

## SOMMAIRE

<b>DEDICACES</b> .....	1
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	2
Résumé .....	3
Abstract .....	4
<b>NOMENCLATURE</b> .....	8
<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	11
<b>CHAPITRE I</b> .....	13
<b>LES MILIEUX POREUX ET LEURS COMPORTEMENTS HYDRIQUE</b> .....	13
<b>I-1 Définition</b> .....	13
<b>I-2- Classification et caractérisation</b> .....	14
<b>I-3 Concept du volume élémentaire représentatif</b> .....	18
<b>I-4 Mode de fixation de l'humidité</b> .....	19
<b>I-5 Isotherme de sorption</b> .....	22
<b>I-6 Pression capillaire</b> .....	23
<b>I-7 Détermination de la pression capillaire par porosimétrie au mercure [8]</b> .....	25
<b>I-8 Loi de Darcy généralisée [6]</b> .....	25
<b>CHAPITRE II</b> .....	27
<b>PARTIE A : LES MODELES DE SECHAGE</b> .....	27
II-A-1 Définition .....	27
II-A-2 Séchage des produits et matériaux poreux .....	27
II-A-3 Cinétique de séchage .....	28
II-A-4 les différentes approches proposées de la littérature .....	30
II-A-5 Evolutions récentes .....	33
<b>DETERMINATION DU COEFFICIENT DE DIFFUSION MASSIQUE</b> .....	35
<b>II-B-1 Définition</b> .....	35
<b>II-B-2 Le coefficient de diffusion massique</b> .....	35
<b>II-B-3 Méthodes expérimentales [13][17]</b> .....	35
<b>II-B-3-1 Expérience de Crausse</b> .....	37

<b>II-B-3-2</b>	<b>Expérience d'Ohtani et al .....</b>	<b>38</b>
<b>II-B-3-3</b>	<b>Coefficient de diffusion de l'argile .....</b>	<b>40</b>
<b>II-B-3-4</b>	<b>Influence des conditions de séchage sur la diffusion et le coefficient de diffusion massique .....</b>	<b>41</b>
<b>II-B-5</b>	<b>Transferts thermiques .....</b>	<b>45</b>
<b>II-B-6</b>	<b>La conductivité thermique dans les milieux poreux .....</b>	<b>46</b>
II-B-6-1	Variation de la conductivité thermique en fonction de la porosité.....	46
II-B-6-2	La variation de conductivité thermique en fonction de la teneur en eau.....	48
<b>CHAPITRE III.....</b>	<b>.....</b>	<b>52</b>
<b>FORMULATION MATHÉMATIQUE.....</b>	<b>.....</b>	<b>52</b>
<b>III-1</b>	<b>Position du problème .....</b>	<b>51</b>
<b>III-2</b>	<b>Description du phénomène .....</b>	<b>52</b>
III-2-1	Formulation dans l'air.....	52
III-2-2	Formulation du problème dans la paroi poreuse .....	53
<b>III-3</b>	<b>Conditions initiales et au limites .....</b>	<b>54</b>
III-3-1	Dans la couche limite .....	54
III-3-2	Dans la paroi : .....	55
<b>III-4</b>	<b>Mise sous forme adimensionnelle des équations de la couche limite.....</b>	<b>56</b>
<b>III-5</b>	<b>Calcul des coefficients de transfert .....</b>	<b>57</b>
III-5-1	Coefficient local de transfert thermique .....	58
III-5.2	Coefficient local de transfert massique .....	58
<b>III-6</b>	<b>Coefficients de transferts adimensionnels (Nombres de Nusselt et de Sherwood) .....</b>	<b>59</b>
Nombre de Nusselt local .....	.....	59
Nombre de Sherwood local .....	.....	59
<b>CHAPITRE IV .....</b>	<b>.....</b>	<b>60</b>
<b>MODELISATION NUMÉRIQUE .....</b>	<b>.....</b>	<b>60</b>
<b>IV-1</b>	<b>Introduction : .....</b>	<b>60</b>
<b>IV.2</b>	<b>FORMULATION PAR ELEMENTS FINIS .....</b>	<b>61</b>
IV.2.1	Formulation variationnelle .....	61
<b>IV.3</b>	<b>Discrétisation des équations de transfert de chaleur et de masse dans la couche limite et la paroi poreuse.....</b>	<b>68</b>
IV.3.1	Dans la couche limite .....	68

