Modèle à trois dimensions .....  | 61 |
| 4.6 Conclusion .....   | 70 |
| CHAPITRE 5.....  | 71 |
| ÉTUDE DES MODES VIBRATOIRES ET ANALYSE DES CONTRAINTES POUR UN CHÂSSIS 1D..... | 71 |
| 5.1 Introduction .....   | 71 |
| 5.2 Étude vibratoire de la plaque étalon .....                                 | 72 |
| 5.3 Analyse des contraintes.....   | 76 |
| 5.4 Modélisation du châssis de l'autocar .....                                 | 80 |

|   |  |     |
|---|--|-----|
| 5.5   | Calcul analytique des modes vibratoires..... | 81  |
| 5.6   | Calcul numérique des modes vibratoires ..... | 102 |
| 5.7   | Conclusion.....                              | 111 |
| CHAPITRE 6.....   |  | 112 |
| ÉTUDE DES MODES VIBRATOIRES ET ANALYSE DES CONTRAINTES POUR UN<br>CHÂSSIS 3-D ..... |  | 112 |
| 6.1.  | Introduction.....                            | 112 |
| 6.2.  | Analyse vibratoire .....                     | 112 |
| 6.3.  | Position des points nodaux.....              | 118 |
| 6.4.  | Calcul des contraintes.....                  | 119 |
| 6.5.  | Conclusion .....                             | 125 |
| CHAPITRE 7.....   |  | 126 |
| CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS .....  |  | 126 |
| RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES ET ANNEXES .....  |  | 129 |

## Liste des figures

|   |    |
|---|----|
| Figure 1.1 : Évolution de la consommation de l'aluminium par secteur [2].                     | 13 |
| Figure 1.2 : Modèle du châssis de l'autocar [4].  | 13 |
| Figure 1.3 : Organigramme de la méthodologie.   | 16 |
| Figure 2.1 : Modèle du châssis du camion étudié [5].  | 18 |
| Figure 2.2 : Différentes charges agissant sur un châssis [5].                                 | 18 |
| Figure 2.3 : Distribution des contraintes et localisation de la contrainte maximale [10].     | 20 |
| Figure 2.4 : Localisation des rosettes de déformation du châssis [13].                        | 21 |
| Figure 2.5 : Torsion et flexion du châssis [12].  | 21 |
| Figure 2.6 : Longueur admise des autocars [14].   | 22 |
| Figure 2.7 : Longueur admise pour les autocars articulés [14].                                | 23 |
| Figure 2.8 : Hauteur maximale [14].   | 23 |
| Figure 2.9 : Largeur maximale [14].   | 23 |
| Figure 2.10 : Essieu simple [16].   | 24 |
| Figure 2.11 : Essieu tandem [16].   | 25 |
| Figure 2.12 : Essieu triple [16].   | 25 |
| Figure 2.13 : Carrosserie de l'autocar Pointer 2 de la compagnie Plaxton Coach & Bus [18].    | 26 |
| Figure 2.14 : Modèle d'autocar de série H de Prevost [19].                                    | 26 |
| Figure 2.15 : Modèles aux E.F du toit, de la structure treillis latérale et du plancher [19]. | 27 |
| Figure 2.16 : Nouveau Yutong Green Bus en cours de construction en Chine [21].                | 28 |
| Figure 2.17 : Modèle de châssis de camion en aluminium [22].                                  | 28 |
| Figure 2.18 : Semi-remorque en aluminium [24].  | 29 |
| Figure 3.1 : Modèle d'autobus urbain [25].  | 30 |
| Figure 3.2 : Modèle de trolleybus   | 30 |
| Figure 3.3 : Modèle de minibus [25].  | 31 |
| Figure 3.4 : Modèle d'autobus suburbain [25].   | 31 |
| Figure 3.5 : Modèle d'autocar [25].   | 31 |
| Figure 3.6 : Modèle d'autobus interurbain (autocar) [26].                                     | 32 |
| Figure 3.7 : Châssis (TB 2175) [30].  | 35 |
| Figure 3.8 : Châssis (SBR 4000+) [31].  | 35 |
| Figure 3.9 : Éléments principaux constituant le cadre du châssis [32].                        | 35 |
| Figure 3.10 : Châssis semi-monocoque d'autocar.   | 36 |
| Figure 3.11 : Châssis à treillis d'autocar [33].  | 37 |
| Figure 3.12 : Modèle du châssis de l'autocar [4].   | 38 |
| Figure 3.13 : Position des essieux du châssis de l'autocar.                                   | 38 |
| Figure 3.14 : Dimensions du châssis.  | 39 |
| Figure 3.15 : Catégorie du modèle du châssis d'autocar.                                       | 40 |

|  |    |
|--|----|
| Figure 3.16 : Schéma représentatif du chargement réel d'un autocar [35]..... | 43 |
| Figure 4.1 : Mouvement du roulis.....  | 45 |
| Figure 4.2 : Mouvement du tangage.....                                       | 45 |
| Figure 4.3 : Mouvement du lacet. ....  | 45 |
| Figure 4.4 : Profil de la route en fonction du temps.....                    | 47 |
| Figure 4.5 : Densité spectrale de la route (PSD).....                        | 47 |
| Figure 4.6 : Représentation dynamique du châssis. ....                       | 48 |
| Figure 4.7 : Schéma 2-D simplifié de l'autocar. ....                         | 48 |
| Figure 4.8 : Diagramme des corps libres.....                                 | 49 |
| Figure 4.9 : Position des axes d'inertie de l'autocar étudié.....            | 50 |
| Figure 4.10 : Amplitude de l'autocar (Position verticale).....               | 52 |
| Figure 4.11 : Amplitude de l'autocar (Tangage).....                          | 52 |
| Figure 4.12 : Déplacement vertical de l'autocar.....                         | 52 |
| Figure 4.13 : Déplacement angulaire de l'autocar (Tangage). ....             | 52 |
| Figure 4.14 : Schéma 2-D de l'autocar.....                                   | 53 |
| Figure 4.15 : Modèle 2-D, ensemble roue 1. ....                              | 55 |
| Figure 4.16 : Modèle 2-D, ensemble roue 2. ....                              | 55 |
| Figure 4.17 : Modèle 2-D, ensemble roue 3. ....                              | 56 |
| Figure 4.18 : Modèle 2-D de l'autocar. ....                                  | 57 |
| Figure 4.19 : Amplitude de l'essieu avant (Roue 1). ....                     | 59 |
| Figure 4.20 : Amplitude de l'autocar (Position verticale).....               | 59 |
| Figure 4.21 : Amplitude de l'autocar (Position angulaire).....               | 59 |
| Figure 4.22 : Déplacement vertical de l'ensemble .....                       | 60 |
| Figure 4.23 : Déplacement vertical de l'autocar.....                         | 60 |
| Figure 4.24 : Position angulaire de l'autocar (Tangage).....                 | 60 |
| Figure 4.25 : Modèle 3-D de l'autocar. ....                                  | 61 |
| Figure 4.26 : Modèle 3-D, roue 1.....  | 63 |
| Figure 4.27 : Modèle 3-D, châssis au complet.....                            | 64 |
| Figure 4.28 : Amplitude de l'ensemble roue 1. ....                           | 67 |
| Figure 4.29 : Amplitude de l'autocar (Position verticale).....               | 67 |
| Figure 4.30 : Amplitude de l'autocar (Tangage).....                          | 67 |
| Figure 4.31 : Amplitude de l'autocar (Roulis).....                           | 67 |
| Figure 4.32 : Déplacement de l'essieu avant. ....                            | 68 |
| Figure 4.33 : Déplacement vertical de l'autocar.....                         | 68 |
| Figure 4.34 : Position angulaire de l'autocar (Tangage).....                 | 68 |
| Figure 4.35 : Position angulaire de l'autocar.....                           | 68 |
| Figure 4.36 : Localisation des différentes forces d'excitations. ....        | 69 |
| Figure 5.1 : Expérience du marteau d'impact.....                             | 73 |
| Figure 5.2 : Expérience du pot vibrant. ....                                 | 73 |
| Figure 5.3 : Plaque d'essais encastree-libre.....                            | 74 |
| Figure 5.4 : Dimensions de la plaque utilisée.....                           | 74 |
| Figure 5.5 : Modes de flexion et de torsion de la plaque en aluminium. ....  | 76 |



|   |     |
|---|-----|
| Figure 5.6 : Plaque étalon soumise à une flexion simple. ....                         | 78  |
| Figure 5.7 : Modélisation de la plaque étalon soumise à la flexion simple.....        | 79  |
| Figure 5.8 : Structure simplifiée du châssis.....                                     | 80  |
| Figure 5.9 : Poutre principale du châssis.....  | 80  |
| Figure 5.10 : Équilibre dynamique d'un élément de poutre. ....                        | 82  |
| Figure 5.11 : Poutre simplement appuyée des deux côtés. ....                          | 83  |
| Figure 5.12 : Poutre encastree des deux côtés. ....                                   | 84  |
| Figure 5.13 : Poutre appuyée sur trois appuis et libre des deux côtés.....            | 86  |
| Figure 5.14 : Dimensions de la poutre principale du châssis.....                      | 92  |
| Figure 5.15 : Dimensions de la poutre équivalente.....                                | 93  |
| Figure 5.16 : Dimensions de la poutre standard.....                                   | 94  |
| Figure 5.17 : Section de la poutre en C. ....   | 95  |
| Figure 5.18 : Chargement de la poutre agissant sur l'axe GG'.....                     | 96  |
| Figure 5.19 : Charge et moment agissants sur le moment de torsion.....                | 96  |
| Figure 5.20 : Poutre simplement appuyée des deux côtés. ....                          | 98  |
| Figure 5.21 : Poutre continue sur trois appuis simples.....                           | 100 |
| Figure 5.22 : Poutre à parois minces simplement appuyée des deux côtés. ....          | 103 |
| Figure 5.23 : Modes de flexion de la poutre simplement appuyée des deux côtés. ....   | 103 |
| Figure 5.24 : Modes de torsion de la poutre simplement appuyée des deux côtés. ....   | 104 |
| Figure 5.25 : Poutre encastree des deux côtés. ....                                   | 105 |
| Figure 5.26 : Modes de flexion de la poutre encastree des deux côtés. ....            | 105 |
| Figure 5.27 : Modes de torsion de la poutre encastree des deux côtés.....             | 106 |
| Figure 5.28 : Poutre continue sur trois appuis simples.....                           | 107 |
| Figure 5.29 : Modes de flexion de la poutre continue sur trois appuis-cas 1. ....     | 107 |
| Figure 5.30 : Modes de flexion de la poutre continue sur trois appuis-cas 2. ....     | 108 |
| Figure 5.31 : Modes de torsion de la poutre simplement appuyée sur trois appuis. .... | 108 |
| Figure 5.32 : Modes de flexion de la poutre équivalente. ....                         | 109 |
| Figure 5.33 : Modes de torsion de la poutre équivalente.....                          | 109 |
| Figure 5.34 : Modes de flexion de la poutre standard. ....                            | 110 |
| Figure 5.35 : Modes de torsion de la poutre standard. ....                            | 110 |
|   |     |
| Figure 6.1 : Conditions aux limites de flexion du châssis. ....                       | 113 |
| Figure 6.2 : Modes de flexion du châssis. ....  | 113 |
| Figure 6.3 : Modes de torsion du châssis.....   | 114 |
| Figure 6.4 : Modes de flexion du châssis en acier. ....                               | 114 |
| Figure 6.5 : Modes de torsion du châssis en acier.....                                | 115 |
| Figure 6.6 : Vibration libre du châssis en aluminium. ....                            | 117 |
| Figure 6.7 : Position des points nodaux du châssis du premier mode de flexion. ....   | 118 |
| Figure 6.8 : Position des points nodaux du châssis du deuxième mode de flexion. ....  | 118 |
| Figure 6.9 : Conditions d'appui et chargement statique du châssis. ....               | 119 |
| Figure 6.10 : Distribution des contraintes du châssis en aluminium.....               | 120 |
| Figure 6.11 : Position de la contrainte maximale.....                                 | 120 |
| Figure 6.12 : Distribution des contraintes du châssis en acier.....                   | 121 |
| Figure 6.13 : Position de la contrainte maximale.....                                 | 121 |

|  |     |
|--|-----|
| Figure 6.14 : Déplacement maximal du châssis sous chargement statique. ....              | 122 |
| Figure 6.15 : Distribution du coefficient de sécurité calculé. ....                      | 122 |
| Figure 6.16 : Différents cas de chargement dynamiques du châssis. ....                   | 123 |
| Figure 6.17 : Localisation de la contrainte maximale du premier cas de chargement. ....  | 124 |
| Figure 6.18 : Localisation de la contrainte maximale du deuxième cas de chargement. .... | 124 |

## Liste des tableaux

|   |     |
|---|-----|
| Tableau 3.1 : Limites dimensionnelles des autocars et exigences relatives aux essieux [26]. | 32  |
| Tableau 3.2 : Limites des masses admissibles [26].  | 33  |
| Tableau 3.3 : Éléments de l'autocar avec châssis semi-monocoque.                            | 36  |
| Tableau 3.4 : Propriétés de l'aluminium 6061-T6.  | 39  |
| Tableau 4.1 : Paramètres du modèle 2-D simplifié.   | 51  |
| Tableau 4.2 : Paramètres du modèle 2-D.   | 54  |
| Tableau 4.3 : Paramètres du modèle 3-D.   | 62  |
| Tableau 4.4 : Réponses aux forces d'excitations pour un échelon de 2.5 cm.                  | 69  |
| Tableau 4.5 : Réponses aux forces d'excitations pour un échelon de 5 cm.                    | 70  |
| Tableau 5.1 : Caractéristiques mécaniques des matériaux des deux plaques d'essais.          | 74  |
| Tableau 5.2 : Fréquences de flexion des deux plaques d'essais.                              | 75  |
| Tableau 5.3 : Fréquences de torsion des deux plaques d'essais.                              | 75  |
| Tableau 5.4 : Comparaison des résultats de contraintes analytiques et numériques.           | 80  |
| Tableau 5.5 : Comparaison des caractéristiques géométriques.                                | 81  |
| Tableau 5.6 : Fréquences de flexion de la poutre simplement appuyée des deux côtés.         | 84  |
| Tableau 5.7 : Fréquences de flexion de la poutre encastrée des deux côtés.                  | 85  |
| Tableau 5.8 : Fréquences du cas 1 d'une poutre simplement appuyée sur trois appuis.         | 93  |
| Tableau 5.9 : Fréquences du cas 2 d'une poutre simplement appuyée sur trois appuis.         | 93  |
| Tableau 5.10 : Fréquences de flexion-poutre équivalente-cas 1.                              | 93  |
| Tableau 5.11 : Fréquences de flexion-poutre équivalente-cas 2.                              | 93  |
| Tableau 5.12 : Fréquences de flexion-poutre standard-cas 1.                                 | 94  |
| Tableau 5.13 : Fréquences de flexion-poutre standard-cas 2.                                 | 94  |
| Tableau 5.14 : Fréquences de torsion de la poutre appuyée sur deux appuis simples.          | 100 |
| Tableau 5.15 : Fréquences de torsion de la poutre continue sur trois appuis simples.        | 102 |
| Tableau 5.16 : Fréquences de flexion de la poutre simplement appuyée des deux côtés.        | 103 |
| Tableau 5.17 : Fréquences de torsion d'une poutre simplement appuyée des deux côtés.        | 104 |
| Tableau 5.18 : Fréquences de flexion de la poutre encastrée des deux côtés.                 | 105 |
| Tableau 5.19 : Fréquences de torsion de la poutre encastrée des deux côtés.                 | 106 |
| Tableau 5.20 : Fréquences de flexion de la poutre continue sur trois appuis-cas 1.          | 107 |
| Tableau 5.21 : Fréquences de flexion de la poutre continue sur trois appuis-cas 2.          | 108 |
| Tableau 5.22 : Fréquences de torsion de la poutre simplement appuyée sur trois appuis.      | 108 |
| Tableau 5.23 : Fréquences de flexion de la poutre équivalente.                              | 109 |
| Tableau 5.24 : Fréquences de torsion de la poutre équivalente.                              | 109 |
| Tableau 5.25 : Fréquences de flexion de la poutre standard.                                 | 110 |
| Tableau 5.26 : Fréquences de torsion de la poutre standard.                                 | 110 |

|   |     |
|---|-----|
| Tableau 6.1 : Comparaison des fréquences de flexion.....                                      | 113 |
| Tableau 6.2 : Fréquences de torsion du châssis. ....  | 114 |
| Tableau 6.3 : Fréquences de flexion du châssis en acier.....                                  | 114 |
| Tableau 6.4 : Fréquences de torsion du châssis en acier. ....                                 | 115 |
| Tableau 6.5 : Modes de vibrations libres du châssis.....                                      | 116 |
| Tableau 6.6 : Comparaison des fréquences de flexion.....                                      | 116 |
| Tableau 6.7 : Caractéristiques mécaniques des trois châssis et résultats des simulations..... | 121 |

## RÉSUMÉ

Selon des recherches récentes, certains autocars remplis de passagers dépassaient les normes de chargement par essieux ce qui cause l'endommagement des routes. Manifestement, la réduction du poids des autocars en utilisant des matériaux légers tels que l'aluminium est nécessaire. Certes, une conception en aluminium apporte un gain de poids considérable, une préservation de l'environnement tout en augmentant la résistance à la corrosion et aux charges concentrées. Elle nous procure aussi un coût d'entretien réduit et une consommation de carburant des plus moindres. Dans ce projet, la partie châssis de l'autocar a été étudiée.

Pour la réalisation de cette étude, un modèle analytique a été développé afin d'analyser la partie vibratoire et dynamique. Pour le modèle vibratoire, le châssis a été simplifié en une poutre simple à parois minces dont le poids, le volume et l'inertie sont très proches de ceux du châssis de référence. Dans la partie dynamique de ce projet, les forces qui agissent sur les points d'appui du châssis de l'autocar ont été calculées. Les résultats des modes vibratoires obtenus pour les châssis conçus en aluminium et en acier de même dimension sont similaires. Par contre, les forces et les contraintes appliquées sur les différents éléments composant l'autocar sont élevées. D'autre part, la conception d'un châssis léger et résistant augmentera certainement les performances dynamiques d'un autocar (accélération, freinage, etc.). La conception préliminaire démontre que le poids global du châssis conçu a diminué de plus de 30 % par rapport à un châssis en acier standard. Ce résultat peut encore être optimisé en utilisant une conception plus améliorée.

## REMERCIEMENTS

Je dédie cet ouvrage à mes chers parents et à mes amis qui sont la source de ma détermination et à qui je dois d'être ce que je suis.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma sincère gratitude à mon directeur de recherche, monsieur Mohamed Bouazara, professeur à l'Université du Québec à Chicoutimi, sans qui je n'aurais pu mener à terme ce travail. Je lui suis reconnaissante de m'avoir si bien dirigée tout au long de cette recherche, avec rigueur en même temps que souplesse. Sa patience, sa grande disponibilité furent pour moi à la fois une aide précieuse et un modèle. Ce fut une chance et un privilège que de pouvoir travailler sous sa direction et d'ailleurs, je continue à travailler sous sa supervision pour mon projet de doctorat.

J'exprime aussi ma reconnaissance à monsieur Marc. J. Richard co-directeur et professeur à l'Université Laval à Québec, pour le soutien qu'il m'a apporté. Ces suggestions ainsi que ces remarques m'ont beaucoup servie. Ce fut un grand honneur de pouvoir travailler sous sa codirection.

Un grand remerciement aux professeurs Ahmed Rahem du Centre de Technologie de l'Aluminium et Zhan Zhang de l'Université du Québec à Chicoutimi pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire et pour leurs précieux conseils et recommandations.

Je voudrais exprimer ma gratitude aux organismes ayant contribué à ce travail, soit : le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie (CRSNG) du Canada, Centre Québécois de Recherche et de Développement de l'Aluminium (CQRDA), et le CURAL Centre Universitaire de Recherche sur l'Aluminium de l'Université du Québec à Chicoutimi.

Finalement, une reconnaissance particulière aux membres de ma famille, surtout à mon futur compagnon de vie, qui m'ont, en tout temps, apporté soutien et encouragement et ont supporté ma longue absence.

Je remercie aussi la famille de mon cousin, le professeur Djamel Rebaïne qui m'ont ouvert leur porte et qui m'ont soutenue durant l'accomplissement de ce travail.

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1 Introduction

Dans le monde de la concurrence industrielle, le domaine des transports croît de jour en jour afin de répondre aux exigences du marché mondial. L'aluminium joue un rôle essentiel dans le progrès de l'industrie des transports. C'est un métal qui apporte une meilleure qualité ainsi qu'une légèreté à différentes catégories de transports. Son utilisation dans le domaine des transports a connu plusieurs évolutions. En 1899, un châssis en aluminium d'une petite voiture de sport a été conçu et présenté à l'exposition d'automobile internationale de Berlin. Dans les années 1930, l'aluminium a été introduit dans toute une série de pièces de véhicules industriels. En 1948, Land Rover commence à fabriquer des tôles en aluminium pour ses carrosseries. Aujourd'hui, outre les célèbres voitures utilisant beaucoup d'aluminium, tels que l'Audi A8, de nombreux moyens de locomotion contiennent des quantités importantes de ce matériau [1]. La figure 1.1 présente l'évolution de la consommation de l'aluminium par secteur.

**Consommation d'aluminium par secteur, 2000 et 2010**

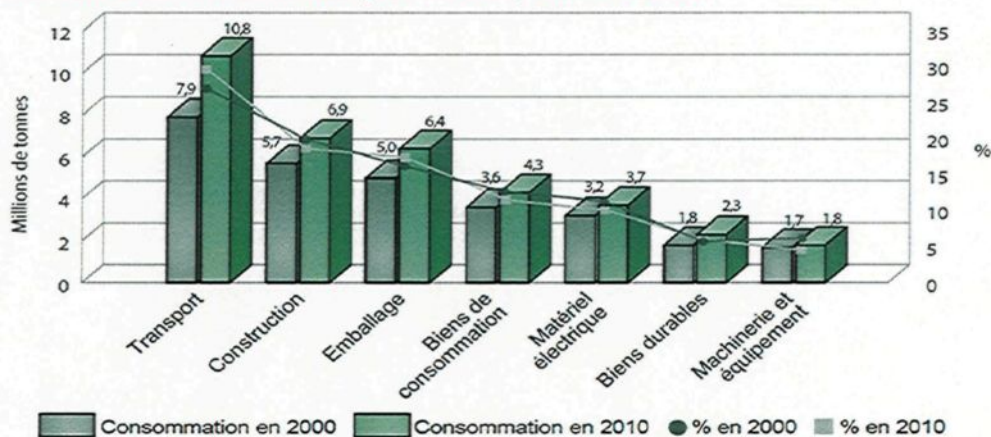


Figure 1.1 : Évolution de la consommation de l'aluminium par secteur [2].



Dans ce projet, nous allons nous intéresser aux autocars. Ce moyen de locomotion est constitué de deux parties; le châssis qui est la partie la plus sollicitée et la carrosserie. Les travaux de recherche de ce projet sont basés sur la partie châssis. La possibilité d'une conception d'un châssis en aluminium sans réduire les propriétés de résistance par rapport à un châssis en acier a été étudiée.

## 1.2 Problématique

L'autocar demeure le principal moyen de transport interurbain de passagers au Canada. Malgré une conception demeurée essentiellement inchangée, le poids global de ce véhicule a augmenté de plus de 25 %, au cours des trois dernières décennies. Certes, d'après des études effectuées par Transport Canada, certains autocars remplis de passagers dépassent les normes de chargement par essieux ce qui cause l'endommagement des routes [3]. Pour remédier à ce problème, l'aluminium qui est à la fois léger et résistant sera utilisé dans la conception du châssis de l'autocar de ce projet.

La figure 1.2 montre le modèle du châssis de l'autocar étudié. Le choix s'est porté sur le châssis vu qu'il représente 30 % du poids total de l'autocar et qui est le plus sollicité. Sa durée de vie est plus importante que tous les autres éléments. Le nouveau châssis sera conçu tout en gardant la rigidité d'un châssis en acier. D'un autre côté, si une des fréquences d'excitation de la route coïncide avec les fréquences naturelles du châssis, ce dernier va rentrer en résonance. Cela causera, des oscillations très dangereuses qui pourront engendrer de grandes déformations, une concentration de contraintes et la fatigue prématurée de la structure. Afin de pouvoir y remédier, une étude du comportement dynamique et vibratoire serait nécessaire.

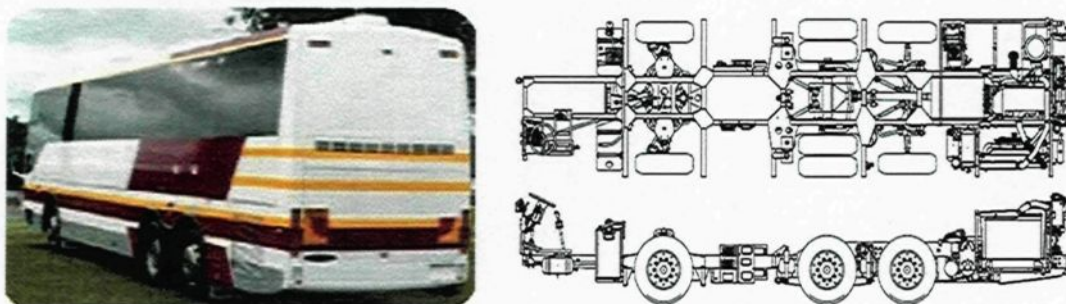


Figure 1.2 : Modèle du châssis de l'autocar [4].



### 1.3 Objectifs

Le but principal de ce travail de recherche est d'effectuer une étude dynamique et vibratoire de la partie châssis de l'autocar ainsi qu'une analyse des contraintes. Pour pouvoir réaliser ce projet, les objectifs suivants ont été fixés :

- Sélection du modèle d'autocar à étudier.
- Étude des différents types de sollicitations à appliquer sur l'autocar.
- Sélection des alliages d'aluminium à utiliser dans le domaine du transport.
- Formulation de critères objectifs pour évaluer les performances d'un châssis.
- Développement du modèle dynamique de l'autocar et du châssis (2-D simplifié, 2-D, 3-D).
- Étude des modes vibratoires et analyse des contraintes.
- Analyse des effets des variations de chargement et des conditions d'exploitation.
- Estimation de la résistance au niveau des points d'appui du châssis.
- Analyse des résultats et recommandations de nouvelles conceptions.

### 1.4 Méthodologie

Afin de pouvoir répondre à la problématique et ainsi atteindre les objectifs de ce travail, l'étude de ce projet a été effectuée suivant trois parties essentielles : la recherche bibliographique, le développement du modèle analytique et la modélisation et simulation du châssis. En premier lieu, pour la revue de littérature, les recherches étaient basées sur les points suivants :

- Identification de toutes les sollicitations à appliquer au châssis de l'autocar.
- Analyse des contraintes.
- Calcul des charges et conception des autocars.
- Possibilités d'utilisation de l'aluminium dans la conception des châssis au lieu de l'acier tout en préservant ses caractéristiques de résistance.

Une fois les données sur le projet ainsi rassemblées, le modèle analytique de la partie dynamique et vibratoire a été créé. Pour le modèle vibratoire, le châssis a été simplifié à un modèle dont le poids, le volume et l'inertie sont très proches de ceux du châssis de référence. Dans la partie dynamique de ce projet, les forces agissantes sur les points d'appui du châssis de l'autocar ont été déterminées en utilisant les données des différentes sollicitations aux équations dynamiques développées dans le modèle analytique du mouvement.

La dernière étape de cette étude fut la partie numérique dont nous avons étudié trois cas en l'occurrence, le cas statique, dynamique et vibratoire. La simulation s'est basée sur les points suivants :

- Conception du châssis sur SolidWorks.
- Discrétisation du modèle sur Abaqus avec définition des conditions aux limites.
- Application de chargement au système.
- Calcul des contraintes et des fréquences.
- Analyse des résultats.

Une comparaison a été effectuée entre les points critiques des contraintes du châssis avec ceux obtenus dans la partie vibratoire afin d'opter pour une meilleure conception et ainsi optimiser le châssis de l'autocar.

Le modèle obtenu pourrait être utile pour la conception globale d'un autocar répondant aux exigences du transport en commun et ainsi vérifier son poids par rapport à celui conçu en acier. La figure 1.3 résume les différentes étapes de la méthodologie.

La rédaction du mémoire comprend sept chapitres. Chacun d'entre eux traite une partie bien distincte. Au départ, le premier chapitre présente l'introduction du projet de recherche, la problématique, les objectifs ainsi que la méthodologie à suivre. Le second chapitre englobe un résumé de la revue de littérature des anciens travaux. Cette partie comporte une étude sur les sollicitations et les contraintes qui agissent sur le châssis, le calcul des charges et des normes de conception et enfin l'utilisation de l'aluminium dans le domaine des transports. Le troisième chapitre sera consacré à la présentation du châssis d'autocar étudié ainsi que ses caractéristiques. Le développement du comportement dynamique de l'autocar sera effectué dans le chapitre quatre en traitant les modèles du châssis à une dimension, à deux dimensions et à trois dimensions. Une étude des modes vibratoires d'une poutre simple et du châssis au complet sera effectuée dans les chapitres cinq et six ainsi qu'une analyse des contraintes. En dernier lieu, le septième chapitre présentera les parties discussions des résultats, conclusions et recommandations.

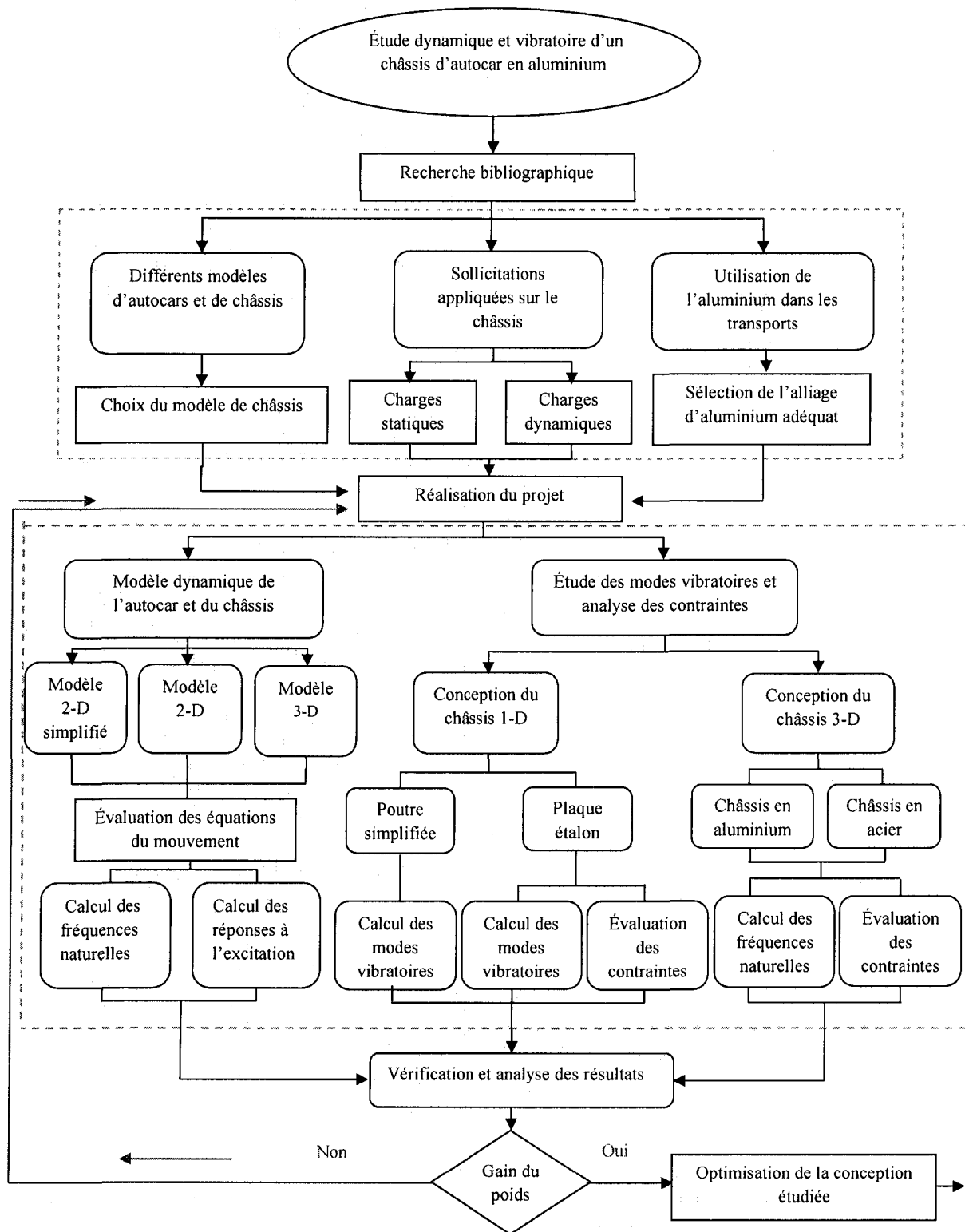


Figure 1.3 : Organigramme de la méthodologie.

## CHAPITRE 2

### REVUES DE LITTÉRATURE

#### 2.1 Introduction

Ce chapitre présente une idée générale sur les travaux les plus récents qui se rapportent à cette présente étude. Il est consacré aux différents types de sollicitations appliquées sur le châssis des autocars, la conception et les dimensions des autocars et l'utilisation de l'aluminium dans le domaine des transports.

#### 2.2 Sollicitations

Les autocars et les routes subissent différents types de sollicitations. Elles peuvent être statiques ou dynamiques.

En ce qui concerne les sollicitations appliquées sur le châssis, tous les autocars sont soumis à différents types de charges statiques ainsi que des charges dynamiques. Les sollicitations dynamiques des pneus sur la chaussée causent une détérioration prématurée des routes. C. Karaoglu et N. Kuralay [5] ont analysé par la méthode des éléments finis le comportement d'un châssis de camion soumis à différents types de sollicitation. La figure 2.1 représente le modèle du châssis de cette étude. Les déplacements au niveau des appuis sont nuls  $U_x = U_y = U_z = 0$  ainsi que les rotations  $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$  (encastrement parfait). Le déplacement vertical au niveau des joints  $U_y = 0$  est nul. Les différents types de sollicitations appliquées sur le châssis sont représentés à la figure 2.2.

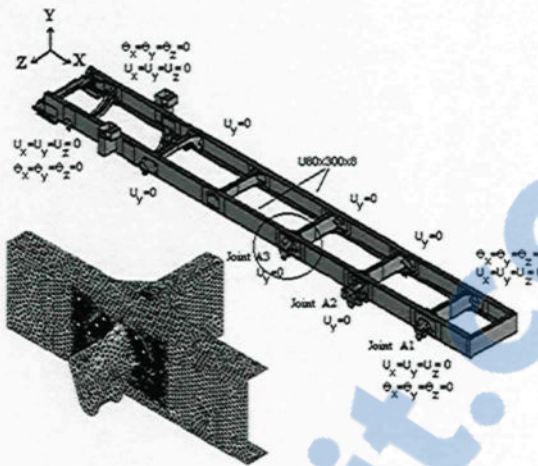


Figure 2.1 : Modèle du châssis du camion étudié [5].

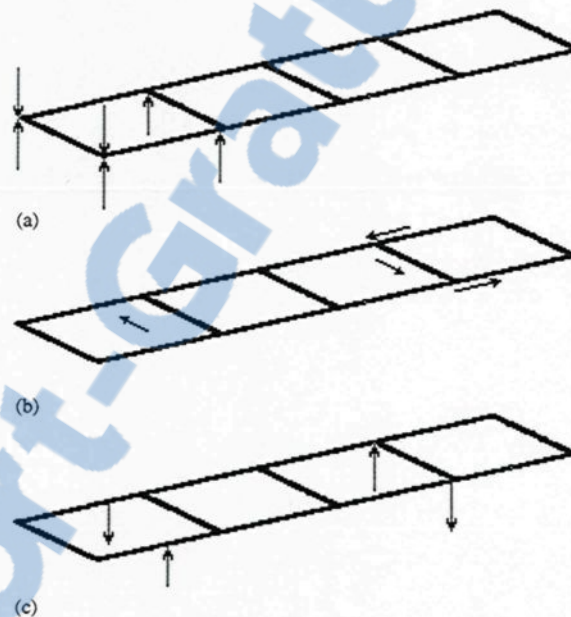


Figure 2.2 : Différentes charges agissant sur un châssis [5].

La figure 2.2-a montre des charges verticales à l'essieu avant. La figure 2.2-b représente les forces latérales agissant parallèlement au plan du châssis. Dans le cas des virages, une torsion apparaît par l'addition des charges verticales et des forces latérales. La figure 2.2-c illustre des sollicitations symétriques agissant verticalement. Elles causent principalement de la flexion dans les membres situés sur les cotés [5].

Pour les sollicitations causées par les autocars sur les routes, dans la plupart des cas ces véhicules sont conçus avec une suspension à air et sont exposés à des débattements dynamiques verticaux considérables [6]. Ceci peut contribuer à la fatigue de la structure de

la route due aux répétitions d'applications des forces dynamiques du pneu. Un certain nombre d'études ont souligné la nécessité de concevoir une suspension optimale pour réduire les dommages de route [7]. Ceci peut également augmenter la durée de vie du châssis en réduisant les forces de suspension transmises au châssis. Cet objectif a été le sujet d'une étude réalisée par le centre de recherche de l'université Concordia en collaboration avec le centre de technologie de transport, Nova bus et la Société du transport de la Rive Sud de Montréal. L'étude consiste à améliorer les suspensions actuellement utilisées sur les autocars classiques et ceux à plancher surbaissés « LFS, pour Low Floor System » en service dans le marché québécois [8].

L'étude a mené aux résultats suivants :

- Le fait de réduire la pression des pneus accroît la douceur du roulement.
- Les essieux dotés d'un dispositif de régulation de pression des pneus permettent à partir de la cabine d'adapter la pression des pneus à la nature du terrain.
- Une performance supérieure des amortisseurs optimisés à celle des amortisseurs standards.

Une autre étude a été faite par C. David et al [9] sur le déplacement « avant-arrière » provoqué par le mouvement de tangage de l'autocar qui cause des malaises aux conducteurs et aux passagers. Bien que le mouvement de roulis soit également connu pour causer des malaises, l'importance d'une telle vibration est sensiblement petite pour les autocars, en comparaison avec celle produite par le tangage. Le niveau de vibration et le comportement dynamique des véhicules sont fortement liés aux :

- Mode vertical du mouvement.
- Le tangage de la masse suspendue.
- Les modes de déflexion verticale des masses non suspendues.

Les systèmes de suspension de véhicule montrent souvent des non-linéarités liées aux relations force-déflexion et force-vitesse. Ceci a comme conséquence d'avoir des propriétés de rigidité et d'amortissement des éléments de suspensions variables [8].

## **2.3 Contraintes et vibrations**

Les analyses des contraintes et des réponses dynamiques et vibratoires des châssis sont très importantes. Elles apportent une meilleure évaluation de la résistance aux différents types de sollicitations. Elles permettent aussi d'optimiser la forme et la conception des châssis tout en estimant la durée de vie de ces derniers. Des évaluations de la distribution



des contraintes de châssis de véhicules lourds ont été effectuées [10], [11] et [12] afin de déterminer les points de contraintes critiques. Ces points critiques seront utiles pour l'étude de la durée de vie et de la fatigue du châssis. La figure 2.3 montre la localisation de la contrainte maximale du châssis en acier 710 C sous chargement statique effectuée avec le logiciel de simulation Abaqus. La valeur de cette contrainte maximale est de 386.9 MPa. Elle est localisée à la partie arrière du châssis au niveau des suspensions. Le facteur de sécurité dans ce cas d'étude est de 1.43. Pour être compris dans la fourche de facteur de sécurité appropriée aux châssis qui est de 1.5 jusqu'à 2, il est recommandé d'optimiser cette partie du châssis.

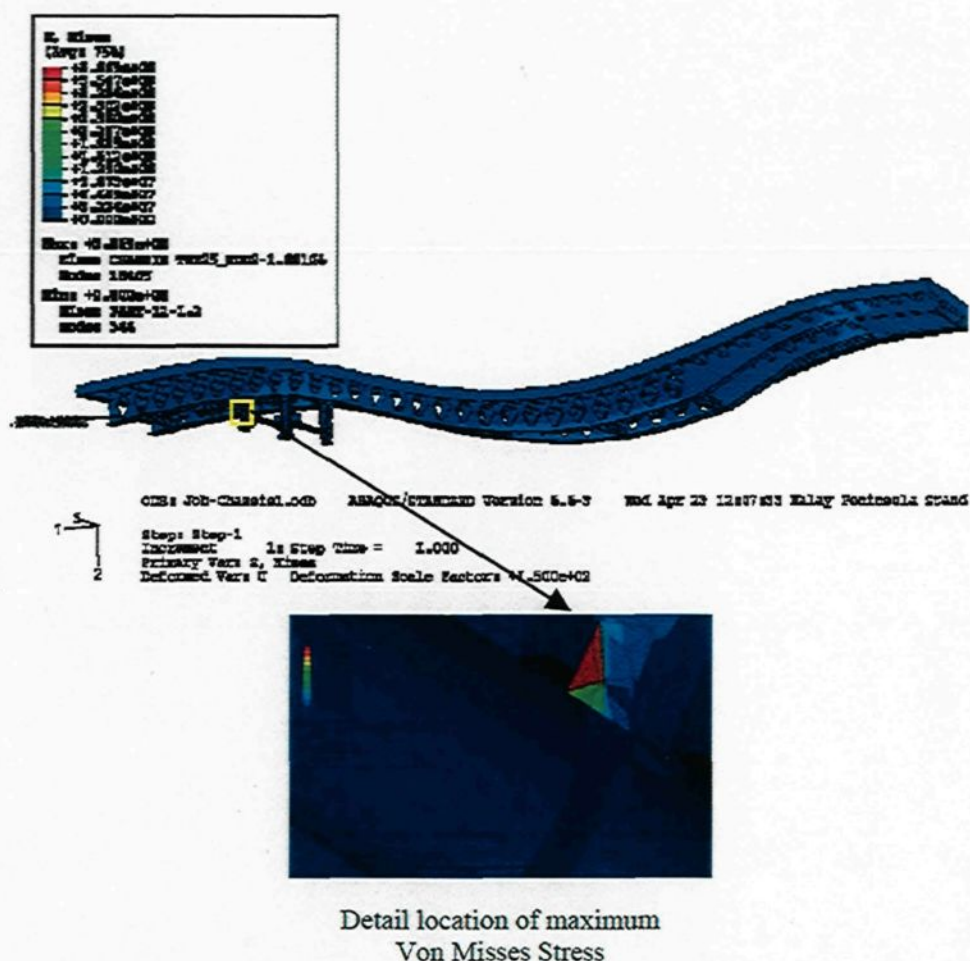


Figure 2.3 : Distribution des contraintes et localisation de la contrainte maximale [10].

