TABLE DES MATIÈRES

Introduction :

Le présent travail a pour but de présenter des construction d'extension d'anneaux, concernant l'extension triviale, et l'amalgamation d'anneau, et d'étudier le transfert de quelques propriétés d'un anneau commutatif à ces constructions.

Ainsi, ce mémoire est divisé en sept chapitres.

Le premier chapitre sera des rappels de certaines définitions et propriétés concernant les modules, les anneaux classiques et réduits, ainsi que la dimension homologique.

Les chapitres deux, et trois , vont définir les extensions d'anneaux concernées dans ce mémoire, et illustrer les principaux résultats.

Les chapitres , quatre, cinq, six, et sept seront consacrer à l'étude du transfère de certaines propriétés des anneaux commutatifs aux structures des extensions d'anneaux qui sont respectivement : la propriété des (n,d)-anneaux, la propriété (A), la propriété (A) forte, la propriété des anneaux Noethériens faibles, et la propriété des G-anneaux.

Ainsi, pour terminer ce mémoire, nous allons présenter quelques perspectives de ce sujet, que nous désirons aborder prochainement.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

Durant tout ce mémoire, tous les anneaux sont considérés commutatifs et unitaires sauf mention du contraire.

1.1 Rappel sur les modules

1.1.1 Définition

Définition 1.1.1 ***1)*** *Soit A un anneau. Un A-module est un ensemble M muni d'une loi de groupe abélien $(M.+)$ et d'une application (modulation) de $A \times M \longrightarrow M$ telles que*

$$\begin{cases} a(x+y) = ax + ay & \\ (ab)x = a(bx) & \forall x, y \in M \\ (a+b)x = ax + bx & \forall a, b \in A \\ 1_A x = x & \end{cases}$$

2) *Soit M un A-module. Une partie N de M est un sous-module de M si $(N, +)$ est un groupe abélien et $ax \in N$ pour tout $x \in N$ et $a \in A$.*

Définition 1.1.2 **1)** *Une suite exacte de A-module et d'homomorphismes*

$$...M_{i-1} \xrightarrow{u_{i-1}} M_i \xrightarrow{u_i} M_{i+1} \xrightarrow{u_{i+1}} ...$$

est dite suite exacte en M_i si $Keru_i = Imu_{i-1}$. Cette suite exacte si elle est exacte en chaque M_i.

2) *Une suite exacte courte est une suite exacte de la forme*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M" \longrightarrow 0$$

c'est à dire que u est injectif, v est surjectif.

Définition 1.1.3 **1)** *Un module M est de type fini s'il existe une partie fini $\{x_1, ..., x_2\}$ de M telle que $\langle x_1, ..., x_2\rangle = M$. On a dans ce cas : $M = \sum_{i=1}^{n} Rx_i$.*

2) *Un module M est dit cyclique s'il existe $x \in M$ tel que $M = \langle x\rangle$; **i.e** $M = Rx$.*

Théoréme 1.1.4 *Soit M un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) *M est de type fini.*
2) *Il existe $n \geq 1$ tel que M est isomorphe à un quotient d'un module libre de type fini A^n.*

Proposition 1.1.5 ***1)*** *Soient M un module et N un sous module de M. Si M est de type fini, alors M/N est aussi un module de type fini.*
2) *soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$ une suite exacte de modules. Si A et C sont de type fini, alors B est aussi de type fini.*

1.1.2 Modules libres

Définition 1.1.6 *Soit M un A-module. M est dit libre s'il est somme directe de copies de A. Si $Aa_i \cong A$ et $M = \oplus_{i\in I} Aa_i$, où I est un ensemble d'indexation,l'ensemble $\{a_i \setminus i \in I\}$ est appelé alors une base de M.*

Théoréme 1.1.7 *Tout module (respectivement module de type fini) est isomorphe à un module quotient d'un module libre (respectivement module de base finie).*

Théoréme 1.1.8 *Soit L un module libre. Deux bases de L ont le même cardinal, appelé rang de L.*

Définition 1.1.9 *Soit M un A-module.*

1) *Une résolution libre de M est une suite exacte*

$$... \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où L_n est un A-module libre pour tout $n \geq 0$.

2) *Une présentation de M (de longueur 1) est une suite exacte*

$$L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où L_0 et L_1 sont des modules libres. Notamment, tout module admet une présentation.

3) *Un module M est dit de présentation fini ; s'il admet une présentation :*

$$L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec L_0 et L_1 sont libres de base finie.

Théoréme 1.1.10 **1)** *Tout module de présentation finie est de type fini.*

2) *Un module est de présentation finie si et seulement s'il est isomorphe au quotient d'un module libre de base finie par un sous module de type fini.*

Théoréme 1.1.11 *Soit M un module de type fini. les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *M est de présentation fini.*

2) *Pour toute suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$ si B est de type fini alors A est de type fini.*

1.1.3 Modules projectifs

Définition 1.1.12 *Un module P est dit projectif si pour tout diagramme de modules :*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ B \arrow[r, "g"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où la ligne est exacte, il existe $\alpha \in Hom(P, B)$ tel que le diagramme est commutatif. c'est à dire que $g \circ \alpha = f$.

Proposition 1.1.13 **1)** *Tout module libre est projectif.*

2) *Tout module M admet une résolution projectif ; c'est à dire qu'il existe une suite exacte :*

$$\ldots \longrightarrow P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où tous les P_i sont projectifs.

Théoréme 1.1.14 *Soit P un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) P est projectif ;

2) Toute suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ est scindé.

3) P est un facteur direct d'un module libre.

4) $Hom(P, .)$ est un foncteur exact.

Théoréme 1.1.15 (Lemme de Shanuel) *Soient $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow K' \longrightarrow P' \longrightarrow M \longrightarrow 0$ deux suites exactes, où P et P' sont projectif. Alors on a :*

$$K \oplus P' \cong K' \oplus P$$

Théoréme 1.1.16 *Soit R un anneau intègre. Alors tout idéal projectif de R est de type fini.*

1.1.4 Modules plats

Définition 1.1.17 *Un R-module E est dit plat si le foncteur $E\otimes_R$ est exact ; c'est à dire pour toute suite exacte de R-module $0 \longrightarrow N \xrightarrow{u} M$, la suite $0 \longrightarrow E \otimes_R N \xrightarrow{id_E \otimes_R u} E \otimes_R M$ est exacte.*

Corollaire 1.1.18 *1) R est R-plat.*

2) Tout module libre est plat.

3) Tout module projectif est plat.

4) Tout module M admet une résolution plate ; c'est à dire, il existe une suite exacte :

$$... \longrightarrow M_n \longrightarrow ... \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où tous les M_n sont des modules plats .

Théoréme 1.1.19 *Soit M un module plat et $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$ une suite exacte. Alors A est plat si et seulement si B est plat.*

Théoréme 1.1.20 *Soit R un anneau local et M un R-module plat de type fini, alors M est libre.*

Théoréme 1.1.21 *Soit P un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *P est projectif de type fini.*

2) *P est plat de présentation finie.*

1.2 Anneaux et modules des fractions

1.2.1 Anneaux des fractions

Définition 1.2.1 *Soit A un anneau et S une partie non vide de A. On dit que S est une partie multiplicative de A si :*

1) $1 \in S$ *et* $0 \notin S$.

2) $\forall a, b \in S, ab \in S$.

Soit A un anneau commutatif et S une partie multiplicative de A. On définit une relation de $A \times S$ par :

$$(a, s) \sim (a', s') \Longleftrightarrow (as' - a's)t = 0 \text{ pour un certain } t \in S.$$

$\sim$ est bien une relation d'équivalence.
On note par a/s la classe d'équivalence de (a, s) qu'on appelle fraction. Sur l'ensemble de ces fractions noté $S^{-1}A$, on définit l'addition et la multiplication par :

$$(a/s) + (a'/s') = (as' + sa')/(ss')$$

et

$$(a/s) \times (a'/s') = (aa'/ss')$$

On vérifie facilement que $+$ et $\times$ sont bien définit et font de $S^{-1}A$ un anneau commutatif unitaire d'élément nul $0/1$ et d'élément unité $1/1$.

Définition 1.2.2 *L'anneau $S^{-1}A$ est appelé anneau des fractions de A par rapport à S.*

Remarque 1.2.3 *1) Si A est intègre et $S = A \setminus \{0\}$, alors $S^{-1}A$ est le corps des fractions de A.*
2) Si S est le semi groupe des éléments non diviseurs de zéro, alors $S^{-1}A$ s'appelle l'anneau total des fractions de A.

Exemple 1.2.4 (Localisation) *Soit P un idéal premier de A. On a $S = A \setminus P$ est une partie multiplicative de A. Dans ce cas on note $S^{-1}A$ par A_P. Les éléments de a/s où $a \in P$ et $s \in S$ forment un idéal de M de A_P. Si $a/s \notin M$ alors $a \notin P$ et par suite $1/a \in A_P$ et donc $s/a \in A_P$. Donc $a/s \in U(A_P)$ de sorte que M est l'unique idéal maximal de A_P. Ainsi on a :*

$$M = PA_P = \{a/s \setminus a \in P, s \in S\}$$

A_P est appelé anneau local en P ou localisation de A en P.

1.2.2 Modules des fractions

On peut de manière analogue appliquer la construction de $S^{-1}A$ à un A-module M pour construire le module des fractions.
Soient M un A-module et S une partie multiplicative de A. On définit sur $M \times A$ la relation d'équivalence :

$$(m, s) \sim (m', s') \Leftrightarrow \exists t \in S / t(ms' - sm') = 0$$

On désigne par m/s la classe de (m, s) qu'on appelle fraction. L'ensemble de ces fraction noté $S^{-1}M$.
En définissant de manière naturelle l'addition et de la modulation par :

$$(m/s) + (m'/s') = (s'm + sm')/ss'$$

et

$$(a/t)(m/s) = (am/st)$$

où $a/t \in S^{-1}A$, $S^{-1}M$ ainsi un $S^{-1}A$-module (et aussi un A-module).

Théoréme 1.2.5 *Soient S une partie multiplicative d'un anneau R et M un R-module. Alors :*

1) *Si M est un R-module de type fini, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module de type fini.*

2) *Si M est un R-module libre, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module libre.*

3 *Si M est un R-module de présentation finie, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module de présentation finie.*

4) *Si M est un R-module projectif, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module projectif.*

5) *Si M est un R-module de plat, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module plat.*

Proposition 1.2.6 *L'opérateur S^{-1} est exact ; c'est à dire si*

$$M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M"$$

est une suite exacte, alors la suite

$$S^{-1}M' \overset{S^{-1}(\alpha)}{\longrightarrow} S^{-1}M \overset{S^{-1}(\beta)}{\longrightarrow} S^{-1}M"$$

est exacte.

1.3 Anneaux réduits

Définition 1.3.1 *Un anneau A est dit réduit si A n'admet pas d'éléments nilpotents autre que zéro, c'est à dire que si $x^n = 0$ pour un certain entier naturel non nul n et $x \in A$, alors $x = 0$.*

Théoréme 1.3.2 *Soient A un anneau réduit et S une partie multiplicative de R. Alors $S^{-1}A$ est réduit.*

Corollaire 1.3.3 *Soient$A$ un anneau réduit et $Q(A)$ son anneau total des fractions. Alors, A est réduit si et seulement si $Q(A)$ est réduit.*

1.4 Anneaux classiques

Proposition 1.4.1 *Soit A un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *Tout ensemble non vide d'idéaux de A admet un élément maximal.*

2) *Toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire.*

3) *Tout idéal de A est de type fini.*

Définition 1.4.2 *Un anneau A est dit* ***Noethérien*** *s'il vérifie l'un des conditions équivalentes de la proposition 1.4.1.*

Proposition 1.4.3 *Soient A un anneau Noethérien et $\phi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux surjectif. Alors B est Noethérien.*

Proposition 1.4.4 *Soient A un anneau Noethérien et M un A-module. Alors M est Noethérien si et seulement si M est de type fini.*

Corollaire 1.4.5 *Soit $A \subseteq B$ une extension d'anneaux, où A est Noethérien et B est un A-module de type fini. Alors B est Noethérien.*

Proposition 1.4.6 *Soient A un anneau Noethérien et S une partie multiplicative de A. Alors $S^{-1}A$ est Noethérien.*

Théoréme 1.4.7 ([38],Exercise 24, Page 65) *Un anneau A est Noethérien si et seulement si tout idéal premier de A est de type fini.*

Théoréme 1.4.8 (Théorème de Hilbert) *Soient A un anneau Noethérien et X une indéterminée sur A. Alors $A[X]$ est Noethérien.*

Corollaire 1.4.9 *Soient A un anneau Noethérien et $X_1, X_2, ...X_n$ des indéterminées sur A. Alors $A[X_1, ...X_n]$ est un anneau Noethérien.*

Définition 1.4.10 *Soient A un anneau et M est un A-module.*

1) *M est dit simple si $M \neq 0$ et si M ne contient pas de sous modules propres.*

2) *M est dit semi-simple si M est produit fini de modules simples.*

3) *Un anneau A est dit* ***semi-simple*** *s'il est un module semi-simple.*

Théoréme 1.4.11 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *A est semi-simple.*

2) *Tout A-module est semi-simple.*

3) *Toute suite exacte courte de A-module est scindée.*

4) *Tout module est projectif.*

Théoréme 1.4.12 *Soit A un anneau commutatif. A est semi-simple si et seulement si A est un produit fini de corps.*

Théoréme 1.4.13 ([20], Théorème 4.16) *Soit A un anneau commutatif. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *Pour tout* $a \in A$ *il existe* $a' \in A$ *tel que* $a'a^2 = a$ *;*

2) *Pour tout* $x \in A$, *il existe* $e \in A$ *tel que* $e^2 = e$ *et* $Ax = Ae$ *;*

3) *Tout idéal de type fini de A est principal engendré par un idempotent.*

4) *Tout idéal de type fini est un facteur direct de A.*

5) *Tout A-module est plat.*

Définition 1.4.14 *Un anneau A est dit* ***régulier au sens de Von Neumann*** *s'il vérifie l'une des assertions équivalente du théorème précédent.*

Proposition 1.4.15 *Soit A un anneau régulier au sens de Von Neumann.*
1) *Si S une partie multiplicative de A, alors* $S^{-1}A$ *est régulier au sens de Von Neumann.* ***2)*** *A est intègre si et seulement si A est un corps.*

Théoréme 1.4.16 ([20], Théorème 4.23) *Soit A un anneau commutatif. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *Tout idéal de A est projectif.*

2) *Tout sous module d'un module projectif est projectif.*

Définition 1.4.17 *Un anneau A est dit* ***héréditaire*** *s'il vérifie l'une des assertions du théorème précédent.*
Un anneau héréditaire intègre est dit un domaine de Dedekind.

Théoréme 1.4.18 *[20] Soit A un anneau commutatif. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *Tout idéal de type fini de A est projectif.*

2) *Tout sous module de type fini d'un module projectif est projectif.*

Définition 1.4.19 *Un anneau A est dit* ***semi-héréditaire*** *s'il vérifie l'une des assertions du théorème précédent.*
Un anneau semi-héréditaire intègre est dit un domaine de $Prüfer$.

1.5 Dimension globale faible

Définition 1.5.1 *Soit M un A-module. On dit que la dimension plate de M est inférieure ou égale à n, s'il existe existe une résolution plate de la forme :*

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow ... \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

où F_i est plate pour tout i. On note $fd(M) \leq n$.
Si une telle résolution n'existe pas, la dimension plate de M est infinie on note $fd(M) = \infty$.
Si une telle résolution existe et n est le plus petit entier qui vérifie une telle résolution, on dit que la dimension plate de M est égale à n, on note $fd(M) = n$.

Définition 1.5.2 *Soit A un anneau. On appelle dimension globale faible de A, ou simplement dimension faible de A, l'entier noté $wdim(A)$ est défini par :*

$$wdim(A) = \{fd(M)/M \text{ est un module }\}$$

Théoréme 1.5.3 **1)** *$wdim(A) = 0$ si et seulement si A est régulier au sens de Von Neumann.*

2) *$wdim(A) \leq n$ si et seulement si tous module d'un module plat est plat.*

Théoréme 1.5.4 *Soit A un anneau. Alors on a :*

$$wdim(A) = sup\{fd(A/I)/I \text{ est un idéal de } A\} = sup\{fd(A/I)/I \text{ est un idéal de type fini de } A\}$$

Théoréme 1.5.5 *Soit A un domaine qui n'est pas un corps. Alors A est un domaine de $prüfer$ si et seulement si $wdim(A) = 1$.*

CHAPITRE 2

LES EXTENSION TRIVIALES

D.D. Anderson, M. Winders. (2009), Idealization of a module. J. Commut. Algebra 1(1) :3-56.

2.1 Introduction

Définition 2.1.1 *Soient R un anneau commutatif et M est un R-module. $R \propto M$ est l'ensemble des couples (a, e) muni de l'addition composante par composante et de la multiplication définie par : $(a, e)(b, f) = (ab, af + be)$. $R \propto M$ est dit l'anneau extension triviale, ou simplement extension triviale de R par M. $R \propto M$ est un anneau commutatif avec l'élément unité (1,0).*

Notons que R s'injecte dans $R \propto M$ via $r \to (r, 0)$. Si N est sous-module de M, alors $0 \propto N$ est un idéal de $R \propto M$. $0 \propto M$ est idéal nilpotent de $R \propto M$ et on a $(R \propto M)/(0 \propto M) \cong R$.

On remarque d'autre part que l'anneau $R \propto M$ est isomorphe à un anneau T tel que T={ $\left[\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right]/r \in R, m \in M\}$ avec T muni de l'addition et la multiplication usuelles des matrices. T est anneau commutatif et unitaire, et l'application $R \propto M \to T$

défini par $(r,m) \to \left[\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right]$ est un isomorphisme d'anneaux.

2.2 Idéaux et éléments distingués de $R \propto M$

Tout au long de cette section, R est un anneau commutatif unitaire et M un R-module. On détermine les idéaux maximaux, premiers, les idéaux radicaux et les idéaux principaux homogènes de $R \propto M$, Ainsi que les éléments unités, idempotents, diviseurs de zéros, et nilpotents de $R \propto M$. On commence par le résultat suivant :

Théoréme 2.2.1 *Soient R un anneau commutatif, I un idéal de R, M un R-module et N un sous module de M.Alors* $I \propto M$ *est un idéal de* $R \propto M$ *si et seulement si* $IM \subseteq N$. *Lorsque* $I \propto N$ *est un idéal de* $R \propto M$, M/N *est un* R/I*-module et* $(R \propto M)/(I \propto N) \simeq (R/I) \propto (M/N)$. *En particulier* $(R \propto M)/(0 \propto M) \simeq R$.*Donc les idéaux de* $R \propto M$ *contenant* $0 \propto M$ *sont de la forme* $J \propto M$ *où* J *est un idéal de* R.

Preuve: Si $I \propto N$ est un idéal de $R \propto M$ alors $(R \propto M)(I \propto N) = I \propto (IM + N)$ ce qui donne $IM \subseteq N$.inversement, Si $IM \subseteq N$, (M/N) est un R/I-module et l'application $f : R \propto M \longrightarrow (R/I) \propto (M/N)$ définie par $f((r,m)) = (r+I, m+N)$ est un épimorphisme avec $kerf = I \propto N$.Donc $I \propto N$ est un idéal de $R \propto M$ et $(R \propto M)/(I \propto N) \simeq (R/I) \propto (M/N)$.
Il est facile de voir qu' en général un idéal J de $R \propto M$ est sous la forme $I \propto N$ si et seulement si $0 \propto N \subseteq J$ si et seulement si $I \propto 0 \subseteq J$.
Notons ici qu'avec le contre exemple suivant [41],S. Kabbaj et N. Mahdou ont montré qu'un idéal quelconque de $R \propto M$ n'est pas forcément sous la forme $I \propto N$ avec I un idéal de R et N un sous module de M :

Exemple 2.2.2 *Soit* (A, M) *un domaine local qui n'est pas un corps,* $E = A/M$ *et*

$R = A \propto E$ l'extension triviale de A par E. Soit $J = R(x,1)$ où $x \neq 0 \in M$. On pose $I = \{a \in A \mid (a,e) \in J$ pour un certain $e \in E\}$,$E' = \{e \in E \mid (a,e) \in J$ pour un certain $a \in A\}$. Alors $J \subsetneqq I \propto E'$.

Preuve: On vérifie facilement que $I = Ax$ et $E' = E$.D'abord on montre que $(x,0) \in I \propto E' \setminus J$.Sinon,on a $(x,0) = (a,e)(x,1)$ pour un certain $(a,e) \in R$ ce qui donne $ax = x$.Donc $a = 1 \in M$, contradiction.$\square$

Théoréme 2.2.3 *Soient R un anneau commutatif et M un R-module.*
(1) Les idéaux maximaux de $R \propto M$ ont la forme $\mathcal{M} \propto M$,où $\mathcal{M}$ est un idéal maximal de R. $R \propto M$ est quasilocal si et seulement si R est quasilocal.Le radical de Jacobson de $R \propto M$ est $J(R \propto M) = J(R) \propto M$.
(2) Les idéaux premiers de $R \propto M$ ont la forme $P \propto M$,où P est un idéal premier de R.
(3) Les idéaux radicaux de $R \propto M$ est sous la forme $I \propto M$,où I est un idéal radical de R.Si J est un idéal de $R \propto M$,alors $\sqrt{J} = \sqrt{I} \propto M$ avec $I = \{r \in R \mid (r,b) \in J$ pour un certain $b \in M\}$ un idéal de R. En particulier, si I est un idéal de R et N un sous module de M,alors $\sqrt{I \propto N} = \sqrt{I} \propto M$;donc $nil(R \propto M) = nil(R) \propto M$.