IV.3.2 Dans le milieu poreux .....	70
<b>CHAPITRE V.....</b>	<b>72</b>
<b>RESULTATS ET DISCUSSIONS.....</b>	<b>72</b>
<b>V.1 Dans la couche limite.....</b>	<b>72</b>
V.1.1 Résultats relatifs aux champs de vitesses .....	72
V.1.2 Résultats relatifs aux champs de la température .....	75
<b>CONCLUSION .....</b>	<b>77</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>78</b>
<b>ANNEXE I.....</b>	<b>81</b>
<b>ANNEXE II.....</b>	<b>83</b>
<b>ANNEXE III.....</b>	<b>85</b>
<b>ANNEXE IV .....</b>	<b>88</b>
<b>ANNEXE V.....</b>	<b>89</b>
<b>Liste des figures .....</b>	<b>99</b>
<b>Liste des tableaux.....</b>	<b>101</b>
<b>Liste des équations .....</b>	<b>102</b>

## NOMENCLATURE

$U, u, v$  : Vitesse (m/s)

$C_v$  : Concentration en vapeur d'eau ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

$C$  : Concentration de l'humidité ( $\text{kg d'eau}/\text{m}^3$  de solide)

$d$  : Diamètre des pores (mm)

$D$  : Coefficient de diffusion massique ( $\text{m}^2/\text{s}$ )

$D_v$  : Coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air ( $\text{m}^2/\text{s}$ )

$L$  : Longueur de la plaque (m)

$e$  : Moitié de l'épaisseur (m)

$C_p$  : Chaleur spécifique massique ( $\text{kJ}/\text{kg}\cdot\text{K}$ )

$g$  : Accélération de la pesanteur

$h_m$  : Coefficient de transfert de masse (m/s)

$M$  : Masse molaire ( $\text{kg}/\text{mole}$ )

$p$  : Pression (N/m<sup>2</sup>)

$\dot{m}_{vx}$  : Flux massique d'évaporation ( $\text{kg}/\text{s}\cdot\text{m}^2$ )

$h_{mx}$  : Coefficient de transfert massique local (m/s)

$h_{tx}$  : Coefficient de transfert thermique local ( $\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{s}$ )

$\Delta h_v$  : Chaleur latente de vaporisation ( $\text{kJ}/\text{kg}$ )

$R$  : Constante des gaz parfaits ( $\text{J}/\text{kg}\cdot\text{mol}$ )

$r$  : Rayon des pores (m)

$a$  : Diffusivité thermique ( $\text{m}^2/\text{s}$ )

$m$  : Masse (kg)

S : Saturation

$P_c$  : Pression capillaire (N/m)

T : Température (k)

t : Temps(s)

W : Teneur en eau massique (kg d'eau/kg solide)

K : Perméabilité ( $m^2$ )

$\delta$  : Epaisseur de la couche limite

$\tau$  : Tortuosité

### **Lettres grecques**

$\epsilon$  : Porosité

$\phi$  : Humidité relative de l'air (%)

$\mu$  : Viscosité dynamique (kg/m.s)

$\nu$  : Viscosité cinématique ( $m^2/s$ )

$\rho$  : Masse volumique ( $kg/m^3$ )

$\sigma$  : Tension superficielle (N/m)

$\Psi$  : Succion (exprimée en hauteur d'eau)

$\lambda$  : Conductivité thermique

### **Indice**

a : Air sec

v : Vapeur pure

g : Gaz

*surf* : Surface

*eff* : Effectif.

+

i : Interface

$V_s$  : Vapeur saturante.

l : Liquide

s : Solide.