Une comparaison des contraintes a été effectuée numériquement sur le logiciel ANSIS et expérimentalement par K. Chinnaraj et al [13]. La localisation des jauges de déformation est montrée à la figure 2.4. Les résultats présentent de petites déviations des valeurs des

contraintes numériques et expérimentales. Cette différence de valeur ne devrait pas affecter la résistance du châssis. Par contre, elle pourrait changer les estimations de la fatigue ainsi que la durée de vie de la structure.

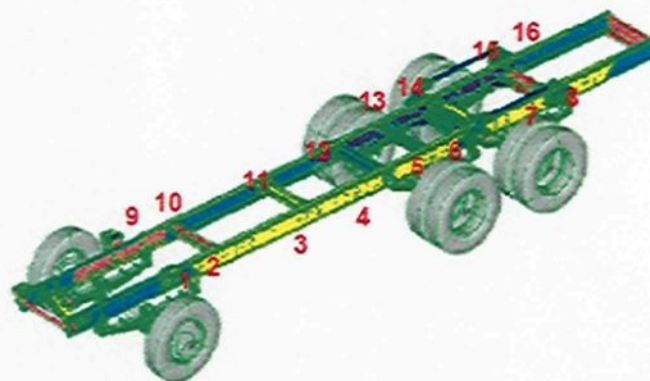


Figure 2.4 : Localisation des rosettes de déformation du châssis [13].

D'un autre côté, une étude vibratoire d'un châssis de camion a été traitée par Teo Han Fui et al [12]. Le châssis a été soumis à des vibrations libres comme le montre la figure 2.5 qui présente les premiers modes de torsion et de flexion du châssis. Les modes propres calculés étaient utiles pour l'évaluation de la résonance du système par rapport aux fréquences d'excitation de la route.

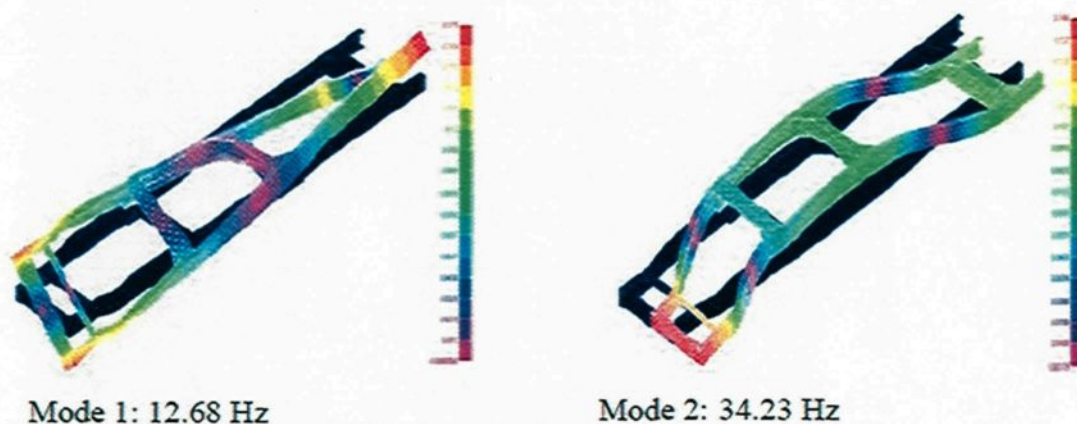


Figure 2.5 : Torsion et flexion du châssis [12].

## 2.4 Calcul des charges et conception des autocars

Dans le cas des autocars urbains, le poids et les charges aux essieux sont régis par les codes provinciaux de la route et l'économie des transports. Les différents procédés de



calcul des charges revenant au châssis suivant la réglementation sur les normes de charges et de dimensions des autocars émises par le Ministère des Transports du Québec [14] sont présentés ci-dessous :

**a) Méthode d'établissement de la charge par essieu**

La charge maximale autorisée pour une catégorie d'essieu est la plus petite des trois valeurs suivantes :

- i) La somme des capacités de tous les pneus de la catégorie.
- ii) La capacité de charge de l'essieu dans le cas de l'essieu avant.
- iii) La limite de charge de la catégorie d'essieux, selon la période de l'année (habituelle ou de dégel).

**b) Méthode d'établissement de la masse totale en charge**

La masse totale en charge maximale autorisée d'un véhicule routier et d'un ensemble de véhicules routiers est la plus petite des deux valeurs suivantes :

- i) La somme des charges maximales autorisée de chacune des catégories d'essieux, selon la période de l'année (habituelle ou de dégel).
- ii) La limite de masse totale en charge de la catégorie du véhicule ou de l'ensemble des véhicules.

**Dimensions des autocars**

Ci-dessous sont représentées les normes admises pour la longueur, la hauteur et la largeur des autocars [14]. La figure 2.6 présente la longueur conforme des autocars.

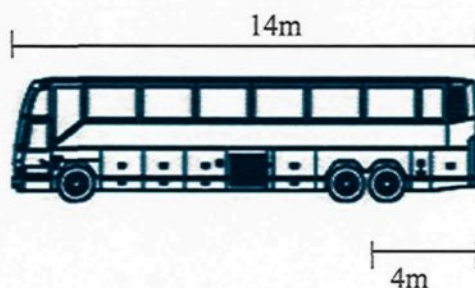


Figure 2.6 : Longueur admise des autocars [14].

Dans le cas des autocars articulés, la longueur admise est montrée sur la figure 2.7.

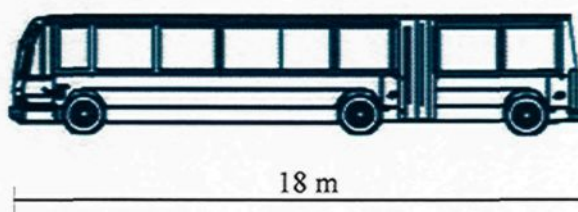


Figure 2.7 : Longueur admise pour les autocars articulés [14].

La figure 2.8 présente la hauteur maximale de tout véhicule ou ensemble de véhicules routiers, chargement compris.

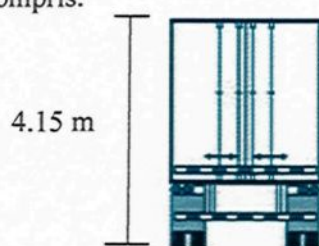


Figure 2.8 : Hauteur maximale [14].

Finalement, la figure 2.9 montre la largeur maximale de tout véhicule ou ensemble de véhicules routiers, chargement compris.

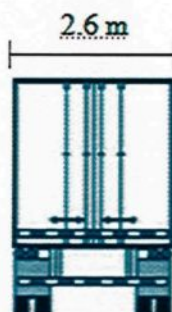


Figure 2.9 : Largeur maximale [14].

### Conception des châssis

L'automobile est constituée de sous-ensembles ou sous-systèmes comme la partie châssis et carrosserie ainsi que la motorisation, la transmission, système de freinage, suspension, essieux, pneumatiques, équipement électrique, équipement hydraulique et pneumatique sans oublier les équipements de sécurité. Dans le cas du châssis on trouve



plusieurs fonctions qui sont soit structurales ou mécaniques, mais aussi aérodynamiques, esthétiques et isolations phoniques.

Le châssis est une structure généralement formée de poutres et de barres reliées soit par soudage soit par des éléments de liaison (boulonnées). La carrosserie représente la coque de la voiture. Elle est caractérisée par le nombre de portes, l'arrangement des sièges et la structure du toit [15].

Lors de la conception d'un châssis, le concepteur se voit confronter à différents types de contraintes qui sont soit structurales ou dues à la fabrication ou à l'aérodynamique. Les contraintes structurales sont essentiellement dues à la résistance au crash, la réduction des bruits et des vibrations, la rigidité maximale avec une masse minimale. La facilité de fabrication, de montage, de maintenance, ainsi qu'un coût de fabrication minimum. Une résistance aérodynamique minimale et une sensibilité faible au vent latéral. Il doit aussi contribuer à la stabilité du véhicule, la performance, la position du centre de gravité. La conception du châssis se fait sur une maquette virtuelle en utilisant des méthodes numériques qui sont des méthodes systématiques et rationnelles. Elles permettent de trouver les meilleurs compromis entre contraintes antagonistes. Elles soulagent le concepteur en prenant en charge la gestion des itérations d'amélioration de la solution.

### **Différents types d'essieux**

Le guide des normes établies par le ministère des transports du Québec [16] montre les différents types d'essieux d'autocars ainsi que les dimensions d'autocars admissibles.

#### **a) Essieu simple**

L'essieu simple de la figure 2.10 répartit une masse pouvant être mesurée sous ses roues.



Figure 2.10 : Essieu simple [16].

#### **b) Essieu tandem**

La figure 2.11 montre un ensemble de deux essieux reliés au véhicule par un système de suspension conçu pour égaliser, à 1000 kg près, en tout temps, la masse pouvant être mesurée sous les roues de chacun des essieux. Il est composé d'une suspension commune ou de deux suspensions identiques reliées entre elles.



Figure 2.11 : Essieu tandem [16].

### c) Essieu triple

L'ensemble de trois essieux également espacés entre eux de la figure 2.12, sont reliés au véhicule par un système de suspension conçu pour égaliser, à 1000 kg près, en tout temps, la masse pouvant être mesurée sous les roues de chacun des essieux .Il est composé de trois suspensions identiques reliées entre elles.



Figure 2.12 : Essieu triple [16].

## 2.5 Utilisation de l'aluminium

Tout indique que les fabricants d'automobiles continuent d'innover et de faire un usage accru de l'aluminium; toutes les raisons sont bonnes : diminuer la consommation de carburant des véhicules, réduire les émissions polluantes et améliorer la sécurité. Des études effectuées sur les véhicules automobiles démontrent que l'aluminium représentait 2 % de leur poids en 1970, 5,1 % en 1990 et 8,6 % en 2009. Elles prévoient que l'aluminium constituera 11 % du poids des véhicules automobiles en 2020 et permettra aux consommateurs d'économiser 40 % sur leur facture de carburant. Actuellement, ce sont les constructeurs Honda et BMW qui sont les champions de l'aluminium, remplaçant General Motors et Nissan. Le poids moyen d'aluminium utilisé dans la fabrication d'un véhicule ce chiffre à 154.25 kg, et cela augmente chaque année [17].

Une commission canadienne de transport public [18], BC Transit, a procédé à l'acquisition de 50 autocars de 9 m dont la carrosserie est fabriquée en aluminium sur un châssis d'acier d'une entreprise de la Grande-Bretagne. Le fait que la carrosserie soit en aluminium offre l'avantage de résister à la corrosion et de limiter le poids du véhicule. La figure 2.13 présente un autocar de la compagnie Plaxton Coach & Bus avec une carrosserie en aluminium.





Figure 2.13 : Carrosserie de l'autocar Pointer 2 de la compagnie Plaxton Coach & Bus [18].

Les éléments de structure principaux (toit, plancher, structure treillis latérale) se sont révélés les meilleurs candidats à envisager pour l'allègement de l'autocar représenté à la figure 2.14. La principale raison pour laquelle ces éléments ont été retenus est qu'ils représentent près de 20 % du poids total de l'autocar. Tout allègement de ces éléments entraînera forcément une réduction notable du poids total de l'autocar. Les concepts techniques correspondant aux versions « allégées » de chacun des éléments de structure retenus ont été élaborés à la faveur d'analyses d'un modèle aux éléments finis (E.F) [19].

Des concepts faisant appel à des configurations où matériaux nouveaux ont été élaborés pour le plancher, le toit, la structure treillis latéral, et ont été incorporés au modèle ainsi qu'aux éléments finis et optimisés. La figure 2.15 présente les différents types de modèles aux E.F.



Figure 2.14 : Modèle d'autocar de série H de Prévost [19].

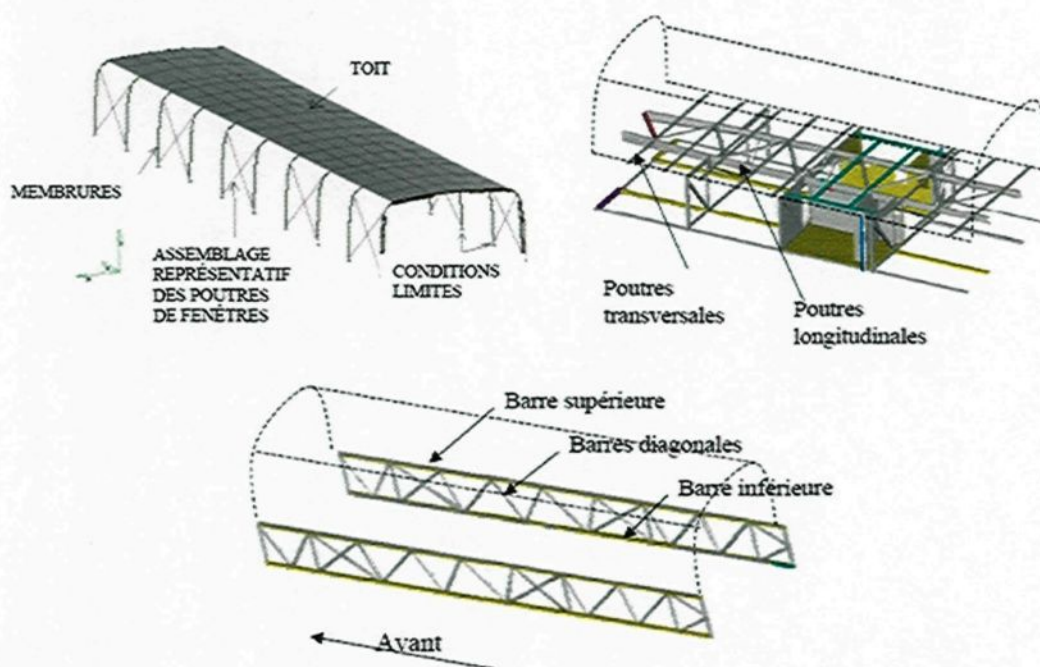


Figure 2.15 : Modèles aux E.F du toit, de la structure treillis latérale et du plancher [19].

Dans le cadre de l'analyse du coût et du cycle de vie des autocars, un programme d'allègement des autocars a été élaboré au niveau des transports du Canada [20] afin de réduire le pourcentage de la masse à vide d'un autocar. L'utilisation de matériaux comme l'aluminium est nécessaire pour alléger le poids des châssis. Ce procédé a entraîné une consommation minimale du carburant et les autocars sont devenus plus écologiques et moins dommageables pour les infrastructures. Le remplacement du châssis en acier inoxydable par un châssis en aluminium assemblé (plutôt que soudé) s'est traduit par une réduction de poids de l'ordre de 559 kg.

En juillet 2008 Alcoa et Yutong [21] ont présenté deux prototypes d'autobus respectueux de l'environnement qui ont été testés pendant les jeux olympiques d'été de Beijing 2008. Une nouvelle carrosserie à forte teneur en aluminium 46 % a été conçue pour une réduction de la consommation du carburant et des émissions. Ils garantissaient une consommation de carburant et des émissions de gaz à effet réduit. Ils avaient intégré la technologie de cadre de châssis à treillis d'Alcoa qui se trouve dans les automobiles tel que Ferrari. Le modèle du nouveau bus en construction est représenté à la figure 2.16.





Figure 2.16 : Nouveau Yutong Green Bus en cours de construction en Chine [21].

L'aluminium a été utilisé avec succès par K. Karita et al [22] pour le châssis d'un camion. Une variable de la section technologie d'extrusion a été utilisée pour mouler les longerons du cadre en aluminium. La forme et la configuration de la conception du châssis en aluminium ont été optimisées, tout en maintenant la force et la rigidité équivalente à celles d'un châssis en acier standard. Ainsi, un camion super-léger a été développé en fonction du cadre en aluminium 6061-T6 et exposé en 2002 au Tokyo Motors Show. La figure 2.17 montre le modèle de châssis en aluminium.



Figure 2.17 : Modèle de châssis de camion en aluminium [22].

Finalement dans notre équipe de recherche dirigée par le professeur Bouazara, nous avons développé et conçu avec l'entreprise ALUTREC une remorque de longueur 53 Po en aluminium plus légère [23], sécuritaire, durable et plus économique. La figure 2.18 représente une semi-remorque en aluminium 6061-T6 (1588 kg de moins qu'une semi-remorque en acier). Elle nous garantissait moins de surcharge, d'usure et de dépression et enfin un coût d'entretien et une consommation en essence réduits.

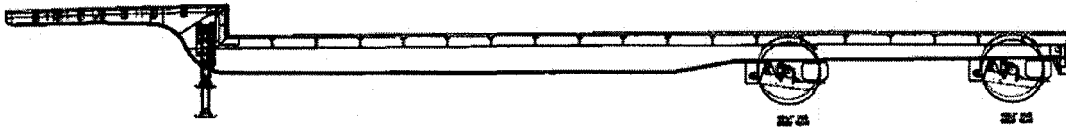


Figure 2.18 : Semi-remorque en aluminium [24].

## 2.6 Conclusion

Plusieurs études ont été effectuées sur le calcul des contraintes et des déformations que subissent les châssis des véhicules lourds. Les différents types de sollicitations ont aussi été traités. La plupart des véhicules lourds sont des camions avec des châssis en acier.

D'un autre côté, des recherches ont été effectuées sur l'évaluation du confort de roulement, la fatigue et l'endommagement des autocars, mais l'étude du comportement dynamique et vibratoire des châssis d'autocars était rarement traitée.

D'autres études démontrent que l'utilisation de l'aluminium comme matériau de base dans la conception des châssis des poids lourds donnait des résultats très satisfaisants. Un gain de poids ainsi qu'une plus grande sécurité ont été apportés grâce à la légèreté et la flexibilité de ce matériau.

Jusqu'à présent, il n'existe que des prototypes de châssis d'autocars en aluminium. Ainsi, dans ce projet de recherche l'intérêt a été porté sur un châssis d'autocar en aluminium. Dans un projet global, il sera conçu suivant les normes de conception, mais, aussi suivant la rigidité. Cette dernière sera équivalente à celle d'un châssis en acier standard. Par contre, le modèle de châssis va être plus léger, flexible et pouvant supporter de plus grandes sollicitations.

Cependant, des études du comportement dynamique et vibratoire sont nécessaires afin de pouvoir prévenir le phénomène de résonance qui engendre l'inconfort du roulement et bien d'autres problèmes.



## CHAPITRE 3

### MODÈLES D'AUTOBUS ET CHOIX DE CHÂSSIS

#### 3.1 Modèle d'autobus

Un autobus est un véhicule automobile ayant un nombre de place désigné. Il existe différents types d'autobus dont les autobus urbains et suburbains, les trolleybus, les minibus et les autocars. Le nombre de places associées pour chacun deux, le design ainsi que le circuit parcouru diffèrent d'un type à un autre. Un aperçu général de ses différents modèles d'autobus est montré aux figures 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5 [25].



Figure 3.1 : Modèle d'autobus urbain [25].



Figure 3.2 : Modèle de trolleybus [25].

**Autobus urbain :** C'est un moyen pour le transport de passagers en zone urbaine. Il est caractérisé par des parcours avec arrêts fréquents. En majorité, ce sont des autobus de 30 pi et plus. Il est constitué de deux portes avant et arrière, sans compartiment bagage ni toilette. Ce modèle d'autobus est souvent entrepris par des agences de transport public.

**Trolleybus :** C'est un véhicule sur roue semblable à un autobus, mais doté d'un moteur électrique alimenté par un circuit de lignes électriques aériennes. Il opère par une agence de transport public.



Figure 3.3 : Modèle de minibus [25].



Figure 3.4 : Modèle d'autobus suburbain [25].



Figure 3.5 : Modèle d'autocar [25].

**Minibus :** Ce modèle est généralement de 20 pi à 25 pi comportant 15 à 20 sièges. Il est typiquement utilisé pour les services de navette comme pour les aéroports, les hôtels et les services touristiques. La plus part du temps, ce sont les entreprises privées qui les utilisent.

**Autobus suburbain :** C'est un modèle intermédiaire entre le bus urbain conventionnel et l'autocar. Ces dimensions sont comprises entre 40 à 45. Tous les passagers sont assis. Il est constitué d'une seule porte avant, sans compartiment bagage ni toilette. Généralement utilisé pour les déplacements entre la ville et les banlieues, avec relativement peu d'arrêts. Il offre un peu plus de confort que l'autobus urbain, sans toutefois atteindre le niveau des autocars.

**Autocar :** Autobus relativement luxueux conçu pour le transport de passagers sur de longues distances. Bien qu'il soit conçu pour le transport interurbain, il est aussi utilisé pour les services touristiques. Ce modèle est caractérisé par un plancher élevé localisé au-dessus du compartiment à bagages. C'est un véhicule d'au moins 35 pi et pouvant accueillir plus de 30 passagers. Il est opéré par des intérêts privés.

Le processus d'approvisionnement influe fortement sur la conception et les spécifications des véhicules. Dans le cas des autobus urbains, ce processus est particulièrement long et ardu et il peut s'écouler jusqu'à deux ans entre l'établissement des spécifications par les autorités responsables de l'achat et la livraison du véhicule. Dans le cas des autocars, le processus est beaucoup plus simple; il se limite souvent à la signature d'un contrat. Les délais de livraison sont de six à neuf mois. Dans les travaux qui suivront, l'intérêt va être porté aux autocars. Les limites dimensionnelles [26] ainsi que de masses de ces derniers sont présentées à la figure 3.6 et aux tableaux 3.1 et 3.2.

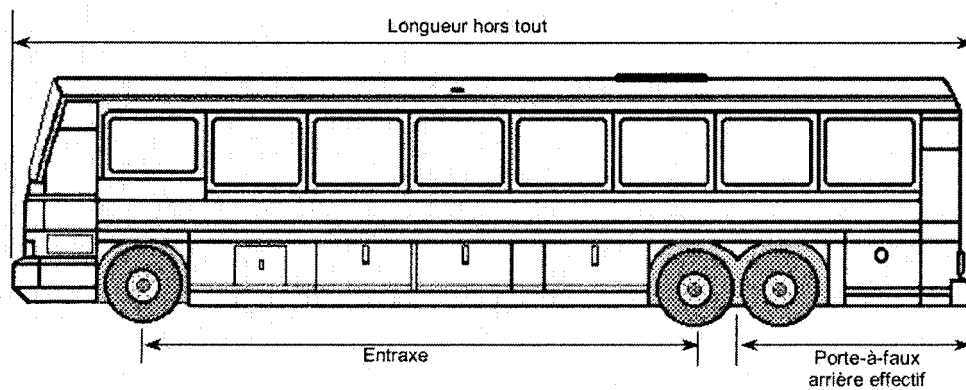


Figure 3.6 : Modèle d'autobus interurbain (autocar) [26].

Tableau 3.1 : Limites dimensionnelles des autocars et exigences relatives aux essieux [26].

| Dimensions                                 | Limites                                |
|--|--|
| Largeur hors tout                          | Maximum 2.6 mètres                     |
| Hauteur hors tout                          | Maximum 4.15 mètres                    |
| Longueur hors tout                         | Maximum 14.0 mètres                    |
| Écartement de l'essieu tandem              | Minimum 1.2 mètres/Maximum 1.85 mètres |
| Porte-à-faux arrière effectif              | Maximum 4.0 mètres                     |
| Entraxes                                   | Minimum 3.0 mètres                     |
| <b>Exigences relatives aux essieux</b>     |  |
| Longueur hors tout de 12.5 mètres ou moins | Nombre des essieux non contrôlé        |
| Longueur hors tout dépassant 12.5 mètres   | Minimum 3 essieux                      |

Tableau 3.2 : Limites des masses admissibles [26].

| Masse  | Limites                    |
|--|----------------------------|
| <b>Limites de la masse des essieux</b>           |                            |
| Essieu directeur                                 | Maximum 7 250 Kilogrammes  |
| Essieu simple (2 pneus à chaque essieu)          | Maximum 6 000 Kilogrammes  |
| Essieu simple (4 pneus à chaque essieu)          | Maximum 9 100 Kilogrammes  |
| Essieu tandem (4 pneus à chaque essieu)          | Maximum 18 000 Kilogrammes |
| <b>Limitations de la masse brute du véhicule</b> |                            |
| Deux essieux (4 pneus)                           | Maximum 13 250 Kilogrammes |
| Deux essieux (6 pneus)                           | Maximum 16 350 Kilogrammes |
| Trois essieux (8 pneus)                          | Maximum 20 900 Kilogrammes |
| Trois essieux (10 pneus)                         | Maximum 25 250 Kilogrammes |

Les autobus à plancher surbaissé [27] ont amélioré la sécurité et le service pour les personnes ayant une déficience. Ils cherchent à améliorer l'accessibilité et le confort. En 1995, les autobus à plancher surbaissé ne représentaient que 2,3 pour cent du parc d'autobus urbains au Canada. Des planifications de prototypes d'autobus urbains modulaires, dont des sections complètes seraient interchangeables. Ceci permettrait aux mécaniciens de n'intervenir que sur les éléments défectueux en remettant les autobus en service avec des modules de remplacement.

Aujourd'hui, la construction des autocars est beaucoup plus raffinée. De très grands efforts ont été apportés afin de réduire le poids à vide. Ces modèles allégés sont susceptibles d'avoir une plus faible consommation énergétique. Les économies de poids sont également nécessaires pour compenser l'installation du nombre croissant d'accessoires destinés à améliorer le confort des passagers sur les autocars modernes. La popularité de l'autocar à deux étages qui peut recevoir jusqu'à cent passagers n'a pas encore percé le marché nord-américain.



### 3.2 Modèle du châssis

Un châssis est un cadre métallique sur lequel se fixent les organes mécaniques qui composent l'ensemble du véhicule. Le mot châssis a une autre signification; c'est ainsi qu'un marchand " vend un châssis ", ce qui ne voudra pas dire qu'il vend un cadre, mais bien l'ensemble mécanique moins la carrosserie [28]. La décomposition du châssis est ainsi :

Les deux grandes pièces horizontales de longueur variable sont les longerons. Ces derniers sont reliés par des traverses solidement rivetées ou soudées. Deux des principales traverses de l'avant supportent aussi le faux châssis. Le faux châssis est très important puisque c'est entièrement sur lui que repose le moteur même quand celui-ci se présente sous la forme dite bloc moteur, c'est-à-dire comprenant un ensemble : moteur, embrayage et boîte de vitesse, enfermer dans un même carter. Sans le faux châssis, les longerons devraient être fixés directement au châssis et comme nous savons que ce dernier est sans cesse soumis à un dur travail de torsion, il serait impossible de maintenir solidement l'ensemble, sans compter les avaries sérieuses qui ne manqueraient pas de survenir, à commencer par les cassures de pattes de moteur. Le faux châssis atténue la violence des chocs qui peuvent nuire au moteur et, d'un autre côté, il diminue beaucoup les vibrations.

Un châssis est une unité complète qui pourrait se déplacer de façon autonome. Il n'inclut pas les pièces de la carrosserie. Il existe deux modes de construction de la carrosserie et du châssis : en deux pièces séparées ou d'une seule pièce. Ce dernier modèle s'appelle carrosserie monocoque. Dans la construction séparée, la carrosserie est fixée au cadre du châssis au moyen de boulons qui traversent l'appui ou la base de la carrosserie et la partie supérieure du cadre. Pour prévenir les grincements et les claquements, les cognements et les cliquetis, ainsi que les vibrations, des coussins ou « isolateurs » en matériaux comme le caoutchouc synthétique sont installés entre la carrosserie et le cadre, en face de chaque boulon de carrosserie. Dans la construction monocoque, la carrosserie et le cadre du châssis ne font qu'une seule pièce [29]. Les différents types de châssis seront montrés ci-dessous :

#### **Châssis à poutres**

Les modèles du châssis à poutres sont très répandus dans les poids lourds grâce à la solidité qu'ils apportent ainsi qu'à leurs facilités de conceptions. Le modèle de châssis TB

2175 [30] représenté à la figure 3.7 est spécifiquement destiné au segment de l'exportation. Ses principales caractéristiques sont les composants robustes qui garantissent la durabilité cruciale pour les conditions les plus éprouvantes. La figure 3.8 [31] montre le châssis SBR 4000+ comportant trois essieux. Il constitue la base idéale pour accueillir une carrosserie à deux étages ou à un seul étage allongé, tant dans le segment des autocars de tourisme que celui des véhicules. Les éléments principaux constituant un châssis à poutres sont représentés à la figure 3.9 [32].



Figure 3.7 : Châssis (TB 2175) [30].



Figure 3.8 : Châssis (SBR 4000+) [31].

#### Cadre de châssis

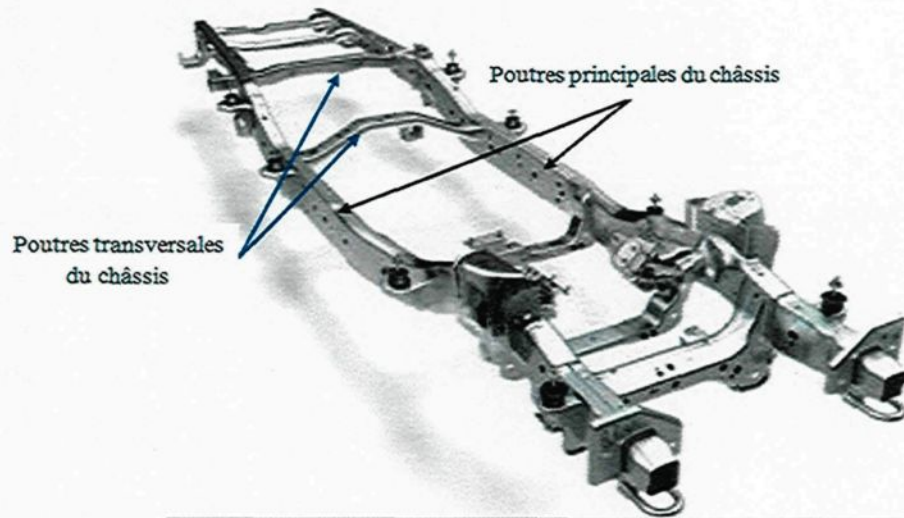


Figure 3.9 : Éléments principaux constituant le cadre du châssis [32].

### Châssis semi-monocoque

C'est le premier type de châssis existant dans le domaine de l'automobile. Il n'est pas très répandu dans les autocars. Il est construit en une seule pièce. La figure 3.10 montre un modèle d'autobus avec un châssis semi-monocoque. Les différents constituants de cet autobus sont montrés au tableau 3.3.



Figure 3.10 : Châssis semi-monocoque d'autocar.

Tableau 3.3 : Éléments de l'autocar avec châssis semi-monocoque.

|  |  |
|--|--|
| 1 : Suspension avant.  | 8 : Creux de stockage                  |
| 2 : Semi-monocoque du châssis.                                       | 9 : Harnais et câblage du châssis.     |
| 3 : Systèmes de freins et d'accélérateur réglables électroniquement. | 10 : Suspension arrière.               |
| 4 : Système de mise à niveau.  | 11 : Pneus arrière.                    |
| 5 : Amortisseurs réglables.  | 12 : Traverse rigidifiée tout au long. |
| 6 : Pneu avant.  | 13 : Longerons en acier tubulaires.    |
| 7 : Réservoir.   |  |



### Châssis à treillis

Il existe aussi un troisième modèle de châssis qui est celui à treillis. La figure 3.11 [33] présente des autocars avec des châssis à treillis.

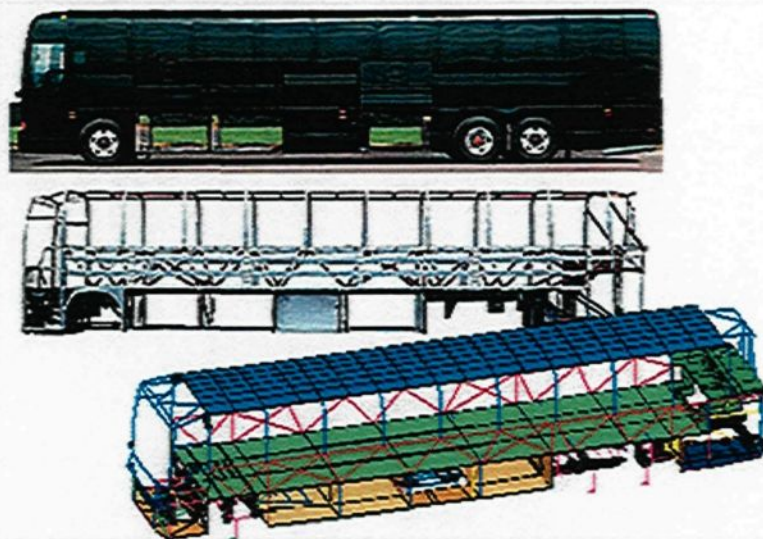


Figure 3.11 : Châssis à treillis d'autocar [33].

Les châssis à treillis et à poutres sont les plus utilisés dans les autocars. Sachant que le modèle du châssis à poutres est très répandu dans les poids lourds avec une conception assez résistante, il sera nécessairement choisi pour concevoir le modèle analytique de base. Par la suite, ce modèle sera étudié également sous l'effet des différentes sollicitations incorporées dans les équations dynamiques du mouvement du modèle analytique.

### 3.3 Modèle du châssis d'autocar choisi pour l'étude

Le modèle du châssis d'autocar choisi pour cette étude est représenté à la figure 3.12. C'est un modèle de châssis à poutres. Il se compose d'un essieu simple à l'avant et d'un essieu tandem en arrière. Leurs positions sont montrées à la figure 3.13.



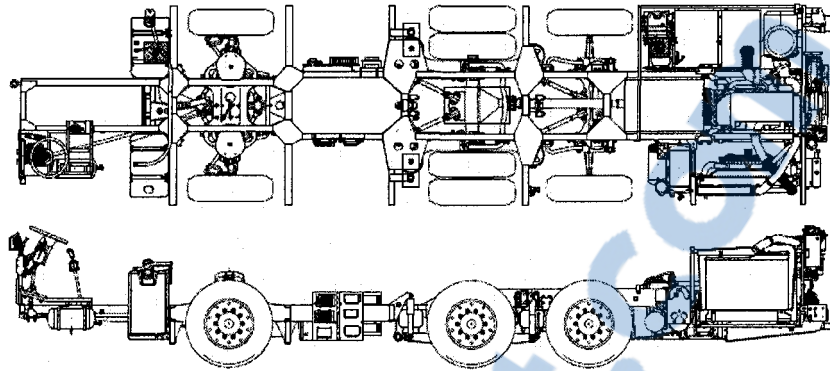


Figure 3.12 : Modèle du châssis de l'autocar [4].

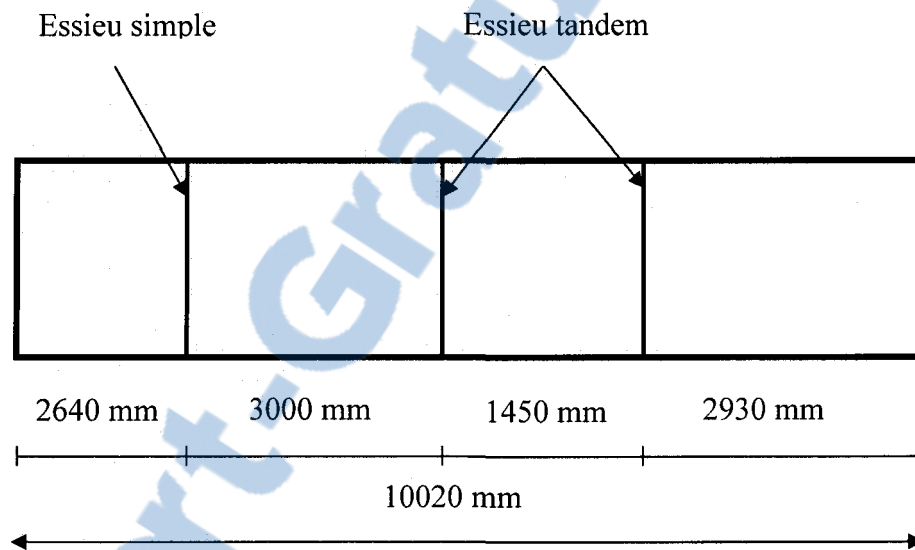


Figure 3.13 : Position des essieux du châssis de l'autocar.

Les dimensions associées à ce modèle sont représentées à la figure 3.14. La longueur totale du châssis est de 10,02 mètres.

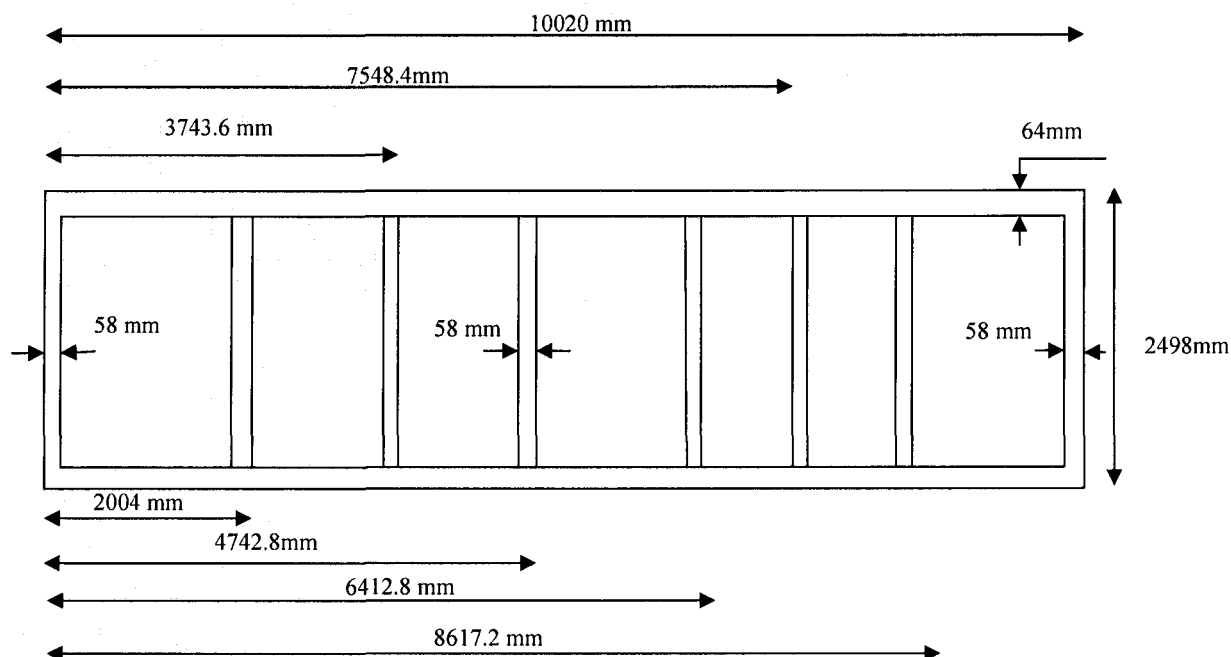


Figure 3.14 : Dimensions du châssis.

Le matériau sélectionné pour la conception du châssis de l'autocar est l'aluminium 6061-T6. Les caractéristiques mécaniques de ce matériau ont conduit à son utilisation très répandue dans le domaine de l'automobile. Les propriétés mécaniques de l'alliage d'aluminium 6061-T6 sont présentées au tableau 3.4.

Tableau 3.4 : Propriétés de l'aluminium 6061-T6.

| Propriétés             | Valeurs                         |
|------------------------|---------------------------------|
| Module de Young        | $73.1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ |
| Densité                | $2700 \text{ kg/m}^3$           |
| Coefficient de poisson | 0.33                            |
| Résistance en traction | 310 MPa                         |
| Limite élastique       | 275 Mpa                         |
| Élongation             | 12%                             |

L'alliage d'aluminium 6061-T6 contient du magnésium et du silicium qui lorsqu'ils sont utilisés en combinaison forment des précipités de  $\text{Mg}_2\text{Si}$ . Ces précipités augmentent les propriétés mécaniques de l'aluminium [34]. C'est la série idéale pour les applications

structurales puisqu'ils se prêtent mieux à la production d'extrusion. La dénomination du T6 de l'alliage d'aluminium 6061-T6 est due au traitement thermique, la mise en solution et le vieillissement artificiels. Elle s'applique aux produits qui ne sont pas travaillés à froid après la mise en solution.

Les normes des limites de chargement suivant les dimensions et la catégorie des essieux pour les châssis sont évaluées selon deux périodes qui sont la période normale et la période de dégel. La limite de chargement du châssis en période normale dans notre cas est égale à 18 000 kg et en période de dégel, elle est à 15 500 kg. Ces limites de chargement s'appliquent au modèle du châssis de la catégorie montrée à la figure 3.15. Pour le cas du châssis étudié, la valeur "d" est égale à 4.45 mètres [16]. Cette dimension est incluse dans la fourche de dimension montrée à la Figure 3.15.

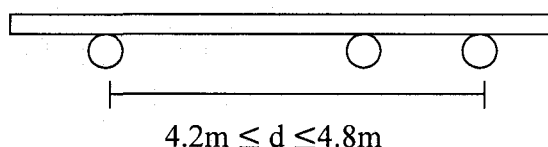


Figure 3.15 : Catégorie du modèle du châssis d'autocar.

Selon le Ministère des Transport du Québec, la masse totale en charge maximale autorisée d'un véhicule routier ou d'un ensemble de véhicules routiers est la plus petite des deux valeurs suivantes :

- La somme des charges autorisées de chacune des catégories d'essieux;
- La limite de masse totale en charge prévue au règlement.

Vu que la limite de la charge totale prévue au règlement est de 25 250 kg, donc la masse totale en charge qui sera autorisée sera celle de la somme des charges autorisées pour chacune des catégories d'essieux soit 18 000 kg. Afin de pouvoir évaluer le chargement statique de l'autocar, les poids des différents éléments majeurs considérés sont montrés ci-dessous :

Réservoir rempli ( $Q_1$ ) : 476 kg

Moteur ( $Q_2$ ) : 1 530 kg

Châssis ( $Q_3$ ) : 404.12 kg

Essieu avant ( $Q_4$ ) : 724 kg

Essieux arrière ( $Q_5$ ) : 1223.66 kg et 560.84 kg

Le chargement statique qui sera appliqué au châssis sera soustrait de la somme des charges autorisées de chacune des catégories d'essieux (18 000 kg). Vu que les masses des différents éléments composant l'infrastructure (le châssis) de l'autocar sont connues, les calculs vont être réalisés comme suit :

$$\text{Chargement statique } Q_s = 18\,000 - (Q_3 + Q_4 + Q_5) = 15\,087.38 \text{ kg} \quad (3.1)$$

$$Q_s = 150\,873.80 \text{ N}$$

$Q_s$  représente le chargement statique total pris pour le cas d'un châssis en aluminium. Dans la répartition des charges, nous avons séparé les charges du moteur et du réservoir. Ces deux dernières seront appliquées dans leurs positions respectives. Le reste du chargement sera appliqué uniformément suivant les poutres principales ainsi que les traverses du châssis comme suit :

$$P = \frac{Q_s}{S_t} \quad (3.2)$$

$P$  : pression [N/m].