Preuve: Soit A un idéal radical de $R \propto M$.Alors $(0 \propto M)^2 = 0 \subseteq A$ et par conséquent $0 \propto M \subseteq A$. D'après le théorème 1.2.1 $A = J \propto M$ pour un certain idéal J de R. De plus,$(R \propto M)/(J \propto M) \approx R/J$ donne que J est un idéal radical (respectivement idéal premier,idéal maximal) si et seulement si $J \propto M$ l'est.
Notons que $J(R \propto M) = \bigcap\{\mathcal{M} \propto M \mid \mathcal{M}$ est idéal maximal de $R\} = (\bigcap\{\mathcal{M} \mid \mathcal{M}$ est idéal maximal de $R\}) \propto M = J(R) \propto M$..
(3) Soit J un idéal de $R \propto M$. Alors $\sqrt{J} = K \propto M$ pour un certain idéal radical K de R. Soit $I = \{r \in R \mid (r,b) \in J$ pour un certain $b \in M\}$, il est clair que I est un idéal de R. Soit $x \in \sqrt{I}$, alors un certain $x^n \in I$, d'où $(x^n,b) \in J$. Alors $(x^n,b) \in \sqrt{J} = K \propto M$. Par conséquent $x^n \in K$, donc $x \in K$ comme K est un idéal radical. Donc on a $\sqrt{I} \propto M \subseteq K \propto M = \sqrt{J}$. Pour l'autre inclusion, soit $x \in K$. d'où $(x,0) \in \sqrt{J}$ alors un certain $(x^n,0) \in J$. d'où $x^n \in I$ et par conséquent $x \in \sqrt{I}$.

Enfin $K \propto M \subseteq \sqrt{I} \propto M$. Les résultats restants sont immédiats.

Remarque 2.2.4 *Soit M un R-module, et soit $\{m_\alpha\} \subseteq M$. Il est clair que $\langle \{m_\alpha\} \rangle = M$ si et seulement si $\langle \{(0, m_\alpha)\} \rangle = 0 \propto M$. Donc M est R-module de type fini si et seulement si $0 \propto M$ est un idéal de type fini de $R \propto M$. Si I est un idéal de R, $I(R \propto M) = I \propto IM$. D'où si I est de type fini alors $I \propto IM$ est aussi de type fini. En tout cas, $I(R \propto M) = I \propto IM$ peut être de type fini sans que IM le soit.*

Dans la partie suivante on va discuter la forme des idéaux dans un anneau gradué en commençant par quelques définitions :

Définition 2.2.5 *1. Un anneau R est dit gradué si $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus ...$, est un somme directe des groupes abéliens, avec $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$; Donc chaque R_i est un R-module.*

2. Un R-module M est dit gradué si $M = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus ...$ et $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$. Les éléments de M_i sont dits homogènes de degré i.

3. Un sous module N de M est dit homogène si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifie :
(1) N est engendré par des éléments homogènes.
(2) Si $n_0 + n_1 + n_2 + ... + n_i \in N$ où n_j est un élément homogène de degré j, alors chaque $n_j \in N$.
(3) $N = \oplus_{n=0}^{\infty} (N \cap M)$.

On remarque que $R \propto M$ est un anneau gradué avec $(R \propto M)_0 = R \oplus 0$
$(R \propto M)_1 = 0 \oplus M$ et $(R \propto M)_n = 0$ pour $n \geq 2$.
Soit J un idéal de $R \propto M$. Alors $J = (J \cap R) \oplus (J \cap M)$ où $J \cap R$ est un idéal de R et $J \cap M$ est un sous module de M ; ce qui implique que $J = I \propto N$ avec I un idéal de R et N un sous module de M.Par le théorème 2.1.1, $IM \subseteq N$.
Inversement, il est facile de voir qu'un idéal de $R \propto M$ sous la forme $I \propto N$ est forcément homogène.

Définition 2.2.6 *1. un anneau est dit présimplifiable si pour tout $x, y \in R$ tel que $xy = x$ on a $x = 0$ ou y est une unité.*

2. On dit qu'un R-module M est divisible si pour tout $m \in M$ et pour tout non diviseur de zéros $\alpha \in R$ il existe $m' \in M$ tel que $m = \alpha m'$

Théoréme 2.2.7 *Soit R un anneau commutatif et M un R-module.*
(1) Les idéaux homogènes de $R \propto M$ ont la forme $I \propto N$ avec I est un idéal de R, N est un sous module de M, et $IM \subseteq N$. Si J est un idéal homogène, alors $J = I \propto N$ où $I = \{r \in R \mid (r, b) \in J$ pour un certain $b \in M\}$ et $N = \{m \in M \mid (s, m) \in J$ pour un certain $s \in R\}$.
(2) Soit $I \propto N$ et $I' \propto N'$ deux idéaux homogènes de $R \propto M$. Donc on a $(I \propto N) \cap (I' \propto N') = (I \cap I') \propto (N \cap N')$ et $(I \propto N)(I' \propto N') = (II') \propto (IN' + I'N)$.
(3) Pour un idéal principal $\langle (a, b) \rangle$ de $R \propto M$. les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) $\langle (a, b) \rangle$ est homogène.
(b) $\langle (a, b) \rangle = Ra \propto (Rb + aM)$.
(c) $(a, 0) \in \langle (a, b) \rangle$, et
(d) Il existe $x \in R$ tel que $xa = a$ et $xb \in aM$
En particulier, si R est présimplifiable $\langle (a, b) \rangle$ est homogène si et seulement si $a = 0$ ou $b \in aM$.
(4) Tout idéal de $R \propto M$ est homogène si et seulement si tout idéal principal de $R \propto M$ est homogène. Par conséquent, si R est présimplifiable, tout idéal de $R \propto M$ est homogène si et seulement si $M = aM$ pour tout $a(\neq 0) \in R$.
Si R est un domaine, tout idéal de $R \propto M$ est homogène si et seulement si M est divisible. Si R est un anneau présimplifiable qui n'est un domaine, tout idéal de $R \propto M$ est homogène si et seulement si $M = 0$.

Preuve: (1) On a déjà vu que les idéaux homogène de $R \propto M$ sont sous la forme $I \propto N$ où $IM \subseteq N$. Le deuxième résultat est claire.
(2) facile à vérifier.

(3) L'équivalence entre (a) et (b) est claire d'après (1).

Si $\langle(a,b)\rangle$ est homogène, forcément $(a,0) \in \langle(a,b)\rangle$. Si $(a,0) \in \langle(a,b)\rangle$, on a $(0,b) \in \langle(a,b)\rangle$ donc $\langle(a,b)\rangle$ est engendré par des éléments homogènes. Par conséquent $\langle(a,b)\rangle$ est homogène. D'où l'équivalence entre (a) et (c).

$c \Leftrightarrow d$ $(a,0) \in \langle(a,b)\rangle \Leftrightarrow$ il existe $(x,n) \in R \propto M$ tel que $(x,n)(a,b) = (a,0) \Leftrightarrow xa = a$ et $xb = -an \in aM$.

Supposons que R est présimlifiable. Lorsque $a = 0, \langle(0,b)\rangle$ est homogène et on peut prendre $x = 0$. Donc considérons le cas où $a \neq 0$. Supposons $xa = a$ et $xb = -an$. Par conséquent x est inversible d'où $b = -ax^{-1}n \in aM$. Pour le sens inverse on prend $x = 1$.

(4) Le premier résultat est claire. Supposons que R est présimplifiable, d'après (3) tout idéal est homogène si et seulement si $M = aM$ pour tout $a \in R(a \neq 0)$. Si R est un domaine, cela donne que M est divisible. Pour le dernier cas où R est pré-simplifiable qui n'est pas un domaine alors R contient un propre diviseur de zéros $rs = 0$ tel que $r, s \neq 0$ par conséquent $0 = 0M = rsM = r(sM) = rM = M$.

Corollaire 2.2.8 *Soit R un domaine et M un R-module.Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout idéal de $R \propto M$ est comparable à $0 \propto M$.*
2. *Tout idéal de $R \propto M$ est sous la forme $I \propto M$ ou $0 \propto N$ pour un certain I idéal de R et N un sous module de M.*
3. *Tout idéal de $R \propto M$ est homogène.*
4. *M est divisible.*

Preuve: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) claire.

(3) $\Rightarrow$ (4) théorème 1.2.7.

(4) $\Rightarrow$ (1) D'après le théorème 1.2.7 tout idéal de $R \propto M$ est sous la forme $I \propto N$ où I est un idéal de R, N un sous module de M et $IM \subseteq N$. supposons que $I \neq 0$. Alors M est divisible donne $IM = M$, et $M = IM \subseteq N$. Alternativement, remarquer que

si J est un idéal de $R \propto M$ tel que $J \nsubseteq 0 \propto M$, donc $0 \propto M \subseteq J$. En effet soit $(a, b) \in J$ où $a \neq 0$. Soit $m \in M$, alors $m = am'$ pour un certain $m' \in M$. Par conséquent $(0, m) = (a, b)(0, m') \in J$

Théoréme 2.2.9 *Soit R un anneau commutatif et M un R-module. Alors $Z(R \propto M) = \{(r, m) \mid r \in Z(R) \cup Z(M), m \in M\}$. Par conséquent $S \propto M$ où $S = R - Z(R) \cup Z(M)$ est l'ensemble des éléments réguliers (non diviseur de zéros) de $R \propto M$.*

Preuve: Soit $r \in Z(R) \cup Z(M)$. Si $r \in Z(R)$, alors il existe $\in R$ non nul avec $rs = 0$. D'où $(r, 0)(s, 0) = (0, 0)$ et donc $(r, 0) \in Z(R \propto M)$. Si $r \in Z(M)$, il existe $n \in M$ non nul tel que $rn = 0$. D'où $(r, 0)(0, n) = (0, 0)$ et par conséquent $(r, 0) \in Z(R \propto M$.On a, pour tout $m \in M$, $(0, m) \in nil(R \propto M)$, donc $(r, m) = (r, 0) + (0, m) \in Z(R \propto M)$.
Inversement, supposons que $(r, m) \in Z(R \propto M)$. D'où il existe $(s, n) \neq (0, 0)$ tel que $(r, m)(s, n) = (rs, rn + sm) = (0, 0)$. Si $s \neq 0$, alors $rs = 0$ et donc $r \in Z(R)$. Si $s = 0$, alors $n \neq 0$ et $rn = 0$, par conséquent $r \in Z(M)$. En tous les cas $r \in Z(R) \cup Z(M)$.

Théoréme 2.2.10 *Soit R un anneau commutatif et M un R-module. Soit I un idéal de R et N un sous module de M. L'idéal $I \propto N$ de $R \propto M$ est primaire si et seulement si I est un idéal primaire de R, N est un sous module primaire de M, et de plus $\sqrt{I} = \sqrt{N}$ ou $M = N$.*

Preuve: Si $I \propto N$ est un idéal primaire de $R \propto M$ il est facile de voir que I est idéal primaire de R et N est sous module primaire de M. Supposons que $M \neq N$. Soit $x \in \sqrt{I}$ alors il existe un entier positif n tel que $x^n \in I$ d'où $x^n M \subseteq N$. Comme N est un sous module primaire on a donc $x \in \sqrt{N}$. D'autre part soit $x \in \sqrt{N}$ et $b \in N \setminus M$; donc $(x^m, d)(0, b) \in I \propto N$ pour un certain m. Comme $I \propto N$ est primaire, $(x^m, d)^n \in I \propto N$. Par conséquent $x^{nm} \in I$. D'où $x \in \sqrt{I}$.

Théoréme 2.2.11 *Soit R un anneau commutatif et M un R-module. Alors les* *éléments inversibles de* $R \propto M$ *sont* $U(R \propto M) = U(R) \propto M$ *et les idempotents de* $R \propto M$ *sont* $Id(R \propto M) = Id(R) \propto 0$.

Preuve: Supposons que $(r,m) \in U(R \propto M)$. D'où il existe (s,n) tel que $(r,m)(s,n) = (1,0)$. Par conséquent $rs = 1$, et $r \in U(R)$. Inversement, supposons que $r \in R$ est inversible, donc $rs = 1$ pour un certain $s \in R$. Alors $(r,0)(s,0) = (1,0)$ nous donne que $(r,0)$ est inversible. Pour tout $m \in M$, $(0,m)$ est un nilpotent donc $(r,m) = (r,0) + (0,m)$ est inversible.
Certainement si $e \in R$ est idempotent, $(e,0)$ est idempotent. Inversement, supposons que $(r,m) \in R \propto M$ est idempotent. Alors $(r,m) = (r,m)^2 = (r^2, 2rm)$. D'où $r = r^2$ est idempotent. Aussi, $m = 2rm$, donc $rm = 2r^2m = 2rm$ et par conséquent $rm = 0$, d'où $m = 2rm = 0$.

Théoréme 2.2.12 *Soit* R *un anneau commutatif et* M *unR-module. Soit* $S = R - (Z(R) \cup Z(M))$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout idéal régulier de* $R \propto M$ *est sous la forme* $I \propto M$ *où* I *est un idéal de* R *et* $I \cap S \neq \varnothing$.
2. *Tout idéal de* $R \propto M$ *est homogène.*
3. *Pour chaque* $s \in S$ *et* $m \in M$, $\langle (s,m) \rangle$ *est homogène.*
4. $sM = M$ *pour tout* $s \in S$.

Preuve: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) claire.
(3) $\Rightarrow$ (4). Soit $s \in S$. Par le théorème 1.2.7, pour $m \in M$, il existe $x \in R$ (dépend de m) tel que $xs = s$ et $xm \in sM$. Comme s est un élément régulier de R, $x = 1$. Par conséquent $m \in sM$. D'où $M = sM$.
(4) $\Rightarrow$ (1). Soit J un idéal de $R \propto M$. Donc $(s,m) \in J$ pour un certain $s \in S$ et $m \in M$. Par le théorème 1.2.7(3) (avec $a = s$ et $x = 1$), $\langle (s,m) \rangle = Rs \propto (Rm + sM) = Rs \propto M$. D'où $0 \propto M \subseteq J$ et par conséquent $J = I \propto M$ pour un certain I idéal de R avec $I \cap S \neq \varnothing$.

2.3 Quelques constructions d'anneaux et propriétés de $R \propto M$

Théoréme 2.3.1 *Soit R un anneau et M un R module.*

1. *Soit S une partie multiplicative de R et N un sous module de M. Alors $S \propto N$ est une partie multiplicative de $R \propto M$. De plus $(S \propto N)^{-1}(R \propto M)$ est naturellement isomorphe à $S^{-1}R \propto S^{-1}N$. Dans le cas où $N = 0$, l'isomorphisme est simplement $(r, m)(s, 0) \longrightarrow (r/s, m/s)$.*
2. *L'anneau total des fractions $T(R \propto M)$ de $R \propto M$ est naturellement isomorphe à $S^{-1}R \propto S^{-1}M$ où $S = R - (Z(R) \cup Z(M))$. Donc si $Z(M) \subseteq Z(R)$ on a $T(R \propto M) \cong T(R) \propto S^{-1}M$.*

Preuve: 1. L'application $f : (S \propto N)^{-1}(R \propto M) \longrightarrow S^{-1}R \propto S^{-1}N$ définie par $f((r, m)/(s, n)) = (r/s, (sm - rn)/s^2)$ est l'isomorphisme désiré. (Pour comprendre pourquoi cette isomorphisme est définie ainsi, observer que $(r, m)/(s, n) = (s, -n)(r, m)/(s, -n)(s, n) = (sr, sm - rn)/(s^2, 0)$.
2. Si $S = R-(Z(R) \cup Z(M))$, $S \propto M$ est l'ensemble des éléments réguliers de $R \propto M$. Par conséquent l'anneau total des fractions de $R \propto M$ est $(S \propto M)^{-1}(R \propto M)$. Le résultat découle de (1).

Théoréme 2.3.2 *Soient R_1 et R_2 deux anneaux commutatifs, et soient M_i un R_i-module pour $i = 1, 2$. Alors $(R_1 \times R_2) \propto (M_1 \times M_2) \cong (R_1 \propto M_1) \times (R_2 \propto M_2)$.*

Preuve: Il est facile de vérifier que l'application $((r_1, r_2), (m_1, m_2)) \longrightarrow ((r_1, m_1), (r_2, m_2))$ est un isomorphisme.

Théoréme 2.3.3 *Soient $R = R_0 \oplus R_1 \oplus ...$ un anneau commutatif gradué, et $M = M_0 \oplus M_1 \oplus ...$ un R-module gradué. Alors $R \propto M$ est un anneau gradué avec $(R \propto M)_n = R_n \propto M_n$.*

Preuve: Additivement, $R \propto M = (R_0 \oplus R_1 \oplus ...) \oplus (M_0 \oplus M_1 \oplus ...) = (R_0 \oplus M_0) \oplus$

$(R_1 \oplus M_1) \oplus ... = (R \propto M)_0 \oplus (R \propto M)_1 \oplus ...$ Observer que $(R \propto M)_i (R \propto M)_j = (R_i \oplus M_i)(R_j \oplus M_j) = R_i R_j \oplus (R_i M_j + R_j M_i) \subseteq R_{i+j} \oplus M_{i+j} = (R \propto M)_{i+j}$.

Corollaire 2.3.4 *Soit R un anneau commutatif et M un R-module.*

1. $(R \propto M)[\{X_\alpha\}] \approx R[\{X_\alpha\}] \propto M[\{X_\alpha\}]$ *pour tout ensemble d'indéterminées $\{X_\alpha\}$ sur R.*
2. $(R \propto M)[[\{X_\alpha\}]] \approx R[[\{X_\alpha\}]] \propto M[[\{X_\alpha\}]]$ *pour tout ensemble d'indéterminées des séries formelles $\{X_\alpha\}$ sur R.*

Preuve: (1) et (2). L'application $f : (R \propto M)[[\{X_\alpha\}]] \rightarrow R[[\{X_\alpha\}]] \propto M[[\{X_\alpha\}]]$ définie par $\sum (r_i, m_i) f_i \rightarrow (\sum r_i f_i, \sum m_i f_i)$, où f_i est une forme de degré i en $\{X_\alpha\}$, est l'isomorphisme désiré. Noter que $f((R \propto M)[\{X_\alpha\}]) = R[\{X_\alpha\}] \propto M[\{X_\alpha\}]$.

Théoréme 2.3.5 *Soit R un anneau commutatif et M un R-module. Alors $R \propto M$ est Noethérien si et seulement si R est Noethérien et M est de type fini.*

Preuve: Supposons que $R \propto M$ est Noethérien et soit I un idéal de R. Alors, $I \propto M$ est idéal de type fini de $R \propto M$ (car $R \propto M$ est Noethérien).Soit $J = \sum_{i=1}^{n} (R \propto M)(a_i, e_i)$ où $a_i \in I$ et $e_i \in M$ pour tout i. Par conséquent, $I = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ est un idéal de type fini de R. D'où R est Noethérien.

D'autre part, on a l'idéal $J = 0 \propto M$ de R est de type fini. Donc il existe $(0, e_i) \in J$ tel que $J = \sum_{i=1}^{n} (R \propto M)(0, e_i) = 0 \propto \sum_{i=1}^{n} Re_i$. D'où $M = \sum_{i=1}^{n} Re_i$ est un R-module de type fini.

Inversement, Supposons que R est un anneau Noethérien et que M est R-module de type fini. Soit J un idéal premier de $R \propto M$, alors il existe un idéal premier de R tel que $J = I \propto M$. Soit $I = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ pour un certain $a_i \in I$, et soit $M = \sum_{i=1}^{m} Re_i$ pour un certain $e_i \in M$. Par conséquent il est claire que $J = \sum_{i=1}^{n} (R \propto M)(a_i, 0) + \sum_{i=1}^{m} (R \propto M)(0, e_i)$ est de type fini.

Définition 2.3.6 *Soit R un anneau commutatif. R est dit anneau régulier au sen de Von Neumann si l'un des conditions équivalentes suivantes est vérifié :*

(1) *Pour tout* $a \in R$, *il existe* $a' \in R$ *tel que* $a = a'a^2$.

(2) *Pour tout* $a \in R$, *il existe un idempotent* $e \in R$ *tel que* $e^2 = e$ *et* $Ra = Re$.

(3) *Tout idéal de type fini de* R *est principal engendré par un idempotent.*

(4) *Tout idéal de type fini est un facteur direct de* R.

Théoréme 2.3.7 *Soient* R *un anneau commutatif et* M *un* R*-module.* $R \propto M$ *n'est jamais régulier au sens de Von Neumann.*

Preuve: Supposons que $R \propto M$ est anneau régulier au sens de Von Neumann. Soient $m \in M$ non nul et $x = (0, m) \in R \propto M$, alors il existe $y = (0, f)$ tel que $y = y^2$ et $Rx = Ry$. Or, $y^2 = (0, f)(0, f) = (0, 0)$ de sorte que $Rx = Ry = Ry^2 = 0$ et donc $x = 0$ de sorte que $e = 0$, contradiction.