$\infty$  : Concerne l'écoulement hors de la couche limite

## Nombres adimensionnels

$$Re = \frac{U_\infty}{L_v}$$

$$Pr = \frac{v}{a} = \frac{v\rho C_p}{\lambda_f}$$

$$Sc = \frac{v}{D_v}$$

$$Nu(x) = \frac{h_t(x)L}{\lambda_g}$$

$$Sh(x) = \frac{h_m(x)L}{D_v}$$

## Operateurs mathématique

$\nabla$  : Operateur gradient

$\nabla \cdot$  : Operateur divergence

$\langle N \rangle$  : Fonction de forme.

n : Normale extérieure.

$\Omega$  : Operateur mathématique

$\Gamma$  : Operateur mathématique

x : Coordonnée axiale adimensionnelle

y : Coordonnée verticale adimensionnelle

## INTRODUCTION GENERALE

Les transferts en milieu poreux interviennent dans de nombreux processus naturels ou industriels, à des échelles fortement variables (champs pétroliers, alimentation hydrique des plantes, matériaux de construction, séchages ou hydratation des produits, biochimie, etc.,...). Un milieu poreux peut se présenter généralement sous deux formes :

- Milieu poreux non consolidé dans lequel la phase solide est formée de grains ou de fibres non soudés entre eux (graviers, sable, billes de verre et d'acier, limons, matériaux divers).
- Milieu poreux consolidé dans lequel la phase solide est formée de grains cimentés (roches calcaires, grés, argiles, bois, céramiques, poudres frittées, tissus végétaux et animaux...) [1].

En matière de séchage, bien que le procédé soit utilisé depuis fort longtemps, la connaissance scientifique des processus ne remonte qu'au début du vingtième siècle.

Nous pouvons définir le séchage comme l'extraction de solvant d'un produit par apport d'énergie thermique à celui-ci ; selon le type de produits séchés et le type de procédé de séchage.

Les problématiques rencontrées peuvent être d'ordre énergétique (consommation d'énergie, choix de source d'énergie, cout énergétique...), d'ordre purement financier (coût de stockage, coût de transport,...) ou d'ordre qualité du produit séché. L'obtention d'une bonne qualité du produit séché ainsi que l'optimisation des procédés employés sont, même si le coût énergétique reste leur préoccupation, les deux principaux objectifs que les utilisateurs des procédés du séchage cherchent généralement à atteindre.

L'échelle d'observation ou de description retenue, tant pour l'expérience que pour la simulation numérique à l'échelle dite « macroscopique », pour laquelle le milieu poreux est assimilé à un milieu fictif, continu et homogène. Les phénomènes physiques mis en jeu au cours du séchage d'un milieu poreux ont souvent été discutés.

Parmi les études scientifiques approfondies menées sur les processus mis en œuvre lors d'une opération de séchage et sur l'étude des principaux procédés de séchage, nous citons

les travaux de Whitaker [13] qui traite la formulation mathématique du problème, de Basilico et Martin [4] , de P. Perre et Degiovanni [5] qui se sont intéressés aux phénomènes du transfert de chaleur et de masse à l'intérieur du bois, et à son couplage avec les conditions externes lors d'un séchage par convection forcée à basse et à haute température. Nous citons aussi les travaux de N.Boukadida, al. [6,7] et A. Mobarki[10] pour le séchage des briques.

Le présent mémoire est structuré en cinq principaux chapitres :

-Le premier chapitre est consacré en premier lieu à la définition des principales caractéristiques d'un milieu poreux ainsi qu'aux modes de fixation de l'eau dans les matériaux à travers les isothermes de sorption et de désorption.

-Le deuxième chapitre est divisé en deux parties, la première partie est consacrée à la définition du séchage et ses différents mécanismes dans le milieu poreux. La deuxième partie est consacrée à la détermination du coefficient de transport diffusif et les différentes méthodes analytiques proposées dans la littérature.

-Le troisième chapitre propose une formulation mathématique générale du problème où les équations gouvernantes, les hypothèses simplificatrices, et les conditions aux frontières associées seront présentées. Nous établissons les équations adimensionnelles et nous définissons les grandeurs adimensionnelles caractérisant le transfert de chaleur.