$Q_s$  : chargement statique [N].

$S_t$  : surface totale [ $m^2$ ].

$$Q_{s1} = 150\,873.80 - (4\,760 + 15\,300) = 130\,813.80 \text{ N} \quad (3.3)$$

$$S_t = S_1 + S_2 \quad (3.4)$$

$S_1$  : surface des deux poutres principales.

$S_2$  : surface des traverses.

Puisque le châssis se compose de deux poutres principales et de huit traverses, nous aurons :

$$S_1 = (\text{longueur} \times \text{largeur}) \times 2 \quad (3.5)$$

$$S_1 = (0.064 \times 10.02) \times 2 = 1.28 \text{ m}^2$$



$$S_2 = (\text{longueur} \times \text{largeur}) \times 8 \quad (3.6)$$

$$S_2 = (0.058 \times 2.498) \times 8 = 1.16 \, m^2$$

Donc :

$$S_t = S_1 + S_2 = 2.44 \, m^2 \quad (3.7)$$

D'où :

$$P_1 = \frac{Q_{s1}}{S_t} = \frac{130\,813.80}{2.44} = 53\,612.21 \, N/m^2 \quad (3.8)$$

Pour les chargements des parties réservées au moteur et au réservoir, les calculs s'effectueront comme suit :

- Pour le réservoir

$$Q_{s2} = 4760 \, N$$

$$S_{r2} = 1.099 \, m^2$$

Donc,

$$P_2 = \frac{Q_{s2}}{S_2} = \frac{4760}{1.099} = 4331.21 \, N/m^2 \quad (3.9)$$

- Pour le moteur,

$$Q_{s3} = 15\,300 \, N$$

$$S_3 = 2.832 \, m^2$$

Donc,

$$P_3 = \frac{Q_{s3}}{S_3} = \frac{15\,300}{2.832} = 5402.54 \, N/m^2 \quad (3.10)$$

### Remarque

Dans le cas où nous allons considérer un châssis en acier, les mêmes calculs seront effectués. La seule différence sera au niveau du poids du châssis à considérer. Pour un châssis en acier 710 C de mêmes dimensions que celui fait en aluminium 6061-T6, la masse totale sera de 1167.46 kg.

La figure 3.16 [35] présente un schéma représentatif de la répartition du chargement statique prise pour l'autocar. Ce modèle de répartition de charge développé dans cette étude a été utilisé pour le calcul des inerties de l'autocar que nous allons voir dans le chapitre suivant.

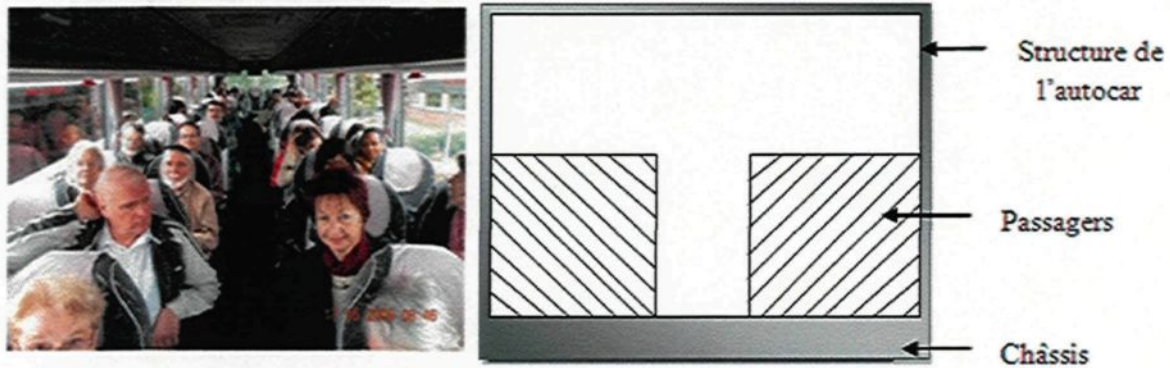


Figure 3.16 : Schéma représentatif du chargement réel d'un autocar [35]

### 3.4 Conclusion

Le service des transports du Canada exige un certain confort surtout pour les autocars. Pour mieux garder ce prestige tout en répondant aux programmes d'allégements, le châssis qui est l'élément principal de l'autocar a été étudié. Le modèle du châssis choisi pour cette étude est celui à essieux simples en avant et tandem en arrière. Le chargement est beaucoup mieux réparti avec ce modèle, en plus c'est le plus utilisé pour les modèles d'autocars.

Pour savoir la charge maximale autorisée d'un véhicule routier, nous nous sommes référés aux lois émises par le ministère de transport du Québec. Le matériau sélectionné pour cette étude est le 6061-T6. La combinaison du magnésium avec le silicium lui offre une plus grande résistance à la corrosion à un prix abordable. Les dimensions prises pour le châssis d'autocar sont réelles.

# **CHAPITRE 4**

## **DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE DYNAMIQUE DE L'AUTOCAR**

### **4.1 Introduction**

Le comportement dynamique de l'autocar sera étudié dans ce chapitre. Au départ, un modèle simplifié de l'autocar à une dimension sera analysé. Ce modèle comprend la partie qui est directement reliée au châssis. Un deuxième modèle du châssis sera étudié, mais cette fois-ci, les masses des ensembles de suspension seront prises en considération qui est le modèle à deux dimensions. Un troisième modèle sera évalué en prenant encore plus de paramètres en considération. C'est le modèle à trois dimensions.

Les différents types de mouvement du châssis causé par l'excitation de la route seront étudiés. Dans les modèles à une et à deux dimensions, le bondissement et le tangage de l'autocar seront évalués. Le mouvement du roulis sera étudié dans le cas du modèle à trois dimensions en plus des deux autres mouvements évalués avec les deux premiers systèmes. Ces trois systèmes seront traités en détail dans les parties qui suivront. Les différents angles de rotations que subit le châssis durant son exploitation sont représentés ci-dessous :

- **Roulis**

C'est un mouvement qui correspond à des oscillations selon l'axe longitudinal, il est provoqué par les sollicitations agissant sur le côté du châssis. La figure 4.1 montre le mouvement du roulis.



Figure 4.1 : Mouvement du roulis.

- **Tangage**

Ce mouvement est induit par les sollicitations qui agissent suivant l'axe transversal. C'est un mouvement du haut vers le bas. Il est provoqué par l'augmentation de l'amplitude. La figure 4.2 illustre le mouvement du tangage.

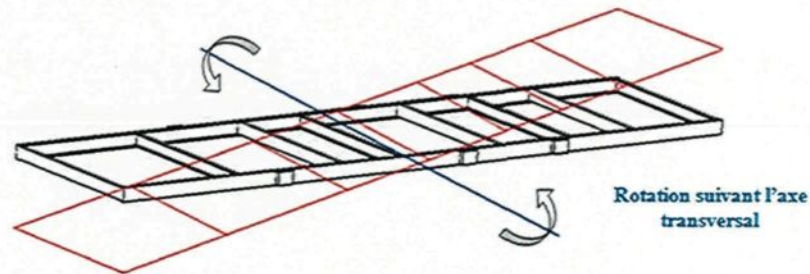


Figure 4.2 : Mouvement du tangage.

- **Lacet**

Le mouvement du lacet est induit par le roulis, il est suivant l'axe vertical. La figure 4.3 représente le mouvement du lacet.

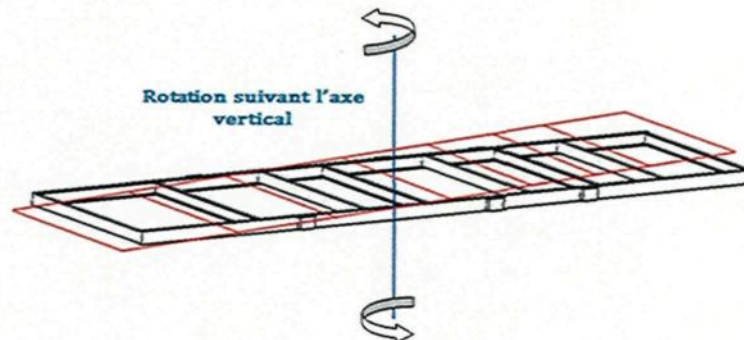


Figure 4.3 : Mouvement du lacet.



Dans cette présente étude, les mouvements du roulis, tangage et bondissement seront pris en compte.

## 4.2 Profil de la route

Les suspensions des autocars servent à atténuer les perturbations causées par les imperfections de la route. Pour que la suspension soit efficace, il faut préciser la route sur laquelle le véhicule sera utilisé. Les travaux de M. Bouazara et al [36] utilisant la densité spectrale de puissance (Power Spectral Density, PSD) pour caractériser le profil de la route sont définis par la fonction  $X(t)$  en admettant que la surface de route est un processus aléatoire, stationnaire, gaussien et centré. Certes, toutes les propriétés statistiques sont invariables, la loi de répartition de la variable  $X(t)$  et une loi gaussienne et la moyenne de  $X(t)$  pour tout  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0, T]$  est nulle.

Le processus  $X(t)$  en fonction de la densité spectrale de puissance est donnée par :

$$X(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{4 S_{XX}(\omega_i) \Delta\omega} \cos(\omega_i t - \phi_i) \quad (4.1)$$

Avec :

$\omega_i$  : fréquence circulaire.

$\phi_i$  : phase.

$S_{XX}$  : densité spectrale de puissance.

Le processus  $X(t)$  en fonction de la densité spectrale de puissance est montré à la figure 4.4. La figure 4.5 montre la densité spectrale de puissance pour une autoroute, une route principale et une route secondaire. L'amplitude varie selon le type de route, mais la densité spectrale de puissance présente toujours un plateau pour les basses fréquences (jusqu'à 1 Hz) et diminue graduellement lorsque les fréquences augmentent.

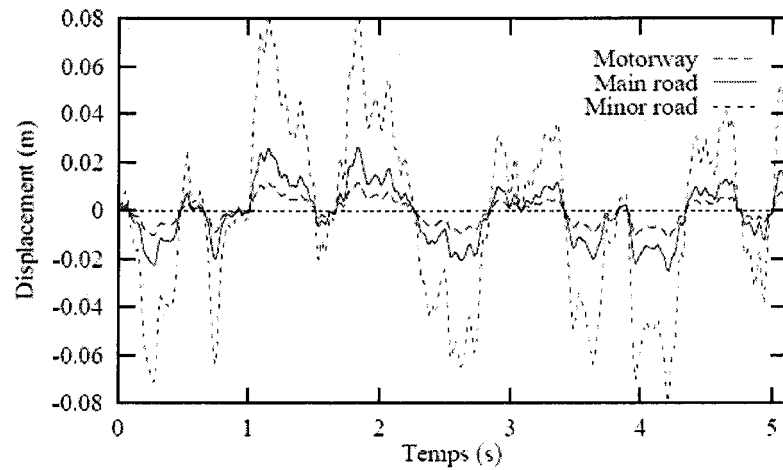


Figure 4.4 : Profil de la route en fonction du temps.

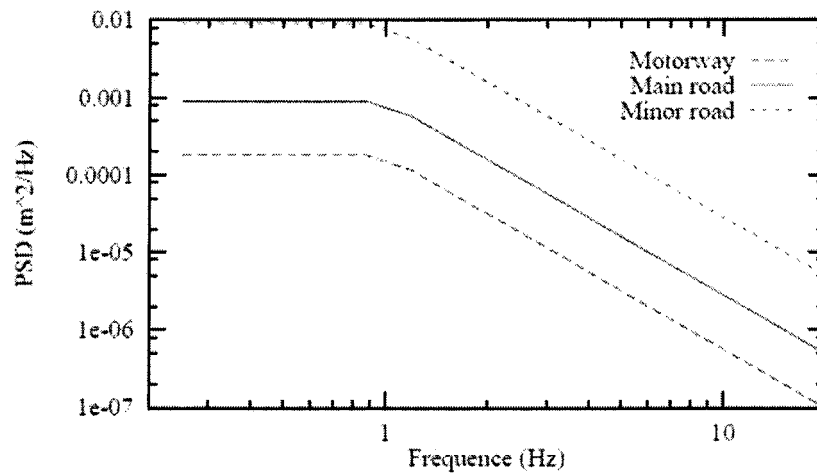


Figure 4.5 : Densité spectrale de la route (PSD).

- **Modèle dynamique du châssis**

Afin de pouvoir effectuer une étude dynamique de ce système, l'ensemble châssis et suspensions de l'autocar sont représentés à la figure 4.6. Le châssis est excité par des forces provenant de la route qui peuvent être de nature sinusoïdales, échelons ou aléatoires. Ces forces agiront à travers les suspensions pour arriver au cadre du châssis. Le modèle de suspension choisi pour cette étude comprend une masse suspendue sur un ressort de raideur ( $k_{ri}$ ) et reliée au châssis par un amortisseur ( $b_i$ ) et un ressort ( $k_i$ ).

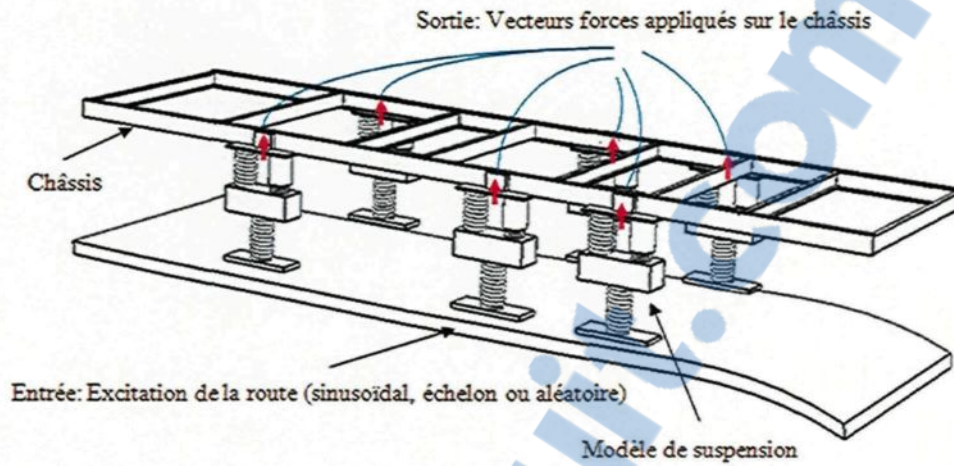


Figure 4.6 : Représentation dynamique du châssis.

### 4.3 Modèle à deux dimensions simplifié

Le modèle de l'autocar a été simplifié en une poutre soumise à un déplacement vertical et à une rotation. Le schéma représentatif de ce système est montré à la figure 4.7.

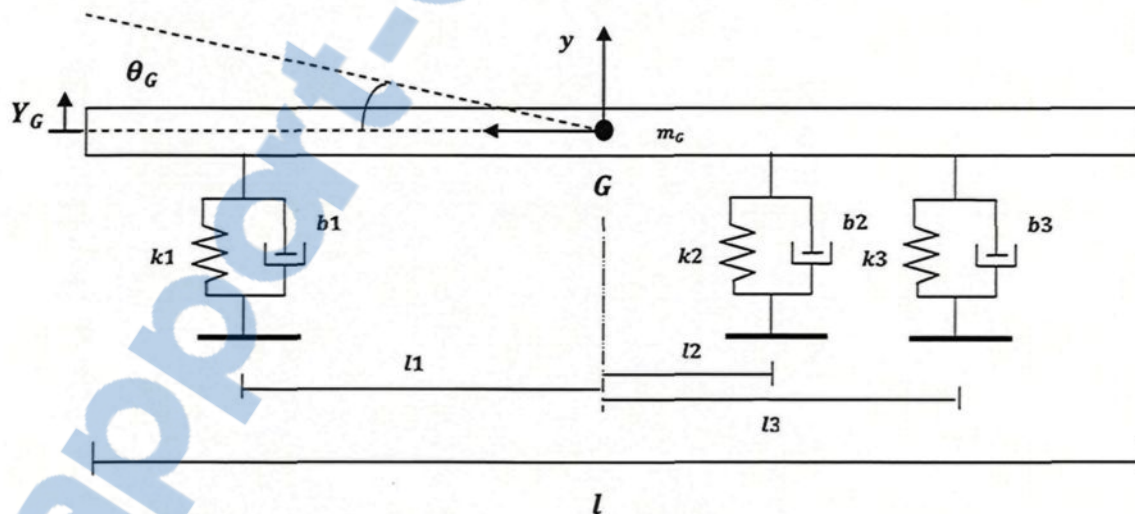


Figure 4.7 : Schéma 2-D simplifié de l'autocar.

Le diagramme des corps libres de ce modèle est présenté à la figure 4.8. Les forces dues à l'amortissement et à la raideur des ressorts ont été représentées ainsi que les forces de bondissement et de tangage.

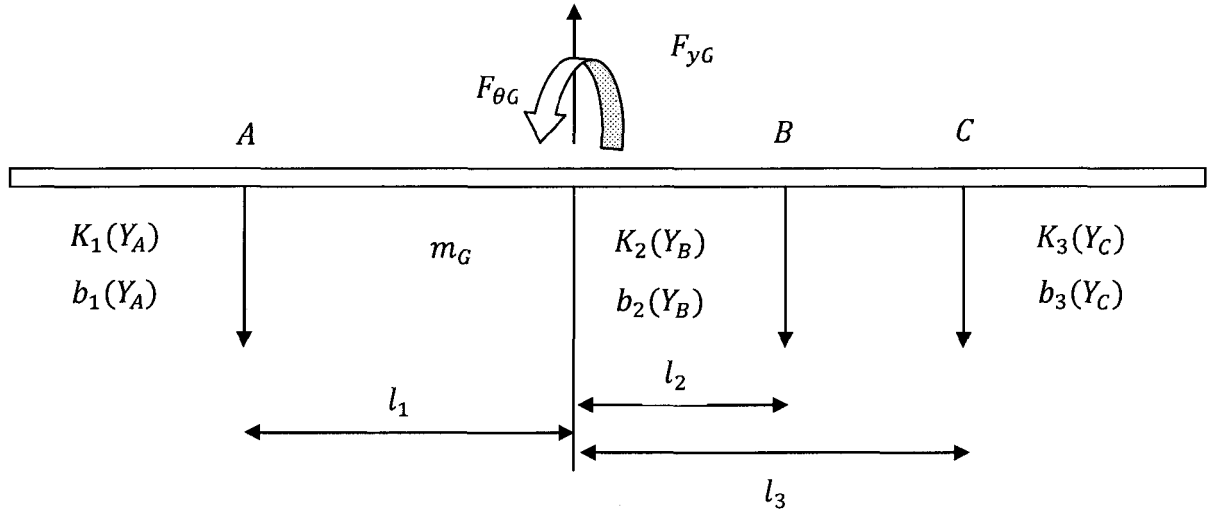


Figure 4.8 : Diagramme des corps libres.

### Équations de mouvement du nouveau système

- Nœud A

$$F_{k1} = k_1[(y_G + l_1 \theta_G) - U_1] \quad (4.2)$$

$$F_{b1} = b_1[(\dot{y}_G + l_1 \dot{\theta}_G) - U_1]$$

- Nœud B

$$F_{k2} = k_2[(y_G + l_2 \theta_G) - U_2] \quad (4.3)$$

$$F_{b2} = b_2[(\dot{y}_G + l_2 \dot{\theta}_G) - U_2]$$

- Nœud C

$$F_{k3} = k_3[(y_G + l_3 \theta_G) - U_3] \quad (4.4)$$

$$F_{b3} = b_3[(\dot{y}_G + l_3 \dot{\theta}_G) - U_3]$$

D'après le chargement statique effectué au chapitre précédent, nous avons estimé les inerties dues au tangage et au roulis de l'autocar au complet. Ces inerties ont été calculées à l'aide du logiciel SolidWorks et elles ont été prises en considération dans les calculs. Le modèle de l'autocar avec masse de 15 491.5 kg avec les positions des axes d'inerties est présenté à la figure 4.9. Durant la conception, les inerties ont été estimées en prenant en compte le chargement statique représenté à la figure 3.16.

Où :

$$I_x = 1\,490\,951.42 \text{ kg} \times \text{m}^2 \text{ (Inertie due au tangage).}$$

$$I_y = 20\,000.64 \text{ kg} \times \text{m}^2 \text{ (Inertie due au roulis).}$$



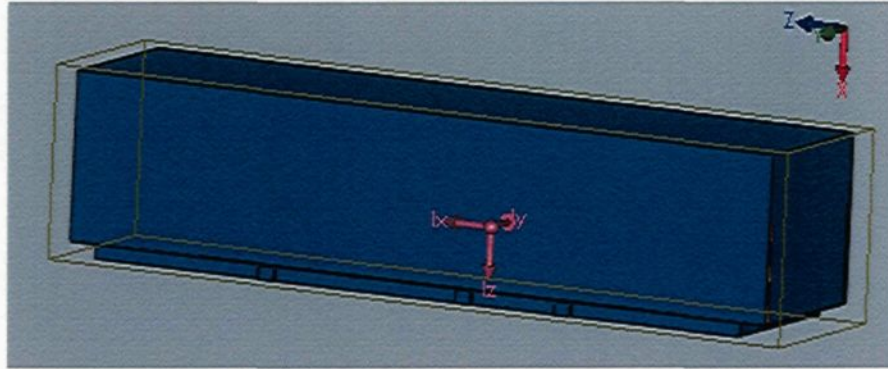


Figure 4.9 : Position des axes d'inertie de l'autocar étudié.

Les équations générales dues aux mouvements de translation et de rotation de l'autocar sont données ci-dessous :

➤ **Mouvement de translation**

$$m_G \ddot{y}_G = -k_1[(y_G + l_1 \theta_G) - U_1] - b_1[(\dot{y}_G + l_1 \dot{\theta}_G) - U_1] - k_2[(y_G + l_2 \theta_G) - U_2] - b_2[(\dot{y}_G + l_2 \dot{\theta}_G) - U_2] - k_3[(y_G + l_3 \theta_G) - U_3] - b_3[(\dot{y}_G + l_3 \dot{\theta}_G) - U_3] \quad (4.5)$$

➤ **Mouvement de rotation**

$$I_G \ddot{\theta}_G = -l_1 [(k_1((y_G + l_1 \theta_G) - U_1) + b_1((\dot{y}_G + l_1 \dot{\theta}_G) - U_1))] + l_2 [k_2((y_G + l_2 \theta_G) - U_2) + b_2((\dot{y}_G + l_2 \dot{\theta}_G) - U_2)] + l_3 [k_3((y_G + l_3 \theta_G) - U_3) + b_3((\dot{y}_G + l_3 \dot{\theta}_G) - U_3)] \quad (4.6)$$

En posant  $\begin{cases} x_1 = y_G \\ x_2 = \dot{y}_G \\ x_3 = \theta_G \\ x_4 = \dot{\theta}_G \end{cases}$

Alors, les équations du mouvement s'écriront comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ m_G \dot{x}_2 = -a x_1 - b x_2 - c x_3 - d x_4 + k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 + b_1 \dot{U}_1 + b_2 \dot{U}_2 + b_3 \dot{U}_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ I_G \dot{x}_4 = -a' x_1 - b' x_2 - c' x_3 - d' x_4 + l_1 (k_1 U_1 + b_1 \dot{U}_1) - l_2 (k_2 U_2 + b_2 \dot{U}_2) - l_3 (k_3 U_3 + b_3 \dot{U}_3) \end{cases}$$

Le système obtenu est de la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.7)$$



$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{m_G} a & \frac{-1}{m_G} b & \frac{-1}{m_G} c & \frac{-1}{m_G} d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-a'}{I_G} & \frac{-b'}{I_G} & \frac{-c'}{I_G} & \frac{-d'}{I_G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 l_1 & k_2 l_2 & k_3 l_3 & b_1 l_1 & b_2 l_2 & b_3 l_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a &= k_1 + k_2 + k_3 & a' &= k_1 l_1 - k_2 l_2 - k_3 l_3 \\ b &= b_1 + b_2 + b_3 & b' &= b_1 l_1 - b_2 l_2 - b_3 l_3 \\ c &= k_1 l_1 - k_2 l_2 - k_3 l_3 & c' &= k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_3^2 \\ d &= b_1 l_1 - b_2 l_2 - b_3 l_3 & d' &= b_1 l_1^2 + b_2 l_2^2 + b_3 l_3^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le tableau 4.1 représenté ci-dessous, montre tous les paramètres du modèle étudié avec leurs valeurs numériques.

Tableau 4.1 : Paramètres du modèle 2-D simplifié.

| Définition                  | Symbole | Unité    | Valeur     |
|-----------------------------|---------|----------|------------|
| Masse de l'autocar          | $m_G$   | $kg$     | 15 491.5   |
| Moment d'inertie du tangage | $I_G$   | $kg.m^2$ | 149 951.42 |
| Distance c.g -roue1         | $l_1$   | $m$      | 2.25       |
| Distance c.g -roue2         | $l_2$   | $m$      | 0.81       |
| Distance c.g -roue3         | $l_3$   | $m$      | 2.25       |
| Rigidité de suspension 1    | $k_1$   | $N/m$    | 374 000    |
| Rigidité de suspension 2    | $k_2$   | $N/m$    | 435 000    |
| Rigidité de suspension 3    | $k_3$   | $N/m$    | 435 000    |
| Amortissement suspension 1  | $b_1$   | $N.s/m$  | 128 50     |
| Amortissement suspension 2  | $b_2$   | $N.s/m$  | 128 50     |
| Amortissement suspension 3  | $b_3$   | $N.s/m$  | 128 50     |

En résolvant ce système d'équations par Maple, le résultat obtenu est montré à l'annexe A. Le système de l'équation (4.8) a été résolu sur Matlab, en déterminant les fonctions de transfert. La figure 4.10 correspond à la fonction de transfert de  $x_1$ . Sachant que  $x_1$  représente

la position verticale de l'autocar. La fréquence maximale obtenue à cette position est de 1.34 Hz. La figure 4.11 présente la fréquence maximale de la fonction de transfert de  $x_3$  qui est égale à 1.31 Hz. C'est la fréquence propre de l'autocar 2-D simplifié dû au tangage. Les figures 4.12 et 4.13 présentent les réponses à l'excitation avec un échelon de 2.5 cm dans les cas du bondissement et du tangage respectivement.

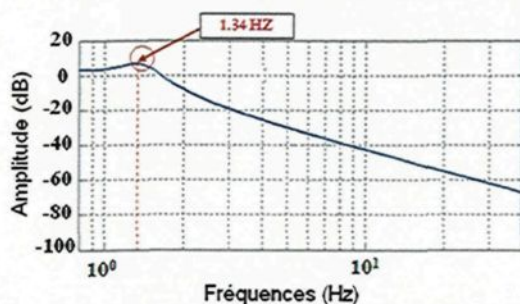


Figure 4.10 : Amplitude de l'autocar (Position verticale).

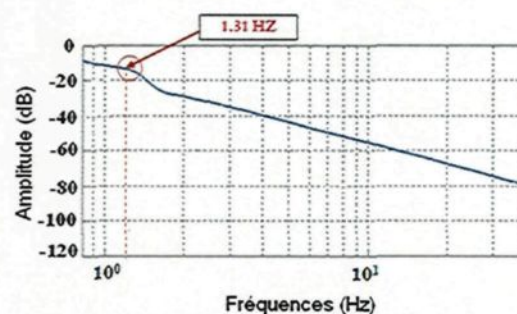


Figure 4.11 : Amplitude de l'autocar (Tangage).

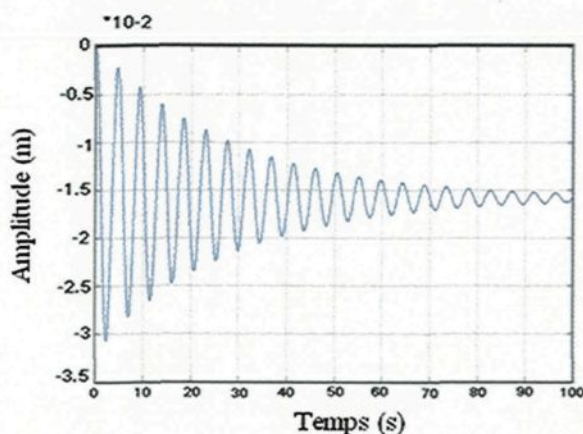


Figure 4.12 : Déplacement vertical de l'autocar.

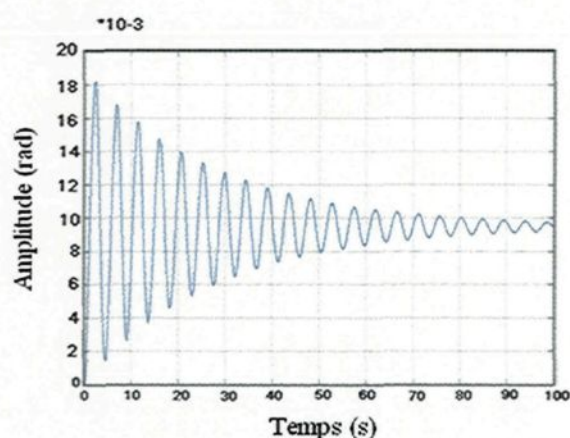


Figure 4.13 : Déplacement angulaire de l'autocar (Tangage).

## 4.4 Modèle à deux dimensions

Dans cette section, nous allons étudier le modèle à deux dimensions de l'autocar. Ce modèle comprend cinq degrés de liberté. Deux degrés de liberté revenant à l'autocar qui sont le déplacement vertical et le déplacement angulaire (tangage) et trois degrés de liberté revenant aux déplacements verticaux des suspensions. Le modèle 2-D du système est représenté à la figure 4.14. Les différents paramètres de ce modèle sont représentés au tableau 4.2.

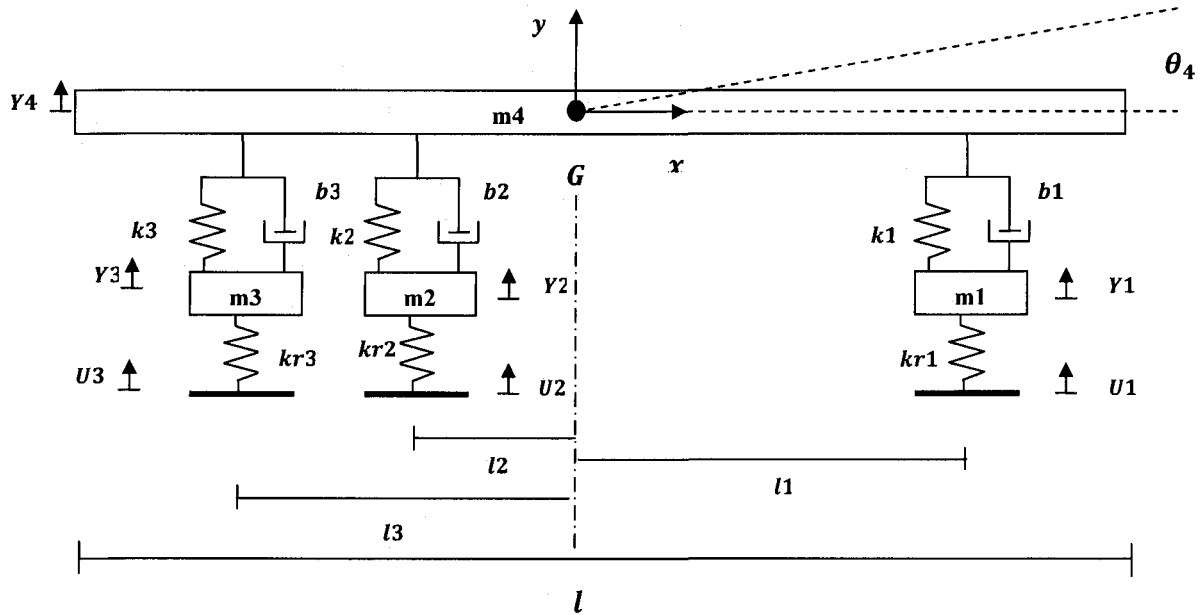


Figure 4.14 : Schéma 2-D de l'autocar.

Tel que :

$l$  : longueur totale du châssis de l'autocar

$l_1$  : distance longitudinale séparant le centre de masse du châssis et l'ensemble roue 1.

$l_2$  : distance séparant le centre de masse du châssis et l'ensemble roue 2.

$l_3$  : distance séparant le centre de masse du châssis et l'ensemble roue 3.

$m_4$  : masse de l'autocar sous chargement statique.

$m_1$  : masse de l'ensemble roue 1.

$m_2$  : masse de l'ensemble roue 2.

$m_3$  : masse de l'ensemble roue 3.

$k_i$  : rigidité du ressort pour la suspension de l'ensemble roue  $i$ .

$k_{ri}$  : rigidité du ressort du pneu de l'ensemble roue  $i$ .

$b_i$  : amortissement de la suspension des ensembles roue  $i$ .

$\theta_i$  : angle de rotation de l'élément  $i$  (tangage).

$U_i$  : position de la chaussée à la roue  $i$ .

$Y_{1,2,3}$  : déplacement vertical des essieux.



$Y_4$  : déplacement vertical de l'autocar.

Tableau 4.2 : Paramètres du modèle 2-D.

| Définition                                      | Symbole  | Unité    | Valeur     |
|---|----------|----------|------------|
| Masse de l'autocar                              | $m_G$    | $kg$     | 15 491.5   |
| Moment d'inertie du tangage                     | $I_G$    | $kg.m^2$ | 149 951.42 |
| Moment d'inertie du roulis                      |          | $kg.m^2$ | 20 000.64  |
| Distance longitudinale c.g –<br>roue1 ou roue 4 | $l_1$    | $m$      | 2.25       |
| Distance longitudinale c.g –<br>roue2 ou roue 5 | $l_2$    | $m$      | 0.81       |
| Distance longitudinale c.g –<br>roue3 ou roue 6 | $l_3$    | $m$      | 2.25       |
| Rigidité de suspension 1                        | $k_1$    | $N/m$    | 374 000    |
| Rigidité de suspension 2                        | $k_2$    | $N/m$    | 435 000    |
| Rigidité de suspension 3                        | $k_3$    | $N/m$    | 435 000    |
| Amortissement suspension 1                      | $b_1$    | $N.s/m$  | 128 50     |
| Amortissement suspension 2                      | $b_2$    | $N.s/m$  | 128 50     |
| Amortissement suspension 3                      | $b_3$    | $N.s/m$  | 128 50     |
| Rigidité du pneu $i$                            | $k_{ri}$ | $N/m$    | 2800000    |
| Masse de la suspension 1                        | $m_1$    | $kg$     | 362        |
| Masse de la suspension 2                        | $m_2$    | $kg$     | 611.83     |
| Masse de la suspension 3                        | $m_3$    | $kg$     | 280.42     |

### Équation du mouvement

Nous allons écrire les équations du mouvement des trois ensembles de roues séparément puis le châssis au complet.

#### a) Équations du mouvement de l'ensemble roue1

Nous sommes dans le cas d'un seul degré de liberté, car nous avons le déplacement vertical seulement. Les équations du mouvement peuvent donc s'écrire en utilisant la deuxième loi de Newton suivante :

$$\sum F = m_i \ddot{y}_i \quad (4.10)$$

Dans le cas d'un déplacement positif des masses( $m_1$ ,  $m_4$ ) et d'une rotation positive $\theta_4$ , les forces vont agir sur l'ensemble roue 1 de la figure 4.15 comme suit :

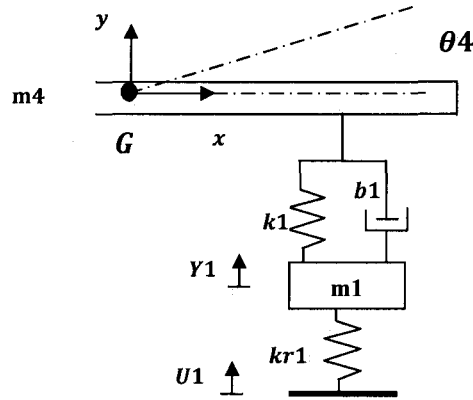


Figure 4.15 : Modèle 2-D, ensemble roue 1.

Pour le pneu

$$F_{kr1} = k_{r1}(y_1 - U_1)$$

Pour la suspension

$$F_{k1} = k_1[y_1 - (y_4 + l_1\theta_4)]$$

$$F_{b1} = b_1[\dot{y}_1 - (\dot{y}_4 + l_1\dot{\theta}_4)] \quad (4.11)$$

#### Équation du mouvement de la masse 1

Les forces appliquées au niveau de la roue 1 et de la suspension sont négatives, car elles s'opposent au mouvement.

$$\sum F = m_1\ddot{y}_1 \quad (4.12)$$

$$-k_{r1}(y_1 - U_1) - k_1[y_1 - (y_4 + l_1\theta_4)] - b_1[\dot{y}_1 - (\dot{y}_4 + l_1\dot{\theta}_4)] = m_1\ddot{y}_1$$

#### **b) Équations du mouvement de l'ensemble roue 2**

La figure 4.16 montre l'ensemble roue 2 de l'autocar. Dans le cas d'un déplacement positif des masses( $m_2$ ,  $m_4$ ) et d'une rotation positive $\theta_4$ , les forces vont agir comme suit :

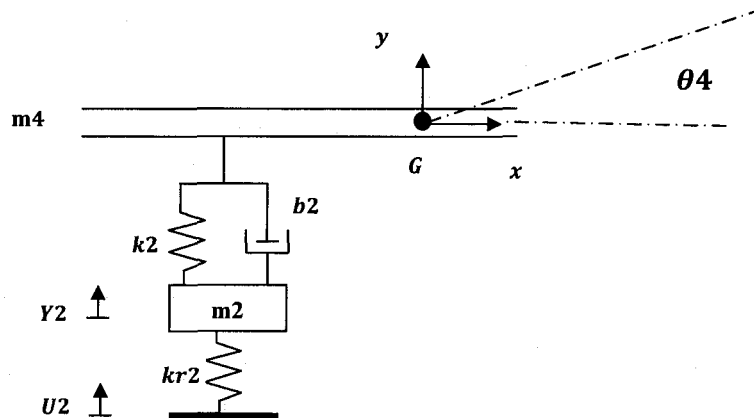


Figure 4.16 : Modèle 2-D, ensemble roue 2.

Pour le pneu

$$F_{kr2} = k_{r2}(y_2 - U_2)$$

Pour la suspension

$$\begin{aligned} F_{k2} &= k_2[y_2 - (y_4 - l_2\theta_4)] \\ F_{b2} &= b_2[\dot{y}_2 - (\dot{y}_4 - l_2\dot{\theta}_4)] \end{aligned} \quad (4.13)$$

### Équation du mouvement de la masse 2

Les forces appliquées au niveau de la roue 2 et de la suspension sont négatives, car elles s'opposent au mouvement.

$$\sum F = m_2\ddot{y}_2 \quad (4.14)$$

$$-k_{r2}(y_2 - U_2) - k_2[y_2 - (y_4 - l_2\theta_4)] - b_2[\dot{y}_2 - (\dot{y}_4 - l_2\dot{\theta}_4)] = m_2\ddot{y}_2$$

### **c) Équations du mouvement de l'ensemble roue 3**

Dans le cas d'un déplacement positif des masses( $m_3$ ,  $m_4$ ) et d'une rotation positive $\theta_4$ , les forces vont agir sur l'ensemble de la roue 3 de la figure 4.17 comme suit :

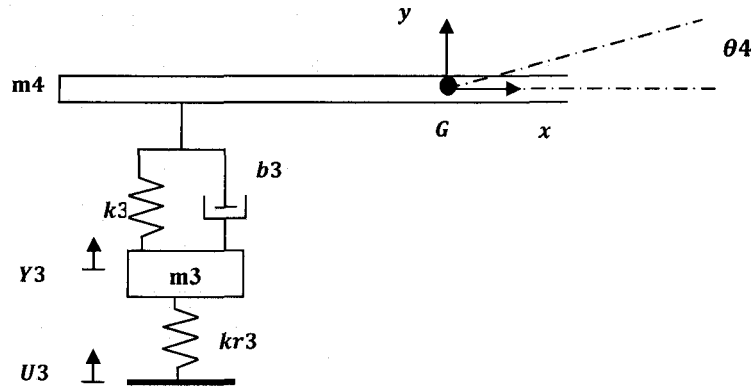


Figure 4.17 : Modèle 2-D, ensemble roue 3.

Pour le pneu

$$F_{kr3} = k_{r3}(y_3 - U_3)$$

Pour la suspension

$$\begin{aligned} F_{k3} &= k_3[y_3 - (y_4 - l_3\theta_4)] \\ F_{b3} &= b_3[\dot{y}_3 - (\dot{y}_4 - l_3\dot{\theta}_4)] \end{aligned} \quad (4.15)$$

### Équation du mouvement de la masse 3

Les forces appliquées au niveau de la roue 2 et de la suspension sont négatives, car elles s'opposent au mouvement.

$$\sum F = m_3\ddot{y}_3 \quad (4.16)$$

$$-k_{r3}(y_3 - U_3) - k_3[y_3 - (y_4 - l_3\theta_4)] - b_3[\dot{y}_3 - (\dot{y}_4 - l_3\dot{\theta}_4)] = m_3\ddot{y}_3$$

#### d) Équations du mouvement de la masse 4

Nous avons deux degrés de liberté. Un mouvement de translation et un autre de rotation qui est le tangage. La deuxième loi de Newton peut s'appliquer dans ce cas par rapport au centre de masse de l'autocar. La figure 4.18 présente le modèle 2-D de l'autocar.

$$\sum F = m_4 \ddot{y}_4 \quad \sum M = I_4 \ddot{\theta}_4 \quad (4.17)$$

Pour un déplacement positif des masses ( $m_1, m_2, m_3$  et  $m_4$ ) et une rotation positive  $\theta_4$ , les forces agissant sur le châssis de l'autocar sont :

#### Mouvements de translation

##### Suspension 1

$$F_{k1} = k_1[(y_4 + l_1\theta_4) - y_1] \quad (4.18)$$

$$F_{b1} = b_1[(\dot{y}_4 + l_1\dot{\theta}_4) - \dot{y}_1]$$

##### Suspension 2

$$F_{k2} = k_2[(y_4 - l_2\theta_4) - y_2] \quad (4.19)$$

$$F_{b2} = b_2[(\dot{y}_4 - l_2\dot{\theta}_4) - \dot{y}_2]$$

##### Suspension 3

$$F_{k3} = k_3[(y_4 - l_3\theta_4) - y_3] \quad (4.20)$$

$$F_{b3} = b_3[(\dot{y}_4 - l_3\dot{\theta}_4) - \dot{y}_3]$$

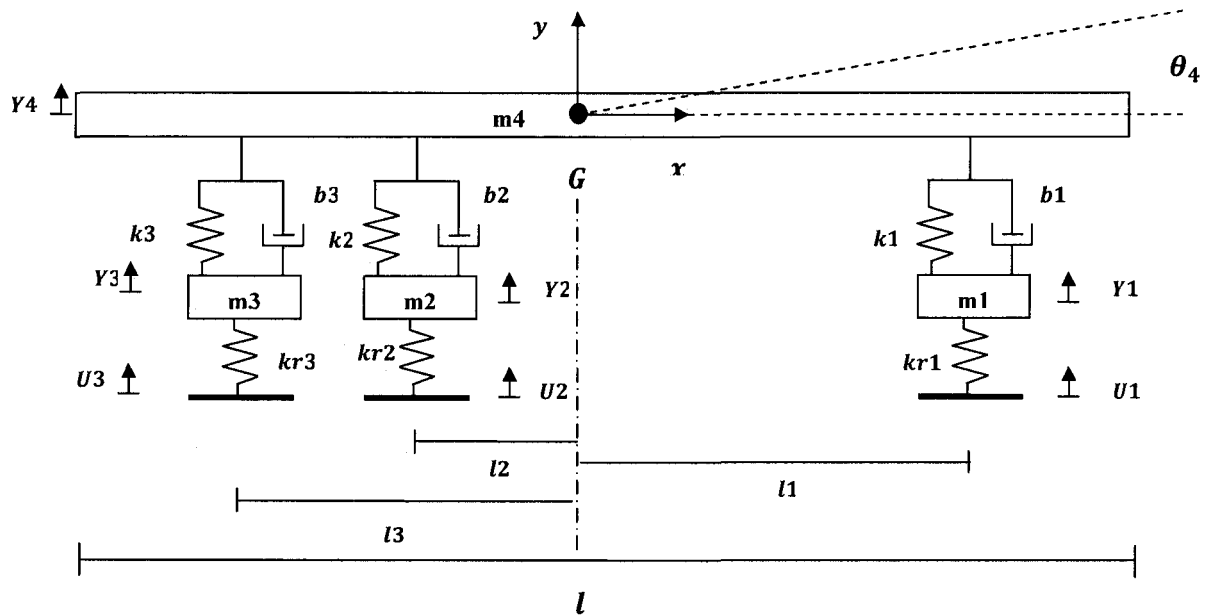


Figure 4.18 : Modèle 2-D de l'autocar.