Définition 2.3.8 *Soit* R *un sous anneau d'un anneau* T, *et soit* P *un idéal premier de* R. *Alors* (R, P) *est dit une paire de valuation sur* T *(ou* R *est un anneau de valuation sur* T*) si il existe une valuation surjective* $v : T \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ *tel que* $(v(xy) = v(x) + v(y), v(x + y) \geq min\{v(x), v(y)\}, v(1) = 0, v(0) = \infty)$, G *est un groupe abélien totalement ordonné, avec* $R = \{x \in T \mid v(x) \geq 0\}$ *et* $P = \{x \in T \mid v(x) > 0\}$. *Cette définition est équivalent à si* $x \in T - R$, *alors il existe* $x' \in P$ *tel que* $xx' \in R - P$. *Un anneau de valuation est dit (Manis) anneau de valuation si* $T = T(R)$.

Définition 2.3.9 *Soit* R *un anneau commutatif.*
R *est dit anneau de* $Prüfer$ *si pour tout idéal régulier de type fini* I *de* R, I *est inversible.*

Théoréme 2.3.10 *Soit* R *un anneau commutatif et* M *un* R*-module,et soit* $S = R - (Z(R) \cup Z(M))$.
1. [[19], Théorème 25.13] $R \propto M$ *est un Manis anneau de valuation si et seulement si* R *est un anneau de valuation sur* $S^{-1}R$ *et* $M = S^{-1}M$.
2. [[19], Théorème 25.11] $R \propto M$ *est un anneau de* $Prüfer$ *si et seulement si pour*

tout idéal de type fini I de R avec $I \cap S \neq \varnothing$, I est inversible et $M = S^{-1}M$.

Preuve: 1. Supposons que $(R \propto M, P \propto M)$ est un anneau de valuation sur $T(R \propto M) = S^{-1}R \propto S^{-1}M$. Comme $R \propto M$ est intégralement fermée, $M = S^{-1}M$. Si $(x, m) \in S^{-1}R \propto S^{-1}M - R \propto M$, alors il existe $(r, c) \in P \propto S^{-1}M$ tel que $(x, m)(r, c) \in R \propto S^{-1}M - P \propto S^{-1}M$. Donc si $x \in S^{-1}R - R$, alors il existe un certain $r \in P$ tel que $sr \in R - P$. D'où (R, P) est une paire de valuation de $S^{-1}R$.
2. $(\Rightarrow)$ Supposons que $R \propto M$ est de $Prüfer$. Comme $R \propto M$ est intégralement fermée, $M = S^{-1}M$. Soit I un idéal de type fini de R avec $I \cap S \neq \varnothing$. Alors $I \propto M$ est idéal régulier de type fini de $R \propto M$ (soit $I = (i_1, ...i_n)$ où $i_1 \in S$. Alors $(i_1, 0) \in I \propto M$ est régulier et $i_1 \in S$ donne $i_1M = M$, d'où $\langle (i_1, 0) \rangle = Ri_1 \propto M$, donc $\langle (i_1, 0), ...(i_n, 0) \rangle = I \propto M$). Par conséquent $I \propto M$ est inversible. D'où il existe un idéal J' de $R \propto M$ avec $J'(I \propto M) = \langle (i_1, 0) \rangle$. Comme $M = S^{-1}M$, donc $J' = J \propto M$ pour un certain idéal J de R et $JI = Ri_1$. Par conséquent I est inversible.
2. $(\Leftarrow)$ Comme $M = S^{-1}M$, tout idéal régulier de type fini est homogène et a la forme $I \propto M$ tel que I est un idéal de type fini de R avec $I \cap S \neq \varnothing$. Donc par hypothèse I est inversible. soit $s \in I \cap S$, d'où $Rs = IJ$ pour un certain idéal J de R. donc on a $(J \propto M)(I \propto M) = Rs \propto M$ est un idéal régulier principal. D'où $I \propto M$ est inversible. Par conséquent $R \propto M$ est un anneau de $Prüfer$.

Définition 2.3.11 *Soit R un anneau commutatif.*
1. R est dit n-Booléen si char $R = 0$ et $x_1...x_n(1 + x_1)...(1 + x_n) = 0$ pour tout $x_1, ..., x_n \in R$.
2. R est dit n-régulier au sens de Von Neumann si pour tout $x_1, ..., x_n \in R$, il existe $a_1, ...a_n \in R$ tel que $(x_1a_1x_1 - x_1)...(x_na_nx_n - x_n) = 0$

Théoréme 2.3.12 ([9], Théorème 9) *Soit R un anneau commutatif unitaire et M un R-module. Si R est n-Booléen, respectivement n-régulier au sens de Von Neumann, alors $R \propto M$ est $(n + 1)$-Booléen respectivement $(n + 1)$-régulier au sens de*

Von Neumann. De plus, $R \propto M$ est n-Booléen, respectivement n-régulier au sens de Von Neumann si et seulement si $nil(R)^{n-1}M = 0$.

Preuve: Supposons que R est n-Booléen. Posons $R^* = R \propto M$. Comme char $R = 2$ donc char $R^* = 0$. De plus $R^*/nil(R^*) \cong R/nil(R)$ est un anneau Booléen et $nil(R^*)^m = nil(R)^m \propto nil(R)^{n-1}M$ pour tout entier m,donc R est n-Booléen $\Rightarrow nil(R)^n = 0 \Rightarrow nil(R^*)^{n+1} = 0$. D'où R est n-Booléen implique que R^* est $(n+1)$-Booléen et R^* est n-Booléen $\Leftrightarrow nil(R^*)^n = 0 \Leftrightarrow nil(R)^{n-1}M = 0$. le preuve de n-régulier au sens de Von Neumann est similaire.

Définition 2.3.13 *1. [42] Un anneau R est dit anneau clean (weakly clean) si pour tout élément $r \in R$, r peut s'écrire (de façons unique) sous la forme $r = u + e$ où $u \in U(R)$ et $e \in Idem(R)$.*
2. Un anneau R est dit almost clean si pour tout élément $r \in R$, r peut s'écrire sous la forme $r = u + e$ où u est un élément régulier et $e \in Idem(R)$.
3. Un anneau R est dit ($\{0,1\}$-)weakly clean si pour tout $x \in R$, on a $x = u + e$ ou $x = u - e$ où u est élément inversible et e un idempotent ($e \in \{0,1\}$).

Théoréme 2.3.14 *Soient R un anneau commutatif et M un R-module.*
1. [[31], Théorème 1.10] $R \propto M$ est un anneau clean (res. weakly clean, $\{0,1\}$-weakly clean) si et seulement si R est un anneau clean (res. weakly clean, $\{0,1\}$-weakly clean).
2. [[31], Théorème 2.11] $R \propto M$ est un anneau almost clean si et seulement si tout $x \in R$ peut s'écrire sous la forme $x = u + e$ où $u \in R - (Z(R) \cup Z(M))$ et $e \in Idem(R)$.

Preuve: Rappelons que $U(R \propto M) = \{(r,m) \mid r \in U(R), m \in M\}$, $Id(R \propto M) = \{(e,0) \mid e \in Id(R)\}$, et $reg(R \propto M) = \{(r,m) \mid r \in R - (Z(R) \cup Z(M)), m \in M\}$. Si R est un anneau clean, alors pour $r \in R$, $r = u + e$ où u est inversible et e un idempotent. Donc pour tout $(r,m) \in R \propto M$ on a $(r,m) = (u,m) + (e,0)$, où (u,m) est un élément inversible de $R \propto M$ et $(e,0)$ est un idempotent. D'où $R \propto M$ est un anneau clean. Les autres résultats se démontrent par la même manière.

Définition 2.3.15 *Un anneau R est dit Armendariz si pour tout $f, g \in R[X]$, tel que $fg = 0$, $a_i b_j = 0$ pour tout coefficient a_i de f et b_j de g. De façons similaire on définit un module Armendariz en prenant $f \in R[X]$ et $g \in M[X]$.*

Théoréme 2.3.16 ([8], Théorème 12) *Soient R un anneau commutatif et M est un R-module.*
1. Si $R \propto M$ est Armendariz, alors R est un anneau Armandariz et M est un R-module Armendariz.
2. Supposons que R est un domaine. Alors $R \propto M$ est Armendariz si et seulement si M est un R-module Armendariz.

Preuve: 1. Supposons que $R \propto M$ est Armendariz. Soit $f \in R[X]$ et $g \in M[X]$ tel que $fg = 0$. Donc dans $R \propto M$, $(f, 0)(0, g) = (0, 0)$. Soient a_i un coefficient de f et b_j un coefficient de g; d'où $(a_i, 0)$ est un coefficient de $(f, 0)$ et $(0, b_j)$ est un coefficient de $(0, g)$. Donc $(a_i, 0)(0, b_j) = (0, 0)$ qui donne $a_i b_j = 0$. Par conséquent M est un R-module Armendariz. De la même manière on montre que R est un anneau Armendariz.
2. Supposons que R est un domaine. $(\Rightarrow)$, claire d'après (1).
$(\Leftarrow)$ Soient $f, g \in (R \propto M)[X]$ tel que $fg = 0$. On pose $f = \sum (r_i, m_i)X^i = (f_1, f_2)$ et $g = \sum (s_i, n_i)X^i = (g_1, g_2)$ dans $(R \propto M) = R[X] \propto M[X]$. Maintenant, $f_1 g_1 = 0$ dans $R[X]$, donc R est un domaine donne $f_1 = 0$. D'où $0 = f_1 g_2 + g_1 f_2 = g_1 f_2$. Donc, Tout $s_i m_j = 0$ car M est Armendariz. Par conséquent, $(r_j, m_j)(s_i, n_i) = (0, m_j)(s_i, n_i) = (0, s_i m_j) = (0, 0)$.

CHAPITRE 3

L'AMALGAMATION D'ANNEAUX

M. D'Anna, C.A. Finocchiaro, M. Fontana, Amalgamated algebras along an ideal, in : Commutative Algebra and Applications, Proceedings of the Fifth International Fez Conference on Commutative Algebra and Applications, Fez, Morocco, W. de Gruyter Publisher, Berlin, 2009, pp. 155-172.

3.1 Définition et exemples

Définition 3.1.1 *Soient A et B deux anneaux commutatifs et unitaires, soit J un idéal de B, et soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On appelle l'amalgamation de A et B suivant J et respectant f le sous anneau de $A \times B$ défini par :*

$$A \bowtie^f J = \{(a, f(a) + j)|\ a \in A, j \in J\}$$

Soient A un anneau commutatif unitaire et R un A-module. l'anneau $A\dot{\bigoplus}R$ est l'ensemble des couple dans $A \times B$ muni de l'addition composante par composante et de la multiplication définie par $(a, x)(a', x') = (aa', ax' + a'x + xx')$, pour tout $a, a' \in A$ et $x, x' \in R$.

Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, et soit J un idéal de B. Noter que f induit sur J une structure naturelle de A-module définie par $a.j := f(a)j$, pour tout $a \in A$ et $j \in J$. Donc on peut considérer $A\dot{\oplus}J$.

Lemme 3.1.2 *1) $A\dot{\oplus}J$ est un anneau.*
2) L'application $f^{\bowtie} : A\dot{\oplus}J \longrightarrow A \times B$ défini par $(a, j) \longrightarrow (a, f(a) + j)$ pour tout $a \in A$ et $j \in J$, est un homomorphisme injectif d'anneaux.
3) L'application $\iota_A : A \longrightarrow A\dot{\oplus}J$ (respectivement $\iota_J : J \longrightarrow A\dot{\oplus}J$), défini par $a \longrightarrow (a, 0)$ pour tout $a \in A$ (respectivement, par $j \longrightarrow (0, j)$ pour tout $j \in J$), est un homomorphisme injectif d'anneaux (respectivement, est un homomorphisme injectif de A-module).
4) Soit $p_A : A\dot{\oplus}J \longrightarrow A$ la projection canonique définie par $(a, j) \longrightarrow a$ pour tout $a \in A$ et $j \in J$. On a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\iota_J} A\dot{\oplus}J \xrightarrow{p_A} A \longrightarrow 0$$

On a $A \bowtie^f J := f^{\bowtie}(A\dot{\oplus}J)$ et on pose $\Gamma(f) = \{(a, f(a))|a \in A\}$. Clairement, $\Gamma(f) \subseteq A \bowtie^f J$ et $A \bowtie^f J \cong A\dot{\oplus}J$.

Exemple 3.1.3 *Un cas particulier de la construction de l'amalgamation est* ***la duplication amalgamé d'un anneau*** *([23],[27],[28]). Soit A un anneau et E un sous A-module de l'anneau total des fractions de A noté $T(A)$ tel que $E.E \subseteq E$. La duplication amalgamé de A le long d'un sous A-module E, noté $A \bowtie E$, est le sous anneau de $A \times T(A)$ défini par*

$$R \bowtie E = \{(a, a + e)|a \in A \ et \ e \in E\}$$

Dans ce cas, on a E est un idéal du sous anneau $B = (E : E) = (\{z \in T(A) \mid zE \subseteq E\}$ de $T(A)$. Si $\iota : A \longrightarrow B$ est l'injection canonique, alors $A \bowtie^{\iota} E$ coïncide avec $A \bowtie E$, la duplication amalgamé de A le long de E.
En particulier, si $E = I$ un idéal de A, Dans ce cas on prend $B = A$ et on considère

l'application identité $id := id_A : A \longrightarrow A$. Par conséquence, on obtient $A \bowtie I$, la duplication amalgamé le long de I, coïncide avec $A \bowtie^{id} I$.

Exemple 3.1.4 *Soient $A \subset B$ deux anneaux et $X := \{X_1, X_2, ...X_n\}$ des indéterminées sur B.*
On a $A + XB[X] := \{h \in B[X]/h(0) \in A\}$ est un sous anneau de B.
Soient $J = XB[X]$ un idéal de $B[X]$, et $\sigma : A \hookrightarrow B[X]$ l'injection canonique. Alors on a :

$$A \bowtie^{\sigma} J \cong A + XB[X].$$

Dans la suite nous étudierons quelques propriétés algébriques de l'anneau $A \bowtie^f J$ en relation avec A, B, et f.

3.2 Produit fibré

Définition 3.2.1 *Soient $\alpha : A \longrightarrow C$, $\beta : B \longrightarrow C$ des homomorphisme d'anneaux. Alors $D = \alpha \times_C \beta = \{(a, b) \in A \times B \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$ est un sous-anneau de $A \times B$ appelé le produit fibré de α et β.*
Dans ce qui suit, nous désignerons par p_A (Respectivement, p_B) la restriction à $\alpha \times_C \beta$ de la projection de $A \times B$ sur A (respectivement B).

Proposition 3.2.2 *Soient $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneau et J un idéal de B. Si $\pi : B \longrightarrow B/J$ est la projection canonique et $\check{f} = \pi o f$, alors $A \bowtie^f J = \check{f} \times_{B/J} \pi$.*

Preuve: un résultat direct de la définition.

Proposition 3.2.3 *Soient A, B, C, α, β comme dans la définition 3.2.1, et soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Les conditions suivantes sont équivalente :*
1) *Il existe un J idéal de B tel que $A \bowtie^f J$ est le produit fibré de α et β.*
2) *α est la composition $\beta \circ f$.*

Preuve: Supposons que la condition (1) est vérifié, et soit a un élément de A. Donc, $(a, f(a)) \in A \bowtie^f J$ et, par hypothèse, on a $\alpha(a) = \beta(f(a))$. D'où on obtient la condition (2).
Inversement, supposons que $\alpha = \beta \circ f$. On veut montrer que l'anneau $A \bowtie^f ker(\beta)$ est le produit fibré de α et β. L'inclusion $A \bowtie^f ker(\beta) \subseteq \alpha \times_C \beta$ est claire. D'autre part, soit $(a, b) \in \alpha \times_C \beta$. Par hypothèse, on a $\beta(b) = \alpha(a) = \beta(f(a))$. Ce qui implique que $b - f(a) \in ker(\beta)$, et d'où $(a, b) = (a, f(a) + k)$, pour un certain $k \in ker(\beta)$. Par conséquent, $A \bowtie^f ker(\beta) = \alpha \times_C \beta$, et donc la condition (1) est vraie.
Maintenant, rappelons qu'un homomorphisme d'anneau $r : B \longrightarrow A$ est appelé une rétraction d'anneau s'il existe un homomorphisme d'anneaux $\iota : A \longrightarrow B$ tel que $r \circ \iota = id_A$. Dans cette situation, ι est nécessairement injectif, r est nécessairement surjectif, et A est dit une rétracte de B.

Exemple 3.2.4 *Si $r : B \longrightarrow A$ un rétraction d'anneaux et $\iota : A \hookrightarrow B$ un injection d'anneaux tel que $r \circ \iota = id_A$, alors B est naturellement isomorphe à $A \bowtie^f ker(\beta)$. En effet, il est facile de vérifie, que $B = \iota(A) + ker(r)$ et que $\iota^{-1}(ker(r) = \{0\}$*

Remarque 3.2.5 *Soient $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B. Alors A est une rétracte de $A \bowtie^f J$ et l'application $\pi_A : A \bowtie^f J \longrightarrow A$, défini par $(a, f(a) + j) \longrightarrow a$, est une rétraction d'anneaux, car l'application $\iota : A \longrightarrow A \bowtie^f J$, $a \longrightarrow (a, f(a))$, est un homomorphisme injectif tel que $\pi_A \circ \iota = id_A$.*

Proposition 3.2.6 *Soient A, B, C, α, β,p_A,p_B comme dans la définition 3.2.1. Alors, les assertions suivantes équivalentes :*
1) *$p_A : \alpha \times_C \beta \longrightarrow A$ est une rétraction d'anneau.*
2) *Il existe un idéal J de B et il existe un homomorphisme d'anneaux $f : A \longrightarrow B$ tels que $\alpha \times_C \beta = A \bowtie^f J$.*

Preuve: Soit $D = \alpha \times_C \beta$. Supposons que la condition (1) est vraie et soit $\iota : A \hookrightarrow D$ une injection d'anneaux tel que $p_A \circ \iota = id_A$. Si on considère l'homomorphisme d'anneaux $f = p_B \circ \iota$, alors par la définition du produit fibré, on a $\beta \circ f = \beta \circ p_B \circ \iota = \alpha \circ p_A \circ \iota = \alpha \circ id_A = \alpha$. D'où on obtient la condition (2) en appliquant la proposition 6.1.6. Inversement, soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux tel que $D = A \bowtie^f J$, pour un certain idéal J de B. Par la remarque 3.2.5 la projection de $A \bowtie^f J$ dans A est un rétraction d'anneaux.

Remarque 3.2.7 *Soient $f, g : A \longrightarrow B$ deux homomorphismes d'anneaux et J un idéal de B. On peut trouver $A \bowtie^f J = A \bowtie^g J$, avec $g \neq f$. En faite, il facile de vérifier que $A \bowtie^f J = A \bowtie^g J$ si et seulement si $f(a) - g(a) \in J$, pour tout $a \in A$.*

Proposition 3.2.8 *Avec les notations de la définition 3.2.1, On a :*
1) *si $D = \alpha \times_C \beta$ est réduit alors,*
$Nilp(A) \cap ker(\alpha) = \{0\}$ et $Nilp(B) \cap ker(\beta) = \{0\}$.
2) *Si l'une des conditions suivante est vérifiée :*
(a) *A est réduit et $Nilp(B) \cap ker(\beta) = \{0\}$.*
(b) *B est réduit et $Nilp(A) \cap ker(\alpha) = \{0\}$.*
Alors D est réduit.

Preuve: 1) Supposons que D est réduit. Par symétrie, il suffit de montrer que $Nilp(A) \cap ker(\alpha) = \{0\}$. Si $a \in Nilp(A) \cap ker(\alpha)$, alors $(a, 0)$ est un élément nilpotent de D, ce qui donne $a = 0$.
2) Par symétrie entre les deux conditions (a) et (b), il est suffisante de montrer que si la condition (a) est satisfaite alors D est réduit. En effet, Soit (a, b) un élément nilpotent de D. D'où $a = 0$ car $a \in nilp(A)$ et A est réduit. Donc on a $(a, b) = (0, b) \in nilp(D)$, ce qui implique que $b \in Nilp(B) \cap ker(\beta) = \{0\}$.

Proposition 3.2.9 *Avec les mêmes notations de la définition 3.2.1. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) *$D = \alpha \times_C \beta$ est un anneau Noethérien.*
2) *$ker(\beta)$ est un D-module Noethérien (avec la structure naturelle de D-module induit par p_B) et $p_A(D)$ est un anneau Noethérien.*

Preuve: Il est facile de voir que $Ker(p_A) = 0 \times ker(\beta)$. D'où, On a la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow ker(\beta) \xrightarrow{i} D \xrightarrow{p_A} p_A(D) \longrightarrow 0$$

où i est l'injection canonique de D-module (définie par $x \longrightarrow (x, 0)$ pour tout $x \in ker(\beta)$). Par [[30], Proposition 6.3], D est un anneau Noethérien si et seulement si $ker(\beta)$ et $p_A(D)$ sont des D-modules Noethérien. Le résultat devient immédiate, car les sous D-modules de $p_A(D)$ sont exactement les idéaux de l'anneau $p_A(D)$.