-Le quatrième chapitre est consacré à la modélisation numérique des équations adimensionnelles de la couche limite et les équations qui régissent l'écoulement à l'intérieur du milieu poreux. Nous avons présenté les méthodes numériques de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles et nous avons choisi la méthode des éléments finis pour discrétiser les équations régissant notre modèle.

-Le cinquième chapitre est consacré aux discussions des résultats obtenus et leurs interprétations. Nous validons les résultats numériques par comparaison avec des travaux antérieurs.

Afin de ne pas alourdir le texte, nous donnons en annexe des compléments et des notions de base sur le transfert de masse dans l'air et dans la matière poreuse.

# CHAPITRE I

## LES MILIEUX POREUX ET LEURS COMPORTEMENTS HYDRIQUE

### I-1 Définition

Un milieu poreux est un solide de forme compliquée comptenant des vides appelés «pores » qui peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides susceptibles de s'écouler ou éventuellement d'échanger entre elles et /ou avec le solide de la matière et /ou de l'énergie.

On trouve de nombreux matériaux naturels dans cette catégorie : les sols, la plupart des roches, ainsi que certains matériaux vivants. Certains matériaux artificiels requièrent d'être poreux, soit dans le processus de fabrication, soit dans leurs finalités pour jouer un rôle de filtre ou apporter des propriétés macroscopiques particulières.

On distingue deux catégories de milieu poreux :

-Les milieux hétérogènes poreux alvéolaires ou cellulaires considérés comme des espaces solides pleins de trous.

-Les milieux hétérogènes poreux granulaires considérés comme des espaces vides remplis de grains solides.

D'un point de vue général, un matériau poreux, à l'état naturel, est un milieu hétérogène triphasique constitué d'une phase solide, d'une phase liquide et d'une phase gazeuse (air humide).

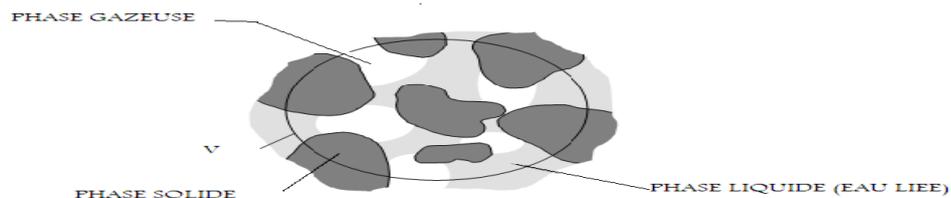


Figure I-1 : Volume Élémentaire Représentatif (VER) d'un milieu poreux

Dans la plupart des études, les modèles physiques décrivant le transfert d'humidité sont basés sur l'existence de deux régions différentes désignées sous le nom de « région non hygroscopiques » et région « hygroscopique ». Cette dernière région est caractérisé par la présence dominante de l'eau liée (Perré and Degiovanni, (1990) ; Goyeneche et al. (2001). Dans la région non hygroscopique, l'eau libre occupe la partie principale des pores dans le milieu. Cette eau est maintenue par des forces capillaires.

Dans les deux régions, l'eau liée (figure I.2) est physiquement absorbée sur les parois de la structure par des forces électrostatiques sous la forme de couches multimoléculaires.