Si nous considérons le déplacement positif de la masse 4, de plus grande amplitude par rapport aux autres masses, alors tous les éléments vont tendre à s'opposer à ce mouvement. Les forces agissantes sont donc négatives. Le mouvement de translation est donc décrit par :

$$m_4 \ddot{y}_4 = -[(y_4 + l_1 \theta_4) - y_1]k_1 - [(\dot{y}_4 + l_1 \dot{\theta}_4) - \dot{y}_1]b_1 - [(y_4 - l_2 \theta_4) - y_2]k_2 - [(\dot{y}_4 - l_2 \dot{\theta}_4) - \dot{y}_2]b_2 - [(y_4 - l_3 \theta_4) - y_3]k_3 - [(\dot{y}_4 - l_3 \dot{\theta}_4) - \dot{y}_3]b_3 \quad (4.21)$$

### Mouvement de rotation

#### Suspension 1

$$\begin{aligned} M_{k1} &= k_1 l_1 [(y_4 + l_1 \theta_4) - y_1] \\ M_{b1} &= b_1 l_1 [(\dot{y}_4 + l_1 \dot{\theta}_4) - \dot{y}_1] \end{aligned} \quad (4.22)$$

#### Suspension 2

$$\begin{aligned} M_{k2} &= k_2 l_2 [(y_4 - l_2 \theta_4) - y_2] \\ M_{b2} &= b_2 l_2 [(\dot{y}_4 - l_2 \dot{\theta}_4) - \dot{y}_2] \end{aligned} \quad (4.23)$$

#### Suspension 3

$$\begin{aligned} M_{k3} &= k_3 l_3 [(y_4 - l_3 \theta_4) - y_3] \\ M_{b3} &= b_3 l_3 [(\dot{y}_4 - l_3 \dot{\theta}_4) - \dot{y}_3] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Pour un déplacement plus grand de la masse 4, tous les autres éléments tendent à favoriser la rotation positive du châssis de l'autocar sauf les éléments de la première suspension qui s'opposent à cette rotation. Le mouvement de rotation est donc décrit par :

$$I_4 \ddot{\theta}_4 = -l_1 [(y_4 + l_1 \theta_4 - y_1)k_1 - (\dot{y}_4 + l_1 \dot{\theta}_4 - \dot{y}_1)b_1] + l_2 [(y_4 - l_2 \theta_4 - y_2)k_2 + (\dot{y}_4 - l_2 \dot{\theta}_4 - \dot{y}_2)b_2] + l_3 [(y_4 - l_3 \theta_4 - y_3)k_3 + (\dot{y}_4 - l_3 \dot{\theta}_4 - \dot{y}_3)b_3] \quad (4.25)$$

Nous avons les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{aligned} I_4 \ddot{\theta}_4 &= -l_1 [(y_4 + l_1 \theta_4 - y_1)k_1 - (\dot{y}_4 + l_1 \dot{\theta}_4 - \dot{y}_1)b_1] + l_2 [(y_4 - l_2 \theta_4 - y_2)k_2 + (\dot{y}_4 - l_2 \dot{\theta}_4 - \dot{y}_2)b_2] + l_3 [(y_4 - l_3 \theta_4 - y_3)k_3 + (\dot{y}_4 - l_3 \dot{\theta}_4 - \dot{y}_3)b_3] \\ m_4 \ddot{y}_4 &= -[(y_4 + l_1 \theta_4) - y_1]k_1 - [(\dot{y}_4 + l_1 \dot{\theta}_4) - \dot{y}_1]b_1 - [(y_4 - l_2 \theta_4) - y_2]k_2 - [(\dot{y}_4 - l_2 \dot{\theta}_4) - \dot{y}_2]b_2 - [(y_4 - l_3 \theta_4) - y_3]k_3 - [(\dot{y}_4 - l_3 \dot{\theta}_4) - \dot{y}_3]b_3 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 = -k_{r3}(y_3 - U_3) - k_3[y_3 - (y_4 - l_3 \theta_4)] - b_3[\dot{y}_3 - (\dot{y}_4 - l_3 \dot{\theta}_4)]$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -k_{r2}(y_2 - U_2) - k_2[y_2 - (y_4 - l_2 \theta_4)] - b_2[\dot{y}_2 - (\dot{y}_4 - l_2 \dot{\theta}_4)]$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -k_{r1}(y_1 - U_1) - k_1[y_1 - (y_4 + l_1 \theta_4)] - b_1[\dot{y}_1 - (\dot{y}_4 + l_1 \dot{\theta}_4)]$$

En effectuant le changement de variable :

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, & x_2 &= \dot{y}_1, & x_3 &= y_2, & x_4 &= \dot{y}_2, & x_5 &= y_3, \\ x_6 &= \dot{y}_3, & x_7 &= y_4, & x_8 &= \dot{y}_4, & x_9 &= \theta_4, & x_{10} &= \dot{\theta}_4 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Le système d'équations du modèle 2-D du châssis est présenté à l'annexe A. Ce système d'équations a été résolu sur Matlab. Il est sous la même forme que le modèle à une dimension sauf qu'ici nous avons 10 inconnus. Tels que,  $x_1, x_3$  et  $x_5$  représentent les déplacements verticaux des essieux avant et arrières.  $x_7$  et  $x_9$  représentent respectivement le déplacement vertical et angulaire (tangage) de l'autocar. La fréquence maximale due au déplacement de l'essieu avant de la figure 4.19 est de 10.3 Hz. La 4.20 présente la fréquence maximale due au déplacement vertical de l'autocar 2-D qui est égale à 1.31 Hz. Le déplacement vertical de ce dernier correspond à la fonction de transfert de  $x_7$ . L'amplitude de l'autocar 2-D suivant la position angulaire est montrée à la figure 4.21. La fréquence maximale dans ce cas-là est de 1.33 Hz.

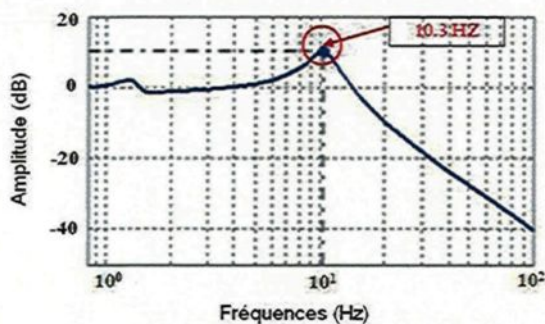


Figure 4.19 : Amplitude de l'essieu avant (Roue 1).

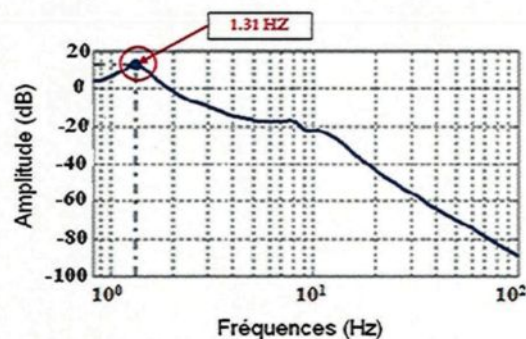


Figure 4.20 : Amplitude de l'autocar (Position verticale).

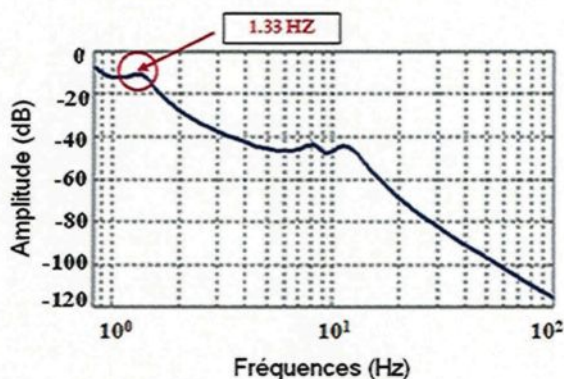


Figure 4.21 : Amplitude de l'autocar (Position angulaire).

La figure 4.22 présente la réponse à l'excitation avec un échelon de 2.5 cm au niveau de l'essieu avant. Les figures 4.23 et 4.24 montrent les réponses à l'excitation avec un échelon de 2.5 cm dans les cas du bondissement et du tangage respectivement.

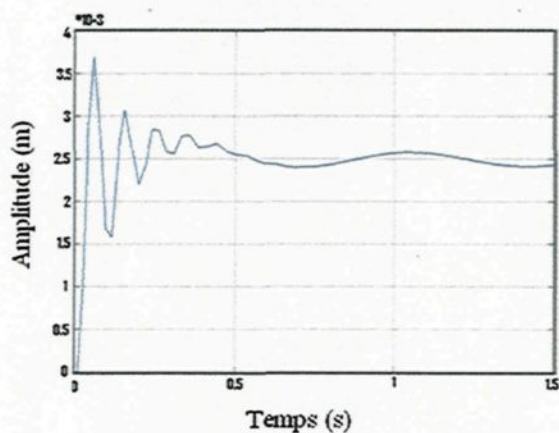


Figure 4.22 : Déplacement vertical de l'ensemble roue 1.

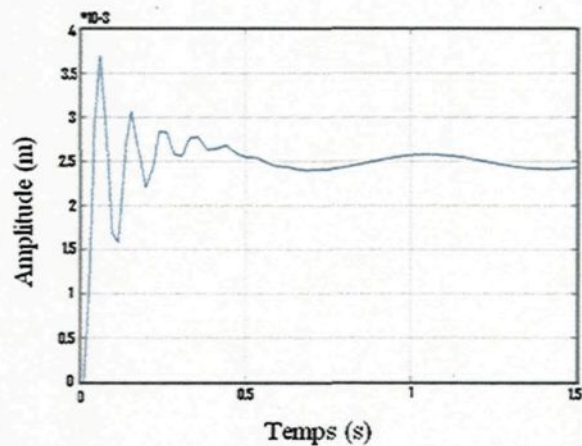


Figure 4.23 : Déplacement vertical de l'autocar.

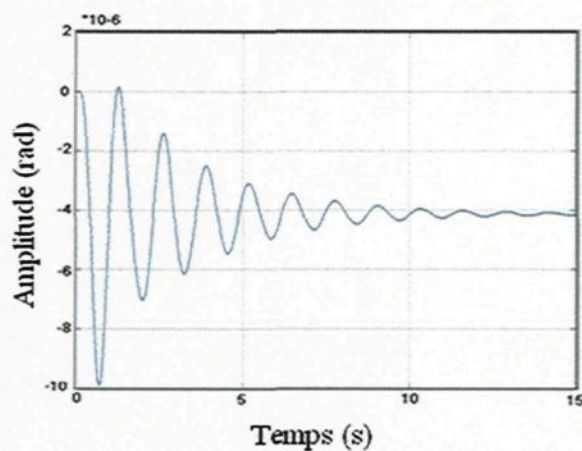


Figure 4.24 : Position angulaire de l'autocar (Tangage).

## 4.5 Modèle à trois dimensions

Dans cette section, nous allons étudier le modèle à trois dimensions de l'autocar. Ce modèle comprend neuf degrés de liberté. Trois degrés de liberté revenant à l'autocar qui sont le déplacement vertical et les déplacements angulaires (tangage et roulis) et six degrés de liberté revenant aux déplacements verticaux des suspensions. Le modèle 3-D du système est représenté à la figure 4.25. Les différents paramètres de ce modèle sont représentés ci-dessous, leurs valeurs sont présentées au tableau 4.3.

$l_i$  : distance longitudinale entre le centre de masse du châssis et la roue  $i$ .

$l_4$  : distance latérale entre le centre de masse du châssis et les roues.

$m_i$  : masse de l'ensemble roue  $i$ .

$m_7$  : masse de l'autocar sous chargement statique.

$k_i$  : constante de ressort pour la suspension de la roue  $i$ .

$k_{ri}$  : constante de ressort le pneu de la roue  $i$ .

$b_i$  : coefficient d'amortissement pour la suspension de la roue  $i$ .

$\theta_i$  : angle de rotation de l'élément  $i$  (tangage).

$U_i$  : position de la chaussée à la roue  $i$ .

$\phi_i$  : angle de rotation de l'élément  $i$  (roulis).

$Y_{1,2,3,4,5,6}$  : déplacement vertical des essieux.

$Y_7$  : déplacement vertical de l'autocar.

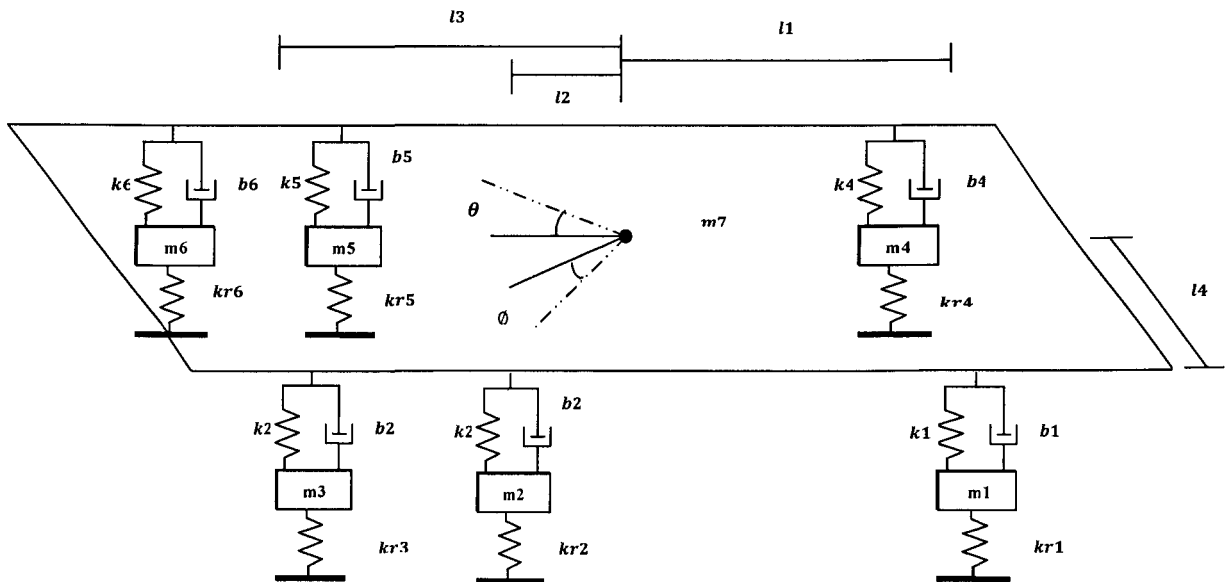


Figure 4.25 : Modèle 3-D de l'autocar.



Tableau 4.3 : Paramètres du modèle 3-D.

| Définition                                      | Symbole  | Unité    | Valeur     |
|---|----------|----------|------------|
| Masse de l'autocar                              | $m_G$    | $kg$     | 15 491.5   |
| Moment d'inertie du tangage                     | $I_G$    | $kg.m^2$ | 149 951.42 |
| Moment d'inertie du roulis                      |          | $kg.m^2$ | 20 000.64  |
| Distance longitudinale c.g –<br>roue1 ou roue 4 | $l_1$    | $m$      | 2.25       |
| Distance longitudinale c.g –<br>roue2 ou roue 5 | $l_2$    | $m$      | 0.81       |
| Distance longitudinale c.g –<br>roue3 ou roue 6 | $l_3$    | $m$      | 2.25       |
| Distance latérale c.g – roue $i$                | $l_4$    | $m$      | 1.25       |
| Rigidité de suspension 1                        | $k_1$    | $N/m$    | 374 000    |
| Rigidité de suspension 2                        | $k_2$    | $N/m$    | 435 000    |
| Rigidité de suspension 3                        | $k_3$    | $N/m$    | 435 000    |
| Rigidité de suspension 4                        | $k_4$    | $N/m$    | 374 000    |
| Rigidité de suspension 5                        | $k_5$    | $N/m$    | 435 000    |
| Rigidité de suspension 6                        | $k_6$    | $N/m$    | 435 000    |
| Amortissement suspension 1                      | $b_1$    | $N.s/m$  | 128 50     |
| Amortissement suspension 2                      | $b_2$    | $N.s/m$  | 128 50     |
| Amortissement suspension 3                      | $b_3$    | $N.s/m$  | 128 50     |
| Amortissement suspension 4                      | $b_4$    | $N.s/m$  | 128 50     |
| Amortissement suspension 5                      | $b_5$    | $N.s/m$  | 128 50     |
| Amortissement suspension 6                      | $b_6$    | $N.s/m$  | 128 50     |
| Rigidité du pneu $i$                            | $k_{ri}$ | $N/m$    | 2800000    |
| Masse de la suspension 1                        | $m_1$    | $kg$     | 362        |
| Masse de la suspension 2                        | $m_2$    | $kg$     | 611.83     |
| Masse de la suspension 3                        | $m_3$    | $kg$     | 280.42     |
| Masse de la suspension 4                        | $m_4$    | $kg$     | 362        |
| Masse de la suspension 5                        | $m_5$    | $kg$     | 611.83     |
| Masse de la suspension 6                        | $m_6$    | $kg$     | 280.42     |

### Équation de mouvement de l'ensemble roue 1

L'autocar ayant trois degrés de liberté, soit le bondissement, le tangage et le roulis, il faut adapter l'équation développée précédemment. Il s'agit ici de la même équation que celle du modèle à deux dimensions à laquelle est ajoutée une composante de position relative au roulis de l'autocar. La roue n'ayant qu'un seul degré de liberté, soit une translation, son mouvement peut être décrit par la seconde loi de Newton :

$$\sum F = m_1 \ddot{y}_1 \quad (4.28)$$

Pour un déplacement positif des masses 1 et 7 et pour une rotation positive de  $\theta_7$  et de  $\phi_7$ , les forces qui agissent sur la partie avant du châssis du côté de la roue 1 sont présentées à la figure 4.26.

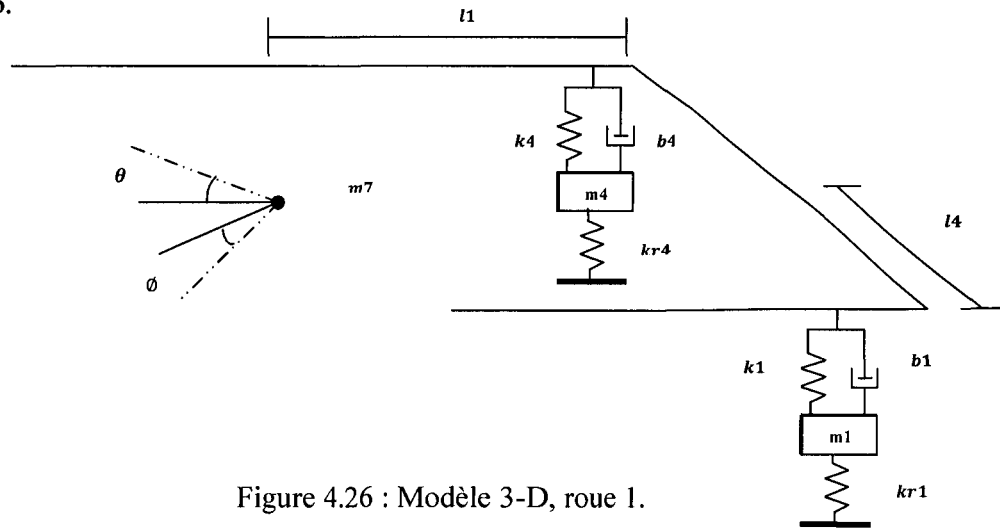


Figure 4.26 : Modèle 3-D, roue 1.

Pour le pneu

$$F_{kr1} = k_{r1}(y_1 - U_1)$$

Pour la suspension

$$F_{k1} = k_1[y_1 - (y_7 + l_1\theta_7 + l_4\phi_7)] \quad (4.29)$$

$$F_{b1} = b_1[\dot{y}_1 - (\dot{y}_7 + l_1\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7)]$$

### Équation de mouvement pour l'ensemble roue 1

Les forces s'opposant toutes au mouvement, elles sont donc négatives.

$$m_1 \ddot{y}_1 = -k_{r1}(y_1 - U_1) - k_1[y_1 - (y_7 + l_1\theta_7 + l_4\phi_7)] - b_1[\dot{y}_1 - (\dot{y}_7 + l_1\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7)] \quad (4.30)$$

### Équation de mouvement des ensembles roue 2, 3, 4, 5 et 6

De la même manière que précédemment, nous avons écrit les différentes équations du mouvements des ensembles 2, 3, 4, 5 et 6. Les développements mathématiques de ces ensembles sont présentés à l'annexe B.

### Équation de mouvement du châssis (masse 7)

Le châssis d'autocar de la figure 4.27 est un corps rigide possédant trois degrés de liberté, soit un bondissement, un roulis et un tangage. Par conséquent, il faut appliquer la deuxième loi de Newton suivant chacune de ces possibilités de mouvement :

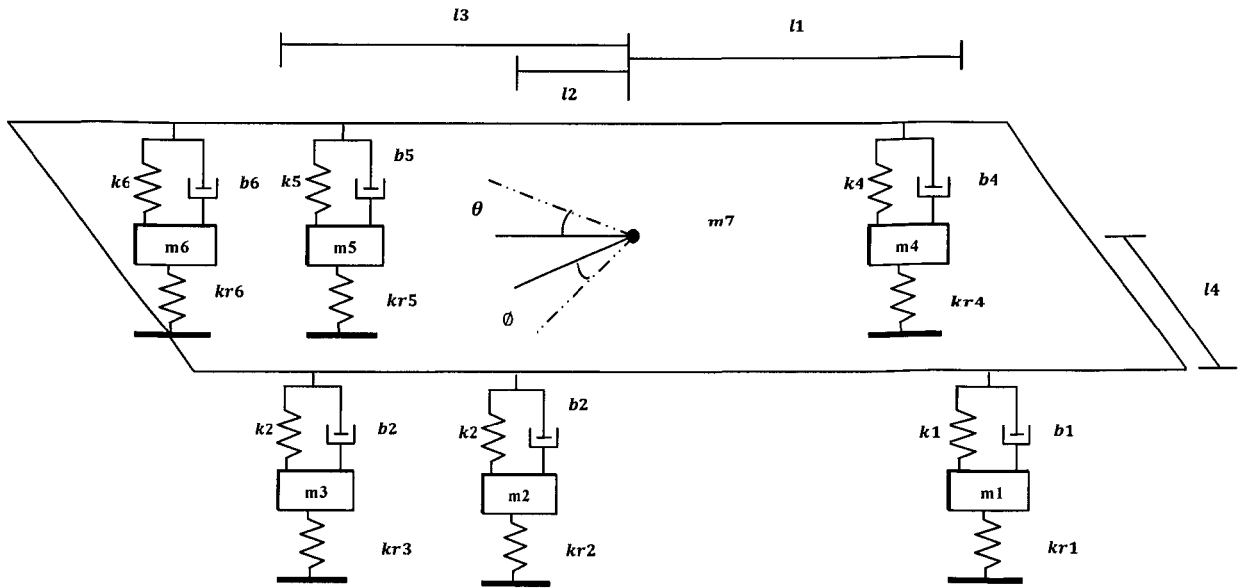


Figure 4.27 : Modèle 3-D, châssis au complet.

$$\sum F = m_7 \ddot{y}_7, \quad \sum M_\theta = I_{\theta 7} \ddot{\theta}_7, \quad \sum M_\phi = I_{\phi 7} \ddot{\phi}_7 \quad (4.31)$$

#### Mouvement de translation

$$\begin{aligned} F_{k1} &= k_1[(y_7 + l_1\theta_7 + l_4\phi_7) - y_1], & F_{b1} &= b_1[(\dot{y}_7 + l_1\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_1] \\ F_{k2} &= k_2[(y_7 - l_2\theta_7 + l_4\phi_7) - y_2], & F_{b2} &= b_2[(\dot{y}_7 - l_2\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_2] \\ F_{k3} &= k_3[(y_7 - l_3\theta_7 + l_4\phi_7) - y_3], & F_{b3} &= b_3[(\dot{y}_7 - l_3\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_3] \\ F_{k4} &= k_4[(y_7 + l_1\theta_7 - l_4\phi_7) - y_4], & F_{b4} &= b_4[(\dot{y}_7 + l_1\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_4] \\ F_{k5} &= k_5[(y_7 - l_2\theta_7 - l_4\phi_7) - y_5], & F_{b5} &= b_5[(\dot{y}_7 - l_2\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_5] \\ F_{k6} &= k_6[(y_7 - l_3\theta_7 - l_4\phi_7) - y_6], & F_{b6} &= b_6[(\dot{y}_7 - l_3\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_6] \end{aligned} \quad (4.32)$$

### Équation du mouvement en translation du châssis

Pour un mouvement positif en translation de l'autocar, la totalité des éléments s'y opposent. Par conséquent, ces forces sont négatives et l'équation de mouvement est donnée par :

$$\begin{aligned}
 m_7 \ddot{y}_7 &= -k_1[(y_7 + l_1\theta_7 + l_4\phi_7) - y_1] - b_1[(\dot{y}_7 + l_1\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_1] \\
 &- k_2[(y_7 - l_2\theta_7 + l_4\phi_7) - y_2] - b_2[(\dot{y}_7 - l_2\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_2] \\
 &- k_3[(y_7 - l_3\theta_7 + l_4\phi_7) - y_3] - b_3[(\dot{y}_7 - l_3\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_3] \\
 &- k_4[(y_7 + l_1\theta_7 - l_4\phi_7) - y_4] - b_4[(\dot{y}_7 + l_1\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_4] \\
 &- k_5[(y_7 - l_2\theta_7 - l_4\phi_7) - y_5] - b_5[(\dot{y}_7 - l_2\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_5] \\
 &- k_6[(y_7 - l_3\theta_7 - l_4\phi_7) - y_6] - b_6[(\dot{y}_7 - l_3\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_6]
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

### Mouvement de tangage

$$\begin{aligned}
 M_{\theta k1} &= l_1 k_1[(y_7 + l_1\theta_7 + l_4\phi_7) - y_1] \quad , \quad M_{\theta b1} = l_1 b_1[(\dot{y}_7 + l_1\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_1] \\
 M_{\theta k2} &= l_2 k_2[(y_7 - l_2\theta_7 + l_4\phi_7) - y_2] \quad , \quad M_{\theta b2} = l_2 b_2[(\dot{y}_7 - l_2\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_2] \\
 M_{\theta k3} &= l_3 k_3[(y_7 - l_3\theta_7 + l_4\phi_7) - y_3] \quad , \quad M_{\theta b3} = l_3 b_3[(\dot{y}_7 - l_3\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_3] \\
 M_{\theta k4} &= l_1 k_4[(y_7 + l_1\theta_7 - l_4\phi_7) - y_4] \quad , \quad M_{\theta b4} = l_1 b_4[(\dot{y}_7 + l_1\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_4] \\
 M_{\theta k5} &= l_2 k_5[(y_7 - l_2\theta_7 - l_4\phi_7) - y_5] \quad , \quad M_{\theta b5} = l_2 b_5[(\dot{y}_7 - l_2\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_5] \\
 M_{\theta k6} &= l_3 k_6[(y_7 - l_3\theta_7 - l_4\phi_7) - y_6] \quad , \quad M_{\theta b6} = l_3 b_6[(\dot{y}_7 - l_3\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7) - \dot{y}_6]
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

### Équation de mouvement en tangage du châssis

Pour un mouvement positif de l'autocar suivant le tangage, la totalité des éléments des suspensions s'y opposent. Par conséquent, les composantes en tangage des forces doivent être négatives :

$$\begin{aligned}
I_{\theta 7} \ddot{\theta}_7 &= -l_1 k_1[(y_7 + l_1 \theta_7 + l_4 \phi_7) - y_1] - l_1 b_1[(\dot{y}_7 + l_1 \dot{\theta}_7 + l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_1] \\
&- l_2 k_2[(y_7 - l_2 \theta_7 + l_4 \phi_7) - y_2] - l_2 b_2[(\dot{y}_7 - l_2 \dot{\theta}_7 + l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_2] \\
&- l_3 k_3[(y_7 - l_3 \theta_7 + l_4 \phi_7) - y_3] - l_3 b_3[(\dot{y}_7 - l_3 \dot{\theta}_7 + l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_3] \\
&- l_1 k_4[(y_7 + l_1 \theta_7 - l_4 \phi_7) - y_4] - l_1 b_4[(\dot{y}_7 + l_1 \dot{\theta}_7 - l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_4] \\
&- l_2 k_5[(y_7 - l_2 \theta_7 - l_4 \phi_7) - y_5] - l_2 b_5[(\dot{y}_7 - l_2 \dot{\theta}_7 - l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_5] \\
&- l_3 k_6[(y_7 - l_3 \theta_7 - l_4 \phi_7) - y_6] - l_3 b_6[(\dot{y}_7 - l_3 \dot{\theta}_7 - l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_6]
\end{aligned} \tag{4.35}$$

### Mouvement de roulis

$$\begin{aligned}
M_{\phi k1} &= l_4 k_1[(y_7 + l_1 \theta_7 + l_4 \phi_7) - y_1], \quad M_{\phi b1} = l_4 b_1[(\dot{y}_7 + l_1 \dot{\theta}_7 + l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_1] \\
M_{\phi k2} &= l_4 k_2[(y_7 - l_2 \theta_7 + l_4 \phi_7) - y_2], \quad M_{\phi b2} = l_4 b_2[(\dot{y}_7 - l_2 \dot{\theta}_7 + l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_2] \\
M_{\phi k3} &= l_4 k_3[(y_7 - l_3 \theta_7 + l_4 \phi_7) - y_3], \quad M_{\phi b3} = l_4 b_3[(\dot{y}_7 - l_3 \dot{\theta}_7 + l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_3] \\
M_{\phi k4} &= l_4 k_4[(y_7 + l_1 \theta_7 - l_4 \phi_7) - y_4], \quad M_{\phi b4} = l_4 b_4[(\dot{y}_7 + l_1 \dot{\theta}_7 - l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_4] \\
M_{\phi k5} &= l_4 k_5[(y_7 - l_2 \theta_7 - l_4 \phi_7) - y_5], \quad M_{\phi b5} = l_4 b_5[(\dot{y}_7 - l_2 \dot{\theta}_7 - l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_5] \\
M_{\phi k6} &= l_4 k_6[(y_7 - l_3 \theta_7 - l_4 \phi_7) - y_6], \quad M_{\phi b6} = l_4 b_6[(\dot{y}_7 - l_3 \dot{\theta}_7 - l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_6]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

### Équation de mouvement en roulis du châssis

Pour un mouvement positif de l'autocar suivant le roulis, la totalité des éléments des suspensions s'y opposent. Par conséquent, les composantes en roulis des forces doivent être négatives :

$$\begin{aligned}
I_{\phi 7} \ddot{\phi}_7 &= -l_6 k_1[(y_7 + l_1 \theta_7 + l_4 \phi_7) - y_1] - l_6 b_1[(\dot{y}_7 + l_1 \dot{\theta}_7 + l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_1] \\
&- l_6 k_2[(y_7 - l_2 \theta_7 + l_4 \phi_7) - y_2] - l_6 b_2[(\dot{y}_7 - l_2 \dot{\theta}_7 + l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_2] \\
&- l_6 k_3[(y_7 - l_3 \theta_7 + l_4 \phi_7) - y_3] - l_6 b_3[(\dot{y}_7 - l_3 \dot{\theta}_7 + l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_3] \\
&- l_6 k_4[(y_7 + l_1 \theta_7 - l_4 \phi_7) - y_4] - l_6 b_4[(\dot{y}_7 + l_1 \dot{\theta}_7 - l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_4] \\
&- l_6 k_5[(y_7 - l_2 \theta_7 - l_4 \phi_7) - y_5] - l_6 b_5[(\dot{y}_7 - l_2 \dot{\theta}_7 - l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_5] \\
&- l_6 k_6[(y_7 - l_3 \theta_7 - l_4 \phi_7) - y_6] - l_6 b_6[(\dot{y}_7 - l_3 \dot{\theta}_7 - l_4 \dot{\phi}_7) - \dot{y}_6]
\end{aligned} \tag{4.37}$$



En effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3, x_4 = y_4, x_5 = y_5, x_6 = y_6, \\ x_7 &= y_7, x_8 = \dot{y}_1, x_9 = \dot{y}_2, x_{10} = \dot{y}_3, x_{11} = \dot{y}_4, x_{12} = \dot{y}_5, \\ x_{13} &= \dot{y}_6, x_{14} = \dot{y}_7, x_{15} = \theta_7, x_{16} = \phi_7, x_{17} = \dot{\theta}_7, x_{18} = \dot{\phi}_7 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Le système d'état du modèle 3-D du châssis est présenté à l'annexe A. Ce système est constitué de 18 inconnus. Tels que,  $x_1, x_3, x_5, x_7, x_9$  et  $x_{11}$  représentent les déplacements verticaux des six essieux de l'autocar. Le déplacement vertical ainsi qu'angulaire de l'autocar (bondissement, tangage et roulis) correspondent respectivement aux fonctions de transfert liées à  $x_{13}, x_{15}$  et  $x_{17}$ . La figure 4.28 représente l'amplitude de l'ensemble roue 1. La fréquence maximale dans ce cas est égale à 14.4 Hz. La courbe correspondant à l'amplitude en fonction de la fréquence de la position verticale de l'autocar 3-D est montrée à la figure 4.29. La fréquence maximale est égale à 1.74 Hz. Pour les figures 4.30 et 4.31 qui représentent le tangage et le roulis de l'autocar 3-D, les valeurs des fréquences maximales obtenues sont égales à 1.83 Hz et 1.85 Hz respectivement.

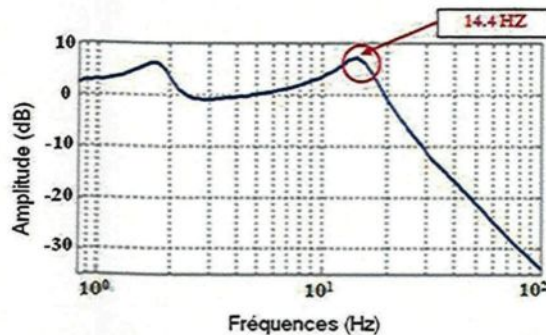


Figure 4.28 : Amplitude de l'ensemble roue 1.

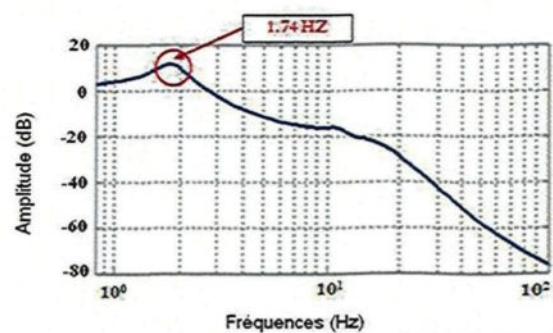


Figure 4.29 : Amplitude de l'autocar (Position verticale).

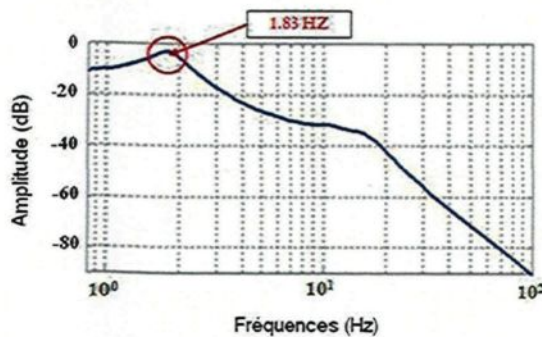


Figure 4.30 : Amplitude de l'autocar (Tangage).

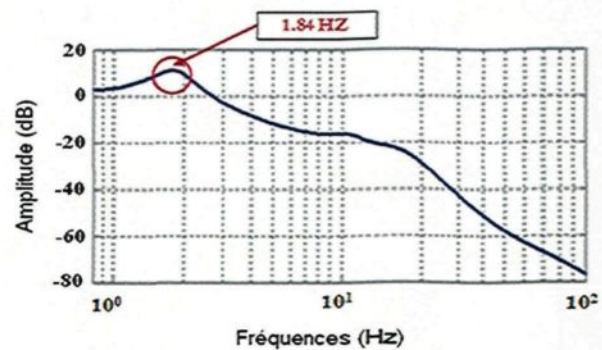


Figure 4.31 : Amplitude de l'autocar (Roulis).

La figure 4.32 présente la réponse à l'excitation avec un échelon de 2.5 cm au niveau de l'essieu avant. Les figures 4.33, 4.34 et 4.35 montrent les réponses à l'excitation avec un échelon de 2.5 cm dans les cas du bondissement, du tangage et du roulis respectivement.

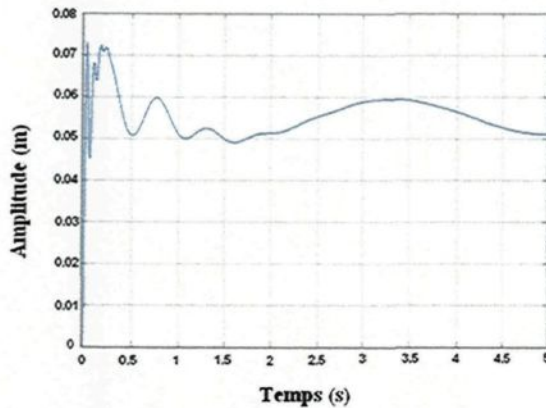


Figure 4.32 : Déplacement de l'essieu avant.

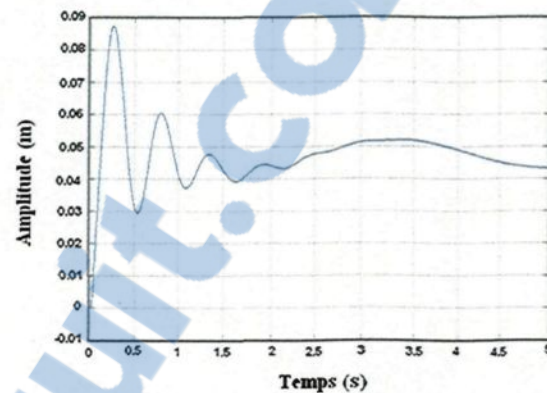


Figure 4.33 : Déplacement vertical de l'autocar.

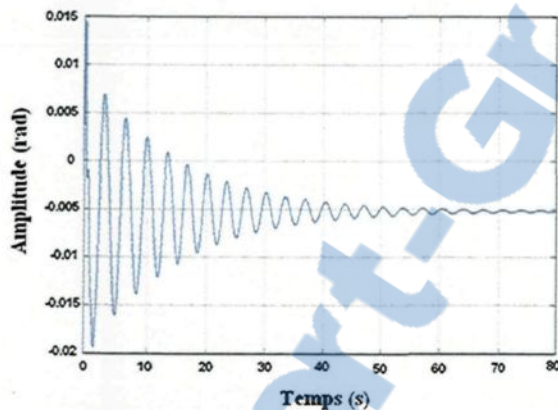


Figure 4.34 : Position angulaire de l'autocar (Tangage).

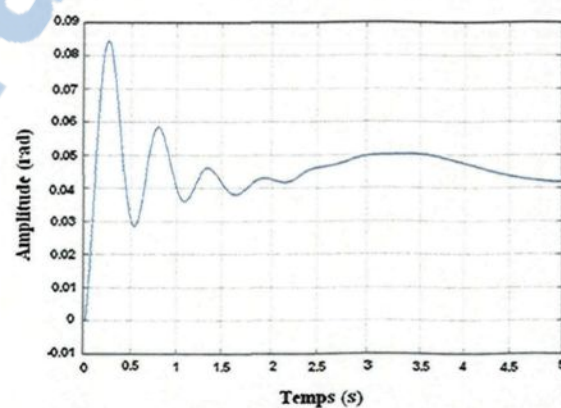


Figure 4.35 : Position angulaire de l'autocar. (Roulis)

Une fois que nous avons calculé les réponses à l'excitation, nous sommes passés au calcul des forces qui s'exercent sur le châssis. La localisation de ces forces est présentée à la figure 4.36. Les tableaux 4.4 et 4.5 présentent les résultats des forces s'exerçant sur le châssis pour des échelons de 2.5 cm et de 5 cm respectivement. Ces forces ont été calculées en utilisant les systèmes de l'équation (4.32). Pour les valeurs de  $y_i$  et  $\dot{y}_i$ , nous les avons tirés à partir des résultats des réponses à l'excitation pour un échelon de 2,5 cm et de 5 cm du modèle à trois dimensions. Elles représentent les sommets obtenus pour les vecteurs de sortie du déplacement et de la vitesse.