Remarque 3.2.10 *Si β est surjectif, alors p_A est aussi surjectif et donc $p_A(D) = A$. Dans ce cas, la proposition 3.2.9 devient, D est Noethérien si et seulement si $ker(\beta)$ est un D-module Noethérien et A est un anneau Noethérien.*

3.3 L'anneau $A \bowtie^f J$: quelques propriétés algébriques

On commence par quelques résultats immédiate de la définition de l'anneau $A \bowtie^f J$:

Proposition 3.3.1 *Soient $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, J un idéal de B et $A \bowtie^f J := \{(a, f(a) + j) \mid a \in A, j \in J\}$.*

(1) *Soit $\imath := \imath_{A,f,J} : A \longrightarrow A \bowtie^f J$ l'homomorphisme d'anneaux naturel défini par $\imath(a) := (a, f(a)), \forall a \in A$, alors $\imath$ est un prologement qui fait de $A \bowtie^f J$ une extension de A (avec $\Gamma(f) := \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ est un sous-anneau de $A \bowtie^f J$.)*

(2) *Soient I un idéal de A et $I \bowtie^f J := \{(i, f(i) + j) \mid i \in I, j \in J\}$.Alors $I \bowtie^f J$ est un idéal de $A \bowtie^f J$, la composition des homomorphismes canoniques $A \hookrightarrow A \bowtie^f J \twoheadrightarrow \frac{A \bowtie^f J}{I \bowtie^f J}$ est un homomorphisme d'anneaux surjectif et son noyau coïncide avec I.*

Par conséquent, nous avons l'isomorphisme canonique suivant :

$$\frac{A \bowtie^f J}{I \bowtie^f J} \cong \frac{A}{I}.$$

(3) *Soient $p_A : A \bowtie^f J \longrightarrow A$ et $p_B : A \bowtie^f J \longrightarrow B$ les projections naturelles de $A \bowtie^f J$ ($\subset A \times B$) respectivement dans A et dans B . Alors p_A est surjective et $Ker(p_A) = \{0\} \times J$.*

De plus, $p_B(A \bowtie^f J) = f(A) + J\, et\, Ker(p_B) = f^{-1}(J) \times \{0\}$. Nous avons alors les isomorphismes suivants :

$$\tfrac{A \bowtie^f J}{\{0\} \times J} \cong A \; et \; \tfrac{A \bowtie^f J}{f^{-1}(J) \times \{0\}} \cong f(A) + J$$

(4) *Soit $\gamma : A \bowtie^f J \longrightarrow (f(A) + J)/J$ l'homomorphisme d'anneaux naturel défini par $(a, f(a) + j) \mapsto f(a) + J$. Alors γ est surjective et $Ker(\gamma) = f^{-1}(J) \times J$. Ainsi,nous avons l'isomorphisme naturel suivant :*

$$\frac{A \bowtie^f J}{f^{-1}(J) \times J} \cong \frac{f(A) + J}{J}.$$

En particulier,lorsque f est surjective,on a :

$$\frac{A \bowtie^f J}{f^{-1}(J) \times J} \cong \frac{B}{J}.$$

L'anneau $B_\diamond$ (qui est un sous anneau de B) a un rôle très important dans la structure de $A \bowtie^f J$. Pour l'instant, si $f^{-1} = 0$, on a $B_\diamond = A \bowtie^f J$ (la proposition 3.3.1).

Proposition 3.3.2 *Avec les notations de la proposition 3.3.1, supposons que $J \neq \{0\}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$A \bowtie^f J$ est un domaine.*

(2) *$f(A) + J$ est un domaine et $f^{-1}(J) = 0$*

En particulier, si B est un domaine et $f^{-1}(J) = 0$, alors $A \bowtie^f J$ est un domaine.

Preuve: (2) $\Rightarrow$ (1) est claire, car $f^{-1}(J) = 0$ implique que $A \bowtie^f J = f(A) + J$ (proposition 3.3.1(3)).

Supposons que la condition (1) est bien vérifié. Si il existe un élément $a \in A \setminus 0$ tel que $f(a) \in J$, alors $(a, 0) \in A \bowtie^f J \setminus (0, 0)$. D'où si j est un élément non nul de J, alors on a $(a, 0)(0, j) = (0, 0)$, une contradiction. Donc $f^{-1}(J) = 0$. Le résultat donc est immédiate car $A \bowtie^f J = f(A) + J$ (proposition 3.3.1(3)).

Remarque 3.3.3 *1) Notons que, Si $A \bowtie^f J$ est un domaine , alors A est un domaine aussi, par la proposition 3.3.1(1).*
2) Soit $B = A$, $f = id_A$ et $J = I$ un idéal de A. Dans ce cas, $A \bowtie^{id_A} J$ coïncide avec la duplication amalgamé de A le long de I et il n'est jamais un domaine, sauf si $I = 0$ et A est domaine.

Proposition 3.3.4 *Avec les notations de la proposition 3.3.1. les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$A \bowtie^f J$ est un anneau réduit.*

(2) *A est un anneau réduit et $Nilp(B) \cap J = 0$*

En particulier, si A et B sont réduit, alors $A \bowtie^f J$ est réduit; inversement, si J est un idéal radical de B et $A \bowtie^f J$ est réduit, alors A et B sont réduit.

Preuve: D'après la proposition 3.2.8(2 a), on déduit facilement avec les notations de la proposition 3.2.2 que (2) $\Rightarrow$ (1), car dans ce cas on a $ker(\pi) = J$.
(2) $\Rightarrow$ (1) par la proposition 3.2.8(1), il suffit de monter que si $A \bowtie^f J$ est réduit, alors A est l'est aussi. En effet, si $a \in Nilp(A)$, alors $(a, f(a)) \in Nilp(A \bowtie^f J)$. Le résultat est donc trivial.
La première partie de la dernière assertion est évident. Pour la deuxième partie, on a $\{0\} = Nilp(B) \cap J = Nilp(B)$ (car J est un idéal radical, et donc $Nilp(B) \subseteq J$). Par conséquent, B est un anneau réduit.

Remarque 3.3.5 **1)** *Notons que, Si $B = A$, $f = id_A$, et $J = I$ un idéal de A, on a $A \bowtie I$ est réduit si et seulement si A est réduit.*

2) *La dernière proposition implique que la propriété d'être réduit pour $A \bowtie^f J$ est indépendante de la nature de f.*

3) *Si A et $f(A)+J$ sont réduit, alors $A \bowtie^f J$ est anneau réduit, par la proposition 3.3.4. Mais le sens inverse n'est pas en général vrai. En effet, Soient $A = Z, B = Z \times (Z/4Z), f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux tel que $f(n) = (n, [n]_4)$, pour tout $n \in Z$ (où $[n]_4$ désigne la classe de n modulo 4). Si on prend $J = Z \times \{[0]_4\}$, alors $J \cap Nilp(B) = \{0\}$, et d'où $A \bowtie^f J$ est un anneau réduit, mais $(0, [2]_4) = (2, [2]_4) + (-2, [0]_4)$ est un élément nilpotent non nul de $f(A) + J$.*

Proposition 3.3.6 *Avec les notations de la proposition 3.3.1. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *$A \bowtie^f J$ est un anneau Noethérien.*

2) *A et $f(A) + J$ sont des anneaux Noethérien.*

Preuve: (2) $\Rightarrow$ (1) Rappelons que $A \bowtie^f J$ est le produit fibré de l'homomorphisme d'anneau $\check{f} : A \longrightarrow B/J$ (défini par $a \longrightarrow f(a) + j$) et la projection canonique $\pi : B \longrightarrow B/J$. Comme la projection $p_A : A \bowtie^f J \longrightarrow A$ est surjective (proposition 3.3.1(3)), A est un anneau Noethérien d'après la proposition 3.2.9, il suffit de montrer que $J(= ker(\pi)$, avec la structure de $A \bowtie^f J$-module induit par p_B, est Noethérien. Mais ceci est facile, car tout sous $A \bowtie^f J$-module de J est un idéal de l'anneau Noethérien $f(A) + J$.

(1) $\Rightarrow$ (2) C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.3.1(3).

Remarque 3.3.7 *Notons que, dans le cas où $B = A$, $f = id_A$, et $J = I$ un idéal de A, on a $A \bowtie I$ Noethérien si et seulement si A est Noethérien.*

Proposition 3.3.8 *Avec les notations de la proposition 3.3.1, supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

a) *J est un A-module de type fini (par la structure naturelle induit par f).*

b) *J est un A-module Noethérien (par la structure naturelle induit par f).*

c) *$f(A) + J$ est un A-module Noethérien (par la structure naturelle induit par f)*

d) *f est un homomorphisme fini.*

Alors $A \bowtie^f J$ est un anneau Noethérien si et seulement si A est Noethérien.

Remarque 3.3.9 *Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Alors f est dit un homomorphisme fini s'il existe une famille fini $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ de B telle que pour tout élément $b \in B$ on a $b = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)b_i$ avec $a_i \in A$.*

Preuve: Clairement, si $A \bowtie^f J$ est Noethérien, alors A est un anneau Noethérien, car il est isomorphe à $A \bowtie^f J/(\{0\} \times J)$ (proposition 3.3.1(3)).
Inversement, Supposons que A est un anneau Noethérien. Dans ce cas il est évident de vérifié que les conditions $(a), (b)$ et (c) sont équivalentes [[30], Proposition 6.2, 6.3, et 6.5]. De plus, (d) implique (a), car J est un sous A-module de B, et B est un A-module Noethérien d'après la condition (d) [[30], Proposition 6.5].
Maintenant, il suffit de monter que $A \bowtie^f J$ est Noethérien si A est Noethérien et la condition (c) est vraie. Si $f(A)+J$ est un A-module Noethérien alors $f(A)+J$ est un anneau Noethérien (car tout idéal de $f(A) + J$ est un sous A-module de $f(A) + J$). La conclusion découle de la proposition 3.3.6((2) $\Rightarrow$ (1)).

Proposition 3.3.10 *Avec les même notations de la proposition 3.3.1 et 3.2.2. Si B est un anneau Noethérien et l'homomorphisme d'anneaux $\check{f} : A \longrightarrow B/J$ est fini, alors $A \bowtie^f J$ est un anneau Noethérien si et seulement si A est Noethérien.*

Preuve: Si $A \bowtie^f J$ est Noethérien nous savons toujours que A est Noethérien.
Donc il reste à montrer que si A et B sont des anneaux Noethérien et $\check{f}$ est fini, alors $A \bowtie^f J$ est un anneau Noethérien. Mais ce résultat découle immédiatement de [[29], Proposition 1.8].

Proposition 3.3.11 *Soit $A \subseteq B$ une extension d'anneaux et $\boldsymbol{X} := \{X_1, ..., X_n\}$ un ensemble fini des indéterminées sur B, Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *$A + B[\boldsymbol{X}]$ est un anneau Noethérien.*

2) *$A + B[[\boldsymbol{X}]]$ est un anneau Noethérien.*

3) *A est un anneau Noethérien et $A \subseteq B$ est une extension finie d'anneaux.*

Les deux propositions suivantes donnent une caractérisation pour les éléments nilpotents et les éléments idempotents de $A \bowtie^f J$.

Proposition 3.3.12 ([22], lemme 2.5) *Soient $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B telle que $Idem(B) \cap J = \{0\}$. Alors $Idem(A \bowtie^f J) = \{(e, f(e)|e \in Idem(A)\}$*

Preuve: Soit $(e, f(e)+j)$ un élément idempotent de $A \bowtie^f J$. Il est claire que e doit être un élément idempotent de A. D'autre part, $(f(e)+j)^2 = f(e)+j$. D'où, $j-j^2 = 2f(e)j$. Donc, $f(e)(j-j^2) = 2f(e)^2j = 2f(e)j$. Par conséquent, $-f(e)j^2 = f(e)j$. D'où, $(f(e)j)^4 = (f(e)j^2)^2 = (-f(e)j)^2 = (f(e)j)^2$. Donc, $f(e)j^2 = (f(e)j)^2 \in idem(B) \cap J = \{0\}$. D'où, $f(e)j = -f(e)j^2 = 0$. Par conséquent, $j^2 = j$. Ce qui implique que $j \in idem(B) \cap J = \{0\}$. D'où, $j = 0$ et $Idem(A \bowtie^f J) \subseteq \{(e, f(e)|e \in Idem(A)\}$. L'inclusion inverse est claire.

Proposition 3.3.13 ([22], lemme 2.10) *Soient $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B. Alors :*
$Nilp(A \bowtie^f J) = \{(a, f(a)+j)|a \in Nilp(A),$ et $j \in Nilp(B) \cap J\}$.

Preuve: Considérons $(a, f(a)+j) \in Nilp(A \bowtie^f J)$. donc, il existe un entier positif n tel que $(a, f(a)+j)^n = 0$. D'où, $a \in Nilp(A)$ et $f(a) \in Nilp(B)$. D'autre part, $(f(a)+j)^n = 0$ donne $f(a)+j \in Nilp(B)$. Donc $j \in Nilp(B)$ car $f(a) \in Nilp(B)$. Par conséquent, $j \in Nilp(B) \cap J$.
Inversement, Soient $a \in Nilp(A)$ et $j \in Nilp(B) \cap J$. Il est claire que $f(a) \in Nilp(B)$. D'où, $f(a)+j \in Nilp(B)$. Par conséquent, $(a, f(a)+j)$ est un élément nilpotent de $A \bowtie^f J$.

3.4 Les idéaux premiers et maximaux de l'anneau $A \bowtie^f J$

Tous les résultats de cette partie se trouve dans l'article [25].
Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, et posons $X = spect(A), Y = spect(B)$. Notons $f^* : Y \longrightarrow X$ l'application fermée naturellement associé à f.(**i.e** $f^*(Q) = f^{-1}(Q)$ pour tout idéal premier Q de Y). Soit S un sous-ensemble de A. Alors, $V_X(S)$, ou simplement $V(S)$, désigne le sous-espace fermé de X, formé de tous les idéaux premiers de A contenant S.

Lemme 3.4.1 ([29], Théorème 1.4) *Avec les mêmes notations de la définition 3.2.1. Posons $X = spect(A), Y = spect(B), Z = spect(C)$, et $W = spect(D)$. Supposons que β est surjectif. Alors Nous avons les résultats suivants :*

1) *Si $H \subseteq W \setminus V(ker(p_A))$, alors il existe un unique idéal premier Q de B tel que $p_B^{-1}(Q) = H$. De plus, $Q \in Y \setminus V(ker(\beta))$ et $D_H \cong B_Q$, sous l'homomorphisme canonique induit par p_B.*

2) *L'application continue p_A^* est fermé de X dans W. Ainsi X est homéomorphe à son image , $V(ker(p_A))$, sous p_A^*.*

3) *La restriction de l'application continue p_B^* à $Y \setminus V(ker(\beta))$ est un homéomorphisme de $Y \setminus V(ker(\beta))$ à $W \setminus V(ker(p_A))$.*
En particulier, Les idéaux premiers de D sont de type $p_A^{-1}(P)$ ou $P_B^{-1}(Q)$, où P est un idéal premier de A et Q est un idéal premier de B, avec $Q \not\supseteq ker(\beta)$.

Le corollaire suivant est un résultat direct du lemme 3.4.1 :

Corollaire 3.4.2 *Avec les notations de la définition 3.2.1, supposons que β est surjectif. Soit H un idéal premier de D.*

1) *Supposons que H contient $ker(p_A)$. Soit P l'unique idéal premier de A tel que $H = p_A^*(P)$. Alors H est un idéal maximal de D si et seulement si P est un idéal maximal de A.*

2) *Supposons que* H *ne contient pas* $ker(p_A)$. *Soit* Q *l'unique idéal premier de* B *(*Q *ne contient pas* $ker(\beta)$*) tel que* $H = p_B^*(Q)$. *Alors* H *est un idéal maximal de* D *si et seulement si* Q *est un idéal maximal de* B.

3) D *est un anneau local si et seulement si* A *est un anneau local et* $ker(\beta) \subseteq Jac(B)$. *De plus si* D *est un anneau local et* M *est l'unique idéal maximal de* A*, alors* $\{p_A^{-1}(M)\} = Max(D)$

A l'aide de tous ces résultats, on peut donc décrire la structure du spectre premier de l'anneau $A \bowtie^f J)$:

Corollaire 3.4.3 *Avec les notations de la proposition 3.3.1. Soit* $X = spect(A), Y = spect(B), W = spect(A \bowtie^f J))$, *et* $J_0 = \{0\} \times J$. *Pour tout* $P \in X$ *et* $Q \in Y$ *posons :*

$$P'^f := P \bowtie^f J = \{(p, f(p) + j) \mid p \in P, j \in J\};$$
$$\overline{Q^f} := \{(a, f(a) + j) \mid a \in A, j \in J, f(a) + j \in Q\}.$$

Alors,nous avons les propriétés suivantes :

(1) *L'application* $P \mapsto P'^f$ *est un plongement fermé de* X *dans* W. *Ainsi son image, qui coïncide avec* $V(J_0)$, *est homéomorphe à* X.

(2) *L'application* $Q \mapsto \overline{Q^f}$ *est un homéomorphisme de* $Y \setminus V(J)$ *sur* $W \setminus V(J_0)$.

(3) *Les idéaux premiers de* $A \bowtie^f J$ *sont du type* P'^f *ou* $\overline{Q^f}$, *pour* P *variant en* X *et* Q *dans* $Y \setminus V(J)$.

Corollaire 3.4.4 *Par les notations du corollaire 3.4.3.*

1) *Soit* $P \in X$. *Alors* P'^f *est un idéal maximal de* $A \bowtie^f J)$ *si et seulement si* P *est un idéal maximal de* A.

2) *Soit* Q *un idéal premier de* B *qui ne contient pas* J. *Alors* $\overline{Q^f}$ *est un idéal maximal de* $A \bowtie^f J)$ *si et seulement si* Q *est un idéal maximal de* B.

En particulier, $Max(A \bowtie^f J)) = \{P'^f | P \in Max(A)\} \cup \{\overline{Q^f} | Q \in Max(B) \setminus V(J)\}$.

3) $A \bowtie^f J)$ *est un anneau local si et seulement si* A *est un anneau local et* $J \subseteq Jac(B)$

La proposition suivante décrit la localisation de l'anneau $A \bowtie^f J)$ par tous ses idéaux premiers.

Proposition 3.4.5 *Avec les notations du corollaire 3.4.3. Nous avons les résultats suivants :*

1) *Pour tout idéal $Q \in Y \setminus V(J)$, l'anneau $(A \bowtie^f J)_{\overline{Q^f}}$ est canoniquement isomorphe à B_Q.*

2) *Pour tout idéal $P \in X \setminus V(f^{-1}(J))$, la localisation $(A \bowtie^f J)_{P'^f}$ est canoniquement isomorphe à A_P.*

3) *Soit P un idéal premier de A contient $f^{-1}(J)$. Considérons la partie multiplicative $S := S_(f, P, J) = f(A \setminus P) + J$ de B et posons $B_S = S^{-1}B$ et $J_S = S^{-1}J$. Si $f_P : A_P \longrightarrow B_S$ est l'homomorphisme d'anneaux induit par f, alors l'anneau $(A \bowtie^f J)_{P'^f}$ est canoniquement isomorphe à $A_P \bowtie^{f_P} J_S$.*

3.5 L'extension des idéaux de A à $A \bowtie^f J$

Proposition 3.5.1 *Avec les notations de la proposition 3.3.1 et du corollaire 3.4.3. Nous avons les propriétés suivantes :*

1) *Si I (resp. H) est un idéal de A (resp. $f(A)+J$) tel que $f(I)J \subseteq H \subseteq J$, alors $I \bowtie^f H = \{(i, f(i)+h) \mid i \in I, h \in H\}$ est un idéal de $A \bowtie^f J$*

2) *Si I est un idéal de A alors l'extension $I(A \bowtie^f J)$ de I à $A \bowtie^f J$ coïncide avec $I \bowtie^f (f(I)B)J = \{(i, f(i)+\beta) \mid i \in I, \beta \in (f(I)B)J\}$.*

3) *Si I est un idéal de A tel que $f(I)B = B$, alors $I(A \bowtie^f J) = I'^f = \{(i, f(i)+j) \mid i \in I, j \in J\} = I \bowtie^f J$.*

Preuve: 1) évident.

2) Soit $I_0 = I \bowtie^f (f(I)B)J$ En appliquant (1) à $H = (f(I)B)J$ on déduit que I_0 est un idéal de $A \bowtie^f J$ et , par définition, $I_0 \supseteq \iota(I) = \{(i, f(i)+\beta) \mid i \in I\}$. Soit L un idéal de $A \bowtie^f J$ qui contient $\iota(I)$, et soit $(i, f(i)+\beta) \in I_0$ (où $i \in I$, et

$\beta \in (f(I)B)J)$. Par conséquent, on peut trouver $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in I$, $b_1, b_2, ...b_n \in J$. tel que $\beta = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)b_k$. Comme $(i, f(i), (\alpha_1, f(\alpha_1), ..., (\alpha_n, f(\alpha_n)) \in \iota(I) \subseteq L$, alors

$$(i, f(i) + \beta) = (i, f(i)) + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k, f(\alpha_k)(0, b_k) \in L$$

et donc $I_0 \subseteq L$.

3) Découle immédiatement de (2).

3.6 Fermeture intégrale de l'anneau $A \bowtie^f J$:

Rappel : [33]

Soient $R \subseteq S$ une extension d'un anneau. On dit q'un élément $x \in S$ est entier sur R si x est racine d'un polynome untaire f de $R[X]$ **i.e** il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(x) = x^n + a_0x^{n-1} + ... + a_{n-1} = 0$.

On dit que S est entière sur R si tout élément de S est entier sur R. une relation de la forme $f(x) = 0$ où f est un polynôme unitaire de $R[X]$ est appelée équation de dépendance intégrale à coefficients dans A.

L'ensemble des éléments de S entiers sur R est appelée la fermeture intégrale de R, et il sera noter par $\overline{R}^S$.