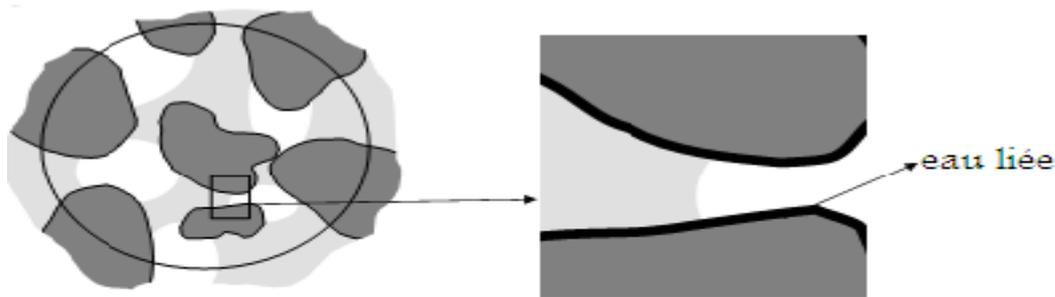


Figure I-2 : Eau liée dans les pores

## I-2- Classification et caractérisation

**La porosité :** C'est le paramètre principal décrivant le milieu poreux, elle varie entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide), se définit comme le rapport du volume des vides(ou pores) au volume total apparent du milieu poreux (somme du volume du solide et du vide), soit :

$$\varepsilon = \frac{V_V}{V_T} = \frac{V_V}{V_S + V_V} \quad (I.1)$$

Puisqu'il s'agit d'un rapport de mêmes propriétés, la porosité n'a pas d'unités et elle est souvent exprimée en pourcentage.

La porosité peut être de deux formes, la porosité d'interstice (figure I-3a), et la porosité de fissure (figure I-3b).

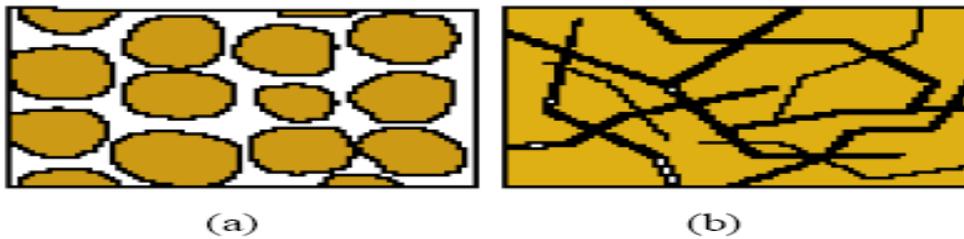


Figure I-3 : les deux types de porosité (Salazar, 2006)

Des mesures expérimentales faites par Kaviany [2] donnent dans le tableau (I-1) quelques valeurs de la porosité pour différents matériaux.

Matériaux	Porosité
Matériau moussoux	0.98
Fibre de verre	0.88-0.93
Fil à tisser	0.68-0.76
Grains de silice	0.65
Poudre d'ardoise noir	0.57-0.66
Cuir	0.56-0.59
Catalyseur	0.45
Granulé de pierres	0.44-0.45
Terre	0.43-0.54
Sable	0.37-0.50
Poudre de silice	0.37-0.49
Sphère bien empilée	0.36-0.43
Filtre de cigarettes	0.17-0.49
Briques	0.12-0.34
Poudre de cuivre	0.09-0.34
Pierre à chaud, Dolomite	0.04-0.10
Houille	0.02-0.07

Tableau I.1 : Porosité de quelque matériau

On distingue :

➤ **La porosité totale  $\varepsilon_t$**

Elle tient compte des cavités occluses au sein du solide (pores fermés).

$$\varepsilon_t = \frac{\text{Masse volumique du matériau constitutif}}{\text{Masse volumique apparente de l'échantillon}}$$

➤ **La porosité accessible  $\varepsilon$**

C'est l'espace poreux connecté à travers lequel s'effectue l'écoulement des masses fluides :

$$\varepsilon = \frac{\text{volume de l'échantillon}}{\text{volume des pores accessible}}$$

➤ **La surface spécifique**

La surface spécifique est une propriété géométrique importante du milieu poreux .On peut définir la surface spécifique  $\alpha$  comme le rapport entre l'aire de la surface totale de l'interface fluide-solide  $A_{sf}$  et le volume de l'échantillon  $V$ .

$$\alpha = \frac{A_{sf}}{V}$$

Cette grandeur joue un rôle important dans les problèmes d'échange de chaleur entre le fluide et la matrice solide.