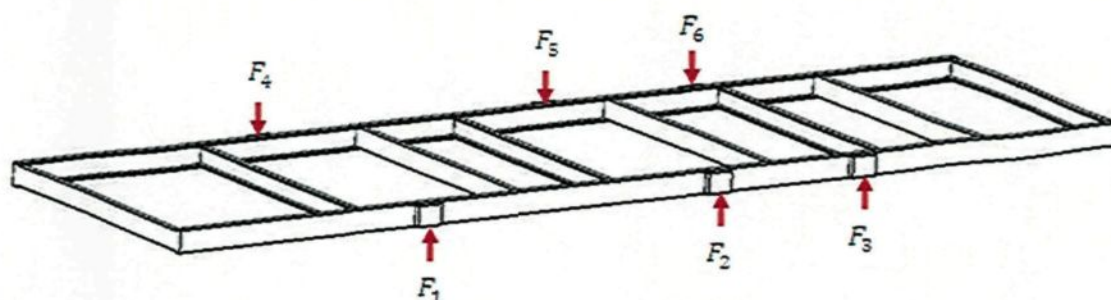


Figure 4.36 : Localisation des différentes forces d'excitations.

Tableau 4.4 : Réponses aux forces d'excitations pour un échelon de 2.5 cm.

| Déplacement         | Unités | Vitesse                  | Unités | $F_k(N)$<br>(Ressort) | $F_b(N)$<br>(Amortisseur) | $F = F_k + F_b(N)$ |
|---------------------|--------|--------------------------|--------|-----------------------|---------------------------|--------------------|
| $y_1 = 0.0365$      | m      | $\dot{y}_1 = 1.6$        | m/s    | $F_{k1} = 29134.60$   | $F_{b1} = -11815.57$      | $F_1 = 17319.02$   |
| $y_2 = 0.038$       | m      | $\dot{y}_2 = 1.3$        | m/s    | $F_{k2} = 23383.84$   | $F_{b2} = -9847.98$       | $F_2 = 13535.88$   |
| $y_3 = 0.033$       | m      | $\dot{y}_3 = 1.7$        | m/s    | $F_{k3} = 20923.50$   | $F_{b3} = -15876.75$      | $F_3 = 5047.32$    |
| $y_4 = 0.0345$      | m      | $\dot{y}_4 = 1.51$       | m/s    | $F_{k4} = -10322.40$  | $F_{b4} = -18690.32$      | $F_4 = -29012.72$  |
| $y_5 = 0.035$       | m      | $\dot{y}_5 = 1.25$       | m/s    | $F_{k5} = -22073.64$  | $F_{b5} = -17236.73$      | $F_5 = -39310.37$  |
| $y_6 = 0.0315$      | m      | $\dot{y}_6 = 1.8$        | m/s    | $F_{k6} = -25186.50$  | $F_{b6} = -25192.42$      | $F_6 = -50378.92$  |
| $y_7 = 0.044$       | m      | $\dot{y}_7 = 0.26$       | m/s    |                       |                           |                    |
| $\theta_7 = 0.0074$ | rad    | $\dot{\theta}_7 = 0.048$ | rad/s  |                       |                           |                    |
| $\phi_7 = 0.043$    | rad    | $\dot{\phi}_7 = 0.25$    | rad/s  |                       |                           |                    |

Tableau 4.5 : Réponses aux forces d'excitations pour un échelon de 5 cm.

| Déplacement        | Unités | Vitesse                  | Unités | $F_k(N)$<br>(Ressort) | $F_b(N)$<br>(Amortisseur) | $F = F_k + F_b(N)$ |
|--------------------|--------|--------------------------|--------|-----------------------|---------------------------|--------------------|
| $y_1 = 0.072$      | m      | $\dot{y}_1 = 3.25$       | m/s    | $F_{k1} = 58344.00$   | $F_{b1} = -24517.80$      | $F_1 = 33826.20$   |
| $y_2 = 0.076$      | m      | $\dot{y}_2 = 2.6$        | m/s    | $F_{k2} = 46153.50$   | $F_{b2} = -19782.83$      | $F_2 = 26370.67$   |
| $y_3 = 0.068$      | m      | $\dot{y}_3 = 3.3$        | m/s    | $F_{k3} = 40237.50$   | $F_{b3} = -30480.20$      | $F_3 = 9757.30$    |
| $y_4 = 0.0685$     | m      | $\dot{y}_4 = 3.1$        | m/s    | $F_{k4} = -19822.00$  | $F_{b4} = -38652.80$      | $F_4 = -58474.80$  |
| $y_5 = 0.07$       | m      | $\dot{y}_5 = 2.5$        | m/s    | $F_{k5} = -43674.00$  | $F_{b5} = -34560.33$      | $F_5 = -78234.33$  |
| $y_6 = 0.062$      | m      | $\dot{y}_6 = 3.2$        | m/s    | $F_{k6} = -49590.00$  | $F_{b6} = -45257.70$      | $F_6 = -94847.70$  |
| $y_7 = 0.088$      | m      | $\dot{y}_7 = 0.51$       | m/s    |                       |                           |                    |
| $\theta_7 = 0.015$ | rad    | $\dot{\theta}_7 = 0.092$ | rad/s  |                       |                           |                    |
| $\phi_7 = 0.085$   | rad    | $\dot{\phi}_7 = 0.5$     | rad/s  |                       |                           |                    |

## 4.6 Conclusion

Les résultats des fréquences du bondissement et du tangage obtenus pour les cas 2-D simplifié et 2-D étaient assez similaires. Dans le système 2-D, nous avons vu l'apparition de la fréquence de l'essieu avant. Pour les essieux restants, leurs fréquences étaient proches de celle de l'essieu avant. En ce qui concerne les résultats du cas 3-D, les fréquences ont un peu amplifié. Cela est dû à l'effet du roulis que nous avons négligé au début. Tous les résultats des fréquences obtenus varient entre 1,3 Hz et 15 Hz. Donc, nous sommes bien dans les vibrations à basse fréquence qui caractérisent le domaine du transport terrestre.

D'un autre côté, les mêmes systèmes ont été repris (2-D simplifié, 2-D et 3-D), mais cette fois-ci nous avons pris en considération la masse du châssis seulement au lieu de celle de l'autocar. Les inerties ont été calculées par rapport au châssis. Les résultats obtenus nous ont servi pour la comparaison avec le cas numérique qui sera présenté au chapitre six.

En ce qui concerne les résultats des forces dynamiques qui s'appliquent sur le châssis, nous les utiliserons dans le chapitre six aussi. Ces forces serviront pour le calcul des contraintes maximales que subit le châssis lors d'un chargement dynamique.

## **CHAPITRE 5**

# **ÉTUDE DES MODES VIBRATOIRES ET ANALYSE DES CONSTRAINTES POUR UN CHÂSSIS 1D**

### **5.1 Introduction**

Pour la réalisation de cette étude, un modèle analytique est développé afin d'analyser la partie vibratoire du châssis d'autocar. Ce chapitre est divisé en quatre parties qui seront présentées comme suit :

- Étude expérimentale, analytique et numérique de deux plaques étalons.
- Simplification du châssis d'autocar.
- Étude analytique des modes vibratoires des poutres à parois minces.
- Étude numérique des modes vibratoires des poutres à parois minces.

Le modèle réel du châssis dont il est question a été présenté précédemment dans le chapitre 3. Ce modèle va être simplifié en une poutre simple à parois minces dont le poids, le volume et l'inertie seront très proches de ceux du châssis de référence. Par la suite, les modes vibratoires de flexion et de torsion des poutres à parois minces sont calculés en utilisant les méthodes analytiques de Bernoulli-Euler et Timoshenko respectivement. Ces poutres sont soumises à différentes conditions d'appui suivant qu'il s'agisse du cas des grandes poutres qui sont simplement appuyées sur trois appuis ou des traverses. Une fois les résultats analytiques obtenus, ces derniers vont être comparés avec les résultats numériques. L'analyse numérique s'effectuera sur le logiciel de simulation Abaqus. Les modèles de poutre qui sont utilisés vont être conçus à l'aide du logiciel de dessin SolidWorks. Vu que le calcul analytique des modes vibratoires du châssis au complet est



très complexe, la méthode numérique sera le seul outil adéquat pour le faire. Dans le chapitre qui suivra, le châssis au complet sera étudié numériquement seulement.

Afin de pouvoir valider les résultats de la partie numérique, une calibration des résultats numériques est nécessaire. Pour ce faire, une étude vibratoire de deux plaques en aluminium et en acier est effectuée expérimentalement, numériquement et analytiquement. Les résultats de ces analyses sont très utiles pour la validation des fréquences de vibrations obtenues numériquement. Une validation des contraintes est aussi effectuée sur cette plaque étalon soumise à une flexion simple analytiquement et numériquement.

## 5.2 Étude vibratoire de la plaque étalon

Une étude vibratoire de deux plaques en aluminium et en acier a été effectuée expérimentalement, numériquement et analytiquement. Cette partie aidera à la validation des parties numériques des poutres à parois minces ainsi que du châssis. Les trois méthodes qui sont utilisées pour l'évaluation des modes vibratoires des deux plaques sont présentées ci-dessous :

- Expérimentalement : calcul des fréquences de flexion à l'aide du marteau d'impact et du pot vibrant.
- Analytiquement : calcul des fréquences de flexion et de torsion par programmation des équations analytiques sur le logiciel Matlab.
- Numériquement : calcul des fréquences de flexion ainsi que de torsion par modélisation et simulation des vibrations sur le logiciel Abaqus.

Les systèmes continus sont soumis à différents modes de vibrations. Afin de pouvoir identifier ces modes vibratoires expérimentalement, le marteau d'impact ainsi que le pot vibrant ont été utilisés. Le marteau d'impact génère une fréquence d'excitation qui est déterminée à l'aide de la rigidité de la surface de contact marteau-structure et la masse à la tête du marteau. La difficulté de son utilisation est de produire la même impulsion durant les différentes excitations de la structure non seulement en amplitude, mais également à la même position et l'orientation dans la direction normale à la structure. Il faut éviter le dédoublement d'impact qui pourrait causer des erreurs lors de l'analyse des résultats. Le montage avec le marteau d'impact est montré à la figure 5.1. Un pot vibrant est un appareil qui permet d'exciter une structure en vibration. Il produit une impulsion

vibratoire au niveau d'un point bien déterminé. La figure 5.2 montre le pot vibrant utilisé lors de l'expérience effectuée sur les plaques en acier et en aluminium.

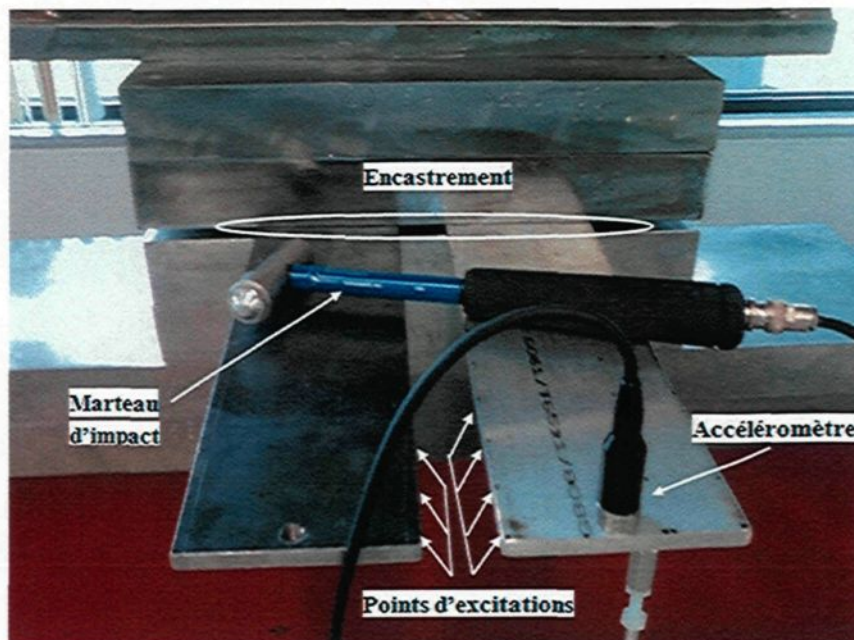


Figure 5.1 : Expérience du marteau d'impact.

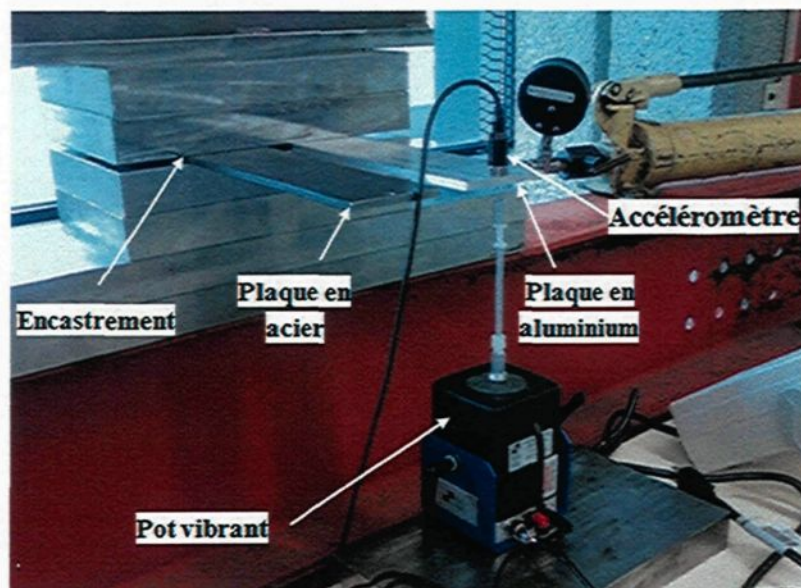


Figure 5.2 : Expérience du pot vibrant.

La figure 5.3 montre la plaque encastree à son extrémité. L'accéléromètre est placé sur le côté libre de la plaque vers l'avant (voir figure 5.1).

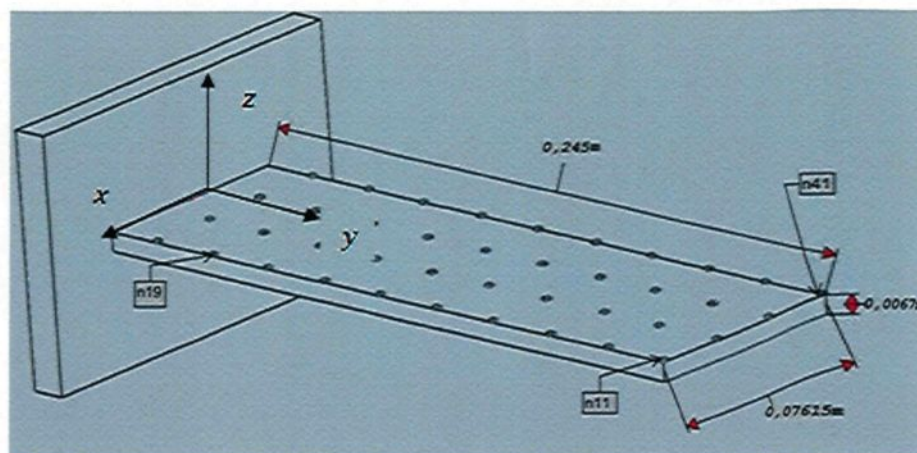


Figure 5.3 : Plaque d'essais encastée-libre.

Les deux plaques en aluminium et en acier ont les dimensions montrées à la figure 5.4. Les caractéristiques des matériaux des deux plaques sont présentées au tableau 5.1.

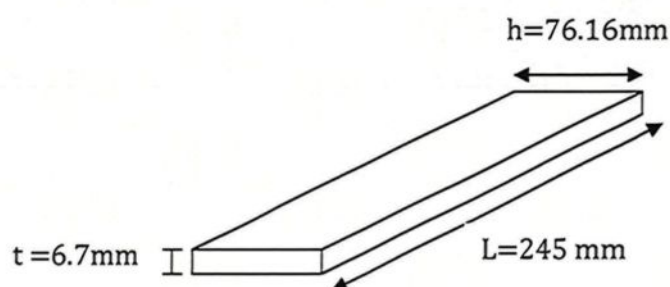


Figure 5.4 : Dimensions de la plaque utilisée.

Tableau 5.1 : Caractéristiques mécaniques des matériaux des deux plaques d'essais.

| Caractéristiques mécaniques | Aluminium 6061-T6    | Acier 1018-HR       |
|-----------------------------|----------------------|---------------------|
| Module de Young [Pa]        | $7.31 \cdot 10^{10}$ | $210 \cdot 10^{10}$ |
| Densité [ $\text{kg/m}^3$ ] | 2 700                | 7 800               |
| Coefficient de poisson      | 0.33                 | 0.28                |

- Cas d'une plaque encastree-libre :

Conditions aux limites selon le système d'axes de la figure 5.3 :

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad Y(x) = 0 \quad (5.1)$$

$$y = L, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \quad (5.2)$$

Nous aurons :

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \text{tel que ;} \quad \beta_n L \approx (n - \frac{1}{2})\pi \quad (5.3)$$

$$\beta_1 L = 1.8751, \quad \beta_2 L = 4.644, \quad \beta_3 L = 7.854, \quad \beta_4 L = 10.995$$

La comparaison des trois méthodes de calcul des fréquences en mode flexion des plaques en aluminium et en acier donne les résultats montrés au tableau 5.2. Les modes de torsion analytique et numérique des deux plaques sont présentés au tableau 5.3. Pour la partie numérique, les éléments hexagonaux ont été utilisés pour le maillage avec un espacement de 0.002 mm entre chaque nœud.

Tableau 5.2 : Fréquences de flexion des deux plaques d'essais.

| Aluminium 6061-T6 |                 |                     | Acier 10-18-HR   |                 |                     |
|-------------------|-----------------|---------------------|------------------|-----------------|---------------------|
| Analytiques (Hz)  | Numériques (Hz) | Expérimentales (Hz) | Analytiques (Hz) | Numériques (Hz) | Expérimentales (Hz) |
| 93.82             | 92.710          | 58,59               | 93.56            | 91.91           | 58,59               |
| 575.48            | 577.33          | 468,75              | 573.88           | 572.92          | 527,34              |
| 1646              | 1612.9          | 1308                | 1641.4           | 1599.6          | 1230,5              |

Les résultats obtenus sont comparables pour les fréquences analytiques et celles données par Abaqus. Pour les fréquences expérimentales, il se trouve une légère différence qui est acceptable dans notre cas.

Tableau 5.3 : Fréquences de torsion des deux plaques d'essais.

| Aluminium 6061-T6 |                 | Acier 10-18-HR   |                 |
|-------------------|-----------------|------------------|-----------------|
| Analytiques (Hz)  | Numériques (Hz) | Analytiques (Hz) | Numériques (Hz) |
| 572.78            | 584.65          | 582.23           | 592.58          |
| 1718.3            | 1825.9          | 1746.7           | 1846.7          |
| 2863.9            | 3267.8          | 2911.1           | 3294.0          |



La figure 5.5 présente les fréquences des premiers modes de flexion et de torsion de la plaque en aluminium qui ont les valeurs égales à 92.71 Hz et 584.65 Hz respectivement.

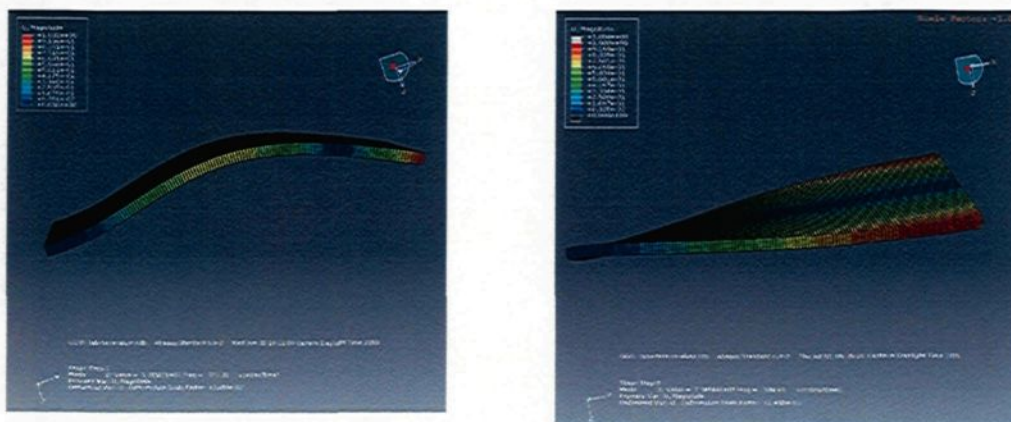


Figure 5.5 : Modes de flexion et de torsion de la plaque en aluminium.

Le calcul des modes de vibration en mode flexion et torsion des plaques acier, aluminium présentent des résultats assez similaires. Malgré que la rigidité de l'acier soit trois fois plus supérieure à celle de l'aluminium, cela n'a pas influencé les résultats des modes vibratoires. La raison d'une telle similitude est due au rapport du module de Young sur la densité dans les formules analytiques. L'aluminium peut donc rivaliser contre l'acier du côté vibratoire. Donc, par ces résultats, l'utilisation du logiciel de simulation Abaqus pour le calcul des modes vibratoires est validée.

### 5.3 Analyse des contraintes

L'étude des contraintes a été effectuée pour la plaque étalon précédente. Avant de pouvoir commencer l'analyse analytique des contraintes, certaines approximations doivent être effectuées en s'appuyant sur la mécanique des milieux continus qui repose sur des principes de la physique qui sont montrés ci-dessous :

- **Loi de bilan**

Il faut bien traduire le fait qu'il n'y a pas de transformation de la masse du milieu étudié même si localement il peut y avoir une modification de la masse volumique. Dans le système d'étude, la masse de la plaque étalon sera considérée constante tout au long de cette étude. La loi de conservation de la masse est donnée ci-dessous :

$$\frac{dm}{dt} \approx 0 \quad (5.4)$$



- **Loi de comportement**

Les analyses seront effectuées dans un milieu élastique. L'équation de comportement dans ce cas est une relation biunivoque entre le tenseur des contraintes et le tenseur Eulérien de déformation.

$$\bar{\sigma} = f(\bar{E}) \quad (5.5)$$

- **Hypothèse d'existence de l'état naturel**

Avant tout, il faudrait admettre qu'il existe un état naturel du matériau dénué de toutes contraintes, tel que :

$$\bar{\sigma} = 0 \quad (5.6)$$

Cet état sert aussi de référence pour les déformations, donc :

$$\bar{E} = 0 \quad (5.7)$$

Toutes les relations entre les contraintes et les déformations sont écrites à partir de l'état naturel.

- **Hypothèse de linéarité**

À partir de l'état naturel, l'hypothèse de linéarité permet de relier les variations des composantes du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$ , aux composantes du tenseur des déformations infinitésimales  $\varepsilon_{ij}$  par des fonctions linéaires :

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (5.8)$$

Les quantités  $\lambda_{ijkl}$  ne dépendent que des propriétés du milieu et sont des fonctions du point  $x$ . Elles apparaissent comme des composantes d'un tenseur du quatrième ordre, dit tenseur d'élasticité au point  $x$ . Ce tenseur d'élasticité  $\lambda_{ijkl}$  est nécessairement symétrique en  $i, j$  puisque  $\sigma_{ij}$  l'est. Il est aussi symétrique en  $k, l$  puisque  $\varepsilon_{kl}$  l'est.

- **Hypothèse d'isotropie**

D'un point de vue macroscopique, de nombreux matériaux de construction tels que l'aluminium dans notre cas répondent assez bien à l'hypothèse d'isotropie : ils n'admettent aucune direction privilégiée. Le tenseur d'élasticité qui ne dépend que des propriétés du milieu doit donc être un tenseur isotrope. Les composantes dans une base euclidienne arbitraire doivent être invariantes par une transformation orthogonale arbitraire. Un tenseur isotrope symétrique d'ordre 4 vérifie :

$$\lambda_{ijkl} = \lambda_{klij} \quad (5.9)$$

Et ses composantes sont de la forme :

$$\lambda_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5.10)$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients d'élasticité de Lamé. Le matériau qui sera utilisé est l'aluminium. L'hypothèse de linéarité permet d'étudier la déformation due à un champ uniaxial des contraintes.

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} \varepsilon_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk} \varepsilon_{kl})$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu (\delta_{ik} \varepsilon_{kj} + \delta_{il} \varepsilon_{lj})$$

Soit :

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (5.11)$$

Où :

$$e = \text{trace}(\varepsilon)$$

- **Hypothèse d'homogénéité**

D'un point de vue macroscopique, le milieu considéré est homogène, au moins par morceaux. Le châssis de l'autocar peut être décomposé en sous-domaines homogènes (méthode des éléments finis). Les coefficients d'élasticité  $\lambda$  et  $\mu$  sont constants en tout point.

En prenant en considération les hypothèses énoncées précédemment, le calcul de la contrainte maximale de la plaque étalon de la figure 5.6 a été effectué. Elle est encastree et soumise à une flexion simple.

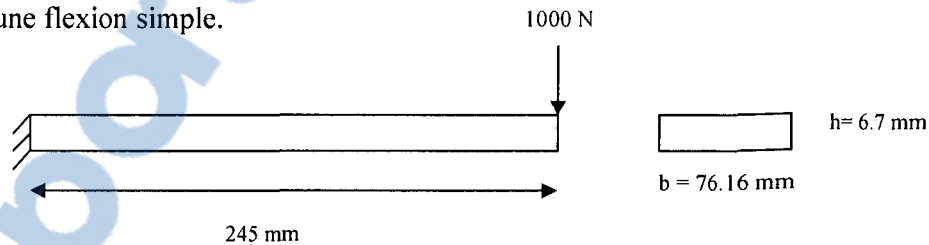


Figure 5.6 : Plaque étalon soumise à une flexion simple.

La relation donnant la contrainte maximale au niveau de l'encastrement est la suivante :

$$|\sigma|_{\max} = M_f \frac{c}{I_z} \quad (5.12)$$

Tel que :

$M_f$  : moment fléchissant.

$I_z$  : moment d'inertie de la section droite de la plaque.

$c$  : distance par rapport à l'axe neutre.



Le tableau 5.4 montre une comparaison des résultats de calculs de la contrainte maximale que subit la plaque analytiquement et numériquement. Les deux résultats sont similaires, ce qui donne une deuxième validation des résultats numériques.

Tableau 5.4 : Comparaison des résultats de contraintes analytiques et numériques.

| Plaque soumise à la flexion            | Étude numérique   | Étude analytique  |
|--|-------------------|-------------------|
| Contrainte maximale ( $\text{N/m}^2$ ) | $4.18 \cdot 10^8$ | $4.29 \cdot 10^8$ |

## 5.4 Modélisation du châssis de l'autocar

Afin de pouvoir effectuer une étude vibratoire sur le châssis de l'autocar, la structure de départ de la figure 3.7 a été simplifiée par une structure discrète simple illustrée à la figure 5.8. Cette structure droite hyperstatique à parois minces se compose de quatre travées sans articulations. Elle repose sur trois appuis simples qui représentent les essieux de l'autocar. Le choix de la poutre principale du châssis est porté sur le modèle représenté à la figure 5.9, car l'effet du moment de torsion dans le cas d'un châssis d'autocar est non uniforme ce qui conduit à l'utilisation des profilés ouverts au lieu de ceux fermés. La comparaison des dimensions du châssis avec les poutres équivalente et standard est illustrée dans le tableau 5.5.

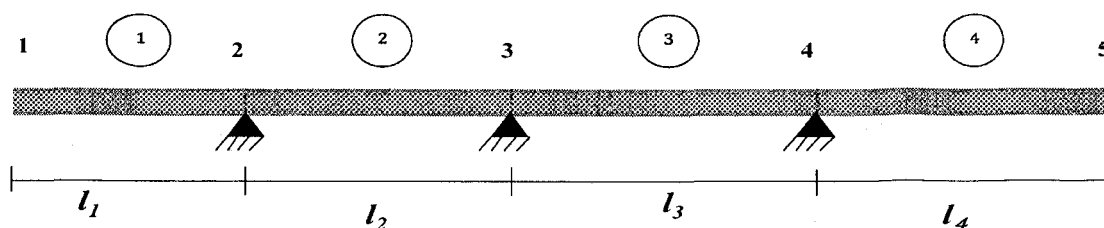
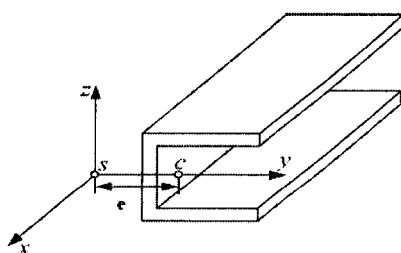


Figure 5.8 : Structure simplifiée du châssis.



S: centre de torsion

C: centre de gravité

e: excentricité

Figure 5.9 : Poutre principale du châssis.



Tableau 5.5 : Comparaison des caractéristiques géométriques.

| Caractéristiques             | Châssis | Poutre équivalente | Poutre standard |
|------------------------------|---------|--------------------|-----------------|
| Masse totale (kg)            | 404.12  | 395.48             | 346.82          |
| Volume (m <sup>3</sup> )     | 0.15    | 0.15               | 0.13            |
| Superficie (m <sup>2</sup> ) | 24.08   | 12.32              | 13.29           |
| Longueur (m)                 | 10.02   | 10.02              | 10.02           |

## 5.5 Calcul analytique des modes vibratoires

Dans la plupart des cas, quand la section de la poutre est symétrique, le centre de gravité et le centre de torsion ont tendance à coïncider. Ce qui génère que des vibrations dues à la flexion et à la torsion couplées. D'autre part, si la section transversale d'une poutre à un seul axe de symétrie, le centre de torsion se situera sur l'axe de symétrie. Dans ce cas précis, lorsque la charge n'agit pas par l'intermédiaire du centre de torsion, la poutre fera l'objet d'une torsion en plus de la flexion.

En général, le centre de torsion ne coïncide pas avec le centre de gravité, ce qui est le cas des poutres en C minces. Ce genre de poutres est soumis en même temps à la flexion ainsi qu'à la torsion. Ces sollicitations causent des vibrations couplées [37].

Afin de pouvoir calculer les différents types de vibrations agissant sur une poutre à parois minces, les méthodes de Timoshenko et de Bernoulli-Euler vont être utilisées. Ces deux méthodes diffèrent selon les paramètres qu'elles prennent en considération :

- La méthode de Bernoulli-Euler énonce que la flexion d'une poutre se comporte de telle manière que la section transversale reste normale à l'axe neutre après flexion.
- Dans le cas de la méthode de Timoshenko, la section transversale de la poutre reste normale à l'axe neutre avant flexion, mais elle ne le sera plus après la flexion.
- La théorie de Bernoulli-Euler ne prend pas en considération les contraintes transversales dues aux cisaillements ce qui est le contraire pour le cas de la théorie de Timoshenko.

### • Méthode de Bernoulli-Euler

Nous considérons une poutre de section constante dont la vibration transversale est donnée par sa flèche  $y(x,t)$  par rapport à l'axe neutre longitudinal  $x$  et au temps  $t$ .



L'équilibre dynamique est établi sur un élément de poutre de longueur  $dx$  à la figure 5.10.  
Les propriétés de la poutre sont définies comme suit :

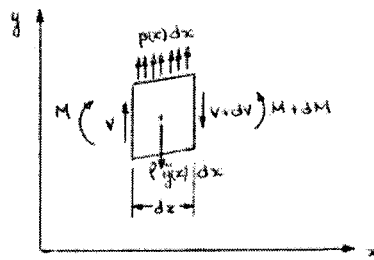


Figure 5.10 : Équilibre dynamique d'un élément de poutre.

Tel que :

$P$  : masse linéique.

$L$  : longueur de la poutre.

$E$  : module d'élasticité.

$I$  : moment d'inertie selon l'axe  $x$ .

$P(x)$  : chargement linéaire.

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (5.16)$$

$$V = \frac{dM}{dx} = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \quad (5.17)$$

Équilibre dynamique en  $y$  :

$$p(x) - \frac{dV}{dx} = \rho \ddot{y} \quad (5.18)$$

Où :

$M$  : moment fléchissant.

$V$  : effort tranchant.

$\rho \ddot{y}$  : inertie de l'élément de poutre (N/m).

$y(x, t)$  : flèche de la poutre à partir de sa position d'équilibre statique.

### Hypothèses appliquées

- Longueur de la poutre constante dans le temps.
- Inertie de rotation négligée.
- Déformation en cisaillement négligée.
- Section constante dans le temps sur toute la longueur de la poutre.
- Rigidité constante sur toute la longueur de la poutre.

En vibrations libres, on a  $p(x)=0$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (5.19)$$

Pour trouver la flèche  $Y(x)$ , on suppose que le mouvement est harmonique.

$$y(x, t) = Y(x) \times G(t) \quad (5.20)$$

Où  $Y(x)$  = amplitude des vibrations selon l'axe  $x$ .

$$G(t) = G_1 \sin(\omega t) + G_2 \cos(\omega t) \quad (5.21)$$

L'équation du mouvement de la poutre devient :

$$EI G(t) \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \rho Y(x) \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0 \quad (5.22)$$

Et comme  $\ddot{G}(t) = -\omega^2 G(t)$ , on obtient :

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} - \rho \omega^2 Y = 0 \quad (5.23)$$

La solution de cette équation s'écrit comme suit :

$$Y_n(x) = A \cos \beta_n x + B \sin \beta_n x + C \cosh \beta_n x + D \sinh \beta_n x \quad (5.24)$$

Où :

$$\beta_n = \sqrt[4]{\frac{\rho \omega_n^2}{EI}} \quad (5.25)$$

$\beta_n$ : nombre d'onde (rad/m).

### A. Cas d'une poutre simplement appuyée des deux côtés

La figure 5.11 montre une poutre à parois minces simplement appuyée des deux côtés.

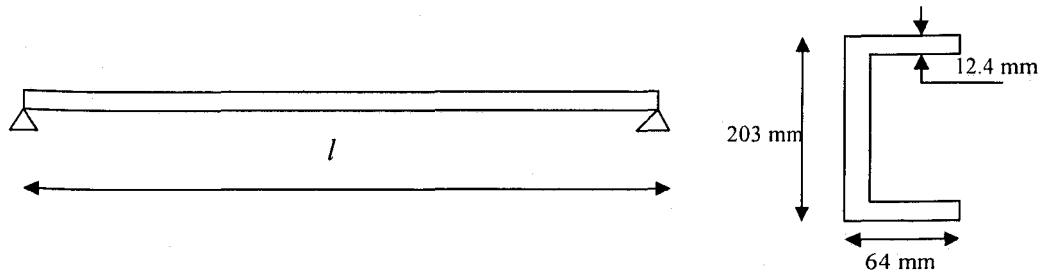


Figure 5.11 : Poutre simplement appuyée des deux côtés.

- **Conditions aux limites**

$$\text{pour } x = 0, \quad W(0) = 0, \quad \frac{d^2 W}{dx^2}(0) = 0$$

$$\text{pour } x = l, \quad W(l) = 0, \quad \frac{d^2 W}{dx^2}(l) = 0$$

$$W(x) = C_1(\cos \beta x + \cosh \beta x) + C_2(\cos \beta x - \cosh \beta x) + C_3(\sin \beta x + \sinh \beta x) + C_4(\sin \beta x - \sinh \beta x) \quad (5.26)$$

En appliquant les conditions aux limites  $C_1 = C_2 = 0$

$$\begin{aligned} C_2(\sin \beta l + \sinh \beta l) + C_4(\sin \beta l - \sinh \beta l) &= 0 \\ -C_3(\sin \beta l - \sinh \beta l) - C_4(\sin \beta l + \sinh \beta l) &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

La solution non triviale nous donne :

$$-(\sin \beta l + \sinh \beta l)^2 + (\sin \beta l - \sinh \beta l)^2 = 0 \quad (5.28)$$

Cette équation peut être simplifiée comme suit :

$$\sin \beta l \sinh \beta l = 0 \quad (5.29)$$

Les fréquences naturelles obtenues dans ce cas sont :

$$\omega_n = (\beta_n l)^2 (EI / \rho A l^4)^{1/2} \quad (5.30)$$

$$\beta_n l = n \pi \quad (5.31)$$

- **Application numérique**

Tableau 5.6 : Fréquences de flexion de la poutre simplement appuyée des deux côtés.

| Modes | Fréquences (Hz) |
|-------|-----------------|
| 1     | 4.5474          |
| 2     | 18.1897         |
| 3     | 40.9268         |

**B. Cas d'une poutre encastree des deux côtés**

Ci-dessous est présente la figure 5.12 d'une poutre simple encastree des côtés.

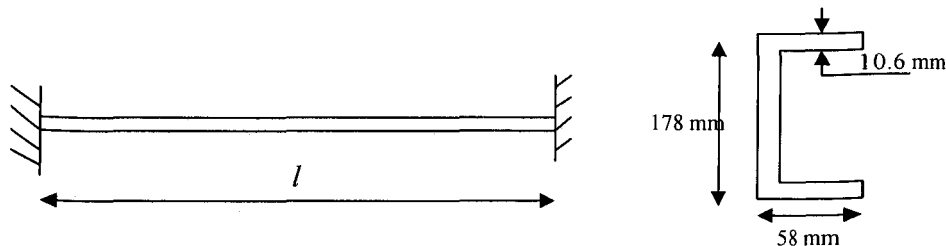


Figure 5.12 : Poutre encastree des deux côtés.

$$W(x) = C_1(\cos \beta x + \cosh \beta x) + C_2(\cos \beta x - \cosh \beta x) + C_3(\sin \beta x + \sinh \beta x) + C_4(\sin \beta x - \sinh \beta x) \quad (5.32)$$

- Conditions aux limites

$$\begin{aligned} \text{pour } x = 0, \quad W(0) = 0, \quad \frac{dW}{dx}(0) = 0 \\ \text{pour } x = l, \quad W(l) = 0, \quad \frac{dW}{dx}(l) = 0 \end{aligned}$$

En appliquant les conditions aux limites :

$$C_1 = C_3 = 0$$

Et

$$\begin{aligned} C_2(\cos \beta l - \cosh \beta l) + C_4(\sin \beta l + \sinh \beta l) &= 0 \\ -C_2(\sin \beta l - \sinh \beta l) + C_4(\cos \beta l - \cosh \beta l) &= 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

La solution non triviale nous donne :

$$\begin{vmatrix} \cos \beta l - \cosh \beta l & \sin \beta l + \sinh \beta l \\ -(\sin \beta l - \sinh \beta l) & \cos \beta l - \cosh \beta l \end{vmatrix} = 0 \quad (5.34)$$

Où :

$$(\cos \beta l - \cosh \beta l)^2 + (\sin^2 \beta l - \sinh^2 \beta l) = 0 \quad (5.35)$$

Cette équation peut être simplifiée comme suit :

$$\cos \beta l \cosh \beta l - 1 = 0 \quad (5.36)$$

Les fréquences naturelles obtenues dans ce cas-là sont :

$$\omega_n = (\beta_n l)^2 (EI / \rho A l^4)^{\frac{1}{2}} \quad (5.37)$$

$$\beta_n l \approx (2n + 1)\pi/2 \quad (5.38)$$

- **Application numérique**

Tableau 5.7 : Fréquences de flexion de la poutre encastree des deux cétés.

| Modes | Fréquences (Hz) |
|-------|-----------------|
| 1     | 53.08           |
| 2     | 147.44          |
| 3     | 288.98          |

### C. Cas d'une poutre simplement appuyée sur trois appuis

La figure 5.13 présente une poutre simplement appuyée sur trois appuis et libre des deux côtés.