La fermeture intégrale de R dans son anneau total des fractions $T(R)$ sera simplement notée par $\overline{R}$.

Maintenant, nous voulons déterminer la fermeture intégrale de l'anneau $A \bowtie^f J$ dans son anneau total des fractions $T(A \bowtie^f J)$.

Proposition 3.6.1 *[26] Soient $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, J un idéal de B, et $A \bowtie^f J$ l'amalgamation de A et B suivant J et respectant f. Supposons que J et $f^{-1}(J)$ sont des idéaux réguliers respectivement de B et A. Alors $T(A \bowtie^f J)$ est canoniquement isomorphe à $T(A) \times T(B)$.*

Preuve: On notera que $J_1 := f^{-1}(J) \times J$ est le conducteur de $A \bowtie^f J$ dans $A \times B$ (**i.e,** le plus grand idéal de $A \bowtie^f J$ qui est aussi un idéal de $A \times B$). Puisque $f^{-1}(J)$

et J sont des idéaux réguliers, alors J_1 est un idéal régulier de $A \times B$. Maintenant, le résultat découle immédiatement de [39, page 326]. ■

Maintenant nous allons donner des exemples qui montrent que, dans la proposition ci-dessous, l'hypothèse que J et $f^{-1}(J)$ sont des idéaux réguliers est essentiel.

Exemple 3.6.2 *[26] Soient A un domaine,K son corps des fractions, et B un sur-anneau de A, et soit $J = 0$. Alors, dans ce cas $A \bowtie^f J \cong A$ (Proposition 3.3.1), et donc $T(A \bowtie^f J)$ est isomorphe à K, or $T(A) \times T(B) = K \times K$.*

Exemple 3.6.3 *[26] Dans cet exemple, J est un idéal régulier non nul.*
Soit A un domaine et K son corps des fractions et soient $B := A[X]$, $J := (X)$,et $A \hookrightarrow A[X]$ l'injection naturel. Dans ce cas, d'après la proposition 3.3.1, on déduit que $A \bowtie^f J \cong A + XA[X]$, et donc $T(A \bowtie^f J) = K(X)$.On vérifie que $f^{-1}J = A \cap J = \{0\}$. Cependant, $T(A) \times T(B) = K \times K(X)$.

Dans cet exemple, $J \neq (0)$ et $f^{-1}(J) \neq (0)$ qui ne sont pas réguliers , Soient K un corps, $A := K^{(3)}, B := K^{(2)}$, et $J := \{0\} \times K$ où $K^{(n)} = K \times K.... \times K$ est l'anneau produit direct. Si f est la projection défini par $(a, b, c) \mapsto (a, b)$, on voit immédiatement que $A \bowtie^f J \cong K^{(4)}$ et par suite $T(A \bowtie^f J) \cong K^{(4)}$,or $T(A) \times T(B) = K^{(5)}$.

Lemme 3.6.4 *[26] Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, J un idéal de B, et $A \bowtie^f J$ l'amalgamation de A et B suivant J et respectant f.Le sous-anneau $A \times (f(A) + J)$ de $A \times B$, qui contient $A \bowtie^f J$ est entière sur $A \bowtie^f J$. Plus précisément, tout élément de $A \times (f(A) + J)$ est de degré au plus égal deux sur l'anneau $A \bowtie^f J$.*

Preuve: Soit $(\alpha, f(a)+j) \in A \times (f(A)+J)$ avec $\alpha, a \in A$ et $j \in J$. On Suppose que $(\alpha, f(a)+j) \notin A \bowtie^f J$, ainsi, en particulier, $\alpha \neq a$. Alors, l'élément $(\alpha, f(a)+j)$ est une racine du polynôme unitaire $(X - (\alpha, f(\alpha)))(X - (a, f(a) + j)) \in A \bowtie^f J[X]$.■

Proposition 3.6.5 *[26] Sous les mêmes notations du lemme 3.6.4, on suppose que J et $f^{-1}(J)$ sont des idéaux réguliers respectivement de B et A. Alors $\overline{A \bowtie^f J}$(i.e, la fermeture intégrale de $A \bowtie^f J$ dans son anneau total des fractions) coïncide avec $\overline{A} \times \overline{(f(A)+J)}$. En particulier, si f est un homomorphisme entière (**i.e** B est entière sur $f(A)$) , alors $\overline{A \bowtie^f J} = \overline{A} \times \overline{B}$.*

Preuve: Rappelons que, sous la présente hypothèse sur J et $f^{-1}(J)$, nous avons $T(A \bowtie^f J) = T(A \times B)$ qui est canoniquement isomorphe à $T(A) \times T(B)$ (Proposition 3.6.1). Par conséquent, il est facile de voir que $\overline{A \bowtie^f J} \subseteq \overline{A} \times \overline{(f(A)+J)}$. D'autre part, l'anneau $\overline{A} \times \overline{(f(A)+J)}$ est évidemment entière sur $A \bowtie^f J$, d'où la conclusion. ■

Remarque 3.6.6 *[26] sans hypothèse J et $f^{-1}(J)$ la preuve de la proposition 3.6.5 montre que la fermeture intégrale de $A \bowtie^f J$ dans $T(A) \times T(B)$ coïncide avec $\overline{A} \times \overline{f(A)+J}$*

Maintenant,nous allons étudier quand $A \bowtie^f J$ est entière sur $\Gamma(f) := \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$

Lemme 3.6.7 *[26] Soit $f :\longrightarrow B$,$J \subseteq B$, et $A \bowtie^f J$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) *$f(A) + J$ est entière sur $f(A)$;*

2) *$A \bowtie^f J$ est entière sur $\Gamma(f)$.*

En particulier, si f est un homomorphisme entière (i.e B est entière sur $f(A)$), alors $A \bowtie^f J$ est entier sur $\Gamma(f) = (\cong A)$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$.

Soit $(a, f(a)+j)$ un élément non nul de $A \bowtie^f J$. Ainsi,d'après la condition (i), il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, ..., a_n \in A$ tels que $(f(a)+j)^n + \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)(f(a)+j)^i = 0$. Par conséquent, il est facile de vérifier que $(a, f(a)+j)$ est une racine du polynôme unitaire $[X - (a, f(a))][X^n + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i, f(a_i)X^i)] \in \Gamma(f)[X]$.

Réciproquement, soit $f(a) + j \in f(A) + J$.d'après la condition (ii), $(a, f(a) + j)$ est entier sur $\Gamma(f)$, et donc l'équation de dépendance intégrale de $(a, f(a) + j)$ sur $\Gamma(f)$ nous donne l'équation de dépendance intégrale de $f(a) + j$ sur $f(A)$.
La dernière assertion est évidente .

CHAPITRE 4

LES EXTENSIONS TRIVIALES DES ANNEAUX ET LA CONJECTURE DE COSTA

S. Kabbaj,and N. Mahdou. Trivial Extensions of Local Rings and a Conjecture of Costa. Lecture Notes in Pure and Applied in Mathematics - Dekker 231 (2002) 301-311

4.1 Définitions et résultats de base

Définition 4.1.1 *Soient R un anneau commutatif et M un R-module. On dit que M est n-présenté s'il existe une suite exacte :*

$$F_n \xrightarrow{u_n} F_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \dots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{u_0} M \longrightarrow 0$$

Où F_i est un R-module libre de base finie pour tout $i = 1...n$.
On pose $\lambda_R(M) = sup\{n \mid M$ est n-présenté $\}$. Si M n'est pas de type fini on pose $\lambda_R(M) = -1$. Noter que $\lambda_R(M) \geq n$ si et seulement si M est n-présenté.

Définition 4.1.2 *Soit R un anneau commutatif et M un R-module. On dit que la dimension projectif de M est inférieure ou égale à n s'il existe une résolution projective de la forme :*

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{u_n} P_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \dots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{u_0} M \longrightarrow 0$$

Où tous les P_i sont des R-modules projectifs. On note $pd_R(M) \leq n$.
- Si une telle résolution n'existe pas, on dit que M est de dimension projective infinie et on note $pd_R(M) = \infty$.
- Si une telle résolution existe et n est le plus petit entier qui vérifie une telle résolution, on dit que la dimension projective de M est n. On note $pd_R(M) = n$.

Définition 4.1.3 *Soit R un anneau commutatif.*

1. *Pour tout entier $n \geq 0$ on défini le n-dimension de R par n-$dim(R) = sup\{pd_R(M) \mid M$ est un R-module n-présenté$\}$, où $pd_R(M)$ est la dimension projective de M.*
2. *On appelle dimension globale de R l'entier noté $gldim(R)$ défini par $gldim(R) = sup\{pd_R(M) \mid M$ un R-module $\} = sup\{pd_R(R/I) \mid I$ est un idéal de $R\}$.*

Définition 4.1.4 ([6],Définition 1.2) *Soient n, d deux entiers. Un anneau R est dit (n, d)-anneau si n-$dim(R) \leq d$. Autrement, R est un (n, d)-anneau si chaque R-module n-présenté a une dimension projective inférieure ou égale à d, ie, si $\lambda_R(M) \geq n$ alors, $pd_R(M) \leq n$. Si R est un domaine et (n, d)-anneau, on dit que R est un (n, d)-domaine.*

Théoréme 4.1.5 ([6], Théorème 1.3) *Soit R un anneau commutatif. Alors :*

1. *R est un $(0, 0)$-anneau si et seulement si R est une somme directe finie des corps.*
2. *R est un $(0, 1)$-anneau si et seulement si R est héréditaire.*
3. *R est un $(0, d)$-anneau si et seulement si $gldim(R) \leq d$.*
4. *R est un $(1, 0)$-anneau si et seulement si R est régulier au sen de Von Neumann.*

5. *R est un $(1,1)$-anneau si et seulement si R est semi-héréditaire.*

6. *Pour tout $n \geq 0$. R est un $(n,0)$-domaine si et seulement si R est un corps.*

7. *R est un $(0,1)$-domaine si et seulement si R un domaine de Dedekind.*

8. *R est un $(1,1)$-domaine si et seulement si R est un domaine de $Prüfer$.*

9. *Si R est un anneau Noethérien,alors R est un (n,d)-anneau si et seulement si $gldim(R) \leq d$.*

Pour plus de détails sur les (n,d)-anneau voir [6, 10, 11, 14, 16, 32, 34]

Dans [6], Costa pose la question sur l'existence des exemples des (n,d)-anneaux qui ne sont pas des $(n,d-1)$-anneaux ni des $(n-1,d)$-anneaux pour tous entiers positives n et d. La réponse est affirmative pour les $(0,d)$-anneaux et les $(1,d)$-anneaux pour tout entier $d \geq 0$ [6]. Par suite dans [6], Costa donne des exemples des $(2,1)$-domaines qui ne sont pas $(2,0)$-domaine ni $(1,1)$-domaine, et dans [15] Costa et Kabbaj donnent des exemples des $(2,2)$-domaine qui ne sont pas des $(1,2)$-domaines ni des $(2,1)$-domaine. Puis dans [34], N.Mahdou construit une classe des $(2,d)$-anneaux qui ne sont pas des $(2,d-1)$-anneaux ni des $(1,d)$-anneaux pour tout entier $d \geq 1$. L'objectif de ce chapitre est de donner un exemple des $(3,d)$-anneaux qui ne sont pas des $(3,d-1)$-anneaux ni des $(2,d)$-anneaux pour tout entier $d \geq 0$.

4.2 Résultats et exemples

Théoréme 4.2.1 *Soit (A,M) un anneau local et soit $R = A \propto A/M$ l'extension triviale de A par A/M. Alors :*
1) R est un $(3,0)$-anneau à condition que M n'est pas de type fini.
2) R n'est pas un $(2,d)$-anneau , pour tout entier $d \geq 0$, à condition que M contient un élément régulier.

La preuve de ce théorème se base sur le lemme suivant :

Lemme 4.2.2 *Soit A un anneau, I un idéal de A, et R l'extension triviale de A par A/I. Alors $pd_R(I \propto A/I)$ et $pd_R(0 \propto A/I)$ sont infini.*

Preuve: considérons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow I \propto A/I \longrightarrow R \longrightarrow R/(I \propto A/I) \longrightarrow 0$$

On montre que $R/(I \propto A/I)$ n'est pas projectif. Sinon. Alors la suite est scindée. Par conséquent, $I \propto A/I$ est engendré par un élément idempotent. $(a, e) = (a, e)(a, e) = (a^2, 0)$. D'où $I \propto A/I = R(a, 0) = Aa \propto 0$, contradiction (car $A/I \neq 0$).On déduit de la suite au dessus que

$$pd_R(R/(I \propto A/I) = 1 + pdR(I \propto A/I) \tag{4.1}$$

Soit $(x_i)_{i\in\triangle}$ une famille des générateurs de I soit $R^{(\triangle)}$ un R-module libre. Considérons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow Ker(u) \longrightarrow R^{(\triangle)} \oplus R \xrightarrow{u} I \propto A/I \longrightarrow 0$$

où $u((a_i, e_i)_{i\in\triangle}, (a_0, e_0)) = \sum\limits_{i\in\triangle}(a_i, e_i)(x_i, 0) + (a_0, e_0)(0, 1) = (\sum\limits_{i\in\triangle} a_i x_i, a_0)$. avec $x_i \in I$ pour tout $i \in \triangle$. D'où :

$$Ker(u) = (U \propto (A/I)^{(\triangle)}) \oplus (I \propto A/I)$$

Où $U = \{(a_i)_{i\in\triangle} \in A^{(\triangle)} \mid \sum\limits_{i\in\triangle} a_i x_i = 0\}$. D'où, on a l'isomorphisme des R-modules $I \propto A/I \cong (R^{(\triangle)}/(U \propto (A/I)^{(\triangle)})) \oplus (R/(I \propto A/I))$. Par conséquent

$$pd_R(R/(I \propto A/I)) \leq pd_R(I \propto A/I) \tag{4.2}$$

Clairement, de (4.1) et (4.2) $pdR(I \propto A/I)$ est forcement infinie.
Maintenant soit la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow I \propto A/I \longrightarrow R \xrightarrow{v} 0 \propto A/I \longrightarrow 0$$

Où $v(a, e) = (a, e)(0, 1) = (0, a)$, il est facile de remarquer que $pd_R(0 \propto A/I) = \infty$.
Preuve du théorème : 1) Supposons M n'est pas de type fini. Soit $H_0(\neq 0)$ un R-module 3-présenté et soit $(z_i)_{i=1\ldots n}$ une famille génératrice minimale de H_0 (pour un certain entier positif n). Considérons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H_1 := ker(u_0) \longrightarrow R^n \xrightarrow{u_0} H_0 \longrightarrow 0$$

Où $u_0((r_i)_{i=1...n}) = \sum_{i=1}^{n} r_i z_i$. Au cours de ce preuve on identifié R^n avec $A^n \propto (A/M)^n$. Notre but est de monter que $H_1 = 0$, Sinon. Par la suite exacte au dessus, H_1 est un R-module 2-présenté. Soit $(x_i, y_i)_{i=1...m}$ est une famille génératrice minimale de H_1 (pour un certain entier positif m). La minimalité de $(z_i)_{i=1...n}$ implique que $H_1 \subseteq M^n \propto (A/M)^n$, donc $x_i \in M^n$ (et $y_i \in (A/M)^n$) $pouri = 1...m$. Considérons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H_2 := ker(u_1) \longrightarrow R^m \xrightarrow{u_1} H_1 \longrightarrow 0$$

Où $u_1((a_i, e_i)_i) = \sum_{i=1}^{m} (a_i, e_i)(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{m} (a_i x_i, a_i y_i)$, car $x_i \in M^n$ pour tout i. Alors, $H_2 = U \propto (A/M)^m$, où $U = \{(a_i)_{i=1...m} \in A^m \mid \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{m} a_i y_i = 0\}$. Par la suite exacte au dessus, H_2 est un R-module de présentation finie (donc de type fini), ce qui donne U est un A-module de type fini. La minimalité de $(x_i, y_i)_{i=1...m}$ donne $U \subseteq M^m$. Soit $(t_i)_{i=1...p}$ une famille génératrice de U et soit $(f_i)_{i=1+p...p+m}$ une base du (A/M)-espace vectoriel $A/M)^m$. Considérons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H_3 := ker(u_2) \longrightarrow R^{p+m} \xrightarrow{u_2} H_2 \longrightarrow 0$$

Où $u_2((a_i, e_i)_i) = \sum_{i=1}^{p} (a_i, e_i)(t_i, 0) + \sum_{i=p+1}^{p+m} (a_i, e_i)(0, f_i) = (\sum_{i=1}^{p} a_i t_i, \sum_{i=p+1}^{p+m} a_i f_i)$. Car $t_i \in M^m$ pour tout $i = 1...p$ et $(f_i)_i$ est une base du A/M-espace vectoriel $(A/M)^m$. Par conséquent $H_3 \cong (V \propto (A/M)^p) \oplus (M^m \propto (A/M)^m)$, tel que $V = \{(a_i)_{i=1...p} \in A^p \mid \sum_{i=1}^{p} a_i t_i = 0\}$. Par la suite exacte au dessus, H_3 est de type fini. Donc $M \propto A/M$ est un idéal de type fini, et par conséquent M est de type fini, Contradiction.

On a montré donc que $H_1 = 0$, alors H_0 est R-module libre. D'où, tout R-module 3-présenté est projectif.

2) supposons que M contient un élément régulier m. On doit montrer que R n'est pas un $(2, d)$-anneau, pour tout entier $d \geq 0$, Soit $J = R(m, 0)$ et considérons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow ker(v) \longrightarrow R \xrightarrow{v} J \longrightarrow 0$$

où $v(a,e) = (a,e)(m,0) = (am,0)$. clairement, $Ker(v) = 0 \propto (A/M) = R(0,1)$, car m est un élément régulier. Donc, $Ker(v)$ est un idéal de type fini et par conséquent J est un idéal de présentation finie. D'autre part, $pd_R(Ker(v)) = pd_R(0 \propto A/M) = \infty$ du lemme . $pd_R(J) = \infty$.
Finalement, soit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow R \longrightarrow R/J \longrightarrow 0$$

R/J est un R-module 2-présenté avec une dimension projective infinie (i.e., R n'est pas un $(2,d)$-anneau, pour tout entier $d \geq 0$).

Théoréme 4.2.3 ([34], Théorème 2.4) *Une somme directe finie* $\oplus_{1 \leq i \leq n} A_i$ *est un* (n,d)*-anneau si et seulement si tout* A_i *est un* (n,d)*-anneau.*

Exemple 4.2.4 *Soient d un entier positif et B un anneau Noethérien de dimension globale d. Soient (A_0, M) un domaine de valuation non-discrète et $A = A_0 \propto A_0/M$. Soit $R = A \times B$ le produit directe de A et B. Alors R est un $(3,d)$-anneau qui n'est pas un $(3,d-1)$-anneau ni un $(2,d)$-anneau, pour un d arbitraire.*

Preuve: Du théorème 2.2.1, A est un $(3,0)$-anneau (aussi dit anneau 3-régulier au sens de Von Neumann) qui n'est pas $(2,d')$-anneau pour tout entier positif d'. De plus, R est un $(3,d)$-anneau de [[34], Théorème 2.4] car A et B sont des $(3,d)$-anneau [Par les théorème gnomonic de Costa [6]]. D'autre part, R n'est pas un $(2,d)$-anneau d'après [[34], Théorème 2.4] (car A n'est pas un $(2,d)$-anneau. Finalement, On montre que R n'est pas un $(3,d-1)$-anneau. Sinon. Alors B est un $(3,d)$-anneau de [[34], Théorème 2.4]. Donc, de [[6], Théorème 2.4] B est un $(0.d-1)$-anneau car B est Noethérien (i.e., 0-cohérent). Ce qui donne $gldim(B) \leq d-1$.Contradiction.

4.3 Discussion

Cette section consiste en une brève discussion sur les étendues et les limites de nos résultats afin de voir que le théorème 2.2.1 et donc l'exemple 2.2.4 sont les meilleurs résultats qu'on peut trouver pour l'extension triviale des anneaux locaux.

Exemple 4.3.1 *Soit K un corps et soit $A = K[[X]] = K + M$, Où $M = XA$. On montre que l'extension trivial R de A par $A/M(= K)$ n'est pas un (n, d)-anneau pour tout entiers $n, d \geq 0$.*

Preuve: D'abord on montre que R est Noethérien. Soit $J = I \propto E$ un idéal propre de R, où I est idéal de A et E un sous module de A/M (i.e., $E = 0$ ou $E = A/M$). Comme A est un anneau de valuation Noethérien, $I = Aa$ pour un certain $a \in M$. Soit $f \in A$ tel que $(a, \bar{f}) \in J$. Supposons $J \neq R(a, \bar{f})$. Soit $(c, \bar{g}) \in J \setminus R(a, \bar{f})$, où $c, g \in A$, et soit $c = \lambda a$, pour un certain $\lambda \in A$. Alors, $(0, \bar{g} - \lambda \bar{f}) = (c, \bar{g}) - (a, \bar{f})(\lambda, 0) \in J \setminus R(a, \bar{f})$, donc on peut poser $c = 0$ et $\bar{g} \neq 0$.i.e., g est inversible dans A. Par conséquent, $(0, \bar{1}) = (0, \bar{g})(g^{-1}, \bar{0}) \in J$ et $(a, \bar{0}) = (a, \bar{f}) - (0, \bar{g})(g^{-1}f, \bar{0}) \in J$. D'où, $J = (a, \bar{0})R + (0, \bar{1})R$, donc J est un idéal de type fini.
Maintenant, du lemme 2.2.2, $pd_R(0 \propto A/M) = pd_R R(0, 1) = \infty$ donc $gldiim(R) = \infty$. Alors l'application de [[6], Théorème 1.3(ix)] complète le preuve.