➤ **La tortuosité**

La tortuosité «  $\tau$  » du milieu caractérise les obstacles au cheminement du fluide dans la structure poreuse ; elle définit par la relation suivante (Quenard, 1991) :

$$\tau = (L_e/L)^2$$

$L_e$  : Longueur moyenne des lignes de courant du fluide traversant l'échantillon.

$L$  : Longueur de l'échantillon.

➤ **La perméabilité**

La perméabilité est la propriété d'un corps de se laisser traverser par les fluides. Cette constante caractéristique d'un milieu poreux est liée à la forme des grains et à la porosité. Cette grandeur est déterminée généralement par des mesures expérimentales à partir de la loi de Darcy régissant le mouvement du fluide dans le milieu poreux. Il y a des relations

qui donnent la perméabilité Ken fonction de la porosité  $\epsilon$  et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore. On note notamment :

La relation de Kozeny-Carman(1937), (Delache, 2005), qui donne une estimation satisfaisante de K dans le cas d'un empilement de grains de formes à peu près identiques et dont la distribution de taille des grains n'est pas trop éloignée d'une taille moyenne

$$D: K = \frac{\epsilon^3 D^2}{36 C_0 (1-\epsilon)^2}$$

$C_0$  : Coefficient de forme, il est compris entre 3,6 et 5.

Pour les grains sphériques  $C_0=4,8$ .

D : représente le diamètre de la sphère.

Le modèle de faisceaux de tubes capillaires ondulés parallèles en moyenne à une direction donnée est donc fortement anisotrope (Delache, 2005) :

$$K = \frac{\epsilon D^2}{32} \frac{1}{\tau}$$

$\tau$  : Tortuosité des tubes capillaires ondulés.

D : diamètre des tubes.

Si le milieu est formé de 3ensembles capillaires perpendiculaires deux à deux (et donc relativement isotrope), la perméabilité sera réduite d'un facteur de 3. On peut faire l'estimation suivante (Delache, 2005).

$$K = \frac{\epsilon D^2}{96} \frac{1}{\tau}$$

Elle dépend fortement de l'humidité du milieu auquel le matériau est soumis.

On considère aussi [5] :

La saturation S est la fraction du volume des vides occupée par le liquide.

-La teneur volumique en liquide  $\theta_l$  est la fraction du milieu poreux occupée par le liquide.

-La teneur pondérale en liquide (teneur en eau massique)  $W_l$  est la masse de liquide contenu dans l'unité de masse de la matrice solide constituant le milieu poreux.

Ces trois grandeurs sont reliées entre elles :

$$\epsilon S = \theta_l = \frac{\rho_0}{\rho_l} W_l$$

Avec:  $\rho_0 = \rho_s (1 - \epsilon)$

$\rho_0$  : Masse volumique apparente du milieu poreux sec.

$\rho_l$  : Masse volumique de la matrice poreuse.

Le tableau ci-dessous représente la perméabilité de quelques matériaux poreux définis d'après Sheidegger [4].

Matrice	Perméabilité [m <sup>2</sup> ]
Briques	$4.8 \times 10^{-15}$ -- $2.2 \times 10^{-13}$
Pierre à chaud, Dolomite	$2.0 \times 10^{-15}$ -- $4.5 \times 10^{-14}$
Cuir	$9.5 \times 10^{-14}$ -- $1.2 \times 10^{-13}$
Poudre d'ardoise noir	$4.9 \times 10^{-14}$ -- $1.2 \times 10^{-13}$
Terre	$2.9 \times 10^{-13}$ -- $1.4 \times 10^{-11}$
Fibres de verre	$2.4 \times 10^{-11}$ -- $5.1 \times 10^{-11}$
Sable	$2.0 \times 10^{-11}$ -- $1.8 \times 10^{-10}$
Cheveux artificiels	$8.3 \times 10^{-10}$ -- $1.2 \times 10^{-9}$
Plaque de liège	$3.3 \times 10^{-10}$ -- $1.5 \times 10^{-9}$
Fils à tisser	$3.8 \times 10^{-9}$ -- $1.0 \times 10^{-8}$
Cigarette	$1.1 \times 10^{-9}$

Tableau I.2 : Perméabilité de quelques matériaux

### I-3 Concept du volume élémentaire représentatif

Comme les milieux poreux se présentent sous forme de matrice solide comportant un réseau de pores pouvant contenir plusieurs phases fluides, les écoulements et les transferts sont d'une approche difficile.