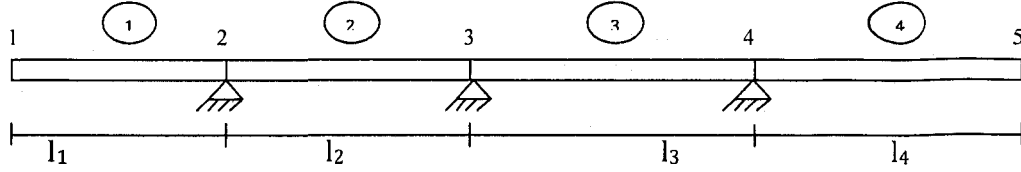


Figure 5.13 : Poutre appuyée sur trois appuis et libre des deux côtés.

$$W_i(x) = A_i \cos \beta_i x + B_i \sin \beta_i x + C_i \cos h\beta_i x + D_i \sin h\beta_i x \quad (5.39)$$

$$\beta_i = \left( \frac{\rho_i A_i \omega^2}{E_i I_i} \right)^{1/4} \quad i=1, 2, 3 \dots n-1 \quad (5.40)$$

$$W_1(x) = A_1 \cos \beta_1 x + B_1 \sin \beta_1 x + C_1 \cos h\beta_1 x + D_1 \sin h\beta_1 x \quad (5.41)$$

$$W_2(x) = A_2 \cos \beta_2 x + B_2 \sin \beta_2 x + C_2 \cos h\beta_2 x + D_2 \sin h\beta_2 x \quad (5.42)$$

$$W_3(x) = A_3 \cos \beta_3 x + B_3 \sin \beta_3 x + C_3 \cos h\beta_3 x + D_3 \sin h\beta_3 x \quad (5.43)$$

$$W_4(x) = A_4 \cos \beta_4 x + B_4 \sin \beta_4 x + C_4 \cos h\beta_4 x + D_4 \sin h\beta_4 x \quad (5.44)$$

#### Élément 1

Les conditions aux limites de l'appui 1 sont :

$$E_1 I_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} (0, t) = 0 \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E_1 I_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \right) (0, t) = 0 \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = -A_1 \beta_1 \sin \beta_1 x + B_1 \beta_1 \cos \beta_1 x + C_1 \beta_1 \sin h\beta_1 x + D_1 \beta_1 \cos h\beta_1 x \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = -A_1 \beta_1^2 \cos \beta_1 x - B_1 \beta_1^2 \sin \beta_1 x + C_1 \beta_1^2 \cos h\beta_1 x + D_1 \beta_1^2 \sin h\beta_1 x \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial^3 W_1}{\partial x^3} = A_1 \beta_1^3 \sin \beta_1 x - B_1 \beta_1^3 \cos \beta_1 x + C_1 \beta_1^3 \sin h\beta_1 x + D_1 \beta_1^3 \cos h\beta_1 x \quad (5.49)$$

Nous aurons :

$$-A_1 + C_1 = 0$$

$$-B_1 + D_1 = 0$$



Donc :  $A_1 = C_1$  et  $B_1 = D_1$

L'équation (5.41) se réduit à :

$$W_1(x) = A_1 (\cos \beta_1 x + \cos h\beta_1 x) + B_1 (\sin \beta_1 x + \sin h\beta_1 x) \quad (5.50)$$

Lorsque le déplacement est nul à l'appui 2,  $W_1(l_1) = 0$

Nous trouvons :

$$A_1 (\cos \beta_1 l_1 + \cos h\beta_1 l_1) + B_1 (\sin \beta_1 l_1 + \sin h\beta_1 l_1) = 0 \quad (5.51)$$

Où :

$$B_1 = \frac{-A_1 (\cos \beta_1 l_1 + \cos h\beta_1 l_1)}{(\sin \beta_1 l_1 + \sin h\beta_1 l_1)} \quad (5.52)$$

En remplaçant  $B_1$  dans l'équation précédente :

$$W_1(x) = A_1 \left[ (\cos \beta_1 x + \cos h\beta_1 x) - \frac{(\cos \beta_1 l_1 + \cos h\beta_1 l_1)}{(\sin \beta_1 l_1 + \sin h\beta_1 l_1)} (\sin \beta_1 x + \sin h\beta_1 x) \right] \quad (5.53)$$

## Élément 2

Les conditions aux limites de l'appui 2 sont :

$$W_2(0) = 0 \quad (5.54)$$

$$E_2 I_2 \frac{d^2 W_2(x)}{dx^2} = 0 \quad (5.55)$$

$$W_2(x) = A_2 \cos \beta_2 x + B_2 \sin \beta_2 x + C_2 \cos h\beta_2 x + D_2 \sin h\beta_2 x \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} = -A_2 \beta_2^2 \cos \beta_2 x - B_2 \beta_2^2 \sin \beta_2 x + C_2 \beta_2^2 \cos h\beta_2 x + D_2 \beta_2^2 \sin h\beta_2 x \quad (5.57)$$

Nous aurons :

$$A_2 + C_2 = 0$$

$$-A_2 + C_2 = 0$$

Donc :

$$A_2 = C_2 = 0$$

L'équation (5.42) nous donne :

$$W_2(x) = B_2 \sin \beta_2 x + D_2 \sin h\beta_2 x \quad (5.58)$$

Lorsque le déplacement est nul à l'appui 3,  $W_2(l_2) = 0$

Nous trouvons :

$$B_2 \sin \beta_2 l_2 + D_2 \sin h\beta_2 l_2 = 0 \quad (5.59)$$

Où :

$$D_2 = \frac{-B_2 \sin \beta_2 l_2}{\sin h\beta_2 l_2} \quad (5.60)$$

En remplaçant  $D_2$  dans l'équation précédente :

$$W_2(x) = B_2 \left( \sin \beta_2 x - \frac{\sin \beta_2 l_2}{\sin h\beta_2 l_2} \sin h\beta_2 x \right) \quad (5.61)$$

### Élément 3

Les conditions aux limites de l'appui 3 sont :

$$W_3(0) = 0 \quad (5.62)$$

$$E_3 I_3 \frac{d^2 W_3(x)}{dx^2} = 0 \quad (5.63)$$

$$W_3(x) = A_3 \cos \beta_3 x + B_3 \sin \beta_3 x + C_3 \cos h\beta_3 x + D_3 \sin h\beta_3 x \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2} = -A_3 \beta_3^2 \cos \beta_3 x - B_3 \beta_3^2 \sin \beta_3 x + C_3 \beta_3^2 \cos h\beta_3 x + D_3 \beta_3^2 \sin h\beta_3 x \quad (5.65)$$

Nous aurons :

$$A_3 + C_3 = 0$$

$$-A_3 + C_3 = 0$$

Donc :

$$A_3 = C_3 = 0$$

L'équation (5.43) nous donne :

$$W_3(x) = B_3 \sin \beta_3 x + D_3 \sin h\beta_3 x \quad (5.66)$$

Lorsque le déplacement est nul à l'appui 4,  $W_3(l_3) = 0$

Nous trouvons :

$$B_3 \sin \beta_3 l_3 + D_3 \sin h\beta_3 l_3 = 0 \quad (5.67)$$

Où :

$$D_3 = \frac{-B_3 \sin \beta_3 l_3}{\sin h\beta_3 l_3} \quad (5.68)$$

En remplaçant  $D_3$  dans l'équation précédente :

$$W_3(x) = B_3 \left( \sin \beta_3 x - \frac{\sin \beta_3 l_3}{\sin h\beta_3 l_3} \sin h\beta_3 x \right) \quad (5.69)$$

#### Élément 4

Les conditions aux limites de limites de l'appui 5 sont :

$$E_4 I_4 \frac{\partial^2 W_4}{\partial x^2} (0, t) = 0 \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E_4 I_4 \frac{\partial^2 W_4}{\partial x^2} \right) (0, t) = 0 \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial^2 W_4}{\partial x^2} = -A_4 \beta_4^2 \cos \beta_4 x - B_4 \beta_4^2 \sin \beta_4 x + C_4 \beta_4^2 \cos h\beta_4 x + D_4 \beta_4^2 \sin h\beta_4 x \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial^3 W_4}{\partial x^3} = A_4 \beta_4^3 \sin \beta_4 x - B_4 \beta_4^3 \cos \beta_4 x + C_4 \beta_4^3 \sin h\beta_4 x + D_4 \beta_4^3 \cos h\beta_4 x \quad (5.73)$$

Nous aurons :

$$-A_4 + C_4 = 0$$

$$-B_4 + D_4 = 0$$

Donc :  $A_4 = C_4$  et  $B_4 = D_4$

L'équation (5.44) se réduit à :

$$W_4(x) = A_4 (\cos \beta_4 x + \cos h\beta_4 x) + B_4 (\sin \beta_4 x + \sin h\beta_4 x) \quad (5.74)$$

Lorsque le déplacement est nul à l'appui 5,  $W_4(l_4) = 0$

Nous trouvons :

$$A_4 (\cos \beta_4 x + \cos h \beta_4 x) + B_4 (\sin \beta_4 x + \sin h \beta_4 x) = 0 \quad (5.75)$$

Où :

$$B_4 = \frac{-A_4 (\cos \beta_4 l_4 + \cos h \beta_4 l_4)}{(\sin \beta_4 l_4 + \sin h \beta_4 l_4)} \quad (5.76)$$

En remplaçant  $B_1$  dans l'équation précédente :

$$W_4(x) = A_4 ((\cos \beta_4 x + \cos h \beta_4 x) - \frac{(\cos \beta_4 l_4 + \cos h \beta_4 l_4)}{(\sin \beta_4 l_4 + \sin h \beta_4 l_4)} (\sin \beta_4 x + \sinh \beta_4 x)) \quad (5.77)$$

La pente est continue aux appuis 2, 3, 4 :

$$\frac{dW_1(l_1)}{dx} = -\frac{dW_2(l_2)}{dx}, \quad \frac{dW_2(l_2)}{dx} = -\frac{dW_3(l_3)}{dx}, \quad \frac{dW_3(l_3)}{dx} = -\frac{dW_4(l_4)}{dx}$$

Peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} & A_1 \beta_1 ((-\sin \beta_1 l_1 + \sin h \beta_1 l_1) - \frac{(\cos \beta_1 l_1 + \cos h \beta_1 l_1)}{(\sin \beta_1 l_1 + \sin h \beta_1 l_1)} (\cos \beta_1 l_1 + \cosh \beta_1 l_1)) \\ & + B_2 \beta_2 (\cos \beta_2 l_2 \frac{\sin \beta_2 l_2}{\sin h \beta_2 l_2} \cos h \beta_2 l_2) + B_3 \beta_3 (\cos \beta_3 l_3 \frac{\sin \beta_3 l_3}{\sin h \beta_3 l_3} \cos h \beta_3 l_3) \\ & + A_4 \beta_4 ((-\sin \beta_4 l_4 + \sin h \beta_4 l_4) - \frac{(\cos \beta_4 l_4 + \cos h \beta_4 l_4)}{(\sin \beta_4 l_4 + \sin h \beta_4 l_4)} (\cos \beta_4 l_4 + \cosh \beta_4 l_4)) = 0 \end{aligned} \quad (5.78)$$

Et comme

$$\frac{dW_1(l_1)}{dx} = -\frac{dW_4(l_4)}{dx}$$

Nous trouverons :

$$\begin{aligned} & A_1 \beta_1 ((-\sin \beta_1 l_1 + \sin h \beta_1 l_1) - \frac{(\cos \beta_1 l_1 + \cos h \beta_1 l_1)}{(\sin \beta_1 l_1 + \sin h \beta_1 l_1)} (\cos \beta_1 l_1 + \cosh \beta_1 l_1)) + \\ & A_4 \beta_4 ((-\sin \beta_4 l_4 + \sin h \beta_4 l_4) - \frac{(\cos \beta_4 l_4 + \cos h \beta_4 l_4)}{(\sin \beta_4 l_4 + \sin h \beta_4 l_4)} (\cos \beta_4 l_4 + \cosh \beta_4 l_4)) = 0 \end{aligned} \quad (5.79)$$

Le moment de flexion est continu aux appuis 2, 3, 4 :



$$E_1 I_1 \frac{d^2 w_1(l_1)}{dx^2} = E_2 I_2 \frac{d^2 w_2(l_2)}{dx^2}, \quad E_2 I_2 \frac{d^2 w_2(l_2)}{dx^2} = E_3 I_3 \frac{d^2 w_3(l_3)}{dx^2}, \quad E_3 I_3 \frac{d^2 w_3(l_3)}{dx^2} = E_4 I_4 \frac{d^2 w_4(l_4)}{dx^2}$$

Et comme :

$$E_1 I_1 \frac{d^2 w_1(l_1)}{dx^2} = E_4 I_4 \frac{d^2 w_4(l_4)}{dx^2} \quad (5.80)$$

Ce qui nous donne :

$$A_1 E_1 I_1 \beta_1^2 \left[ (-\cos \beta_1 l_1 + \cosh \beta_1 l_1) - \frac{(\cos \beta_1 l_1 + \cosh \beta_1 l_1)}{(\sin \beta_1 l_1 + \sinh \beta_1 l_1)} (-\sin \beta_1 l_1 + \sinh \beta_1 l_1) \right] + \quad (5.81)$$

$$A_4 E_4 I_4 \beta_4^2 \left[ (-\cos \beta_4 l_4 + \cosh \beta_4 l_4) - \frac{(\cos \beta_4 l_4 + \cosh \beta_4 l_4)}{(\sin \beta_4 l_4 + \sinh \beta_4 l_4)} (-\sin \beta_4 l_4 + \sinh \beta_4 l_4) \right] = 0$$

Avec :

$$\beta_1 \left( (-\sin \beta_1 l_1 + \sinh \beta_1 l_1) - \frac{(\cos \beta_1 l_1 + \cosh \beta_1 l_1)}{(\sin \beta_1 l_1 + \sinh \beta_1 l_1)} (\cos \beta_1 l_1 + \cosh \beta_1 l_1) \right)$$

$$\times E_4 I_4 \beta_4^2 \left[ (-\cos \beta_4 l_4 + \cosh \beta_4 l_4) - \frac{(\cos \beta_4 l_4 + \cosh \beta_4 l_4)}{(\sin \beta_4 l_4 + \sinh \beta_4 l_4)} (-\sin \beta_4 l_4 + \sinh \beta_4 l_4) \right] \quad (5.82)$$

$$\beta_4 \left( (-\sin \beta_4 l_4 + \sinh \beta_4 l_4) - \frac{(\cos \beta_4 l_4 + \cosh \beta_4 l_4)}{(\sin \beta_4 l_4 + \sinh \beta_4 l_4)} (\cos \beta_4 l_4 + \cosh \beta_4 l_4) \right)$$

$$\times E_1 I_1 \beta_1^2 \left[ (-\cos \beta_1 l_1 + \cosh \beta_1 l_1) - \frac{(\cos \beta_1 l_1 + \cosh \beta_1 l_1)}{(\sin \beta_1 l_1 + \sinh \beta_1 l_1)} (-\sin \beta_1 l_1 + \sinh \beta_1 l_1) \right]$$

Après développement de ces formules, nous trouvons l'équation générale d'une poutre continue sur trois appuis simples et libres des deux côtés :

$$\beta_1 E_1 I_1 (1 - \cos \beta_1 l_1 \cosh \beta_1 l_1) \times (\cosh \beta_4 l_4 \sin \beta_4 l_4 - \cos \beta_4 l_4 \sinh \beta_4 l_4) + \quad (5.83)$$

$$\beta_4 E_4 I_4 (1 - \cos \beta_4 l_4 \cosh \beta_4 l_4) \times (\cosh \beta_1 l_1 \sin \beta_1 l_1 - \cos \beta_1 l_1 \sinh \beta_1 l_1) = 0$$

Dans le cas de notre exemple, la poutre est uniforme, donc :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4, \quad I_1 = I_2 = I_3 = I_4, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$$

Si nous prenons les dimensions des longueurs entre les différents appuis égales, nous obtiendrons :

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$$

$$2\beta EI(1 - \cos \beta l \cosh \beta l) \times (\cosh \beta l \sin \beta l - \cos \beta l \sinh \beta l) = 0 \quad (5.84)$$

Cette équation se réduit à :



$$(1 - \cos \beta l \cosh \beta l) \times (\cosh \beta l \sin \beta l - \cos \beta l \sinh \beta l) = 0 \quad (5.85)$$

Les solutions de cette équation sont :

$$(1 - \cos \beta l \cosh \beta l) = 0 \quad (5.86)$$

Où :

$$(\cosh \beta l \sin \beta l - \cos \beta l \sinh \beta l) = 0 \quad (5.87)$$

En premier lieu, pour  $(1 - \cos \beta l \cosh \beta l) = 0$  nous déterminons  $\omega_n = (\beta_n l)^2 (EI/\rho A l^4)^{1/2}$  avec  $\beta_n l \approx (2n + 1)\pi/2$ . Ces fréquences naturelles correspondent à une poutre encastree de deux cotes.

En deuxième lieu, pour  $(\cosh \beta l \sin \beta l - \cos \beta l \sinh \beta l) = 0$  nous déterminons  $\omega_n = (\beta_n l)^2 (EI/\rho A l^4)^{1/2}$  avec  $\beta_n l \approx (4n + 1)\pi/4$ . Dans ce cas, il s'agit d'une poutre encastree et simplement appuyée.

L'application numérique de ces résultats du calcul des fréquences analytiques est effectuée pour trois modèles de poutres à parois minces qui sont :

- Poutre principale du châssis.
- Poutre équivalente.
- Poutre standard.

Ces trois modèles de poutres sont soumis aux mêmes conditions limites. Par contre, leurs dimensions vont différer.

#### □ *Poutre principale du châssis*

La figure 5.14 présente les dimensions de la poutre principale du châssis. La longueur de cette poutre est de 10.02 mètres. Les tableaux 5.8 et 5.9 présentent les fréquences de flexion des cas 1 et 2 présentés précédemment dans le développement analytique de cette partie.

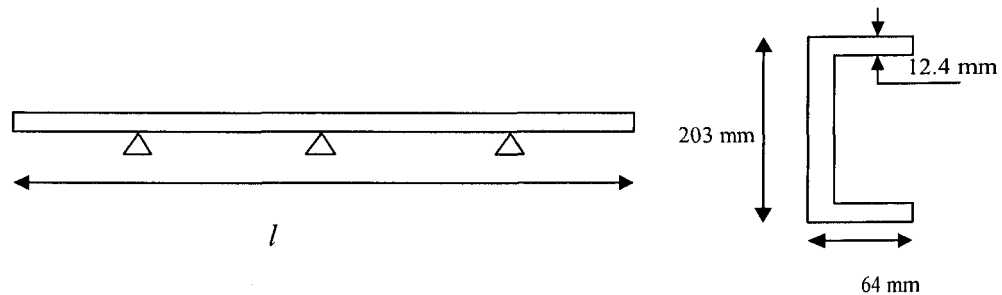


Figure 5.14 : Dimensions de la poutre principale du châssis.

Tableau 5.8 : Fréquences du cas 1 d'une poutre simplement appuyée sur trois appuis.

| Modes | Fréquences (Hz) |
|-------|-----------------|
| 1     | 10.23           |
| 2     | 28.42           |
| 3     | 55.71           |

Tableau 5.9 : Fréquences du cas 2 d'une poutre simplement appuyée sur trois appuis.

| Modes | Fréquences (Hz) |
|-------|-----------------|
| 1     | 7.11            |
| 2     | 23.02           |
| 3     | 48.03           |

#### □ *Poutre équivalente*

La figure 5.15 présente les dimensions de la poutre principale du châssis. La longueur de cette poutre est de 10.02 mètres. Les tableaux 5.10 et 5.11 présentent les fréquences de flexion des cas 1 et 2 présentés précédemment dans le développement analytique de cette partie.

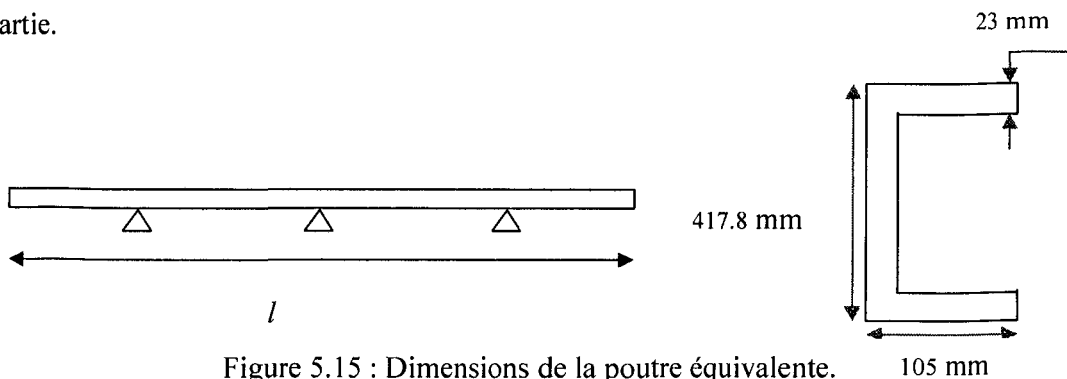


Figure 5.15 : Dimensions de la poutre équivalente.

Tableau 5.10 : Fréquences de flexion-poutre équivalente-cas1.

| Modes | Fréquences |
|-------|------------|
| 1     | 5.41       |
| 2     | 15.03      |
| 3     | 29.46      |

Tableau 5.11 : Fréquences de flexion-poutre équivalente-cas 2.

| Modes | Fréquences |
|-------|------------|
| 1     | 3.67       |
| 2     | 11.89      |
| 3     | 24.81      |

### □ *Poutre standard*

La figure 5.16 présente les dimensions de la poutre principale du châssis. La longueur de cette poutre est de 10.02 mètres. Les tableaux 5.12 et 5.13 présentent les fréquences de flexion des cas 1 et 2 présentés précédemment dans le développement analytique de cette partie.

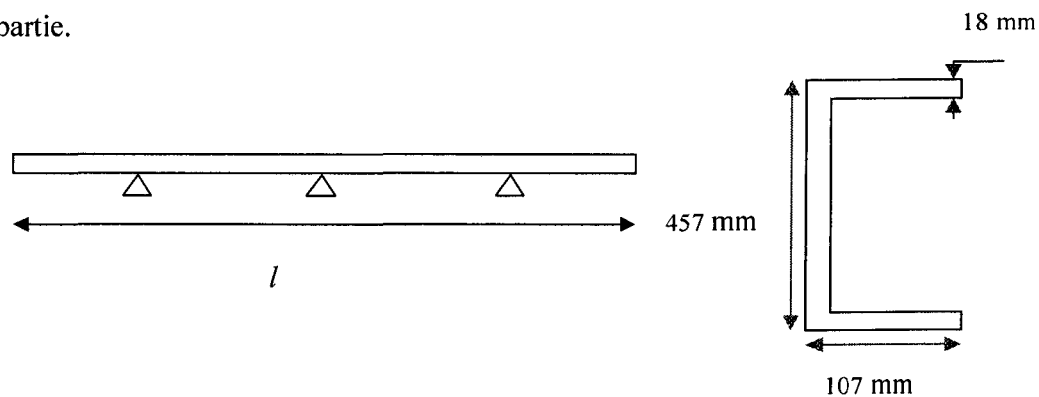


Figure 5.16 : Dimensions de la poutre standard.

Tableau 5.12 : Fréquences de flexion-poutre standard-cas 1.

| Modes | Fréquences |
|-------|------------|
| 1     | 5.12       |
| 2     | 14.23      |
| 3     | 27.89      |

Tableau 5.13 : Fréquences de flexion-poutre standard-cas 2.

| Modes | Fréquences |
|-------|------------|
| 1     | 3.73       |
| 2     | 12.09      |
| 3     | 25.23      |

- **Méthode de Timoshenko**

Les effets de la déformation due à la torsion et de l'inertie de rotation sont pris en compte. L'étude vibratoire d'une poutre en C soumise à des sollicitations agissant sur le centre de torsion sera effectuée dans cette partie. La figure 5.17 montre la section en C de la poutre. OO' représente le centre de torsion et GG' le centre de gravité de la poutre.

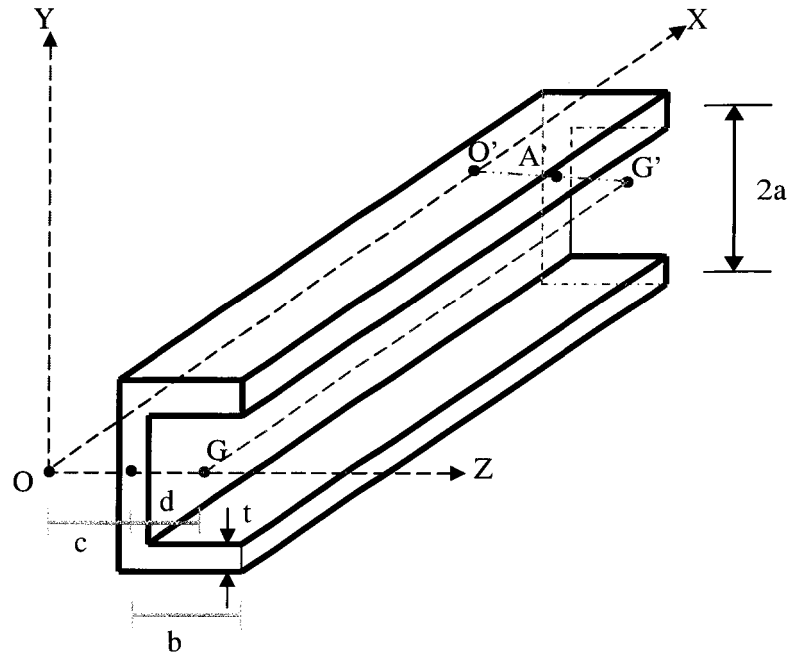


Figure 5.17 : Section de la poutre en C.

Nous supposons que la poutre de la figure 5.18 est soumise à une charge répartie  $f(x)$  agissant sur l'axe GG'. Le chargement ne passe pas par le centre de cisaillement ce qui implique que la poutre sera soumise à la flexion ainsi qu'à la torsion. Pour étudier le mouvement couplé résultant de ces deux sollicitations, la charge se trouvant sur l'axe du centre de gravité GG' sera remplacée par la même charge ainsi qu'un moment «  $fe$  » réparti le long de l'axe de torsion OO' comme montré à la figure 5.19. Les caractéristiques géométriques de cette poutre sont illustrées ci-dessous :

$e = c + d$ , tel que :

$$c = \frac{a^2 b^2 t}{I_z} \quad (5.88)$$

$$d = \frac{b^2}{2(a+b)} \quad (5.89)$$

$$I_z = \frac{2}{3}a^3t + 2\left(\frac{1}{12}bt^3 + bta^2\right) \approx \frac{2}{3}a^3t + 2a^2bt \quad (5.90)$$

$$I_y = \frac{2}{3}b^3t + 2\left(\frac{1}{12}at^3 + atb^2\right) \approx \frac{2}{3}b^3t + 2b^2at \quad (5.91)$$

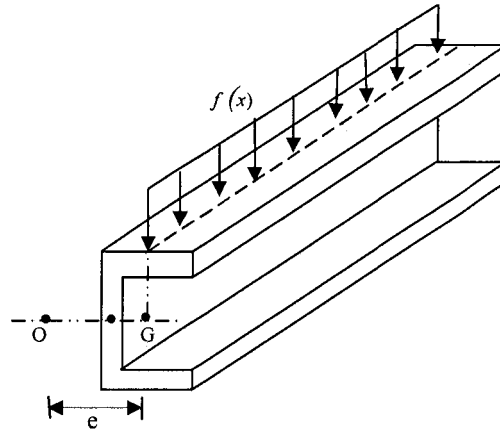


Figure 5.18 : Chargement de la poutre agissant sur l'axe GG'.

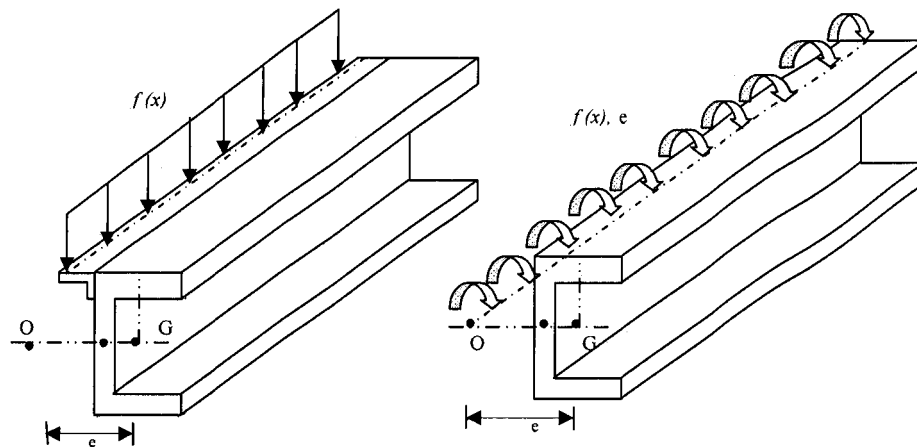


Figure 5.19 : Charge et moment agissants sur le moment de torsion.

- Équations de flexion et de torsion

Le chargement agissant sur l'axe de torsion provoque une flexion ainsi qu'une torsion de la poutre. L'équation de flexion de la poutre est comme suit :

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f \quad (5.92)$$

Où :

$EI_z$  : rigidité à la flexion suivant l'axe Z.



$v$  : flèche de la poutre dans le sens Y.

La forme de l'équation de torsion de la poutre en "C" est une somme du couple de Saint-Venant  $T_{sv}$  et le couple résultant de la contrainte de gauchissement  $T_w$ .

$$T(x) = T_{sv}(x) + T_w(x) = G.J \frac{d\Phi}{dx} - EJ_w \frac{d^3\Phi}{dx^3} \quad (5.93)$$

Où :

$\Phi$  : angle de torsion (rotation).

$G.J$  : rigidité de la torsion dans le cas d'une torsion uniforme (absence des contraintes de déformations).

$EJ_w$  : rigidité de la déformation.

$J_w$  : moment d'inertie de la section transversale.

$$J = \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 = \frac{1}{3} (2bt^3 + 2at^3) = \frac{2}{3} t^3 (a + b) \quad (5.94)$$

$$J_w = \frac{a^2 b^3 t}{3} \frac{4at + 3bt}{2at + 6bt} \quad (5.95)$$

En dérivant l'équation (5.93) par rapport à  $x$  ( $\frac{dT}{dx} = f_e$ ) on aura :

$$GJ \frac{d^2\Phi}{dx^2} - EJ_w \frac{d^4\Phi}{dx^4} = f_e \quad (5.96)$$

La résolution de l'équation (5.92) et de l'équation (5.96) nous donne la flèche due à la flexion  $v(x)$  ainsi que la flèche de torsion  $\Phi(x)$  de la poutre sous le chargement statique  $f(x)$ .  
Pour les vibrations libres de la poutre, les forces d'inertie qui agissent suivant  $y$  et  $\Phi$  sont données ci-dessous :

$$-\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v - e\emptyset) \quad (5.97)$$

$$-\rho I_G \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial t^2} \quad (5.98)$$

Où :

$v - e\emptyset$  : déflexion transversale nette de la poutre suivant l'axe Y.

$\rho$  : densité (Kg/m<sup>3</sup>).

$A$  : section transversale de la poutre ( $\text{m}^2$ ).

$I_G$  : moment d'inertie polaire par rapport au centre de gravité ( $\text{m}^4$ ).

Les équations de vibration couplées (flexion et torsion) de la poutre en C peuvent être écrites en utilisant l'équation (5.97) à la place du  $f$  et en incluant la force d'inertie dans l'équation (5.96) :

$$E I_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v - e\phi) \quad (5.99)$$

$$GJ \frac{d^2 \phi}{dx^2} - EJ_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} = -\rho A e \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v - e\phi) + \rho I_G \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (5.100)$$

La méthode du calcul des fréquences de Timoshenko est appliquée pour la poutre principale du châssis avec deux différentes conditions aux limites :

- Simplement appuyée des deux côtés
- Simplement appuyée sur trois appuis et libres des deux côtés.

#### □ *Poutre appuyée sur deux appuis simples*

Les calculs qui suivront seront appliqués au modèle de poutre de la figure 5.20.

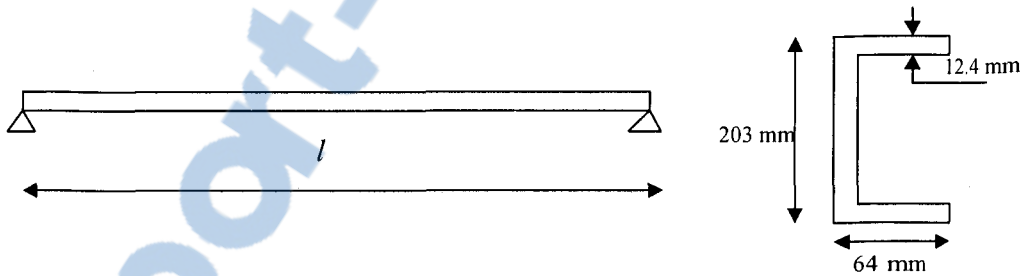


Figure 5.20 : Poutre simplement appuyée des deux côtés.

Dans le cas des vibrations libres de la poutre, la solution est sous la forme :

$$v(x, t) = V(x)C_1 \cos(\omega t + \theta_1) \quad (5.101)$$

$$\phi(x, t) = \Phi(x)C_2 \cos(\omega t + \theta_2) \quad (5.102)$$

Où  $V(x)$  et  $\Phi(x)$  sont les modes normaux,  $\omega$  c'est la fréquence naturelle de vibration,  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes et les angles de phase  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . En remplaçant les équations (5.101) et (5.102) dans les équations (5.99) et (5.100) le résultat sera :

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (V - e\Phi) \quad (5.103)$$

$$GJ \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - EJ_w \frac{d^4 \Phi}{dx^4} = -\rho A e \frac{\partial^2}{\partial t^2} (V - e\Phi) + \rho I_G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (5.104)$$

Conditions aux limites :

$$V(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad x = l$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad x = l$$

$$\Phi(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad x = l$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad x = l$$

Ces conditions aux limites peuvent être satisfaites par :

$$V_j(x) = A_j \sin \frac{j\pi x}{l}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5.105)$$

$$\Phi(x) = B_j \sin \frac{j\pi x}{l}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5.106)$$

Où  $A_j$  et  $B_j$  sont des constantes. Nous pouvons ainsi trouver les fréquences naturelles en remplaçant les équations (5.105) et (5.106) dans les équations (5.103) et (5.104) :

$$EI_z \left(\frac{j\pi}{l}\right)^4 A_j = \rho A \omega_j^2 (A_j - e B_j) \quad (5.107)$$

$$-GJ \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 B_j - EJ_w \left(\frac{j\pi}{l}\right)^4 B_j = \rho A e \omega_j^2 (A_j - e B_j) - \rho I_G \omega_j^2 B_j \quad (5.108)$$

Nous pouvons les réécrire sous la forme suivante :

$$(p^2 - \omega_j^2) A_j + (\omega_j^2 e) B_j = 0 \quad (5.109)$$

$$(q^2 \omega_j^2) A_j + (r^2 - \omega_j^2) B_j = 0 \quad (5.110)$$

Sachant que :

$$p^2 = \frac{EI_z j^4 \pi^4}{\rho A l^4} \quad q^2 = \frac{Ae}{I_G + Ae^2}$$

$$r^2 = \frac{GJ l^2 j^2 \pi^2 + EJ_w j^4 \pi^4}{\rho l^4 (I_G + Ae^2)}$$

La solution non triviale nous donne :

$$\begin{vmatrix} p^2 - \omega_j^2 & \omega_j^2 e \\ q^2 \omega_j^2 & r^2 - \omega_j^2 \end{vmatrix} = 0$$

Dont :

$$\omega_j^4(1 - q^2 e) - \omega_j^2(p^2 + r^2) + p^2 r^2 = 0 \quad (5.111)$$

Les pulsations sont alors :

$$\omega_j^2 = \frac{p^2 + r^2 \pm [(p^2 - r^2)^2 + 4p^2 r^2 q^2 e]^{0.5}}{2(1 - eq^2)} \quad (5.112)$$

Le tableau 5.14 montre les résultats des modes de torsion de la poutre simplement appuyée des deux côtés en utilisant la méthode de Timoshenko.

Tableau 5.14 : Fréquences de torsion de la poutre appuyée sur deux appuis simples.

| Modes | Fréquences (Hz) |
|-------|-----------------|
| 1     | 6.12            |
| 2     | 12.26           |
| 3     | 18.38           |

#### □ *Poutre continue sur trois appuis simples*

Maintenant, la poutre précédente a été considérée comme étant appuyée sur trois appuis simples comme montré à la figure 5.21 (équivalente aux trois essieux de l'autocar).

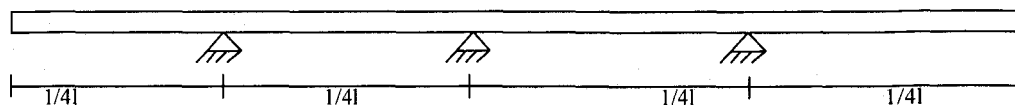


Figure 5.21 : Poutre continue sur trois appuis simples.

Les conditions aux limites d'une poutre continue sur trois appuis sont présentées comme suit :

$$\begin{array}{llll} V(x) = 0 & \text{pour} & x = \frac{1}{4}l & x = \frac{2}{4}l & x = \frac{3}{4}l \\ \frac{d^2 V}{dx^2} = 0 & \text{pour} & x = 0 & x = \frac{1}{4}l & x = \frac{2}{4}l & x = \frac{3}{4}l & x = l \\ \frac{d^3 V}{dx^3} = 0 & \text{pour} & x = 0 & x = l & \end{array}$$



$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= 0 & \text{pour} & & x = \frac{1}{4}l & & x = \frac{2}{4}l & & x = \frac{3}{4}l \\
\frac{d^2\Phi}{dx^2} &= 0 & \text{pour} & & x = 0 & & x = \frac{1}{4}l & & x = \frac{2}{4}l & & x = \frac{3}{4}l & & x = l \\
\frac{d^3\Phi}{dx^3} &= 0 & \text{pour} & & x = 0 & & x = l
\end{aligned}$$

Ces conditions aux limites peuvent être satisfaites par :

$$V_{j(x)} = A_j \sin \frac{j\pi^4 x}{l}, \quad j=1, 2, 3, \dots \quad (5.113)$$

$$\Phi(x) = B_j \sin \frac{j\pi^4 x}{l}, \quad j=1, 2, 3, \dots \quad (5.114)$$

Où  $A_j$  et  $B_j$  sont des constantes. Nous pouvons ainsi trouver les fréquences naturelles en remplaçant les équations (5.113) et (5.114) dans les équations (5.103) et (5.104) :

$$EI_z \left(\frac{j^4\pi}{l}\right)^4 A_j = \rho A \omega_j^2 (A_j - e B_j) \quad (5.115)$$

$$-GJ \left(\frac{j^4\pi}{l}\right)^2 B_j - EJ_w \left(\frac{j^4\pi}{l}\right)^4 B_j = \rho A e \omega_j^2 (A_j - e B_j) - \rho I_G \omega_j^2 B_j \quad (5.116)$$

Ces équations peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$(p^2 - \omega_j^2) A_j + (\omega_j^2 e) B_j = 0 \quad (5.117)$$

$$(q^2 \omega_j^2) A_j + (r^2 - \omega_j^2) B_j = 0 \quad (5.118)$$

Sachant que :

$$p^2 = \frac{EI_z j^4 \pi^4}{\rho A l^4} \quad q^2 = \frac{Ae}{I_G + Ae^2}$$

$$r^2 = \frac{GJ l^2 j^2 4^2 \pi^2 + EJ_w j^4 4^4 \pi^4}{\rho l^4 (I_G + Ae^2)}$$

La solution non triviale donne :

$$\begin{vmatrix} p^2 - \omega_j^2 & \omega_j^2 e \\ q^2 \omega_j^2 & r^2 - \omega_j^2 \end{vmatrix} = 0$$

Dont :

$$\omega_j^4 (1 - q^2 e) - \omega_j^2 (p^2 + r^2) + p^2 r^2 = 0 \quad (5.119)$$

Les pulsations sont alors comme suit :

$$\omega_j^2 = \frac{p^2 + r^2 \pm [(p^2 - r^2)^2 + 4p^2 r^2 q^2 e]^{0.5}}{2(1 - eq^2)} \quad (5.120)$$

Le tableau 5.15 montre les résultats des modes de torsion d'une poutre continue sur trois appuis simples en utilisant la méthode de Timoshenko.

Tableau 5.15 : Fréquences de torsion de la poutre continue sur trois appuis simples.

| Modes | Fréquences |
|-------|------------|
| 1     | 24.51      |
| 2     | 49.02      |
| 3     | 73.53      |

## 5.6 Calcul numérique des modes vibratoires

Dans cette section, nous allons refaire les calculs des modes vibratoires des poutres à parois minces étudiées précédemment dans la partie analytique afin de comparer les résultats obtenus. Toutes les poutres sont en aluminium 6061-T6.

### • Poutre simplement appuyée des deux côtés

Le modèle de la poutre de la figure 5.22 sera utilisé pour le calcul des modes vibratoires dus à la flexion ainsi qu'à la torsion en utilisant le logiciel de simulation Abaqus. Une comparaison entre les fréquences de flexion analytiques trouvées par la méthode de Bernoulli-Euler et les résultats de la simulation numérique est présentée au tableau 5.16. En ce qui concerne la partie torsion, une comparaison des fréquences analytiques obtenue par la méthode de Timoshenko et les fréquences numériques est présentée au tableau 5.17.

Les simulations numériques ont été réalisées en utilisant 173 037 éléments tétraèdres de type C3D4 avec un espacement de 0.012 mm entre chaque nœud. Le maillage comprenait 52 435 nœuds. La méthode Lanczos a été utilisée pour le calcul des modes vibratoires. Les figures 5.23 et 5.24 montrent les trois premiers modes de flexion et de torsion de la poutre simplement appuyée des deux côtés. Pour les conditions aux limites, vu que c'est des appuis simples que nous avons sur les côtés, alors le déplacement vertical a été annulé.



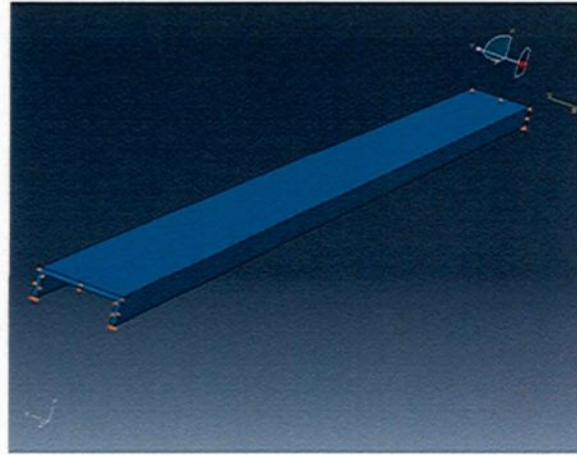


Figure 5.22 : Poutre à parois minces simplement appuyée des deux côtés.

- **Propriétés mécaniques**

$$E = 7.31 * 10^{10} \text{ pa.} \quad \rho = 2700 \text{ Kg/m}^3. \quad \gamma = 0.33$$

- **Modes flexion**

Tableau 5.16 : Fréquences de flexion de la poutre simplement appuyée des deux côtés.

| Modes | Fréquences sur Abaqus<br>(Hz) | Fréquences de Bernoulli-<br>Euler (Hz) |
|-------|-------------------------------|--|
| 1     | 3.40                          | 4.55                                   |
| 2     | 9.38                          | 18.19                                  |
| 3     | 18.37                         | 40.93                                  |

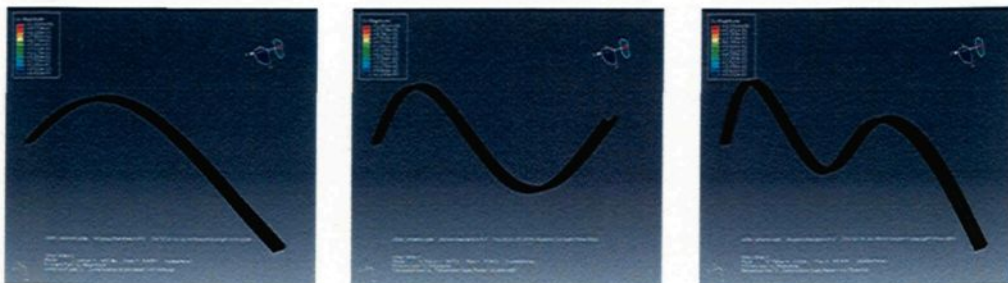


Figure 5.23 : Modes de flexion de la poutre simplement appuyée des deux côtés.

- **Modes torsion**

Tableau 5.17 : Fréquences de torsion d'une poutre simplement appuyée des deux côtés.

| Modes | Fréquences sur Abaqus (Hz) | Fréquences de Timoshenko (Hz) |
|-------|----------------------------|-------------------------------|
| 1     | 5.94                       | 6.12                          |
| 2     | 23.39                      | 12.26                         |
| 3     | 51.95                      | 18.38                         |

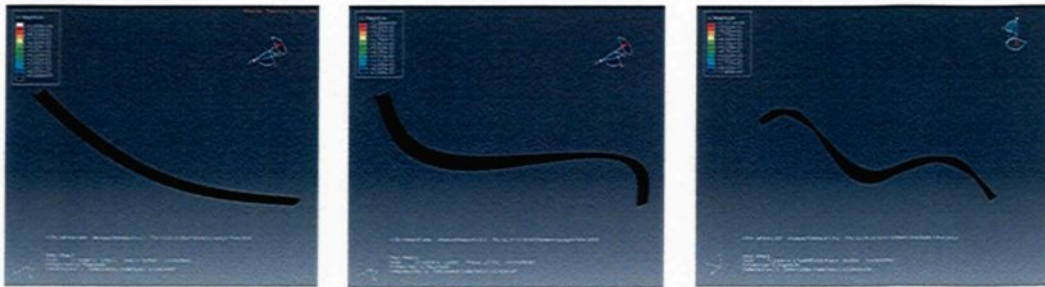


Figure 5.24 : Modes de torsion de la poutre simplement appuyée des deux côtés.

- **Poutre encastrée des deux côtés**

Le modèle de la poutre de la figure 5.25 sera utilisé pour le calcul des modes vibratoires dus à la flexion ainsi qu'à la torsion en utilisant le logiciel de simulation Abaqus. Une comparaison entre les fréquences de flexion analytiques trouvées par la méthode de Bernoulli-Euler et les résultats de la simulation numérique est présentée au tableau 5.18. En ce qui concerne la partie torsion, les fréquences obtenues numériquement sont présentées au tableau 5.19.