Exemple 4.3.2 *Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension infinie. Soit $A = K \propto E$ l'extension trivial de K par E. L'anneau A est un $(2, 0)$-anneau local d'après [[34], Théorème 3.4]. Clairement, leur idéal maximal $M = 0 \propto E$ n'est pas de type fini et contient entièrement des diviseurs de zéros car $(0, e)M = 0$, pour tout $e \in E$. Soit $R = A \propto (A/M)$ l'extension trivial de A par $A/M(\cong K)$. Alors R est un $(2, 0)$-anneau.*

Preuve: Soit H un R-module 2-présenté et soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille génératrice minimale de H. Notre objectif est de montrer que H est un R-module projectif. Considérons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow ker(u) \longrightarrow R^n \xrightarrow{u} H \longrightarrow 0$$

où $u((r_i)_{i=1...n} = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$. Donc, $Ker(u)$ est un R-module de présentation finie avec $Ker(u) = U \propto E'$, où U est sous module de A^n et E' est un K sous espace vectoriel de K^n. On montre que $ker(u) = 0$. Sinon. La minimalité de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ donne

$$Ker(u) = U \propto E' \subseteq (M \propto (A/M))R^n = (M \propto A/M)^n$$

Car R est local d'idéal maximal $M \propto A/M$. Soit $(y_i, f_i)_{i=1...p}$ une famille génératrice minimale de $Ker(u)$, où $y_i \in M^n$ et $f_i \in K^n$. Considérons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow ker(v) \longrightarrow R^p \xrightarrow{v} Ker(u) = (U \propto E') \longrightarrow 0$$

où $v(a_i, e_i)_{i=1...p} = \sum_{i=1}^{p} (a_i, e_i)(y_i, f_i) = (\sum_{i=1}^{p} a_i y_i, \sum_{i=1}^{p} a_i f_i)$. De même, la minimalité de $(y_i, f_i)_{i=1...p}$ donne $Ker(v) \subseteq (M \propto A/M)^p$; de plus, $Ker(v) = V \propto (A/M)^p$, où $V = \{(a_i)_{i=1...p} \in A^p \mid \sum_{i=1}^{p} a_i y_i = 0\} (\subseteq M^p)$. Par la suite exacte au dessus, $Ker(v)$ est un R-module de type fini. Par conséquent V est un A-module de type fini [[19], Théorème 25.1]. Maintenant par la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow A^p \xrightarrow{w} U \longrightarrow 0$$

où $w((a_i)_{i=1...p} = \sum_{i=1}^{p} a_i y_i$, U est un A-module de présentation finie (car U est engendré par $(y_i)_{i=1...p}$). U est un sous module de A^n et A est un $(2, 0)$-anneau, alors U est projectif. De plus, A est local implique que U est un A-module libre de base fini. D'autre part, $U \subseteq M^n = (0 \propto E)^n$, d'où $(0, e)U = 0$ pour tout $e \in E$, la contradiction désiré.

CHAPITRE 5

LES (A)-ANNEAUX FORTS

N. Mahdou AND A. Rahmouni Hassani. On strong (A)-rings, Mediterranean Journal of Mathematics · January 2012.

5.1 Introduction

Au cours de ce chapitre, tous les anneaux sont considérées commutatifs et unitaires. Soit R un anneau commutatif et $Q(R)$ l'anneau total des fraction de R, i.e., $Q(R) = S^{-1}R$, où S est l'ensemble des éléments réguliers de R. Un anneau R est dit anneau total des fraction si $Q(R) = R$.
Un théorème important dans la théorie des anneaux commutatifs est que si I est un idéal d'un anneau Noethérien entièrement engendré par des diviseurs de zéros, alors l'annulateur de I est non nul[[17], p. 56]. Ce résultat n'est pas vrai pour quelques anneaux non Noethérien, même si l'idéal I est de type fini. Huckaba et Keller ont introduit la définition suivante : un anneau commutatif R vérifié la propriété(A) si tout idéal de type fini de R engendré par des diviseurs de zéros possède un annulateur non nul[18]. La propriété(A) a été initialement introduite par Quentel[43] (

La propriété(A) est la condition(C) de Quentel). Dans ce chapitre, Nous enquêtons sur une classe particulière d'anneaux satisfaisant la propriété (A) que nous appelons anneaux satisfaisant la propriété(A)-forte.

Définition 5.1.1 *Soit R un anneau commutatif. Nous définissons la propriété (A)-forte comme suit : " tout idéal de type fini engendré par un nombre fini de diviseur de zéro admet un annulateur non nul". Autrement; soit I un idéal de R, s'il existe $a_i \in R$ tel que $I = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ et $a_i \in Z(R)$ pour tout i, alors il existe $0 \neq a \in R$ tel que $aI = 0$.*
Clairement, tout idéal vérifiant la propriété (A)-forte vérifie la propriété(A).

Exemple 5.1.2 *Il est clair que l'anneau $R = K[X]/(X^2)$, avec K un corps et X une indéterminée sur K,vérifie la propriété (A)-forte.*
en effet :
l'anneau R admet un seul idéal propre c'est l'idéal principal $I =< X >$ engendré par X. Comme $X.X = X^2 = 0$ alors X est un diviseur de zéro dans R, et $XI =< X^2 >= 0$ implique que $X \in Ann(I)$.

On donne un exemple pour montrer qu'il y a des anneaux qui sont des A-anneau sans être des A-anneau fort.

Exemple 5.1.3 *soit $D = K[X]$ l'anneau des polynômes sur le corps K et $R := D \times D$. alors :*
1) R est (A)-anneau.
2) R n'est pas un (A)-anneau fort.
Preuve: *1) $R := D \times D$ est un (A)-anneau par [[4], Proposition 1.3] car D un (A)-anneau.*
2) On montre que $R := D \times D$ n'est pas un (A)-anneau fort. Sinon, soit $I = R(X,X) = XD \times XD = R(X,0) + R(0,X)$. On pose $a_1 = (X,0)$ et $a_2 = (0,X)$; alors $a_1a_2 = 0$ et donc il existe $0_R \neq (\alpha,\beta) \in R(:= D\times D)$ tel que $(0,0) = I(\alpha,\beta) = (\alpha XD) \times (\beta XD)$. Mais comme D est un domaine, $\alpha XD = 0$ et $\beta XD = 0$ implique

que $\alpha = \beta = 0$, absurde. Par conséquent,$R := D \times D$ n'est pas un (A)-anneau fort.

5.2 Transfert de la propriété (A)-forte aux extensions triviales

Théoréme 5.2.1 *Soient B un anneau commutatif, E un B-module libre et soit $R = B \propto E$. Alors,*

1) B est un A-anneau fort si et seulement si R est un A-anneau fort.

2) B est un A-anneau si et seulement si R est un A-anneau.

Preuve: 1) Supposons que B est un A-anneau fort et soit $J = \sum_{i=1}^{n} R(a_i, b_i)$ est un idéal de type fini de R tel que $(a_i, b_i) \in Z(R)$ pour tout i. Deux cas sont possibles :
cas 1 : $a_i = 0$ pour tout i. Alors pour tout $0 \neq e \in E$, $(0, e)J = 0$.
cas 2 : Supposons qu'il existe k tel que $a_k \neq 0$ et posons $I = \sum_{=1}^{n} Ba_i$. On montre que a_i est un diviseur de zéros pour tout i. Sinon. Alors il existe j tel que a_j est un élément régulier. Maintenant, Soit $0_R \neq (\alpha_j, \beta_j) \in R$ tel que $(\alpha_j, \beta_j)(a_i, b_i) = 0$, par conséquent $\alpha_j a_j = 0$ et $\alpha_j b_j + a_j \beta_j = 0$ (car $(a_j, b_j) \in Z(R)$). Comme a_j est un élément régulier alors, $\alpha_j = 0$ et $a_j \beta_j = 0$. Mais, $\beta_j \in E$ qui est un B-module libre, d'où $\beta_j = \sum_{l=1}^{n} d_l c_l$ où $C = (c_i)_{i \in L}$ est une base de E et $d_l \in B$ pour tout $l = 1...n$. Donc, $a_j d_l = 0$ donne $d_l = 0$ pour tout $l = 1...n$(car a_j est un élément régulier) ; par conséquent $\beta_j = 0$ et donc $(\alpha_j, \beta_j) = 0_R$, contradiction car $(\alpha_j, \beta_j) \neq 0$. D'où $a_i \in Z(B)$ pour tout $i = 1...n$.
Donc, il existe un élément $0 \neq a \in B$ tel que $aI = 0$ car B est un (A)-fort anneau. Soit e un élément de E tel que $ae \neq 0$ et soit $b = (0, ae) \in R - \{0\}$. D'où $bJ = (0, ae) \sum_{i=1}^{n} R(a_i, b_i) = \sum_{i=1}^{n} R(0, ae)(a_i, b_i) = (0, 0)$ car $aI = 0$. Par conséquent, J a un annulateur non nul et R est un (A)-anneau fort.
Inversement, Soit $I = \sum_{i=1}^{n} Ba_i$ un idéal de type fini de B tel que $a_i \in Z(B)$ pour tout $i = 1...n$. D'où, il existe $0 \neq b_i \in B$ tel que $b_i a_i = 0$. Soit $J = \sum_{i=1}^{n} R(a_i, 0)$ un idéal de type fini de R. On a $(b_i, 0)(a_i, 0) = (0, 0)$, donc il existe $0_R \neq (a, e) \in R$

tel que $(a,e)J = 0_R$ car R est un (A)-anneau fort ; ce qui donne $aa_i = 0$ et $ea_i = 0$ pour tout i. Deux cas sont donc possible :

Cas 1 : $a \neq 0$, alors $aI = 0$.

Cas 2 : $a = 0$. Dans ce cas , $eI = 0$ et $e \neq 0$ (car $(0,e) \neq (0,0)$). D'autre part, $e \in E$ qui est un B-module libre, alors e s'écrit sous la forme $e = \sum_{i=1}^{n} f_i c_i$ où $C = (c_i)_{i \in L}$ est une base de E et $f_i \in B$ pour tout $i = 1...n$. Par conséquent, $0 = eI = \sum_{i=1}^{n} (f_i I) c_i$ et donc $f_i I = 0$ pour tout $i = 1...n$. Maintenant, soit $j \in \{1...n\}$ tel que $f_j \neq 0$ (possible car $e = \sum_{i=1}^{n} f_i c_i \neq 0$). D'où $f_j I = 0$.

Dans tous les cas I admet un annulateur non nul. Donc, B est un (A)-anneau fort.

2) Supposons que B est (A)-anneau et soit $J = \sum_{i=1}^{n} R(a_i, b_i) \subseteq Z(R)$ un idéal de type fini de R. Deux cas sont possible :

Cas 1 : $a_i = 0$ pour tout i. Donc, pour tout $0 \neq e \in E$, on a $(0,e)J = (0,e)\sum_{i=1}^{n} R(0,b_i) = (0,0)$.

Cas 2 : Il existe i tel que $a_i \neq 0$. Soit $I = \sum_{i=1}^{n} Ba_i$. On veut montrer que $I \subseteq Z(B)$. Soit $a \in I$, on a $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \in I$ pour des certains $\alpha_i \in B$. D'où $(a,e) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i, 0)(a_i, b_i) \in J \subseteq Z(R)$. Par conséquent, il existe un élément non nul $(b,f) \in R$ tel que $(0,0) = (b,f)(a,e) = (ab, be + af)$. Deux cas sont possible :

Cas 1 : $b \neq 0$. Dans ce cas $ba = 0$.

Cas 2 : $b = 0$. Donc $f \neq 0$ (car $(b,f) \neq (0,0)$) et $af = 0$. Mais, $f \in E$ qui est un B-module libre, d'où $f = \sum_{i=1}^{n} f_i c_i$ où $C = (c_i)_{i \in L}$ est une base de E et $f_i \in B$ pour tout $i = 1...n$. Ce qui implique que $af_i = 0$ pour tout $i = 1...n$. Maintenant, soit $j \in \{1...n\}$ tel que $f_j \neq 0$ (possible car $f = \sum_{i=1}^{n} f_i c_i \neq 0$). D'où, $af_j = 0$ et donc $I \subseteq Z(B)$. Par conséquent, il existe un élément non nul $d \in B$ tel que $0 = dI$, car B est un (A)-anneau. Soit $e \in E$ tel que $de \neq 0$, et soit $b = (0, de) \in R - \{0\}$. Donc, $bJ = (0.de)\sum_{i=1}^{n} R(a_i, b_i) = (0,0)$ car $dI = 0$. D'où, J admet un annulateur non nul et donc R est (A)-anneau.

Inversement, Soit $I = \sum_{i=1}^{n} Ba_i \subseteq Z(B)$ un idéal de type fini de B. Soit $J = \sum_{i=1}^{n} R(a_i, 0)$. On veut montrer que $J \subseteq Z(R)$. Soit $(b,f) \in J$, on a $(b,f) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i)(a_i, 0) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i)$ pour un certain $(\alpha_i, \beta_i) \in R$. Deux cas sont possible :

Cas 1 : $b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i (\in I) \neq 0$. Comme $I \subseteq Z(B)$, il existe un élément $0 \neq a \in B$ tel que $a(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i) = 0$. Soit $e \in E$ tel que $ae \neq 0$. Donc $(b, f)(0, ae) = [\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i)(a_i, 0)](0, ae) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i)(0, ae) = (0, 0)$.

Cas 2 : $b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$. D'où $(0, f)(0, e) = (0.0)$ pour tout $0 \neq e \in E$ et donc $(b, f) \in Z(R)$.

Dans tout les cas on a $(b, f) \in Z(R)$, ce qui donne $J \subseteq Z(R)$.

Comme R est un (A)-anneau, alors $(a, e)J = (a, e)(\sum_{i=1}^{n} Ba_i, \sum_{i=1}^{n} Ea_i) = (0, 0)$ pour un certain $(a, e) \in R$. On obtient $a \sum_{i=1}^{n} Ba_i = 0$ et $a \sum_{i=1}^{n} Ea_i + e \sum_{i=1}^{n} Ba_i = 0$, ce qui donne $aI = 0$ et $aIE + eI = 0$. Deux cas sont possible :

Cas 1 : $= a \neq 0$. Alors I admet un annulateur non nul.

Cas 2 : $a = 0$. Dans ce cas, $eI = 0$ et $e \neq 0$ (car $(a, e) \neq (0, 0)$). D'autre part, $e \in E$ qui un B-module libre, donc e s'écrit sous la forme $e = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$ où $C = (c_i)_{i \in L}$ est une base de E et $b_i \in B$ pour tout $i = 1...n$. Par conséquent, $0 = eI = \sum_{i=1}^{n} (b_i I) c_i$ et donc $b_i I = 0$ pour tout $i = 1...n$. Maintenant soit $j \in \{1...n\}$ tel que $b_j \neq 0$(possible car $e = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i \neq 0$). D'où, $b_j I = 0$ et $b_j \neq 0$. Par conséquent, I admet un annulateur non nul et donc B est (A)-anneau.

Exemple 5.2.2 *Soit B un (A)-anneau qui n'est pas un (A)-anneau fort (Exemple 3.1.3). Soit $R = B \propto E$, où E est un B-module libre. Alors,*

1) R n'est pas un (A)-anneau fort d'après le théorème 3.2.1(1).

2) R est un (A)-anneau d'après le théorème 3.2.1(2).

Maintenant, on traite le transfert de la propriété (A)-forte (res. la propriété (A)) à l'extension triviale d'un anneau par son anneau total des fractions.

Théoréme 5.2.3 *Soit B un anneau et $Q(B)$ leur anneau total des fractions. Alors,*

1. *Soit $R = B \propto Q(B)$, l'extension trivial de B par $Q(B)$. Alors,*
   a) *R vérifie la propriété (A)-forte si et seulement si B la vérifie aussi.*
   b) *R vérifie la propriété (A) si et seulement B la vérifie aussi.*

2. *Soit B un domaine, $K = Q(B)$, E est un K-espace vectoriel, et soit $R = B \propto E$ l'extension triviale de B par E. Alors R vérifie la propriété (A)-forte. En particulier R est un (A)-anneau.*

3. *Soit E un B-module et soit $R = B \propto E$ l'extension triviale de B par E tel que $S^{-1}E = S^{-1}B$ pour une certaine partie multiplicative S de B constitue des éléments réguliers. Alors,*

   ***a)** R vérifie la propriété (A)-forte si et seulement si B la vérifie aussi.*

   ***b)** R vérifie la propriété (A) si et seulement B la vérifie aussi.*

Avant la démonstration du théorème on doit présenter et démontrer les lemmes suivants :

Lemme 5.2.4 *Soit B un anneau et soit S une partie multiplicative de B consisté entièrement par des éléments réguliers. Alors B vérifie la propriété (A)-forte si et seulement si $S^{-1}B$ la vérifie.*

Preuve: Supposons que B est un (A)-anneau fort et soit $T = S^{-1}B$. Soit $J = \sum_{i=1}^{n} Ta_ib_i^{-1}$ un idéal de type fini de T tel que $a_ib_i^{-1} \in Z(T)$. Soit $I = \sum_{i=1}^{n} Ba_i \subseteq J$. D'où, il existe un élément $0 \neq c_id_i^{-1} \in T$ tel que $a_ib_i^{-1}c_id_i^{-1} = 0$ (car $a_ib_i^{-1} \in Z(T)$) ; ce qui donne $c_ia_i = 0$ et donc $a_i \in Z(B)$. Comme B est un (A)-anneau fort, il existe un élément $0 \neq b \in B$ tel que $bI = 0$. Par conséquent, $bJ = 0$ et donc T est un (A)-anneau fort.
Inversement, Supposons que T est un (A)-anneau fort et soit $I = \sum_{i=1}^{n} Ba_i$ un idéal de type fini de B tel que $a_i \in Z(B)$. Alors, Notons que $J = \sum_{i=1}^{n} Ta_i$ est un idéal de type fini de T tel que $a_i \in Z(T)$. Comme T est un (A)-anneau fort, il existe un élément $ab^{-1} \in T$ tel que $ab^{-1}J = 0$. Par conséquent, $a\sum_{i=1}^{n} Ba_i = 0$ et d'où B est un (A)-anneau fort.

Lemme 5.2.5 *Soient D un domaine, E un D-module sans torsion et soit $R = D \propto E$ l'extension triviale de D par E. Alors R est un (A)-anneau fort. En particulier,* *il est un (A)-anneau.*

Preuve: Soit $J = \sum_{i=1}^{n} R(a_i, e_i)$ un idéal propre de type fini de R tel que $(a_i, e_i) \in Z(R)$. On montre que $a_i = 0$ pour tout $i = 1...n$. Sinon. Il existe $i \in \{1...n\}$ tel que $a_i \neq 0$ et il existe $(b_i, f_i) \in R - (0,0)$ tel que $(0,0) = (a_i, e_i) = (a_i b_i, a_i f_i + e_i b_i)$. D'où $a_i b_i = 0$ et $a_i f_i + e_i b_i = 0$ ce qui donne $b_i = 0$ (car $a_i \neq 0$ et D est un domaine) et $f_i = 0$ (car $a_i f_i = 0$, $a_i \neq 0$ et E est un D-module sans torsion). Contradiction, car $(b_i, f_i) \neq (0,0)$. D'où, $a_i = 0$ pour tout $i = 1...n$.
Donc, $J \subseteq 0 \propto E$. Par conséquent, $(0,e)J \subseteq (0,e)(0 \propto E) = (0,0)$ pour tout $0 \neq e \in E$ et donc R est un (A)-anneau fort. En particulier, R est un (A)-anneau.

Lemme 5.2.6 ([4], Proposition 2.14) *Soit B un anneau et soit S une partie multiplicative de B consisté par des éléments réguliers. Alors B vérifie la propriété (A) si et seulement si $S^{-1}B$ la vérifie.*

Preuve du théorème : 1-a) Soit $R = B \propto Q(B)$ et soit $S = R \setminus Z(R)$. Donc, R vérifie la propriété (A) si et seulement si $S^{-1}R$ la vérifie, d'après le lemme 5.2.4 car $S = R \setminus Z(R)$. D'où, R est vérifie la propriété (A) si et seulement si $Q(B) \propto Q(B)$ la vérifie. D'autre part, $Q(B) \propto Q(B)$ vérifie la propriété (A) si et seulement si $Q(B)$ la vérifie du théorème 5.2.1(1). Par conséquent, R vérifie la propriété (A) fort si et seulement si B la vérifie, d'après le lemme 5.2.4.
1-b) On sait que $R = B \propto Q(B)$ vérifie la propriété (A) si et seulement si $S^{-1}R$ la vérifie, d'après le lemme 5.2.6 car $S = R \setminus Z(R)$. D'où R vérifie la propriété (A) si et seulement si $Q(B) \propto Q(B)$ la vérifie. D'autre part, $Q(B) \propto Q(B)$ vérifie la propriété (A) si et seulement si $Q(B)$ la vérifie, d'après le théorème 5.2.1(2). Par conséquent, R vérifie la propriété (A) si et seulement si B la vérifie, d'après le lemme 5.2.6.
2) On sait que $R = B \propto E$ vérifie la propriété (A) forte (En particulier, la propriété (A)) si et seulement si $S^{-1}R$ la vérifie. D'où R vérifie la propriété (A) forte (En particulier, la propriété (A)) si et seulement si $K \propto E$ la vérifie. D'autre part, $K \propto E$ vérifie la propriété (A) forte (En particulier, la propriété (A)), d'après le

lemme 5.2.5. Par conséquent, R est un (A)-anneau fort (En particulier, R est un (A)-anneau).