La taille des particules étant grande devant celle des pores et faibles devant celle du corps poreux.

Le passage à l'échelle macroscopique permet de construire à partir du milieu réel discontinu un milieu continu fictif, dans lequel les équations de la mécanique classique sont applicables.

Les méthodes d'analyse préconisées par Whitaker sont des méthodes de prise de la moyenne. Le changement d'échelle s'effectue en attribuant à chaque point du milieu les valeurs moyennes des grandeurs physiques prise sur un volume élémentaire représentatif.

Ce volume noté V.E.R, il est tel que :

$l_f$  représente la taille caractéristique de la porosité,  $L$  est la dimension caractéristique de l'ensemble du matériau ; sa propre échelle  $R_0$  doit satisfaire les contraintes suivantes :  
 $l_f \ll R_0 \ll L$

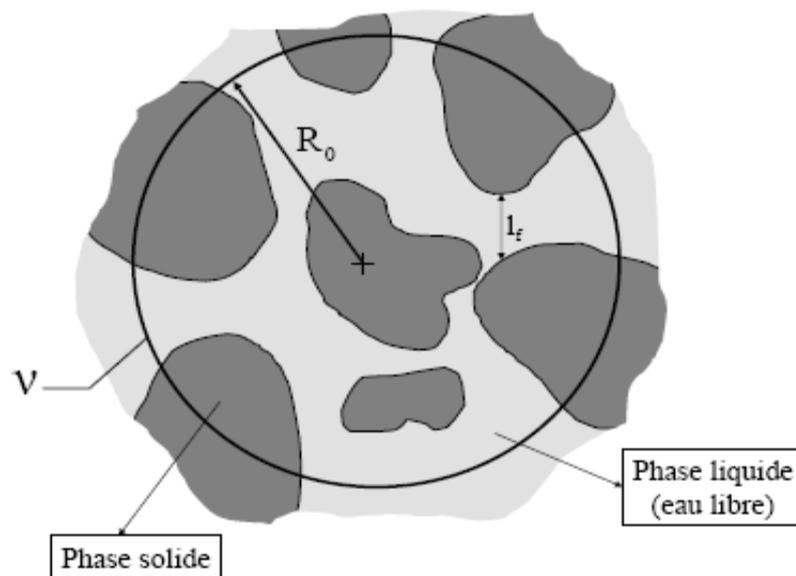


Figure I-4 : V.E.R (Volume Élémentaire Représentatif) d'un milieu poreux saturé

#### I-4 Modes de fixation de l'humidité

La plupart des matériaux utilisés dans le bâtiment sont des matériaux poreux dans lesquels la majorité des pores sont interconnectés, ce qui leur donne une aptitude à fixer l'humidité et à modifier les caractéristiques physiques du matériau.

La fixation de l'humidité résulte de trois mécanismes physiques fondamentaux :

##### a- L'adsorption

C'est la fixation des films moléculaires sur les surfaces internes des pores, on parle dans ce cas de :

- Adsorption mono moléculaire : fixation d'une seule molécule sur la surface des pores ;
- Adsorption pluri moléculaire : fixation d'une ou plusieurs couches de molécules d'eau sur la première couche absorbée ;
- Condensation capillaire : quand le diamètre des pores est suffisamment petit pour que l'eau soit présente à l'état liquide.

### b- La capillarité :

La capillarité est un phénomène qui dépend de la tension superficielle des liquides. On l'observe dans des conduits très fins (tubes capillaires ou une section de pore) où le liquide s'élève au-dessus du niveau hydrostatique.