Les simulations numériques ont été réalisées en utilisant 9 205 éléments tétraèdres de type C3D8R avec un espacement de 0.009 mm entre chaque nœud. Le maillage comprenait 17 688 nœuds. Les figures 5.26 et 5.27 montrent les trois premiers modes de flexion et de torsion de la poutre simplement appuyée des deux côtés. La méthode Lanczos a été utilisée pour le calcul des modes vibratoires. Pour les conditions aux limites, vu que nous avons des encastrements, alors tous les déplacements sont annulés.

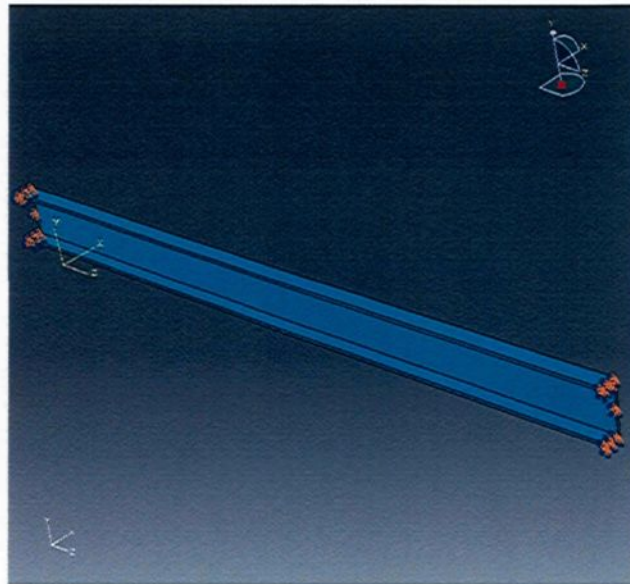


Figure 5.25 : Poutre encastrée des deux côtés.

- **Propriétés mécaniques**

$$E = 7.31 \cdot 10^{10} \text{ pa.} \quad \rho = 2700 \text{ Kg/m}^3. \quad \gamma = 0.33$$

- **Modes flexion**

Tableau 5.18 : Fréquences de flexion de la poutre encastrée des deux côtés.

| Modes | Fréquences sur Abaqus<br>(Hz) | Fréquences de Bernoulli-<br>Euler (Hz) |
|-------|-------------------------------|--|
| 1     | 48.650                        | 53.08                                  |
| 2     | 145.94                        | 147.44                                 |
| 3     | 277.19                        | 288.98                                 |

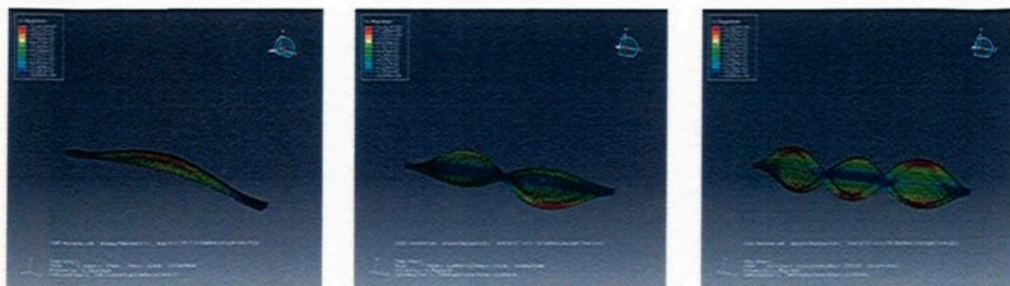


Figure 5.26 : Modes de flexion de la poutre encastrée des deux côtés.



- **Modes de torsion**

Tableau 5.19 : Fréquences de torsion de la poutre encastrée des deux côtés.

| Modes | Fréquences sur Abaqus (Hz) |
|-------|----------------------------|
| 1     | 56.22                      |
| 2     | 98.14                      |
| 3     | 185.84                     |

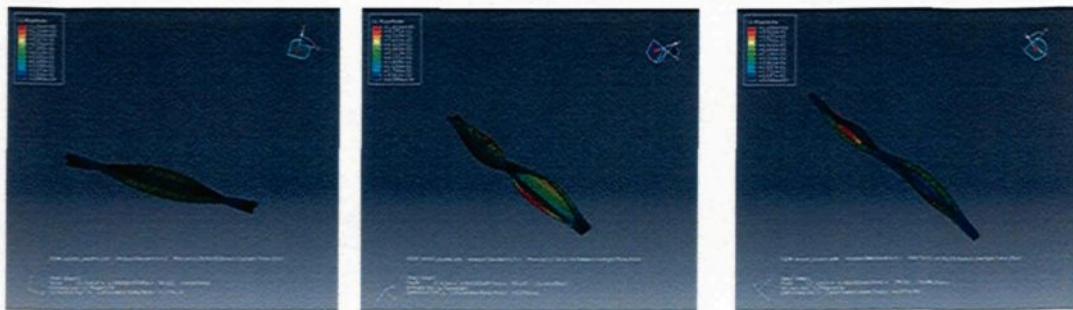


Figure 5.27 : Modes de torsion de la poutre encastrée des deux côtés.

- ***Poutre simplement appuyée sur trois appuis***

Le modèle de poutre de la figure 5.28 sera utilisé pour le calcul des modes vibratoires dus à la flexion ainsi qu'à la torsion en utilisant le logiciel de simulation Abaqus avec un maillage tétraèdre. Les résultats des fréquences de flexion des deux cas sont présentés aux tableaux 5.20 et 5.21. Une comparaison a été effectuée entre les fréquences analytiques obtenues par la méthode de Bernoulli-Euler et les fréquences numériques obtenues.

Les simulations numériques ont été réalisées en utilisant 51 943 éléments tétraèdres de type C3D4 avec un espacement de 0.02 mm entre chaque nœud. Le maillage comprenait 17 975 nœuds. Les figures 5.29 et 5.30 montrent les trois premiers modes de flexion de la poutre simplement appuyée des deux côtés pour les cas 1 et 2. Le tableau 5.22 et la figure 5.31 présentent les résultats des fréquences de torsion ainsi que les modes de vibrations de la poutre étudiée. Pour la partie torsion, une comparaison des fréquences obtenues par la méthode de Timoshenko et celles numériques a été effectuée. La méthode Lanczos a été utilisée pour le calcul des modes vibratoires numériquement.

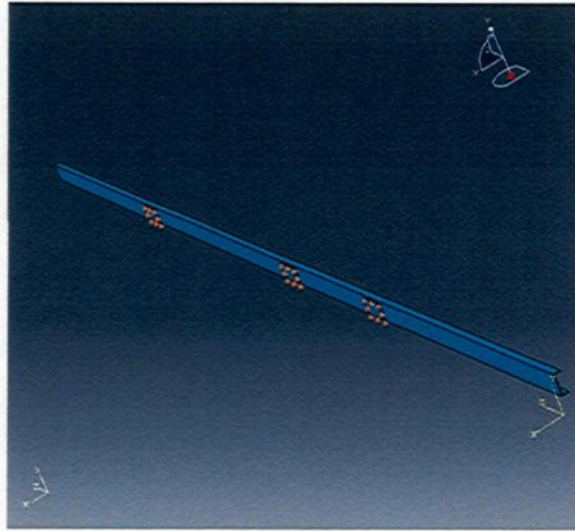


Figure 5.28 : Poutre continue sur trois appuis simples.

- **Propriétés mécaniques**

$$E = 7.31 \cdot 10^{10} \text{ pa.}$$

$$\rho = 2700 \text{ Kg/m}^3.$$

$$\gamma = 0.33$$

- **Modes flexion**

**Cas 1 :** Ces fréquences naturelles correspondent exactement à une poutre encastrée des deux côtés.

Tableau 5.20 : Fréquences de flexion de la poutre continue sur trois appuis-cas 1.

| Modes | Fréquences sur Abaqus (Hz) | Fréquences de Bernoulli-Euler (Hz) |
|-------|----------------------------|------------------------------------|
| 1     | 3.55                       | 10.23                              |
| 2     | 18.81                      | 28.42                              |
| 3     | 46.52                      | 55.71                              |

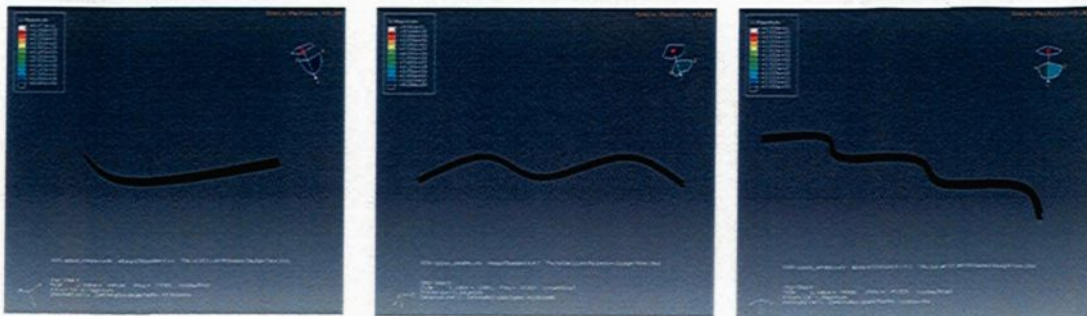


Figure 5.29 : Modes de flexion de la poutre continue sur trois appuis-cas 1.



**Cas 2 :** Ces fréquences représentent le cas d'une poutre encastrée et simplement appuyée.

Tableau 5.21 : Fréquences de flexion de la poutre continue sur trois appuis-cas 2.

| Modes | Fréquences sur Abaqus<br>(Hz) | Fréquences de Bernoulli-<br>Euler (Hz) |
|-------|-------------------------------|--|
| 1     | 9.64                          | 7.11                                   |
| 2     | 31.26                         | 23.02                                  |
| 3     | 64.2                          | 48.03                                  |



Figure 5.30 : Modes de flexion de la poutre continue sur trois appuis-cas 2.

- **Modes torsion**

Tableau 5.22 : Fréquences de torsion de la poutre simplement appuyée sur trois appuis.

| Modes | Fréquences sur Abaqus<br>(Hz) | Fréquences de Timoshenko<br>(Hz) |
|-------|-------------------------------|----------------------------------|
| 1     | 27.02                         | 24.51                            |
| 2     | 38.35                         | 49.02                            |
| 3     | 71.49                         | 73.54                            |

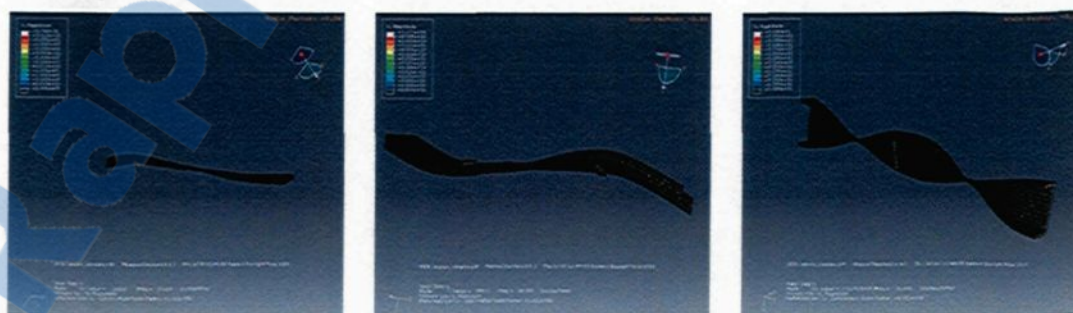


Figure 5.31 : Modes de torsion de la poutre simplement appuyée sur trois appuis.



- **Poutre équivalente**

Le calcul numérique des modes vibratoires de la poutre présentée précédemment à la figure 5.15 a été effectué dans cette section. Les résultats des fréquences de flexion et de torsion sont présentés aux tableaux 5.23 et 5.24. Les figures 5.32 et 5.33 montrent les trois premiers modes de flexion et de torsion de la poutre simplement appuyée des deux côtés.

- **Modes de flexion**

Tableau 5.23 : Fréquences de flexion de la poutre équivalente.

| Modes | Fréquences sur Abaqus (Hz) | Fréquences Bernoulli-Euler (Hz) |
|-------|----------------------------|---------------------------------|
| 1     | 5.09                       | 5.41                            |
| 2     | 13.78                      | 15.03                           |
| 3     | 26.36                      | 29.46                           |

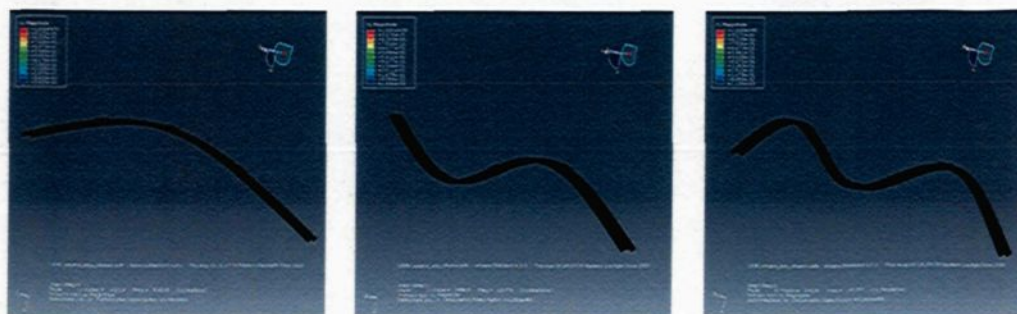


Figure 5.32 : Modes de flexion de la poutre équivalente.

- **Modes de torsion**

Tableau 5.24 : Fréquences de torsion de la poutre équivalente.

| Modes | Fréquences sur Abaqus (Hz) |
|-------|----------------------------|
| 1     | 20.57                      |
| 2     | 40.39                      |
| 3     | 59.18                      |

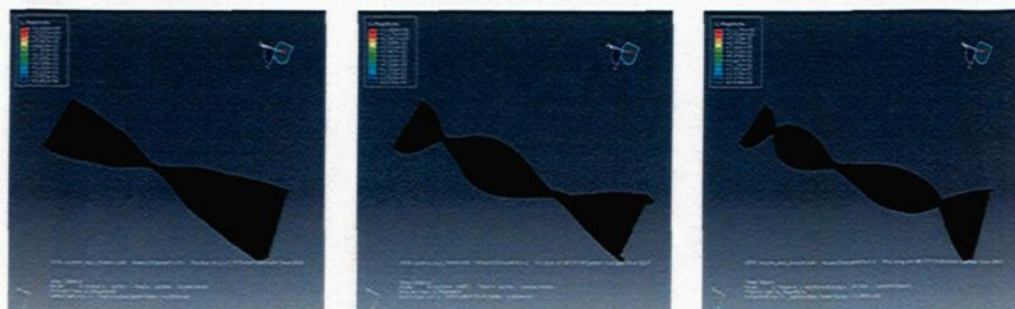


Figure 5.33 : Modes de torsion de la poutre équivalente.

- **Poutre standard**

Le calcul numérique des modes vibratoires de la poutre présentée précédemment à la figure 5.16 a été effectué dans cette section. Les résultats des fréquences de flexion et de torsion sont présentés aux tableaux 2.25 et 5.26. Les figures 5.34 et 5.35 montrent les trois premiers modes de flexion et de torsion de la poutre simplement appuyée des deux côtés.

- **Modes de flexion**

Tableau 5.25 : Fréquences de flexion de la poutre standard.

| Modes | Fréquences sur Abaqus (Hz) | Fréquences Bernoulli-Euler (Hz) |
|-------|----------------------------|---------------------------------|
| 1     | 5.16                       | 5.12                            |
| 2     | 13.92                      | 12.09                           |
| 3     | 26.22                      | 25.23                           |

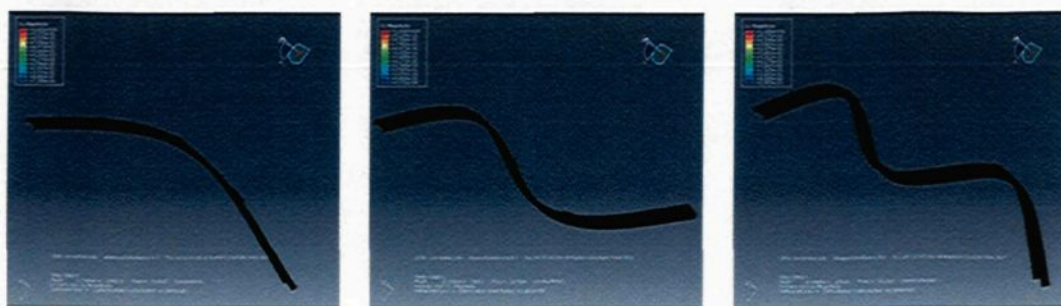


Figure 5.34 : Modes de flexion de la poutre standard.

- **Modes de torsion**

Tableau 5.26 : Fréquences de torsion de la poutre standard.

| Modes | Fréquences sur Abaqus(Hz) |
|-------|---------------------------|
| 1     | 17.86                     |
| 2     | 34.77                     |
| 3     | 49.73                     |

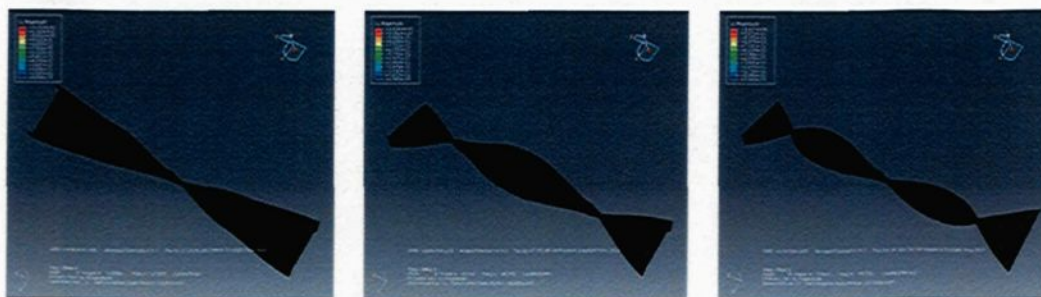


Figure 5.35 : Modes de torsion de la poutre standard.

## 5.7 Conclusion

L'étude des plaques étalons a démontré que les résultats obtenus par le logiciel de simulation Abaqus sont valides. Les résultats obtenus dans le cas de la flexion des deux poutres par la simulation sur le logiciel Abaqus sont similaires aux résultats obtenus analytiquement pour le cas d'une poutre encastree des deux côtés. Dans le cas d'une poutre simplement appuyée sur trois appuis, nous trouvons deux valeurs de fréquences de flexion qui se rapporte à une poutre encastree des deux côtés et une autre encastree et simplement appuyée. Les poutres étudiées dans ces deux exemples ont une épaisseur assez importante. Elles sont donc plus rigides. Vu qu'elles sont plus rigides, elles vibreront moins qu'une poutre mince. Ce cas se rapporte au cas d'une poutre encastree des deux côtés qui vibre difficilement. Ce qui explique les résultats de fréquences de flexion obtenus.



de flexion du châssis pour la poutre standard et la poutre équivalente. Ces trois modèles sont tous en aluminium 6061-T6. Les trois premiers modes de flexion du châssis avec les fréquences de 7.41 Hz, 9.37 Hz et 18.16 Hz sont présentés à la figure 6.2.

Tableau 6.1 : Comparaison des fréquences de flexion.

| Modes | Fréquences du châssis (Hz) | Fréquences de la poutre standard (Hz) | Fréquences de la poutre équivalente (Hz) |
|-------|----------------------------|---------------------------------------|--|
| 1     | 7.41                       | 5.16                                  | 5.09                                     |
| 2     | 9.37                       | 13.92                                 | 13.78                                    |
| 3     | 18.16                      | 26.22                                 | 26.36                                    |

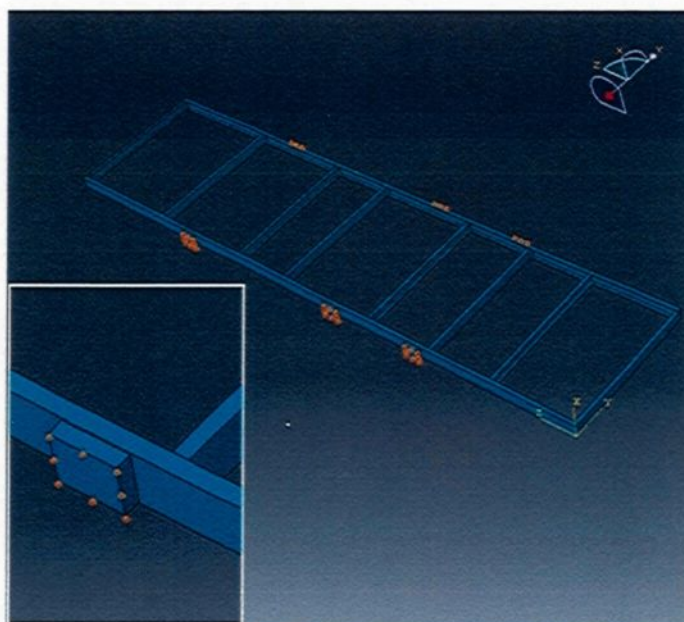


Figure 6.1 : Conditions aux limites de flexion du châssis.

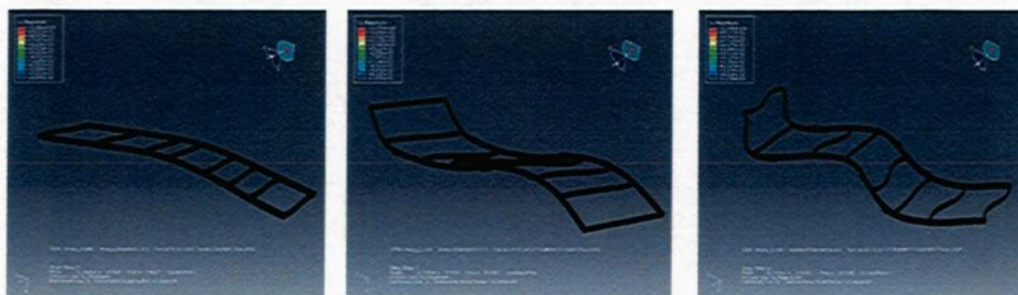


Figure 6.2 : Modes de flexion du châssis.

Pour les fréquences de torsion, le déplacement latéral a été annulé. Les fréquences de torsion du châssis sont présentées au tableau 6.2. Les trois premiers modes de torsion sont montrés à la figure 6.3.

Tableau 6.2 : Fréquences de torsion du châssis.

| Modes | Fréquences (Hz) |
|-------|-----------------|
| 1     | 4.93            |
| 2     | 10.74           |
| 3     | 13.37           |



Figure 6.3 : Modes de torsion du châssis.

#### □ *Châssis en acier*

Les mêmes procédures ont été utilisées pour ce deuxième modèle de châssis. Les résultats des trois premiers modes de flexion et de torsion sont montrés respectivement aux tableaux 6.3 et 6.4. Les trois premiers modes de flexion du châssis en acier avec les fréquences de 7.26 Hz, 12.83 Hz et 17.25 Hz sont présentés à la figure 6.4. La figure 6.5 montre les premiers modes de torsion du châssis en acier aux fréquences de 4.61 Hz, 10.48 Hz et 13.98 Hz respectivement.

Tableau 6.3 : Fréquences de flexion du châssis en acier.

| Modes | Fréquences (Hz) |
|-------|-----------------|
| 1     | 7.26            |
| 2     | 12.83           |
| 3     | 17.25           |

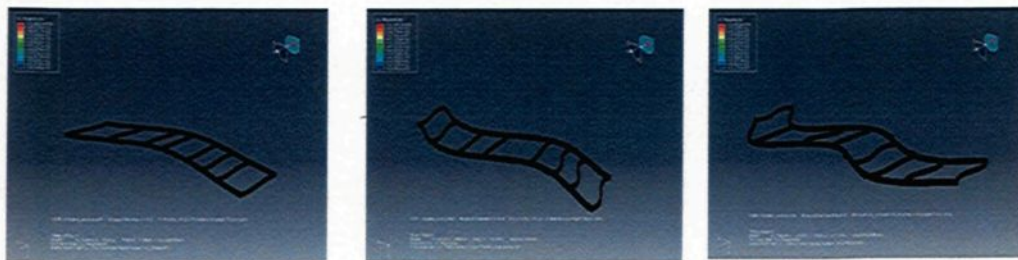


Figure 6.4 : Modes de flexion du châssis en acier.



Tableau 6.4 : Fréquences de torsion du châssis en acier.

| Modes | Fréquences (Hz) |
|-------|-----------------|
| 1     | 4.61            |
| 2     | 10.48           |
| 3     | 13.98           |

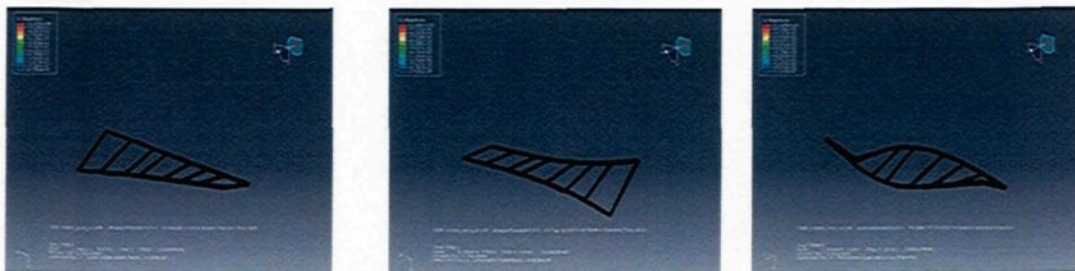


Figure 6.5 : Modes de torsion du châssis en acier.

### Remarque

Puisque les fréquences d'excitation de la route varient de 0 à 20 Hz, c'est pour cela, l'intérêt a été porté seulement aux premiers modes de vibration.

#### □ *Étude des fréquences libres*

D'un autre côté, les fréquences libres du châssis en aluminium ont été calculées. Aucune condition aux limites n'a été appliquée au châssis. Les fréquences des douze premiers modes de vibration sont représentées au tableau 5.6. Au départ, nous avons eu des vibrations globales du châssis, c'est au niveau du onzième mode qu'il y a eu l'apparition d'une flexion latérale localisée. Les différents types de mode sont montrés à la figure 6.6. Le même châssis a été modélisé, mais avec des positions d'essieux équivalentes à celles des poutres standard et équivalente effectuées précédemment. Le tableau 6.6 montre un résumé des résultats de fréquence de flexion obtenus pour les cas suivants :

- Châssis de l'autocar avec la position réelle des essieux.
- Châssis de l'autocar avec la position des essieux modifiée.
- Poutre créée par discrétisation du châssis continu (pour faciliter les calculs de fréquence analytique).
- Poutre standard accessible au marché de l'industrie.

## CHAPITRE 6

# ÉTUDE DES MODES VIBRATOIRES ET ANALYSE DES CONTRAINTES POUR UN CHÂSSIS 3-D

### 6.1. Introduction

Vu que dans le chapitre précédent, la validation des résultats numériques a été faite avec ceux de l'expérimentale et de l'analytique donc, dans cette partie, toutes les études que nous réaliserons seront numériques.

Au départ, les comportements vibratoires et dynamiques du châssis au complet ont été traités. Ces études sont nécessaires pour prévenir le phénomène de résonance qui engendre l'inconfort du roulement et la fatigue des structures. Par la suite, l'évaluation des contraintes a aussi été réalisée durant cette section afin de pouvoir détecter les parties les plus contraignantes et celles qui le sont moins. Durant la conception, le logiciel SolidWorks a été utilisé pour la modélisation du châssis. D'autre part, la simulation des différents comportements a été effectuée en utilisant le logiciel Abaqus.

### 6.2. Analyse vibratoire

Deux modèles de châssis avec les mêmes dimensions, mais des matériaux différents ont été utilisés lors des simulations. Les matériaux utilisés sont l'aluminium 6061-T6 et l'acier 1018-HR.

#### □ *Châssis en aluminium*

Les modes propres du châssis en aluminium ont été calculés sur Abaqus en utilisant le module des perturbations linéaires. Le châssis a été maillé avec les éléments tétraèdres (C3D8R, C3D6, C3D4). Ce sont les éléments les plus appropriés pour ce modèle de châssis. Il est composé de 495 937 éléments. La méthode Lanczos a été utilisée pour le calcul des modes vibratoires. Le déplacement vertical a été annulé,

Tableau 6.5 : Modes de vibrations libres du châssis.

| Modes | Fréquences naturelles (Hz) | Différents types de vibrations | Nombres d'éléments nodaux |
|-------|----------------------------|--------------------------------|---------------------------|
| 1     | 2.58                       | torsion                        | /                         |
| 2     | 7.39                       | flexion latérale               | 2                         |
| 3     | 9.28                       | flexion verticale              | 2                         |
| 4     | 9.39                       | flexion latérale               | 3                         |
| 5     | 12.64                      | torsion                        | /                         |
| 6     | 13.32                      | flexion latérale               | 3                         |
| 7     | 17.78                      | flexion latérale               | 4                         |
| 8     | 24.01                      | flexion verticale              | 3                         |
| 9     | 26.82                      | flexion latérale               | 5                         |
| 10    | 31.15                      | torsion                        | /                         |
| 11    | 33.39                      | flexion latérale localisée     | /                         |
| 12    | 38.57                      | flexion latérale               | 6                         |

Tableau 6.6 : Comparaison des fréquences de flexion

| Modes de flexion | Châssis réel (1)           | Châssis avec positions des essieux modifiées (2) | Poutre équivalente          |                            | Poutre standard             |                            |
|------------------|----------------------------|--|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
|                  | Fréquences sur Abaqus (Hz) | Fréquences sur Abaqus (Hz)                       | Fréquences analytiques (Hz) | Fréquences sur Abaqus (Hz) | Fréquences analytiques (Hz) | Fréquences sur Abaqus (Hz) |
| 1                | 7.41                       | 7.39   | 5.41                        | 5.09                       | 5.12                        | 5.16                       |
| 2                | 9.37                       | 13.32  | 15.03                       | 13.78                      | 12.09                       | 13.92                      |
| 3                | 18.16                      | 17.78  | 29.46                       | 26.36                      | 25.23                       | 26.22                      |
| 4                | 26.30                      | 26.82  | 48.69                       | 45.11                      | 43.14                       | 45.81                      |





Figure 6.6 : Vibration libre du châssis en aluminium.

En analysant les fréquences obtenues analytiquement et numériquement pour le cas de deux poutres standard et créée, les résultats sont très proches. Les fréquences de ces deux poutres sont assez proches, même si leurs dimensions sont un peu différentes. Les fréquences de flexion pour les deux châssis sont très proches sauf pour le deuxième mode où la différence est de 5 Hz. Elle est due aux positions différentes des essieux du châssis. Les résultats de fréquences du premier mode obtenus par Abaqus pour les

quatre modèles étudiés sont très proches. Pour le deuxième mode aussi, les fréquences sont du même ordre surtout pour les deux poutres et le châssis (2). La position des essieux du châssis modifié (2) ainsi que les appuis des deux poutres standard et créée sont similaires. Les valeurs des fréquences de flexion pour le troisième mode du tableau 6.6 des deux poutres sont apparues au niveau du quatrième mode pour les deux châssis. Cela peut être expliqué par la présence des traverses dans le cas du châssis. Donc le troisième mode obtenu dans les cas des châssis est dû aux vibrations des traverses ainsi que les poutres principales.

### 6.3. Position des points nodaux

Les positions des points nodaux du premier et du deuxième mode de flexion du châssis sont montrées aux figures 6.7 et 6.8 respectivement. Les points nodaux sont proches des positions des essieux, ce qui est recommandé pour éviter le phénomène de résonance.

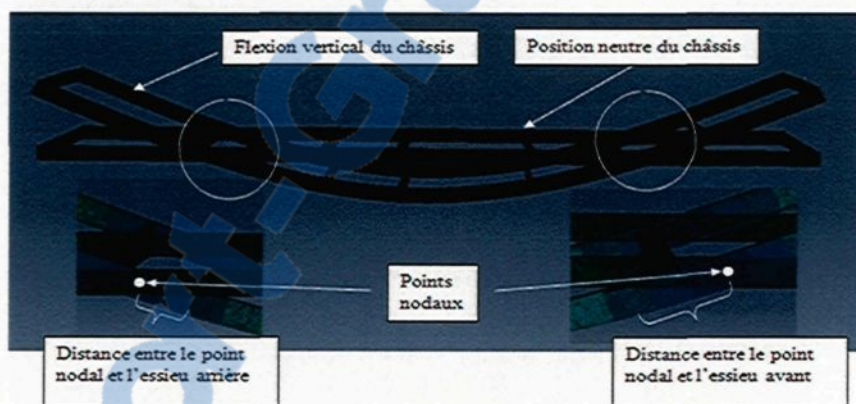


Figure 6.7 : Position des points nodaux du châssis du premier mode de flexion.

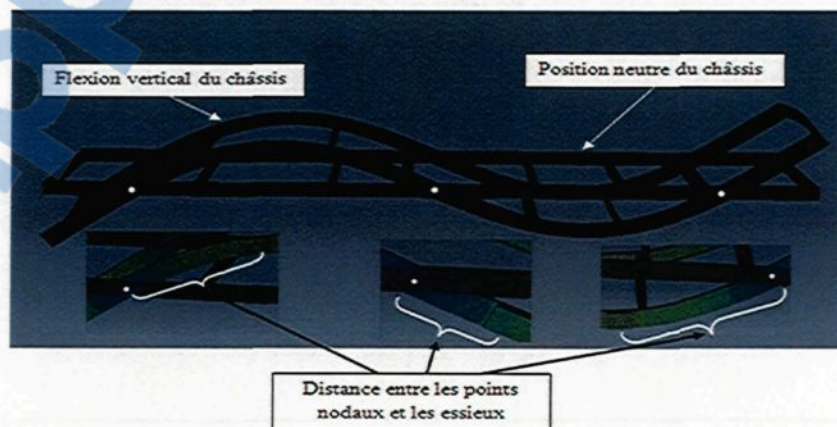


Figure 6.8 : Position des points nodaux du châssis du deuxième mode de flexion.



## 6.4. Calcul des contraintes

Dans cette section, nous allons analyser les contraintes que subit le châssis de l'autocar suivant le chargement statique et dynamique.

- **Chargement statique**

Le calcul des contraintes que subissent les deux châssis en aluminium 6061-T6 et en acier 710C a été effectué sous le chargement statique énoncé précédemment dans le chapitre 3. Ce calcul est très important, pour la validation du modèle du châssis conçu et aussi pour l'amélioration de ce dernier.

Lors de la modélisation, le châssis a été encastré au niveau des six essieux. Les charges du moteur et du réservoir ont été appliquées à leurs places respectives. Pour les charges restantes, elles étaient appliquées uniformément sur toute la surface du châssis telle que montrée à la figure 6.9.

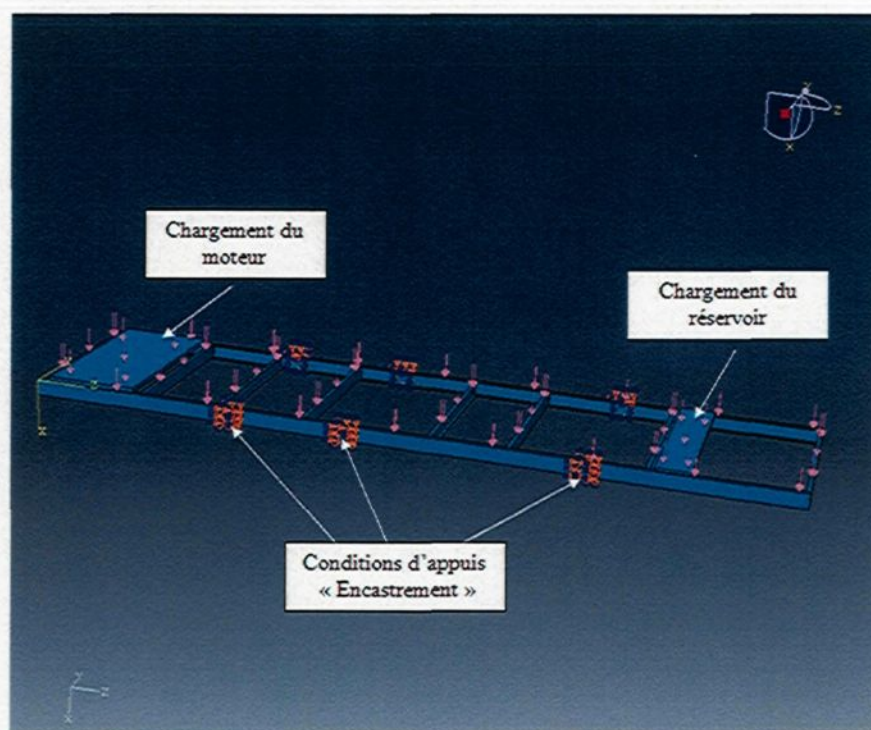


Figure 6.9 : Conditions d'appui et chargement statique du châssis.

Les résultats obtenus pour la distribution des contraintes de Von Mises des deux châssis en aluminium et en acier sont montrés aux figures 6.10 et 6.13 respectivement. La contrainte maximale obtenue pour le châssis en aluminium 6061-T6 est de

212.5 MPa. Cette contrainte est au niveau de l'essieu arrière comme s'est montrée à la figure 6.11. Pour le châssis en acier 710 C, la contrainte maximale obtenue est aussi au niveau de l'essieu arrière avec une valeur de 205.3 MPa. La figure 6.13 présente la position de cette contrainte maximale.

L'acier 10-18 HR a été aussi utilisé lors des simulations. Le tableau 6.7 présente un récapitulatif des propriétés des trois châssis ainsi que des résultats obtenus. La relation utilisée pour le calcul du facteur de sécurité  $F_s$  est montrée ci-dessous :

$$F_s = \frac{\text{Contrainte limite élastique } \sigma_e \text{ (MPa)}}{\text{Contrainte maximale } \sigma_{max} \text{ (MPa)}}$$

J. Vidosic [38] recommande une valeur du coefficient de sécurité pour les châssis de camion en acier variant de 1.5 à 2. Les mêmes valeurs des coefficients de sécurité sont recommandées pour les structures civiles en aluminium [34]. Comme ces dernières sont aussi soumises à des sollicitations statiques et dynamiques (charges permanentes et d'exploitation, vents, neige, séismes,...), donc, ces valeurs de coefficient de sécurité sont aussi prises pour le châssis en aluminium.

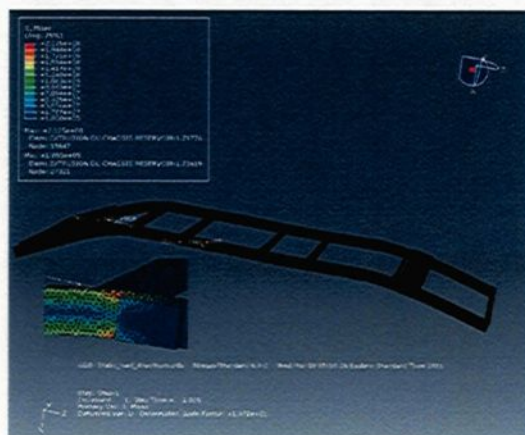


Figure 6.10 : Distribution des contraintes du châssis en aluminium.

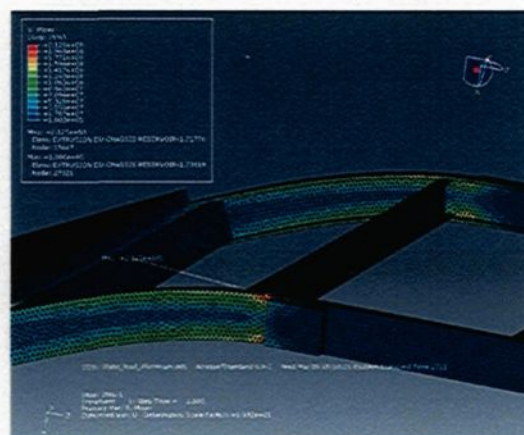


Figure 6.11 : Position de la contrainte maximale.



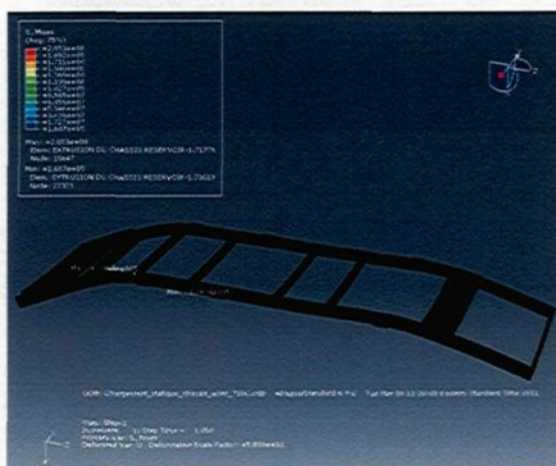


Figure 6.12 : Distribution des contraintes du châssis en acier.

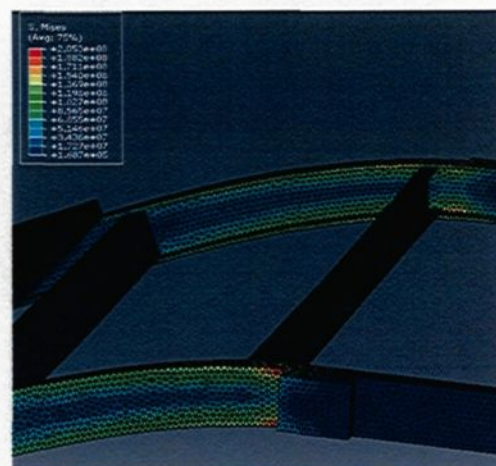


Figure 6.13 : Position de la contrainte maximale.

Tableau 6.7 : Caractéristiques mécaniques des trois châssis et résultats des simulations.

|  | Châssis en<br>acier 710 C | Châssis en acier<br>1018-HR | Châssis en<br>aluminium 6061-T6 |
|--|---------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| Masse (kg)   | 1167.46                   | 1167.46                     | 404.12                          |
| Densité (kg/m <sup>3</sup> )                       | 7800                      | 7800                        | 2700                            |
| Coefficient de poisson                             | 0.3                       | 0.28                        | 0.33                            |
| Contrainte limite<br>élastique $\sigma_e$ (MPa)    | 550                       | 275                         | 275                             |
| Contrainte limite à la<br>rupture $\sigma_u$ (MPa) | 620                       | 475                         | 310                             |
| Module de Young E<br>(MPa)                         | $207 \cdot 10^3$          | $210 \cdot 10^3$            | $73.1 \cdot 10^3$               |
| Contrainte maximale<br>$\sigma_{max}$ (MPa)        | 205.3                     | 205.7                       | 212.5                           |
| Coefficient de sécurité $F_s$                      | 2.67                      | 1.34                        | 1.29                            |

Le déplacement du châssis en aluminium sous chargement statique est montré à la figure 6.14. Un déplacement maximal d'une valeur de 5.03 cm est causé par le moteur. La distribution des coefficients de sécurité calculés pour le chargement statique est présentée à

la figure 6.15. Le plus faible coefficient de sécurité est situé à côté de l'essieu arrière avec une valeur de 1.29. Par contre, les coefficients de sécurité du reste du châssis sont supérieurs à 1.5 ce qui est recommandé.