3-a) L'anneau $R = B \propto E$ vérifie la propriété (A) forte si et seulement si $S^{-1}R$ la vérifie. D'où R vérifie la propriété (A) forte si et seulement si $S^{-1}B \propto S^{-1}B(=S^{-1}B \propto S^{-1}E = S^{-1}R)$ la vérifie. D'autre part,$S^{-1}B \propto S^{-1}B$ vérifie la propriété (A) forte si et seulement si $S^{-1}B$ la vérifie du théorème 5.2.1(1). Par conséquent, R vérifié la propriété (A) forte si et seulement si B la vérifie, d'après le lemme 5.2.4.

3-b) L'anneau $R = B \propto E$ vérifie la propriété (A) si et seulement si $S^{-1}R$ la vérifie. D'où R vérifie la propriété (A) si et seulement si $S^{-1}B \propto S^{-1}B(=S^{-1}B \propto S^{-1}E = S^{-1}R)$ la vérifie. D'autre part,$S^{-1}B \propto S^{-1}B$ vérifie la propriété (A) si et seulement si $S^{-1}B$ la vérifie du théorème 5.2.1(2). Par conséquent, R vérifié la propriété (A) si et seulement si B la vérifie, d'après le lemme 5.2.6.

Maintenant, on traite l'image homomorphe d'un (A)-anneau (resp. d'un (A)-anneau fort). Premièrement, Soit B un anneau commutatif qui est un (A)-anneau (resp. un (A)-anneau fort) et soit I un idéal de B. Alors, B/I n'est pas en général un (A)-anneau (resp. un (A)-anneau fort) par l'exemple suivant :

Exemple 5.2.7 *Soient R un anneau qui n'est pas un (A)-anneau (en particulier n'est pas un (A)-anneau fort), $S = R[X]$ l'anneau des polynômes sur R et soit $I = (X^n) = SX^n$ l'idéal principal de S. Alors,*

1) *S est un (A)-anneau fort (en particulier, un (A)-anneau [[18],Corollaire 1]*

2) *$S/I = R[X]/(X^n)$ n'est pas un (A)-anneau [[4], Corollaire 2.6], en particulier S/I n'est pas un (A)-anneau fort.*

L'exemple suivant montre que si B/I est un (A)-anneau fort (resp. un (A)-anneau), alors B n'est pas en général un (A)-anneau fort (resp. un (A)-anneau) même si $I^2 = 0$:

Exemple 5.2.8 *Soit K un corps et soit $B = K[X, Y]$ l'anneau des polynômes sur K avec les indéterminées X et Y, qui est un (A)-anneau fort. Soit $E = \bigoplus_p B/(p)$ où p est un élément premier de B est (p) est l'idéal principal engendré par p. Soit*

$R = B \propto E$ l'extension trivial de B par E. Alors,

1) *R n'est pas un (A)-anneau [[4], Exemple 2.4]. En particulier, R n'est pas un (A)-anneau fort.*

2) *Soit $I = 0 \propto E$. Donc $R/I(= B)$ est un (A)-anneau fort (en particulier un (A)-anneau).*

5.3 Transfert de la propriété (A) forte à la duplication amalgamé d'un anneau le long d'un idéal

Définition 5.3.1 *Soit I un idéal d'un anneau commutatif R. I est régulier si il contient un élément régulier de R (un élément non diviseur de zéro)*

Théoréme 5.3.2 *Soient R un anneau, I un idéal propre de R et soit $S = R \bowtie I$ la duplication amalgamé de R le long de I. Alors,*

1) *Si S vérifie la propriété (A) forte, alors R la vérifie aussi.*

2-a) *Si S vérifie lé propriété (A), alors R la vérifie aussi.*

2-b) *Supposons que I est un idéal régulier de R. Alors, S vérifie la propriété (A) si et seulement si R la vérifie.*

Preuve: 1) Soit $J = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ un idéal de type fini de R tel que $a_i \in Z(R)$ pour tout $i = 1...n$; donc il existe $0 \neq b_i \in R$ tel que $b_i a_i = 0$. Soit $L = \sum_{i=1}^{n} (R \bowtie I)(a_i, 0)$ un idéal de type fini de S. On a $(a_i, 0) \in Z(R \bowtie I)$ car $(b_i, 0)(a_i, 0) = (0, 0)$ car $b_i a_i = 0$. D'où il existe $(0, 0) \neq (b, j) \in S$ tel que $(0, 0) = (b, j)L = (b, j) \sum_{i=1}^{n} (R \bowtie I)(a_i, 0) = (b, j)(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \sum_{i=1}^{n} j_i a_i)$ car S est un (A)-anneau fort. On obtient, $b \sum_{i=1}^{n} Ra_i = 0$.
Deux cas sont possible :

Cas 1 : $b \neq 0$. D'où $bJ = 0$.

Cas 2 : $b = 0$. Donc, $0 \neq j \in I$ et on a $(0, 0) = (0, j) \sum_{i=1}^{n} (R \bowtie I)(a_i, 0) = \sum_{i=1}^{n} (R \bowtie I)(0, ja_i)$. D'où, $ja_i = 0$ pour tout $i = 1...n$ et donc $jJ = 0$.

Dans tous les cas, J admet un annulateur non nul. Par conséquent, R est un (A)-anneau fort.

2-a) Soit $J=\sum_{i=1}^{n} Ra_i(\subseteq Z(R))$ un idéal de type fini de R. L'idéal $L=\sum_{i=1}^{n}(R\bowtie I)(a_i,0)$ est un idéal de type fini de S. On veut montrer que $L\subseteq Z(R\bowtie I)$. Soit $(b,j)\in L$, on a $(b,j)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i,j_i)(a_i,0)=(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i,\sum_{i=1}^{n}j_i a_i)$. Deux cas sont donc possible :

Cas 1 : $b=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i\neq 0$. Donc, il existe $0\neq a\in R$ tel que $a\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i=0$. Car $J\subseteq Z(R)$, On obtient $(b,j)(a,-a)=(0,0)$.

Cas 2 : $b=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i=0$. D'où $(0,j)(a,-a)=(0,0)$ pour tout $0\neq a\in R$.

Dans tous les cas $(b,j)\in Z(R\bowtie I)$, et donc $L\subseteq Z(R\bowtie I)$. Comme S est un (A)-anneau, alors pour un certain $0\neq(b,j)\in S$, $(0,0)=(b,j)L$, d'où $(0,0)=(b,j)(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i,\sum_{i=1}^{n}j_i a_i)$. On obtient $b\sum_{i=1}^{n}Ra_i=0$. Deux cas sont donc possible :

Cas 1 : $b\neq 0$. D'où $bJ=0$.

Cas 2 : $b=0$. Donc, $0\neq j\in I$ et on a $(0,0)=(0,j)\sum_{i=1}^{n}(R\bowtie I)(a_i,0)=\sum_{i=1}^{n}(R\bowtie I)(0,ja_i)$. D'où, $ja_i=0$ pour tout $i=1...n$ et donc $jJ=0$.

Dans tous les cas, J admet un annulateur non nul. Par conséquent, R est un (A)-anneau.

2-b) Si $R\bowtie I$ est un (A)-anneau, alors R est aussi un (A)-anneau par (2-a). Inversement, Supposons que R est un (A)-anneau. Donc, $Q(R)$ est un (A)-anneau par [[4], Proposition 2.14], et d'où $Q(R)\times Q(R)$ est un (A)-anneau par [[4], Proposition 1.3], ce qui implique que $Q(R\bowtie I)$ est un (A)-anneau. Par conséquent, $R\bowtie I$ est un (A)-anneau par [[4], Proposition 2.14].

L'exemple suivante montre qu'en général la propriété d'un anneau R d'être un (A)-anneau fort n'implique pas que la duplication amalgamé de R le long d'un idéal I est un (A)-anneau fort, même si R est un domaine local et I leur idéal maximal :

Exemple 5.3.3 *Soit K un corps et soit $R=K[[X]]$ l'anneau des séries formelles sur K. Soit $I=(X)$ l'idéal maximal de R engendré par X. Considérons $S=R\bowtie I$ la duplication amalgamé de R par I. Alors,*

***1)** R est (A)-anneau fort.*

***2)** $S=R\bowtie I$ n'est pas un (A)-anneau fort.*

3) S est un (A)-anneau.

Preuve: 1) Claire car R est un domaine.

2) Soit $J = S(0, X) + S(X, -X)$ un idéal de type fini de S, avec $(0.X)(X, -X) = (0, 0)$. On montre qu'il n'existe pas un $(P, P+Q) \in S$ tel que $(P, P+Q)J = 0$. Sinon. Il existe $(P, P+Q) \in S \setminus (0, 0)$ tel que $(P, P+Q)J = 0$. Mais, $(P, P+Q)(X - X) = 0$ implique que $P = 0$ (car R est un domaine) et $(0, Q)(0, X) = 0$ implique que $Q = 0$, contradiction. Par conséquent, S n'est pas un (A)-anneau fort.

3) Par le théorème 5.3.2(2.b).

CHAPITRE 6

LES ANNEAUX NOETHÉRIENS FAIBLES

N. Mahdou and A. R. Hassani. On weakly-Noetherian rings. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino Vol. 70, 3 (2012), 289 – 296

Dans ce chapitre on introduit les anneaux Noethérien faibles et nous étudions le transfert de cette propriété à les extensions triviales des anneaux, le produis directe des anneaux, et à la duplication amalgamé d'un anneau le long d'un idéal.

Définition 6.0.1 *Soit R un anneau commutatif unitaire.*
R est dit anneau Noethérien faible si pour toute paire d'idéaux I et J tel que $I \subseteq J$ et J est un idéal propre de type fini alors I est un idéal de type fini.

6.1 Principaux résultats

Un anneau Noethérien est naturellement un anneau Noethérien faible. Nous commençons ce chapitre par donner un exemple d'anneau Noethérien faible qui n'est pas Noethérien.

Exemple 6.1.1 *Soit K un corps, $E = K^{\infty}$ un K-espace vectoriel de rang infini et soit $R = K \propto E$ l'extension trivial de K par E. Alors :*
1) R est un anneau local Noethérien faible.
2) R n'est pas un anneau Noethérien.

Preuve: 1) Soit $I \subseteq J$ deux idéaux de R tel que J est un idéal propre de type fini. Montrons que I est un idéal de type fini. Soit $J = 0 \propto E'$ idéal de type fini de R, où E' est un sous espace de E. Donc, $I = 0 \propto E"$, où $E"$ est un sous espace de E'. Comme $E"$ est un K-espace vectoriel de type fini, alors $I = 0 \propto E"$ est un idéal de type fini. Par conséquent, R est un anneau Noethérien faible.
2) R n'est pas un anneau Noethérien car leur idéal maximal $M = 0 \propto E$ n'est pas de type fini (E est un K-espace vectoriel de rang infini).

Théoréme 6.1.2 *Soit R un anneau. Alors :*
1) Si R est un anneau Noethérien, alors il est Noethérien faible.
2) Supposons que R contient un élément régulier. Alors, R est un anneau Noethérien si et seulement si R est un anneau Noethérien faible.
3) Supposons que (R, M) est un anneau local, où M est son idéal maximal. Alors, R est un anneau Noethérien si et seulement si R est un anneau Noethérien faible et M est un idéal de type fini.

Preuve: 1) évident.
2) Si R est un anneau Noethérien alors il est Noethérien faible par (1). Inversement, Supposons que R est un anneau Noethérien faible et soit I un idéal propre de R. On montre que I est de type fini. Soit a un élément régulier de R. D'où, $aI \subseteq aR$, où aR est un idéal principal de R, et donc aI est un idéal de type fini de R (car R est un anneau Noethérien faible). Ce qui donne I est un idéal de type fini de R car $aI \cong I$ (car a est un élément régulier de R).

3) $(\Rightarrow)$ Claire d'après (1).

$(\Leftarrow)$ Supposons que R est un anneau Noethérien faible et soit J un idéal de R. On a $J \subseteq M$ (car R est local d'idéal maximal M) et donc, J est de type fini (car M est de type fini et R est un anneau Noethérien faible). Par conséquent, R est Noethérien.

Théoréme 6.1.3 *Soit A un anneau, E un A-module, et $R = A \propto E$ l'extension trivial de A par E. Alors :*

1-a) *Si R est un anneau Noethérien faible, alors A l'est aussi.*

b) *Supposons que E est un A-module Noethérien. Alors R est un anneau Noethérien faible si et seulement si A l'est aussi.*

2) *R est un anneau Noethérien si et seulement si A est un anneau Noethérien et E est A-module de type fini.*

le preuve de théorème se base sur le lemme suivant :

Lemme 6.1.4 *Soit A un anneau et soit I un idéal de A. Alors :*

1) *Si A est un anneau Noethérien faible et I un idéal de type fini, alors A/I est un anneau Noethérien faible.*

2) *Si A/I est un anneau Noethérien faible et I est un A-module Noethérien. Alors A est un anneau Noethérien faible.*

Preuve: 1) Supposons que A est un anneau Noethérien faible et I est un idéal de type fini. Soient $J_1/I \subseteq J_2/I$ deux idéaux de A/I tel que J_2/I est un idéal propre de type fini de A/I, où $I \subseteq J_1 \subseteq J_2$ sont des idéaux de A.D'où, J_2 est de type fini car I est de type fini. Donc, J_1 est de type fini car $J_1 \subseteq J_2$ est A est un anneau Noethérien faible. Par conséquent, J_1/I est un idéal de type fini de A/I et donc A/I est un anneau Noethérien faible.

2) Supposons que A/I est un anneau Noethérien faible et que I est un A-module Noethérien. Soient $I_1 \subseteq I_2$ deux idéaux de A tel que I_2 est un idéal de type fini de A. On montre que I_1 est de type fini. Posons $J_1 = I_1 + I$ et $J_2 = I_2 + I$ deux idéaux de A contiennent I. D'où, J_2/I est un idéal de type fini car $J_2/I \cong I_2/I_2 \cap I$ et I_2

est de type fini. Donc, J_1/I est de type fini car $J_1/I \subseteq J_2/I$ et A/I est un anneau Noethérien faible. Mais $I_1 \cap I$ est de type fini car $I_1 \cap I \subseteq I$ et I est A-module Noethérien. Par conséquent, I_1 est idéal de type fini car $J_1/I \cong I_1/I_1 \cap I$. D'où A est un anneau Noethérien faible.

Preuve du théorème : 1-a) Supposons que R est un anneau faible. Soient $I_1 \subseteq I_2$ deux idéaux de A tel que I_2 est un idéal propre de type fini de A. On veut montrer que I_1 est un idéal de type fini de A. On a $I_2 \propto I_2E$ est un idéal de type fini de R car I_2 est de type fini. Donc, $I_1 \propto I_1E$ est un idéal de type fini de R car $I_1 \propto I_1E \subseteq I_2 \propto I_2E$ et R est un anneau Noethérien faible. Par conséquent, I_1 est un idéal de type fini de A et donc A est un anneau Noethérien faible.

2) Si R est un anneau Noethérien faible, alors A est l'est aussi par (1). Inversement, supposons que A est un anneau Noethérien faible et que E est A-module Noethérien. D'où $0 \propto E$ est R-module Noethérien et donc R est un anneau Noethérien faible d'après le lemme 6.1.4(2). (car $R/0 \propto E \cong A$).

3) Le théorème 2.3.5.

Le corollaire suivant est un e conséquence immédiate du théorème 6.1.3

Corollaire 6.1.5 *Soit D un domaine, $K = qf(D)$, E un K-espace vectoriel, et $R = D \propto E$ l'extension trivial de D par E. Alors :*

1) R est un anneau Noethérien faible si et seulement si D est un corps.

2) R est un anneau Noethérien si et seulement si D est un corps et E est un K-espace vectoriel de dimension fini.

Preuve: 1) Soit R un anneau Noethérien faible. On montre que D est un corps. Sinon. Soit d un élément régulier de D. D'où, $(d, 0)$ est un élément régulier de R et donc R est Noethérien d'après le théorème 6.1.2 car il est Noethérien faible, un contradiction avec [[41], Théorème 2.8(1)] (si D est un domaine qui n'est pas un corps alors R est non cohérent donc non Noethérien). D'où D est un corps.

2) évident.

Proposition 6.1.6 *Soit (A, M) un anneau local où M est son idéal maximal, E est un A-module de type fini tel que $ME = 0$, et $R = A \propto E$ l'extension triviale de A par E. Alors R est un anneau Noethérien faible si et seulement si A est l'est aussi.*

La preuve du théorème se base sue le lemme suivant :

Lemme 6.1.7 *Soit (A, M) un anneau local d'idéal maximal M, et E est un A-module de type fini tel que $ME = 0$. Alors E est A-module Noethérien.*

Preuve: Soit F un A-sous module de E. On montre que F est un A-module de type fini. On a F est un (A/M)-sous espace vectoriel de E car $MF \subseteq ME = 0$. D'où F est un (A/M)-sous espace vectoriel de type fini de E (car E est de type fini). Donc, F est un A-module de type fini. Par conséquent, E est un A-module Noethérien.
Maintenant on peut démontrer la proposition 6.1.6 :
Preuve: Si R est un anneau Noethérien faible, alors A est l'est aussi par le théorème 6.1.3(1-a). Inversement, si A est un anneau Noethérien faible alors R est l'est aussi d'après le théorème 6.1.3(1-b) et le lemme 6.1.7. La proposition 6.1.6 enrichi la littérature par des nouvelles exemples des anneaux non-Noethérien qui sont Noethérien faible.

Exemple 6.1.8 *Soit K un corps et $R = (K \propto K^{\infty}) \propto (K \propto K^{\infty}/0 \propto K^{\infty})$. Alors :*
***1)** R est un anneau Noethérien faible d'après la proposition 6.1.3 car $K \propto K^{\infty}$ est un anneau Noethérien faible.*
***2)** R n'est pas Noethérien d'après le théorème 6.1.3 car $K \propto K^{\infty}$ n'est pas Noethérien.*

On sait qu'un anneau Noethérien est un anneau Noethérien faible et cohérent aussi. L'exemple suivant montre qu 'il n y a aucune relation entre la propriétés Noethérien faible et la cohérence.

Exemple 6.1.9 *Soit K est un corps, $X_1, X_2?...$ des indéterminées sur K, et $R = K[[X_1, X_2, ..., X_n, ...]]$ l'anneau des séries formelles dans $X_1, X_2...$ sur K. Alors :*

1) R est cohérent.

2) R n'est pas un anneau Noethérien faible.

Preuve: 1) R est un domaine cohérent par [[16], le corollaire 2.3.4, p.48].

2) D'après le théorème 6.1.2 car R est un domaine non Noethérien.

Exemple 6.1.10 *Soit K un corps et $R = K \propto K^{\infty}$. Alors :*

1) R est un anneau Noethérien faible par l'exemple 6.1.1.

2) R est non cohérent par [[34], Théorème 3.4] (car si R est cohérent donc R est 1-cohérent et de plus on a R est un (2,0)-anneau, donc R est un (1,0)-anneau, contradiction).

Dans l'anneau des polynômes on a :

Proposition 6.1.11 *Soit R un anneau et X une indéterminées sur R. Alors $R[X]$ est un anneau Noethérien faible si et seulement si R est Noethérien.*

Preuve: Supposons que $R[X]$ est un anneau Noethérien faible. D'où, $R[X]$ est Noethérien car X est un élément régulier de $R[X]$ et donc $R[X]$ est Noethérien. L'inverse est claire.

Maintenant, nous étudions le transfert de la propriété de Noethérien faible au produit directe :

Proposition 6.1.12 *Soit $(R_i)_{i=1...n}$ une famille d'anneaux. Alors $\Pi_{i=1}^{n} R_i$ est un anneau Noethérien faible si et seulement si R_i est un anneau Noethérien faible pour tout $i = 1...n$.*

Preuve: Par induction sur n, il suffit de montrer l'assertion pour $n = 2$. Si R_1 et R_2 sont Noethérien, alors $R_1 \times R_2$ est un anneau Noethérien et donc Noethérien faible.

Inversement, supposons que $R_1 \times R_2$ est un anneau Noethérien faible. Montrons que R_1 est Noethérien (la même démonstration pour R_2). En effet, Soit I un idéal propre de R_1. D'où $I \times 0 \subseteq R_1 \times 0$ sont deux idéaux propres de $R_1 \times R_2$. Donc, $I \times 0$

est un idéal de type fini de $R_1 \times R_2$ car $R_1 \times R_2$ est un anneau Noethérien faible et $R_1 \times 0$ est un idéal de type fini de $R_1 \times R_2$. Par conséquent, I est un idéal de type fini de R_1 qui donne que R_1 est un anneau Noethérien.

Soit R un anneau et I un idéal de R. La duplication amalgamé de l'anneau R le long de I est le sous anneau de $R \times R$ définie par $R \bowtie I = \{(r, r+i) | r \in R, i \in I\}$. Il est facile de voir que si $\Pi_i (i = 1, 2)$ sont les projections de $R \times R$ dans R, donc $\Pi_i(R \bowtie I) = R$. D'où, si $O_i = ker(\Pi_{i \backslash R \bowtie I})$, donc $(R \bowtie I)/O_i \cong R$. De plus, $O_1 = \{(0, i) \mid i \in I\}$, $O_2 = \{(i, 0) \mid i \in I\}$ et $O_1 \cap O_2 = 0$.