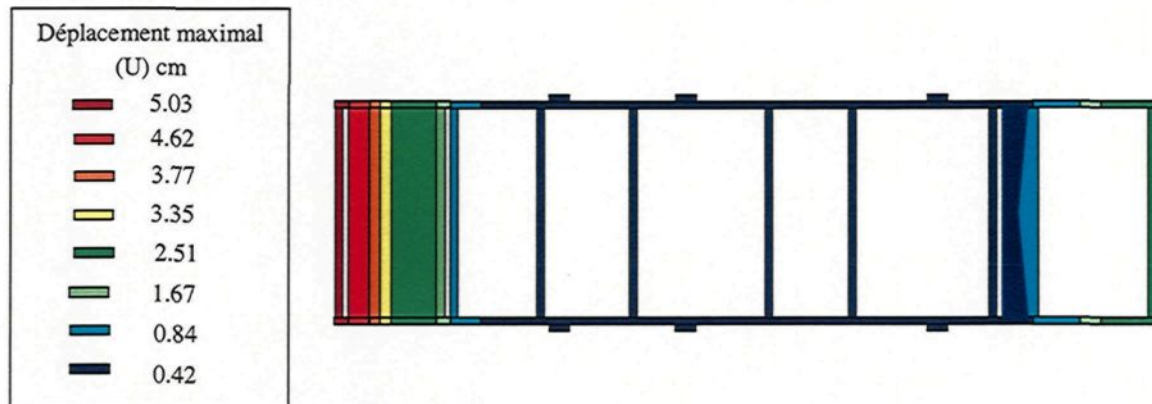


Figure 6.14 : Déplacement maximal du châssis sous chargement statique.

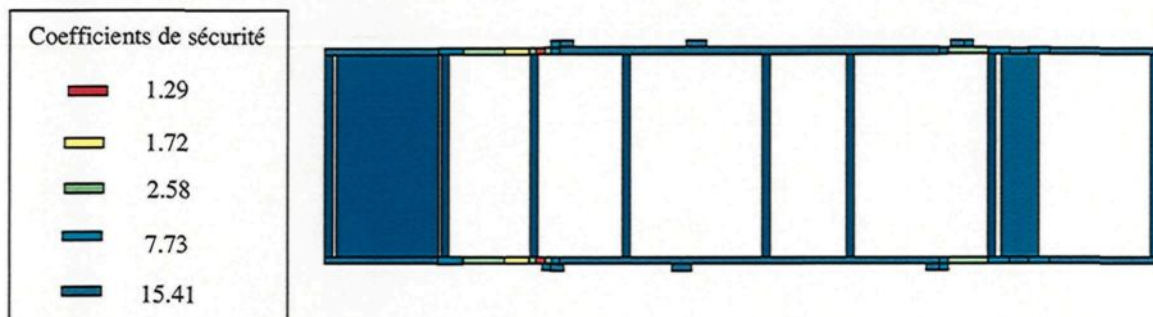
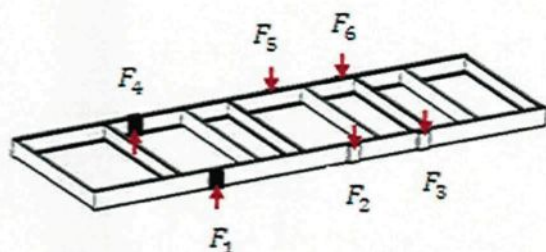


Figure 6.15 : Distribution du coefficient de sécurité calculé.

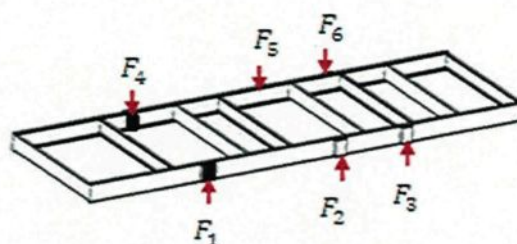
- **Chargement dynamique**

Le chargement dynamique du châssis a été effectué en utilisant les forces obtenues au chapitre quatre. Ces forces correspondent à la réponse à l'excitation au niveau des essieux pour une excitation de type échelon de 5 cm. Nous avons appliqué ces forces sur le châssis de différentes manières de sorte à couvrir les cas d'excitations critiques. Lors des simulations, nous avons pris comme conditions aux limites soient des fixations aux essieux avant ou aux essieux arrière. Les différents cas de chargement avec les résultats des contraintes maximales sont présentés à la figure 6.16. Les distributions des contraintes du premier et du deuxième cas de chargement sont présentées aux figure 6.17 et 6.18 respectivement.

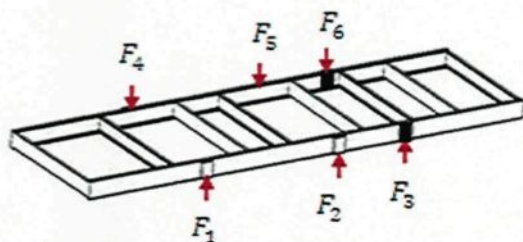




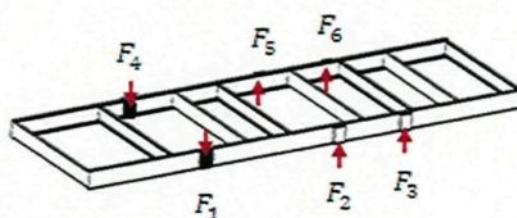
Cas 1 : Pure flexion avec une contrainte maximale de 420.2 MPa



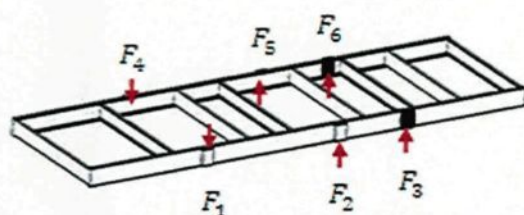
Cas 2 : Pure torsion avec une contrainte maximale de 395.3 MPa



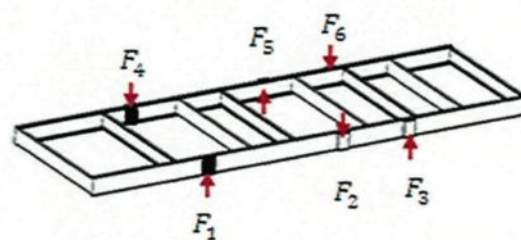
Cas 3 : Pure torsion avec une contrainte maximale de 235.1 MPa



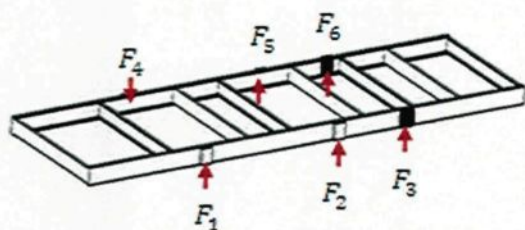
Cas 4 : Pure flexion avec une contrainte maximale de 186.3 MPa



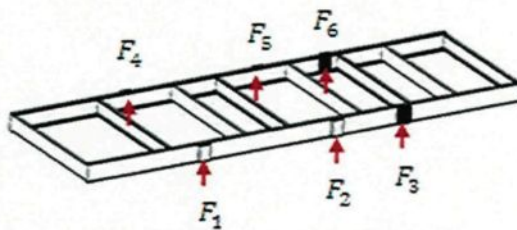
Cas 5 : Pure flexion avec une contrainte maximale de 158.5 MPa



Cas 6 : Combinaison de flexion et de torsion avec une contrainte maximale de 133.3 MPa



Cas 7 : Combinaison de flexion et de torsion avec une contrainte maximale de 131.9 MPa



Cas 8 : Flexion du châssis avec une contrainte maximale de 93.35 MPa

Figure 6.16 : Différents cas de chargement dynamiques du châssis.



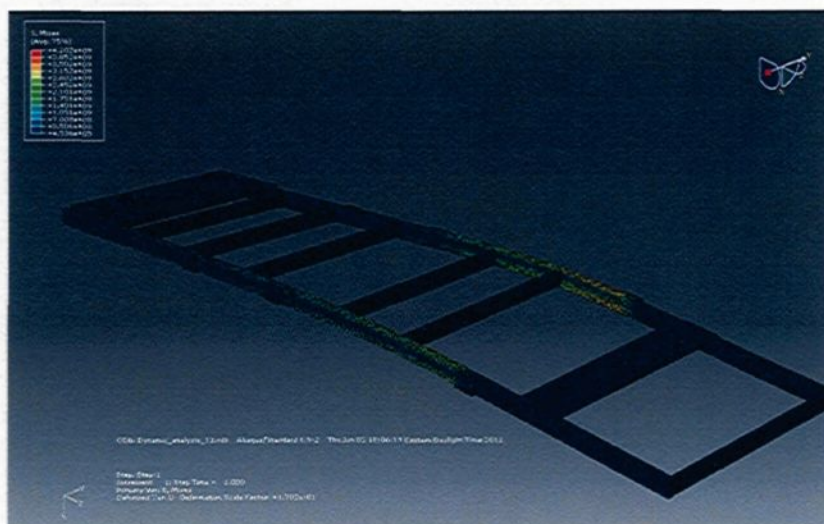


Figure 6.17 : Localisation de la contrainte maximale du premier cas de chargement.

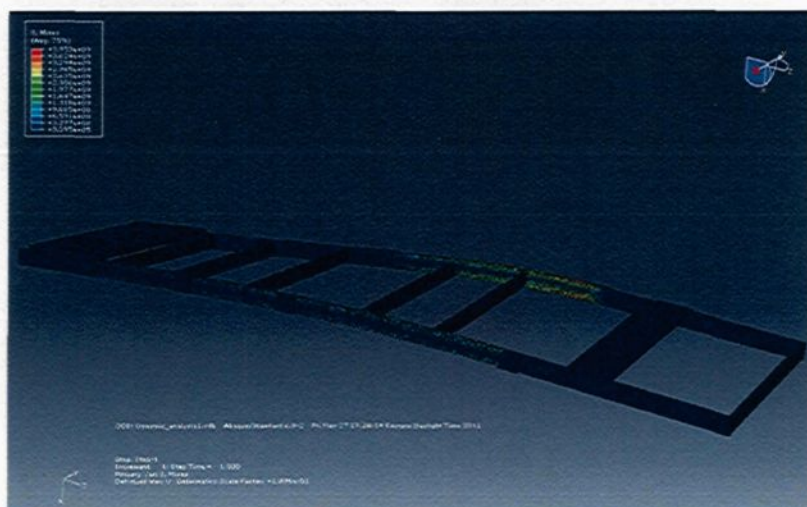


Figure 6.18 : Localisation de la contrainte maximale du deuxième cas de chargement.

Les résultats des contraintes obtenus dépassent la limite élastique du matériau utilisé. Ce qui veut dire que la déformation du châssis dans le cas du chargement dynamique s'effectuera dans le domaine plastique. Ce qui n'est pas recommandé. Il faut que la déformation puisse s'effectuer dans le domaine élastique avec un coefficient de sécurité variant entre 1.5 et 2.

D'un autre point de vue, les contraintes obtenues sont un peu surestimées, car dans la réalité, le châssis n'est pas fixé. Il est appuyé sur les suspensions qui ont une certaine élasticité.

Au fond ce qu'il faut retenir. C'est qu'il est important de ne pas seulement effectuer une étude statique, car nous venons de voir que le cas dynamique est très prépondérant. Manifestement, il ne faut pas négliger l'étude dynamique, qui nous donne une plus grosse concentration de contraintes.

Tout compte fait, le cas du chargement dynamique est le cas critique. Il représente les cas réels que peut subir le châssis lors de son mouvement.

## **6.5. Conclusion**

L'étude des modes vibratoires des deux châssis en aluminium et acier ayant les mêmes dimensions donne des résultats similaires. Cela est dû au paramètre du module de Young qui est en rapport avec la densité dans toutes les équations du mouvement. D'un autre côté, nous avons vu que la position des points nodaux est très proche des essieux, ce qui est recommandé pour que l'excitation transmise par les suspensions soit dissipée au niveau de ces points nodaux qui représentent la position neutre. Au niveau de l'analyse des contraintes, nous avons conclu que le cas du chargement dynamique est le plus critique.

## CHAPITRE 7

### CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

Lors de la réalisation de ce projet, plusieurs parties ont été traitées. Au départ, l'étude du comportement dynamique et vibratoire de l'autocar a été effectuée. Cette étude a permis de faire une comparaison des fréquences naturelles obtenues avec les modèles 2-D simplifié, 2-D et 3-D de l'autocar. Le bondissement et le tangage de ce dernier ont été étudiés dans les trois systèmes. Les résultats de fréquence obtenus sont très similaires. Ces dernières variaient entre 1.3 Hz jusqu'à 1.85 Hz. Les fréquences d'excitations des essieux ont aussi été évaluées dans les systèmes à deux dimensions et à trois dimensions, elles étaient aux alentours de 10 Hz à 14 Hz. Vers la fin de cette section, la fréquence naturelle due au roulis a été évaluée avec le modèle à trois dimensions.

Vu que les résultats de fréquences obtenus pour l'autocar varient de 1.3 à 1.85 Hz et pour les essieux aux alentours de 10 à 14 Hz, nous pouvons dire que ces fréquences correspondent aux vibrations de basse fréquence. Une même étude a aussi été faite durant ce projet, mais cette fois-ci, la masse suspendue représente seulement le poids du châssis qui est égal à 404.12 kg. Les fréquences propres trouvées étaient presque équivalentes aux fréquences naturelles du modèle numérique réalisé sur Abaqus.

D'un autre côté, les fréquences naturelles de flexion et de torsion et les modes vibratoires ont été calculés pour différents cas de poutres avec des conditions aux limites différentes. Ces modèles représentent la poutre principale du châssis, les traverses ainsi que la structure équivalente créée. Ces calculs ont été effectués en utilisant la méthode de Bernoulli Euler pour le calcul des fréquences de flexion et la méthode de Timoshenko pour celles dues à la torsion. Ces résultats de fréquences ont été comparés avec ceux obtenus de l'analyse faite numériquement sur Abaqus. Une très grande similarité est apparue au niveau des fréquences analytiques et numériques.

D'autre part, une calibration des fréquences naturelles a été réalisée expérimentalement, analytiquement et numériquement pour une plaque simple. Les fréquences obtenues étaient très proches. Cette partie nous a servi à la validation de la partie numérique, vu que le châssis au complet a été étudié numériquement. Les contraintes aussi ont été calculées pour cette plaque analytiquement et numériquement. Leurs valeurs étaient très proches.

Ensuite, le châssis au complet a été simulé numériquement sur Abaqus. Une étude vibratoire et une analyse des contraintes ont été réalisées pour le même modèle du châssis. Les matériaux utilisés étaient l'aluminium 6061-T6 l'acier 1018-HR et l'acier 710 C. Les valeurs des fréquences obtenues pour ces trois modèles étaient très proches. Donc, un châssis conçu en aluminium n'affectera pas beaucoup les modes vibratoires. Cependant, la conception d'un châssis léger et résistant augmentera certainement les performances dynamiques d'un autocar en général et en particulier les forces et les contraintes appliquées sur les différents éléments composant l'autocar. Les points nodaux du châssis sont assez proches des positions des essieux ce qui est recommandé pour éviter la résonance du système.

Les contraintes que subit le châssis suivant un chargement statique ont aussi étaient évaluées. La valeur de la contrainte maximale obtenue pour le châssis en aluminium est de 212.5 MPa. La valeur du coefficient de sécurité calculé dans ce cas-là est de 1.29. Il est recommandé d'optimiser le châssis pour être dans une zone plus sécuritaire variant entre 1.5 et 2.

Pour les résultats des contraintes obtenus pour le chargement dynamique, leurs valeurs dépassaient la contrainte limite élastique. Donc, il ne faut pas se limiter d'effectuer une étude statique seulement vu que les résultats du cas dynamique sont très critiques. Par contre, lors des simulations, nous avons considéré le châssis fixé soit au niveau des essieux avant ou au niveau des essieux arrière. Donc les résultats des contraintes étaient légèrement surestimés.

La conception préliminaire montre que le poids global du châssis conçu a diminué de plus de 30 % par rapport à un châssis en acier standard. Ce résultat peut encore être optimisé en utilisant une conception plus améliorée.

Ce projet est directement applicable au domaine des transports ce qui profitera aux entreprises concernées. C'est un bon exemple des retombées concrètes et de ses applications au domaine de la transformation de l'aluminium.

Les résultats de cette étude nous conduisent à une série de recommandations qui serviront à compléter ce projet de recherche. L'étude des points suivants est fortement recommandée :

- ❑ Une nouvelle conception du châssis avec prise en compte des positions des contraintes maximales et des fréquences vibratoires doit être effectuée. Une diminution de la matière peut être effectuée au niveau des parties les moins sollicitées pour alléger encore plus le poids du châssis. Cette diminution peut se faire avec des formes ellipsoïdes ou circulaires. Vu que ces formes arrondies garantissent de faibles concentrations de contraintes.
- ❑ Une étude de la durée de vie du châssis est nécessaire.
- ❑ Finalement, pour l'assemblage du châssis nous suggérons le soudage par friction malaxage. Cette méthode apporte une faible diminution des caractéristiques mécaniques de l'alliage d'aluminium utilisé par rapport aux autres méthodes standard de soudage. Par contre, actuellement cette technique est en évolution et il est difficile de l'utiliser pour des pièces de formes complexes.



## 8. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES ET ANNEXES

---

- [1] : European aluminium association (2007), "L'option aluminium: légère, robuste et rentable", pp 12.
- [2] : Développement économique et régional du Québec (2003), "Filière industrielle de la transformation de l'aluminium au Québec", 78 pages.
- [3] : Transport Canada (2004), "Un autobus amélioré allégé et écoénergétique ", Vol.14.
- [4] : Iveco Trucks Australia Limited (2009), "Intercity / tourist coach specifications".
- [5] : Çiçek Karaoğlu\* and N. S. Kuralay (2001), "Stress analysis of a truck chassis with riveted joints" (Department of Mechanical Engineering): p 16.
- [6] : A. N. Heath and M. C.Goods (1985), "Heavy vehicle design parameters and dynamic pavement loading", Australian Road Research, vol. 15.
- [7] : Woodrooffe.J (1995), "Heavy Truck Suspension Damper Performance for Improved Road Friendliness and Ride Quality", SAE paper 952636.
- [8] : S. Rakheja, A.K.W. Ahmed, et al (2001), "Urban Bus Optimal Passive Suspension Study Prepared by Concave Research Center", Concordia University, TP 13787E.
- [9] : Cebon David (1993), "Interaction between heavy vehicles and roads", L. Ray Buckendale Lecture, SAE Trans 930001.
- [10] : Roslan Abd Rahman, Mohd Nacir Tamin et al (2008), "Stress analysis of heavy duty truck chassis as a preliminary data for its life prediction using FEM" Jurnal Mekanikal N0.26, pp 76-85.
- [11] : O Kurdi, R Abd Rahman et al (2008), "Stress analysis of heavy duty truck chassis using finite elements method ".
- [12] : Teo Han Fui and R. A. Rahman (2007), "Statics and dynamics structural analysis of a 4.5 ton truck chassis" Jurnal Mekanikal N. 24, pp 56-67.
- [13] : K Chinnaraj, M Sathya Prasad et al (2008), "Experimental analysis and quasi-statics numerical idealization of dynamic stress on a heavy truck chassis frame assembly" Mechanics and Materials 13 – 14, pp 271-280.
- [14] : Transport Québec (2007), "La réglementation sur les normes de charges et de dimensions des véhicules", gouvernement du Québec.
- [15] : Pierre Duysinx (2009), "Le système véhicule et ses constituants", p 43.

- 
- [16] : Ministère des transports du Québec (2005), "Guide des normes de charges et dimension des véhicules".
- [17] : Actualités automobiles (2009), "L'utilisation de l'aluminium dans l'automobile se généralise", auto expert.ca.
- [18] : Jean-François Audet (1999), "Programme de réduction du poids des autobus urbains phase1 ", Centre des Matériaux composites de Saint-Jérôme, TP 13423 F.
- [19] : Martec Limited (2000), "Intercity Bus Weight Reduction Program Montreal", Transportation Development Centre, TP 13560E.
- [20] : Martec Limited (2003) " Intercity bus weight reduction program: Phase 2 - A design investigation for lightweight intercity bus roof and floor components", TP 14243E.
- [21] : Alcoa News (2008), "Alcoa et Yutong présentent des bus respectueux de l'environnement pour les Jeux de Beijing".
- [22] : Kenji Karita, Yoichiro Kohiyama, et al (2003), "Development of Aluminum Frame for Heavy-Duty Trucks" N.15 (Technical review), pp 81-84.
- [23] : C. Parenteau, M. Bouazara, et al (2009), "Développement d'un nouveau concept, d'une remorque ultralégère en aluminium: Étude dynamique", JER-REGAL, PRAC, Les presses de l'aluminium, Québec, Canada, p 76.
- [24] : Alutrec (2001), "Semi-remorques d'aluminium", <http://alutrec.com/avantages.html>.
- [25] : C.H. Prentice, IBI Group et al (2002), "The Canadian bus industry and its research and development needs", TP13947E.
- [26] : The royal gazette (2001), " Autocar: Partie 1-Limites dimensionnelles", Imprimeur de la reine pour le Nouveau –Brunswick.
- [27] : Rio Tinto Alcan (2010), "De nouveaux autobus à faibles émissions en aluminium pour Singapour grâce à l'expertise technologique de Rio Tinto Alcan".
- [28] : A.F. Herry (1923), "L'automobile au Canada- Français Québec".
- [29] : VDL Bus & Coach (2010), "Activités de base".
- [30] : VDL Bus & Coach (2011), "Châssis & modules de châssis", <http://www.vdlbuscoach.com/fr/produits/chassis-modules/tb-2175.html>
- [31] : VDL Bus & Coach (2011), "Châssis & modules de châssis", <http://www.vdlbuscoach.com/fr/produits/chassis-modules/sbr-4000-plus.html>.
- [32] : Pierre Duysinx (2010), "Conception et analyse structurale des châssis", Université de Liège, 42 pages.

- 
- [33] : Martec Limitée (2004), "Programme de réduction du poids des autobus interurbains", <http://www.martec.com/fr/transportation-ps1.html#>
- [34] : Denis Beaulieu (2003), "Calcul des charpentes d'aluminium", Les presses de l'aluminium.
- [35] : <http://protestants-houilles.org/?Noyon-comme-si-vous-y-etiez>
- [36] : Mohamed Bouazara (1997), "Étude et analyse de la suspension active et semi-active des véhicules routiers", Université Laval, p 181.
- [37] : Singiresu S.Rao (2007), "Vibration of continuous systems", John Wiley & Sons, Inc.
- [38] : J. P. Vidosic (1957), "Machine Design Project", Ronald Press, New York.

## ANNEXE A

- Résolvant du modèle 2-D simplifié

$$\emptyset(s) =$$

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{-s^3-9.73s^2-300.82s-1222.2}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \\ \frac{123.6s^2+1009s+40198}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \\ \frac{-47.62s-360.79}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \\ \frac{s(-47.62s-360.79)}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \frac{s^2+5.06s+286.22}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \\ \frac{s(s^2+5.06s+286.22)}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \\ \frac{-1.12s+47.62}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \\ \frac{s(-1.12s+47.62)}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \frac{101.26s-1721.9}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \\ \frac{s(101.26s-1791.9)}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \\ \frac{-s^3-9.73s^2-138.2s-1009.1}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \\ \frac{-286.22s^2-1222.2s-40198}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \frac{-8.052s-101.26}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \\ \frac{s(-8.052s-101.26)}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \\ \frac{s^2+4.66s+123.6}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \\ \frac{s(s^2+4.66s+123.59)}{-s^4-9.73s^3-4442.47s^2-2233s-40200} \end{array} \right]$$

• Système d'équations du modèle 2-D

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-k_{r1} - k_1)/m_1 & (-b_1)/m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & (k_1)/m_1 & (b_1)/m_1 & (k_1 l_1)/m_1 & (b_1 l_1)/m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-k_{r2} - k_2)/m_2 & (-b_2)/m_2 & 0 & 0 & (k_2)/m_2 & (b_2)/m_2 & (-k_2 l_2)/m_2 & (-b_2 l_2)/m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-k_{r3} - k_3)/m_3 & (-b_3)/m_3 & (k_3)/m_3 & (b_3)/m_3 & (-k_3 l_3)/m_3 & (-b_3 l_3)/m_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (k_1)/m_4 & (b_1)/m_4 & (k_2)/m_4 & (b_2)/m_4 & (k_3)/m_4 & (b_3)/m_4 & (-k_1 - k_2 - k_3)/m_4 & (-b_1 - b_2 - b_3)/m_4 & (k_3 l_3 + k_2 l_2 - k_1 l_1)/m_4 & (-b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3)/m_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (k_1 l_1)/l_4 & (b_1 l_1)/l_4 & (-k_3 l_3)/l_4 & (-b_3 l_3)/l_4 & (-k_3 l_3)/l_4 & (-b_3 l_3)/l_4 & (-k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_3)/l_4 & (-b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3)/l_4 & (-k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2 - k_3 l_3^2)/l_4 & (-b_1 l_1^2 - b_2 l_2^2 - b_3 l_3^2)/l_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_{r1} \\ 0 \\ k_{r2} \\ 0 \\ k_{r3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \quad U_1 \quad 0 \quad U_2 \quad 0 \quad U_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$



• Système d'équation du modèle 3-D

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_{14} \\ \dot{x}_{15} \\ \dot{x}_{16} \\ \dot{x}_{17} \\ \dot{x}_{18} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-k_{r1} - k_1)/m_1 & (-b_1)/m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-k_{r2} - k_2)/m_2 & (-b_2)/m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-k_{r3} - k_3)/m_3 & (-b_3)/m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-k_{r4} - k_4)/m_4 & (-b_4)/m_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-k_{r5} - k_5)/m_5 & (-b_5)/m_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-k_{r6} - k_6)/m_6 & (-b_6)/m_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (k_1)/m_7 & (b_1)/m_7 & (k_2)/m_7 & (b_2)/m_7 & (k_3)/m_7 & (b_3)/m_7 & (k_4)/m_7 & (b_4)/m_7 & (k_5)/m_7 & (b_5)/m_7 & (k_6)/m_7 & (b_6)/m_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (k_1 l_1)/I_7 & (b_1 l_1)/I_7 & (k_2 l_2)/I_7 & (b_2 l_2)/I_7 & (k_3 l_3)/I_7 & (b_3 l_3)/I_7 & (k_4 l_1)/I_7 & (b_4 l_1)/I_7 & (k_5 l_2)/I_7 & (b_5 l_2)/I_7 & (k_6 l_3)/I_7 & (b_6 l_3)/I_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (k_1 l_4)/I_8 & (b_1 l_4)/I_8 & (k_2 l_6)/I_8 & (b_2 l_4)/I_8 & (k_3 l_4)/I_8 & (b_3 l_4)/I_8 & (k_4 l_4)/I_8 & (b_4 l_4)/I_8 & (k_5 l_4)/I_8 & (b_5 l_4)/I_8 & (k_6 l_4)/I_8 & (b_6 l_4)/I_8 & 0 \end{bmatrix}$$

|  |  |  |
|--|--|--|
| $\frac{0}{(k_1)/m_1}$  | $\frac{0}{(b_1)/m_1}$  | $\frac{0}{(k_1 l_1)/m_1}$  |
| $\frac{0}{(k_2)/m_2}$  | $\frac{0}{(b_2)/m_2}$  | $\frac{0}{(-k_2 l_2)/m_2}$   |
| $\frac{0}{(k_3)/m_3}$  | $\frac{0}{(b_3)/m_3}$  | $\frac{0}{(-k_3 l_3)/m_3}$   |
| $\frac{0}{(k_4)/m_4}$  | $\frac{0}{(b_4)/m_4}$  | $\frac{0}{(k_4 l_1)/m_4}$  |
| $\frac{0}{(k_5)/m_5}$  | $\frac{0}{(b_5)/m_5}$  | $\frac{0}{(-k_5 l_2)/m_5}$   |
| $\frac{0}{(k_6)/m_6}$  | $\frac{1}{(b_6)/m_6}$  | $\frac{0}{(-k_6 l_3)/m_6}$   |
| $\frac{0}{(-k_1 - k_2 - k_3 - k_4 - k_5 - k_6)/m_7}$                         | $\frac{0}{(-b_1 - b_2 - b_3 - b_4 - b_5 - b_6)/m_7}$                         | $\frac{0}{(-k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_3 - k_4 l_1 + k_5 l_2 + k_6 l_3)/m_7}$                         |
| $\frac{0}{(-k_1 l_1 - k_2 l_2 - k_3 l_3 - k_4 l_1 - k_5 l_2 - k_6 l_3)/l_7}$ | $\frac{0}{(-b_1 l_1 - b_2 l_2 - k_3 l_3 - b_4 l_1 - b_5 l_2 - b_6 l_3)/l_7}$ | $\frac{0}{(-k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_3^2 - k_4 l_1^2 + k_5 l_2^2 + k_6 l_3^2)/l_7}$             |
| $\frac{0}{(-k_1 l_4 - k_2 l_4 - k_3 l_4 - k_4 l_4 - k_5 l_4 - k_6 l_4)/l_8}$ | $\frac{0}{(-b_1 l_4 - b_2 l_4 - b_3 l_4 - b_4 l_4 - b_5 l_4 - b_6 l_4)/l_8}$ | $\frac{0}{(-k_1 l_1 l_4 + k_2 l_2 l_4 + k_3 l_3 l_4 - k_4 l_1 l_4 + k_5 l_2 l_4 + k_6 l_3 l_4)/l_8}$ |



## ANNEXE B

Le développement des équations du mouvement des ensembles 2, 3, 4, 5 et 6 est présenté dans cette annexe.

### Équation de mouvement de l'ensemble roue 2

De la même manière que pour le cas de l'ensemble roue 1, en utilisant la deuxième loi de Newton, nous aboutissons à ces équations :

$$\sum F = m_2 \ddot{y}_2 \quad (B.1)$$

Pour un déplacement positif des masses 2 et 7 et pour une rotation positive de  $\theta_7$  et de  $\phi_7$ , les forces agissantes à l'arrière du châssis du côté de la roue 2 sont présentées à la Figure 1.

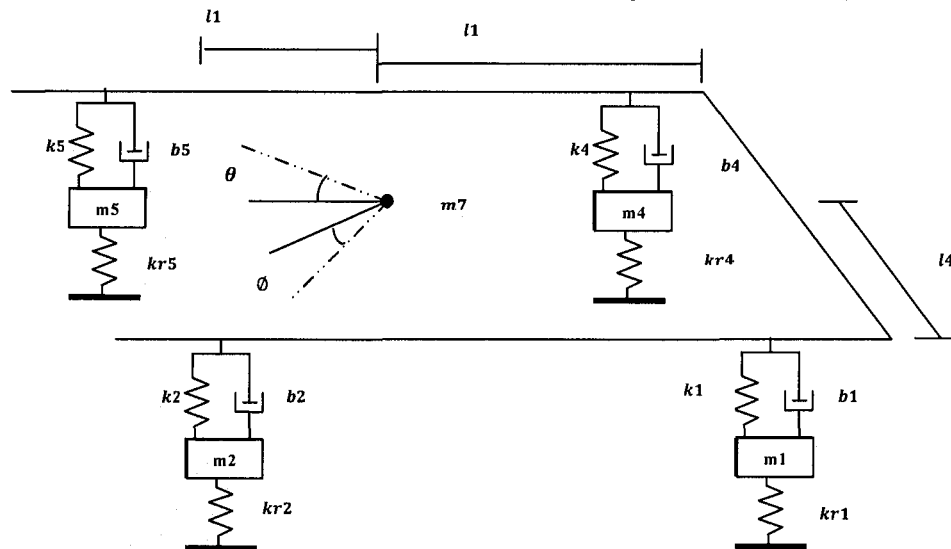


Figure 1 : Modèle 3-D, roue 2.

Pour le pneu

$$F_{kr2} = k_{r2}(y_2 - U_2)$$

Pour la suspension

$$F_{k2} = k_2[y_2 - (y_7 - l_2\theta_7 + l_4\phi_7)]$$

(B.2)

$$F_{b2} = b_2[\dot{y}_2 - (\dot{y}_7 - l_2\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7)]$$

Équation du mouvement de la masse 2

Les forces s'opposant toutes au mouvement, elles sont donc négatives.

$$m_2 \ddot{y}_2 = -k_{r2}(y_2 - U_2) - k_2[y_2 - (y_7 - l_2\theta_7 + l_4\phi_7)]$$

(B.3)

$$-b_2[\dot{y}_2 - (\dot{y}_7 - l_2\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7)]$$

### Équation de mouvement de l'ensemble roue 3

De la même manière que pour le cas de l'ensemble roue 1, en utilisant la deuxième loi de Newton, nous aboutissons à ces équations :

$$\sum F = m_3 \ddot{y}_3 \quad (B.4)$$

Pour un déplacement positif des masses 3 et 7 et pour une rotation positive de  $\theta_7$  et de  $\phi_7$ , les forces agissantes à l'arrière du châssis du côté de la roue 3 sont présentées à la Figure 2.

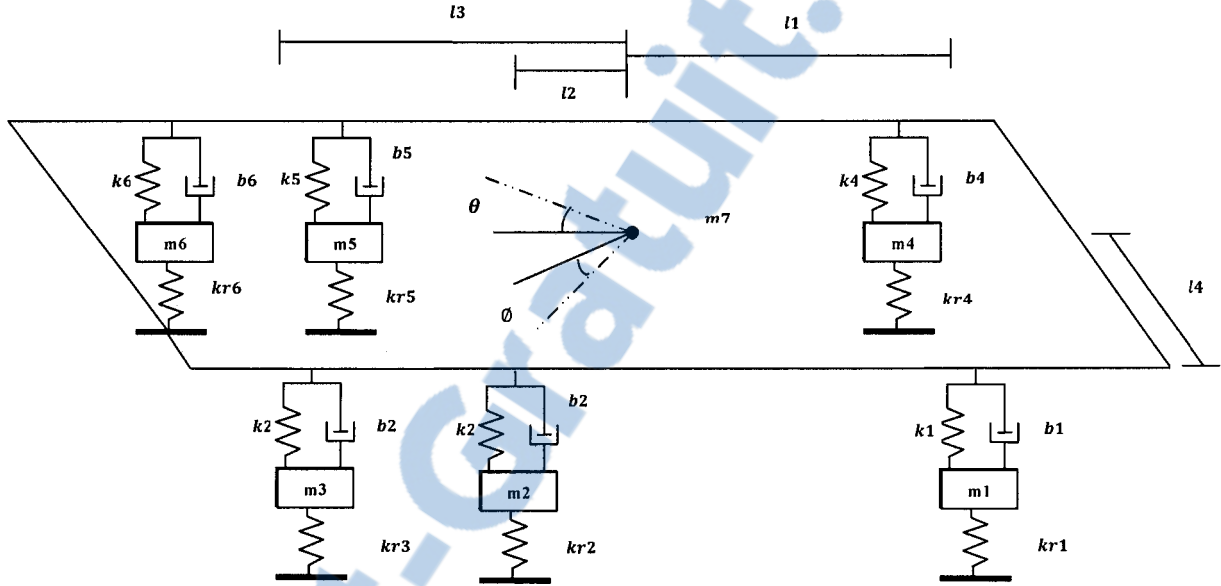


Figure 2 : Modèle 3-D, roue 3.

Pour le pneu

$$F_{kr3} = k_{r3}(y_3 - U_3)$$

Pour la suspension

$$F_{k3} = k_3[y_3 - (y_7 - l_3\theta_7 + l_4\phi_7)]$$

(B.5)

$$F_{b3} = b_3[\dot{y}_3 - (\dot{y}_7 - l_3\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7)]$$

Équation du mouvement de la masse 3

Les forces s'opposant toutes au mouvement, elles sont donc négatives.

$$m_3 \ddot{y}_3 = -k_{r3}(y_3 - U_3) - k_3[y_3 - (y_7 - l_3\theta_7 + l_4\phi_7)]$$

(B.6)

$$-b_3[\dot{y}_3 - (\dot{y}_7 - l_3\dot{\theta}_7 + l_4\dot{\phi}_7)]$$

### Équation de mouvement de l'ensemble roue 4

De la même manière que pour le cas de l'ensemble roue 1, en utilisant la deuxième loi de Newton, nous aboutissons à ces équations :



$$\Sigma F = m_4 \ddot{y}_4 \quad (B.7)$$

Pour un déplacement positif des masses 4 et 7 et pour une rotation positive de  $\theta_7$  et de  $\phi_7$ , les forces agissantes sur la partie avant du châssis du côté de la roue 4 sont présentées à la Figure 3.

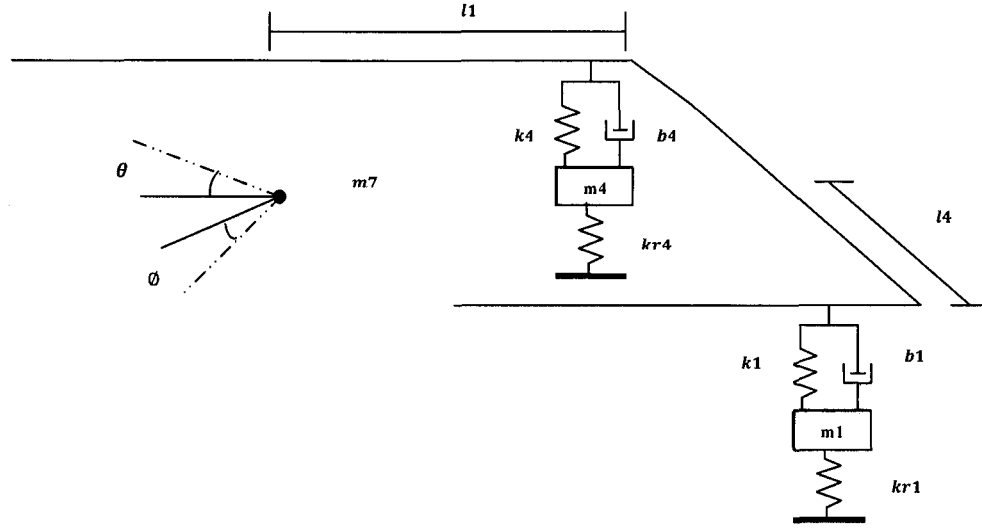


Figure 3 : Modèle 3-D, roue 4.

Pour le pneu

Pour la suspension

$$F_{k_r4} = k_{r4}(y_4 - U_4) \quad F_{k4} = k_4[y_4 - (y_7 + l_1\theta_7 - l_4\phi_7)] \quad (B.8)$$

$$F_{b4} = b_4[\dot{y}_4 - (\dot{y}_7 + l_1\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7)]$$

Équation du mouvement de la masse 4

Les forces s'opposant toutes au mouvement, elles sont donc négatives.

$$m_4 \ddot{y}_4 = -k_{r4}(y_4 - U_4) - k_4[y_4 - (y_7 + l_1\theta_7 - l_4\phi_7)] - b_4[\dot{y}_4 - (\dot{y}_7 + l_1\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7)] \quad (B.9)$$

Équation de mouvement de l'ensemble roue 5

De la même manière que pour le cas de l'ensemble roue 1, en utilisant la deuxième loi de Newton, nous aboutissons à ces équations :

$$\Sigma F = m_5 \ddot{y}_5 \quad (B.10)$$

Pour un déplacement positif des masses 5 et 7 et pour une rotation positive de  $\theta_7$  et de  $\phi_7$ , les forces agissantes à l'arrière du châssis du côté de la roue 5 sont présentées à la Figure 4.

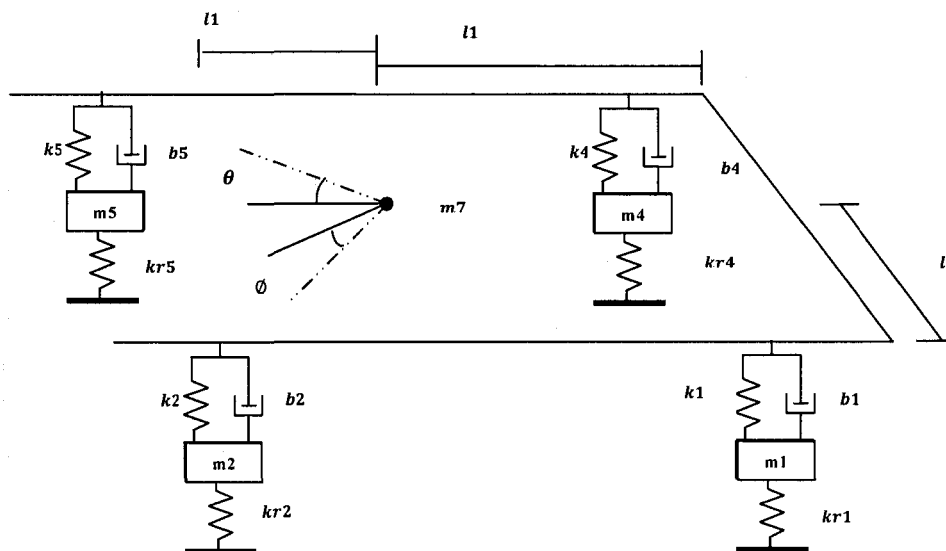


Figure 4 : Modèle 3-D, roue 5.

Pour le pneuPour la suspension

$$\begin{aligned}
 F_{kr5} &= k_{r5}(y_5 - U_5) & F_{k5} &= k_5[y_5 - (y_7 - l_2\theta_7 - l_4\phi_7)] \\
 F_{b5} &= b_5[\dot{y}_5 - (\dot{y}_7 - l_2\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7)]
 \end{aligned}
 \tag{B.11}$$

Équation du mouvement de la masse 5

Les forces s'opposent toutes au mouvement, elles sont donc négatives.

$$\begin{aligned}
 m_5\ddot{y}_5 &= -k_{r5}(y_5 - U_5) - k_5[y_5 - (y_7 - l_2\theta_7 - l_4\phi_7)] \\
 &\quad -b_5[\dot{y}_5 - (\dot{y}_7 - l_2\dot{\theta}_7 - l_4\dot{\phi}_7)]
 \end{aligned}
 \tag{B.12}$$

**Équation de mouvement de l'ensemble roue 6**

De la même manière que pour le cas de l'ensemble roue 1, en utilisant la deuxième loi de Newton, nous aboutissons à ces équations :

$$\sum F = m_6\ddot{y}_6 \tag{B.13}$$

Pour un déplacement positif des masses 6 et 7 et pour une rotation positive de  $\theta_7$  et de  $\phi_7$ , les forces agissantes à l'arrière du châssis du côté de la roue 6 sont présentées à la Figure 5.