Théoréme 6.1.13 *Soit R un anneau, I un idéal propre de R, et $R \bowtie I$ la duplication amalgamé de R le long de I. Alors :*
1) Si $R \bowtie I$ est un anneau Noethérien faible et I est un idéal de type fini de R, alors R est un anneau Noethérien faible.
2) Si R est un anneau Noethérien faible et I est un R-module Noethérien, alors $R \bowtie I$ est un anneau Noethérien faible.
3) Supposons que R contient un élément régulier. Alors R est un anneau Noethérien faible si et seulement si $R \bowtie I$ est un anneau Noethérien.

Preuve: **1)** Supposons que $R \bowtie I$ est un anneau Noethérien faible. Donc, R est un anneau Noethérien faible d'après le lemme 6.1.4(1) car O_1 (ou O_2) est un idéal de type fini de $R \bowtie I$ (car I est de type fini de R) et $(R \bowtie I)/O_i \cong R$ pour $i = 1, 2$.
2) Supposons que R est un anneau Noethérien faible. Donc, $R \bowtie I$ est un anneau Noethérien faible d'après le lemme 6.1.4(2) car O_1 (ou O_2) est $(R \bowtie I)$-module Noethérien (car I est un R-module Noethérien) et $(R \bowtie I)/O_i \cong R$ pour $i = 1, 2$.
3) Supposons que R est un anneau Noethérien faible. D'où, R est un anneau Noethérien car il contient un élément régulier et donc $R \bowtie I$ est un anneau Noethérien. l'inverse est claire.

Ce dernier théorème enrichi la littérature par des nouvelles exemples des anneaux non noethérien qui sont Noethérien faible :

Exemple 6.1.14 *Soit K un corps, $R = K \propto K^{\infty}$, et soit $I = 0 \propto K^{\infty}$. Alors :*

1) *$R \bowtie I$ est un anneau Noethérien faible d'après le théorème 6.1.13(2) car $K \propto K^{\infty}$ est un anneau Noethérien faible et I est un R-module Noethérien.*

2) *$R \bowtie I$ est non Noethérien car R est non Noethérien.*

CHAPITRE 7

LES G-ANNEAUX

N.Mahdou, About G-ring, Comment.Math.Univ.Carolin. 58,1 (2017) 13–18

Soit R un anneau commutatif et $Q(R)$ son anneau total de fraction. On dit que R est **un G-anneau** si $Q(R) = R[u^{-1}]$ pour un certain élément régulier $u \in R$ ($Q(R)$ est un anneau de type fini sur R)[1]. Cette définition des G-anneaux généralise la définition de Kaplansky pour les G-domaines [17]. Aussi, Kaplansky a montré que si $R \subseteq T$ sont des domaines, T est entier sur R , et R est un anneau de type fini sur R, alors R est un G-domaine si et seulement si T est un G-domaine ([17], Théorème 22).

7.1 Transfert de la propriété de G-anneau au produit fibré

Soit R un anneau et $R_u = R[1/u]$, où u est un élément régulier de R. Premièrement, Nous donnons une extension du théorème de Kaplansky pour les anneaux avec diviseurs de zéros.

Théoréme 7.1.1 *Soit R un sous anneau de T tel que tout élément régulier de R est régulier dans R (par conséquence ,$K = Q(R) \subseteq := Q(T)$). Supposons que L est entier sur K. Alors :*

1) Si R est un G-anneau, alors T est un G-anneau.

2) Si T est un R-algèbre de type fini, alors T est un G-anneau si et seulement si R est un G-anneau.

Preuve: 1) Supposons que R est un G-anneau. D'où, $K = Q(R) = R_u$ pour un certain élément régulier $u \in R$. Mais, $K = R_u \subseteq T_u \subseteq L = Q(T)$. Donc, L est entier sur T_u car L est entier sur K. Par conséquent, $L = T_u$ car L est un anneau des fractions de T_u et d'où T est un G-anneau.

2) Si R est un G-anneau, alors T est un G-anneau de (1). Inversement, Supposons que T est un G-anneau. Donc, $L = T_v$ pour un certain élément régulier $v \in T$ et $T = R[w_1, ...w_k]$ pour certain $w_i \in T$ et k entier positif (car T est un R-algèbre de type fini). Alors, les éléments $v^{-1}, w_1, ..., w_k$ sont entiers sur K. D'où, en utilisant l'équation de Kaplansky (voir preuve de [17], théorème 22) avec a, b_i soient des éléments réguliers de R. Soit $R_1 = R[a^{-1}, b_1^{-1}, ..., b_k^{-1}]$. De la même manière dans [[17], Théorème 22],$L = R_1[w_1, ...w_k, v^{-1}]$ et L est entier sur R_1. Donc, K est entier sur R_1 et $K = R_1$ car K est un anneau des fractions de R_1. Par conséquent, R est G-anneau.

Théoréme 7.1.2 *Soit $R \subseteq T$ une extension d'anneaux telle que $mT \subseteq R$, pour un certain élément régulier $m \in T$. Alors, T est un G-anneau si et seulement si R est un G-anneau.*

La preuve de ce théorème se base sur le lemme suivant :

Lemme 7.1.3 *Soit R un anneau et $R_f = R[1/f]$, où f est régulier dans R. Alors R est un G-anneau si et seulement si R_f est un G-anneau.*

Preuve: Il est claire que $R_f = \{af^{-n}; a \in R, n \in N\}$. Donc, $Q(R_f) = Q(R)$ car af^{-n} est régulier si et seulement si a est régulier dans R. (car f est inversible dans R_f).
Supposons que R est un G-anneau. D'où, $Q(R) = R_u$ pour un certain $u \in R$. Mais, $Q(R_f) = Q(R) = R_u \subseteq (R_f)_u \subseteq Q(R_f)$. Par conséquent, $Q(R_f) = (R_f)_u$ et donc R_f est un G-anneau.
Inversement, supposons que R_f est un G-anneau,**i.e**, $Q(R_f) = (R_f)_u$ pour un certain élémnet régulier $u \in R_f$. On peut supposer que $u \in R$ car $u = af^{-n}$ pour un certain élément régulier $a \in R$ et $n \in N$, et car f^{-n} est inversible dans R_f. De plus, On montre facilement que $(R_f)_u = R_{fu}$. Par conséquent, $Q(R) \subseteq Q(R_f) \subseteq (R_f)_u \subseteq R_{fu} \subseteq Q(R)$, et donc, $Q(R) = R_{fu}$.
Preuve du théorème : Soit $R \subseteq T$ une extension d'anneaux telle que $mT \subseteq R$; pour un élément régulier $m \in T$. Clairement, $m \in R$ et m est un élément régulier de R. Mais, $R_m = T_m = \{am^{-n}; a \in T, n \in N\} = \{(am)m^{-(n+1)}; (am) \in R, n \in N\} \subseteq R_m$. Par conséquent, R est un G-anneau si et seulement si T est un G-anneau d'après le lemme 7.1.3.

Corollaire 7.1.4 *Soient D un domaine qui n'est pas un G-domaine, $K = Q(D)$ et T un domaine tel que $T/M = K$ pour un certain idéal maximal M de T. Soient $f : T \longrightarrow K$ la surjection canonique et $R = f^{-1}(D)$. Alors :*

1) *T est un G-domaine si et seulement si R est G-domaine.*

2) *T n'est pas de type fini comme un anneau sur R.*

Preuve: 1) Déduit du théorème 7.1.2 car $mT \subseteq M \subseteq ker(f) \subseteq R$ et $R_m = T_m$ pour tout m non nul dans M.
2) Supposons que T est de type fini que un anneau sue R. Alors $T = R[x_1, x_2, ..., x_n]$, pour un certain $x_i \in T$, où n est un entier non nul. Donc, $K = T/M = (R/M)[\bar{x_1}, ..., \bar{x_n}] = D[\bar{x_1}, ..., \bar{x_n}]$., contradiction car D n'est pas un G-domaine. Par conséquent, T n'est pas de type fini comme un anneau sur R.

Remarque 7.1.5 *La partie (1) du corollaire 7.1.4 généralise ([29], Théorème 2.7, p.341).*

Une paire d'anneaux $A \subseteq B$ est dit paire de G-anneau si D est un G-anneau pour tout anneau D tel que $A \subseteq D \subseteq B$. Dans ([12], Théorème 2.1), Dobbs donne une condition nécessaire et suffisante pour avoir une paire de G-domaine.

Corollaire 7.1.6 *Soient T, R, et m comme dans le théorème 7.1.2. Alors (R, T) est un paire G-anneau si et seulement si T (resp. R) est un G-anneau.*

Preuve: Soit S un anneau tel que $R \subseteq S \subseteq T$. Donc, $mS \subseteq mT \subseteq R$ et m est un élément régulier de S. Par conséquence, le théorème 7.1.2 complète la preuve.

Remarque 7.1.7 *Dans le théorème 7.1.2 l'hypothèse "m est un élément régulier de T" est nécessaire (voire l'exemple 7.3.4)*

7.2 Transfert de la propriété de G-anneau aux extensions triviales

Théoréme 7.2.1 *Soient A un anneau, E un A-module tel que $Z(E) \subseteq Z(A)$ ($Z(A)$ l'ensemble des diviseurs de zéros de A et $Z(E) = \{a \in A/ae = 0$, pour certain $e \in E - \{0\}\}$, et $R = A \propto E$ l'extension triviale de A par E. Alors R est un G-anneau si et seulement si A est un G-anneau.*

Preuve: Soit $S = A - Z(A)$. Alors $Z(R) = Z(A) \propto E$ et $Q(R) = Q(A) \propto E_S$ d'après ([19], p.164-65). Supposons que A est un G-anneau. D'où, $Q(A) = A_a$ pour un certain élément régulier $a \in S$. Alors, $(a, 0) \notin Z(R)$ et $E_a = E \otimes_A A_a = E \otimes_A Q(A) = E_S$. Donc, $Q(R) = Q(A) \propto E_S = A_a \propto E_a = \{(xa^{-n}, ea^{-m}; (x, e) \in R; n, m \in N\} = \{(xp^{p-n}, ea^{p-m})(a, 0)^{-p}; (a, e) \in R; n, m \in N$ et $p = sup(n, m)\} \subseteq R_{(a,0)} \subseteq Q(R)$. Par conséquent, $Q(R) = R_{(a,0)}$ et R est un G-anneau.
Inversement, supposons que R est un G-anneau. Donc, $Q(R) = R_{(a,e)}$ pour un

certain $(a,e) \notin Z(R)$. Si $Q(R) = Q(A) \propto E_S$ et $p : Q(R) \longrightarrow Q(A)$ est l'application $p(x,y) = x$, on montre que $Q(R)(= p(R_{(a,e)}) = A_a$. En effet, Soit $(x,y)(a,e)^{-n} \in R_{(a,e)}$, où $(x,y) \in R$ et $n \in N$. D'où, $a^n p((x,y)(a,e)^{-n}) = p((a,0)^n(x,y)(a,e)^{-n}) = p((x,y)((a^{-n},0)(a,e)^n)^{-1}) = p((x,y)((a^{-n},0)(a^n,e_n))^{-1}) = p((x,y)(1,a^{-n}e_n)^{-1}) = p((x,y)(1,-a^{-n}e_n)) = p(x, y - xa^{-n}e_n) = x \in A$, D'où, $p((x,y)(a,e)^{-n}) = xa^{-n} \in A_a$. Par conséquent, $Q(A) = A_a$ et A est un G-anneau.

Corollaire 7.2.2 *Soient A un domaine, E un A-module sans torsion et $R = A \propto E$ l'extension triviale de A par E. Alors R est un G-domaine si et seulement si A est un G-domaine.*

Si $R = A \propto E$ est l'extension triviale de A par E. Nous n'avons pas en général R est un G-anneau si et seulement si A est un G-anneau, comme la proposition suivante nous montre :

Proposition 7.2.3 *Soit (A, M) un anneau local, et E un A-module tel que $ME = 0$. Alors l'extension triviale de A par E est un G-anneau.*

Preuve: l'extension triviale de A par E est un G-anneau. est un G-anneau car $A \propto E$ est un anneau total (car $(M \propto E)(0,1) = (0,0)$ et $M \propto E$ est l'idéal maximal de l'anneau local $A \propto E$).

7.3 Exemples

Exemple 7.3.1 *Soit $T = Q[[X]] = Q + XT$ l'anneau des séries formelles sur le corps Q et soit $R = Z + XT$. Alors :*

1) *R est un G-domaine d'après le théorème 7.1.2 car T est un G-domaine local et $XT \subseteq R$.*

2) *R est un domaine cohérent d'après([10], Théorème 3) et il n'est pas Noethérien d'après ([2], Théorème 4).*

3) *T n'est pas de type fini comme un anneau sur R d'après le corollaire 7.1.4.*

4) *$Z \longrightarrow R$ est une extension d'anneaux fidèlement plat et Z n'est pas un G-domaine.*

Exemple 7.3.2 *Soit $T = R[X]_(X) = R + XT$, où X est un indéterminée sur R et soit $R = Z + XT$. Alors :*

1) *R est un G-domaine d'après le théorème 7.1.2 car T est un G-domaine local et $XT \subseteq R$.*

2) *R n'est pas cohérent d'après([10], Théorème 3)*

4) *$Z \longrightarrow R$ est une extension d'anneaux fidèlement plat et Z n'est pas un G-domaine.*

Exemple 7.3.3 *Soit A un G-domaine qui n'est pas un corps, $K = qf(A)$, et soit $R = A \propto K$ l'extension trivial de A par E. Alors :*

1) *R est un G-anneau d'après le corollaire 7.2.2 car A est un G-domaine.*

2) *R n'est pas cohérent car $R(0,1)$ est un idéal de type fini qui n'est pas de présentation finie par la suite exacte suivante :*

$$0 \longrightarrow 0 \propto K \longrightarrow R \xrightarrow{u} R(0,1) \longrightarrow 0$$

où $u(a,e) = (a,e)(0,1) = (0,a)$ (car $0 \propto K$ est un idéal de R qui n'est pas de type fini)

Exemple 7.3.4 *Soient A un non G-domaine, $K = qf(A)$, $T = K \propto K$ l'extension trivial de K par K, et soit $R = A \propto K$ l'extension triviale de A par K. Alors :*

1) *T est G-anneau car T est un anneau total.*

2) *R n'est pas un G-anneau par le corollaire 7.2.2 car A est non G-domaine.*

3) $(0,1)T = 0 \propto K \subseteq R$

PERSPECTIVES

Au terme de ce travail, nous allons essayer d'éclaircir des perspectives de notre recherche. Nos questions visées sont regroupées en trois parties et sont comme suit :

Premier axe de recherche :

Comment nous pouvons généraliser le théorème 5.3.2 sur la propriété (A)-forte à l'amalgamation d'anneaux ?

Deuxième axe de recherche :

Un anneau est dit Noethérien faible si tout idéal de type fini est un module Noethérien. Qu'est ce qu'on peut dire si cette propriété est vérifié seulement pour les idéaux premiers ?

Troisième axe de recherche :

Nous allons essayer de transférer la propriété des G-anneaux à l'amalgamation d'anneaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Adams J.C., *Rings with a finitely generated total quotient ring*, Canad. Math. Bull. 17 (1974), 1–4.

[2] Brewer J.W., Rutter E.A., D + M constructions with general overrings, Michigan Math. J. 23 (1976), 33–42.

[3] Bakkari C., Kabbaj S., *Mahdou N., Trivial extensions defined by Prüfer conditions*, J. Pure Appl. Algebra 214 (2010), no. 1, 53–60.

[4] C. Y. Hong, N. K. Kim, Y. Lee and S. J. Ryu, *Rings with Property (A) and their extensions*, J. Algebra 315 (2007), 612-628.

[5] Cahen P.J., *Couple d'anneaux partageant un idéal* , Arch. Math. 51 (1988), 505–514.

[6] D'Anna, D.L. Costa, *Parameterizing families of non-Noetherian rings, Comm. Algebra* 22 (1994) 3997-4011.

[7] D.D. Anderson, M. Winders. (2009), *Idealization of a module.* J. Commut. Algebra 1(1) :3-56.

[8] D.D. Anderson and V. Camillo, *Armendariz rings and Gaussian rings*, Comm. Algebra 26 (1998), 2265 2272.

[9] D.D. Anderson,*Generalizations of Boolean rings, Boolean-like rings and von Neumann regular rings*, Comment. Math. Univ. St. Paul. 35 (1986), 69 76.

[10] D.E. Dobbs, I.J. Papick, *When is D +M coherent ?*, Proc. Amer. Math.Soc. 56 (1976) 51-54.

[11] D.E. Dobbs, *On the global dimensions of D +M* , Canad. Math. Bull. 18 (1975) 657-660.

[12] Dobbs D.E.,*G-Domain pairs*, Internat. J. Commutative Rings 1 (2002), no. 2, 71–75.

[13] Dobbs D.E., Ishikawa T., *On seminormal underrings*, Tokyo J. Math. 10 (1987), 157–159.

[14] D.E. Dobbs, S. Kabbaj, N. Mahdou, M. Sobrani, *When is D + M n-coherent and an (n, d)-domain ?*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Dekker, 205 (1999), 257-270.

[15] D.L. Costa, S. Kabbaj, *Classes of D + M rings defined by homological conditions*, Comm. Algebra 24 (1996) 891-906.

[16] Glaz, S. *Commutative coherent rings.* In Lecture Notes in Mathematics, no. 1371. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[17] I. Kaplansky, *Commutative Rings, Allyn and Bacon*, Boston, 1970.

[18] J. A. Huckaba and J. M. Keller, *Annihilation of ideals in commutative rings*, Pacific J. Math. 83 (1979), 375-379.

[19] J.A. Huckaba, *Commutative rings with zero divisors*, Marcel Dekker, New York, 1988.

[20] J. Rotman ; An Introduction to Homological Algebra, Academic press, Pure and Appl. Math., A Series of Monographs and Textbooks, 25(1979).

[21] Kabbaj, S., and Mahdou, N. *Trivial extensions defined by coherent-like conditions.* Comm.Algebra 10, 32 (2004), 3937–3953.

[22] M .Chhiti, N. Mahdou and M. Tamekkante *Clean property in amalgamated algebras along an ideal* Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics Volume 44 (1) (2015), 41 – 49

[23] M. D'Anna, *A construction of Gorenstein rings*, J. Algebra. 306 (2006), no. 2, 507-519.

[24] M. D'Anna, C.A. Finocchiaro, M. Fontana, *Amalgamated algebras along an ideal, in : Commutative Algebra and Applications, Proceedings of the Fifth International Fez Conference on Commutative Algebra and Applications*, Fez, Morocco, 2008, W. de Gruyter Publisher, Berlin, 2009, pp. 155-172.

[25] M. D'Anna, C. A. Finacchiaro, et M. Fontana ; *New Algebraic Properties of an Amalgamated Algebra Along an Ideal.* Communications in Algebra,44 :5, 1836-1851 (2016)

[26] M. D'Anna, C. A. Finacchiaro, et M. Fontana ; *Properties of chains of prime ideals in amalgamated algebras along an ideal*, J. Pure Applied Algebra 214(2010), 1633-1641

[27] M. D'Anna and M. Fontana, *An amalgamated duplication of a ring along an ideal : the basic properties*, J. Algebra Appl. 6 (2007), 443–459.

[28] M. D'Anna and M. Fontana, *The amalgamated duplication of a ring along a multiplicativecanonical ideal*, Ark. Mat. 45(2007), no. 2, 241–252.

[29] M. Fontana, *Topologically defined classes of commutative rings*, Ann. Mat. Pura Appl. 123 (1980), 331–355.

[30] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, 1969

[31] M.S. Ahn and D.D. Anderson, *Weakly clean rings and almost clean rings*, Rocky Mountain J. Math. 30 (2006), 783 798.

[32] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, chapitres 1-4, Masson*, Paris, 1985.

[33] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, chapitres 5-7, Masson*, Paris, 1985.

[34] N. Mahdou, *On Costa's conjecture*, Comm. Algebra 29 (7) (2001) 2775- 2785.

[35] N.Mahdou, *About G-ring*, Comment.Math.Univ.Carolin. 58,1 (2017) 13–18

[36] N. Mahdou AND A. Rahmouni Hassani. *On Strong (A)-Rings*, Mediterranean Journal of Mathematics · January 2009.

[37] N. Mahdou and A. R. Hassani. *On weakly-Noetherian rings*. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino Vol. 70, 3 (2012), 289 – 296

[38] P. Le Bihan, Sur la cohérence des anneaux de dimension homologique 2, C. R. Acad. Sc., Paris Sér. A 273 (1971) 342-345.

[39] R.Gilmer ,*Multiplicative ideal theory,* Marcel Dekker,1972.

[40] R. Gilmer, *The pseudo-radical of a commutative ring*, Pacific J. Math. 19 (1966), 275–284.

[41] S. Kabbaj,and N. Mahdou. *Trivial Extensions of Local Rings and a Conjecture of Costa*. Lecture Notes in Pure and Applied in Mathematics - Dekker 231 (2002) 301-311

[42] W.K. Nicholson, *Lifting idempotents and exchange rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1977), 269 278.

[43] Y. Quentel, *Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau*, Bull. Soc. Math. France 99 (1971), 265-272.