Quand deux fluides non miscibles sont en contact avec un solide, les forces de tension superficielle surgissent en raison de l'énergie requise pour former une interface. Au point où une interface fluide-fluide rencontre un solide, un angle de contact  $\theta$ , est défini par les plans tangents à l'interface fluide-fluide et fluide-solide (fig I-6). Quand les forces de tension superficielle sont équilibrées, un angle statique de contact est obtenu :

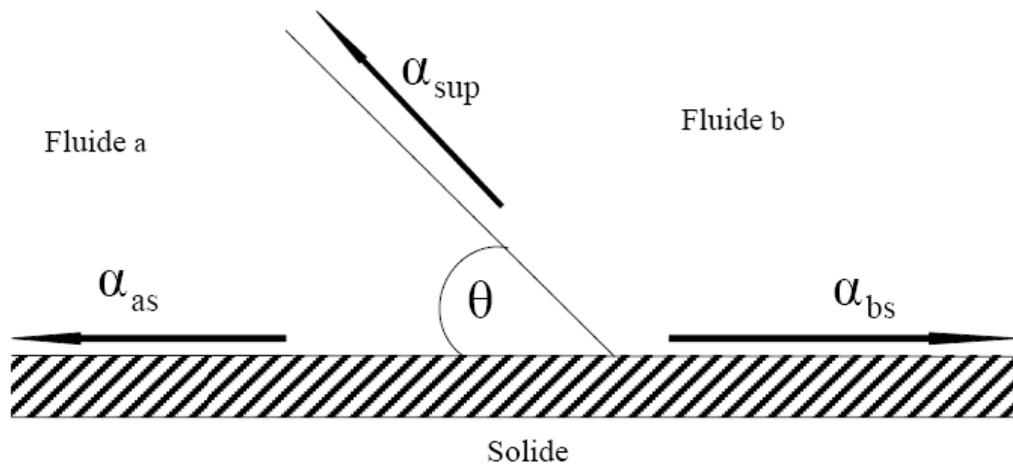


Figure I-5 : Tensions de surface fluide-fluide et fluide-solide ( $\theta$  angle de contact)

L'angle statique de contact est obtenu en faisant un bilan des tensions de surface :

$$\alpha_{bs} - \alpha_{as} = 2\alpha_{sup} \cos \theta$$

Où est la  $\alpha_{sup}$  tension superficielle entre les deux fluides.

$\alpha_{as}$ ,  $\alpha_{bs}$  sont les tensions de surface entre le solide et les fluides a et b respectivement.

Les forces de tension superficielle créent également une différence de pression  $\Delta p$  à travers l'interface entre deux fluides non miscibles. Cette différence de pression est décrite par la loi de Laplace :  $\Delta p = \alpha_{sup} k$

Où  $k$  est la courbure moyenne de l'interface.

Pour une interface fixe, qui forme approximativement un chapeau sphérique, dans un tube du rayon  $r$ , cette différence de pression peut être décrite par la relation suivante :

$$\Delta P = 2\alpha_{\text{sup}} \cos \theta \quad (\text{I.2})$$

Cette différence de pression  $\Delta p$  s'appelle <<pression capillaire>> et elle est égale aussi à ( $P_c = P_g - P_l > 0$ ).

$P_g, P_l$ : Sont respectivement les pressions de la phase gazeuse et la phase liquide.

Lorsque la capillarité est le mécanisme dominant de fixation du fluide dans le matériau, ce dernier est dit capillaro-poreux (diamètre des pores  $d > 10^{-7}$  m).

Lorsque le mécanisme dominant est l'adsorption, le matériau est dit hygroscopique (diamètre des pores  $d \leq 10^{-7}$  m).

#### **c-La condensation [4]**

La présence d'eaux en masse sur la structure du bâtiment est due soit à des effets de pluie, diffusée à l'intérieur du milieu par capillarité ou évaporée en surface, soit à des phénomènes de condensation liée au changement de phase de l'eau, passant de l'état vapeur à l'état liquide sous l'influence de variation de température.

Cette condensation dans la masse est représentée par un modèle théorique proposé par Glaser et complété par Krischer ultérieurement.

L'importance du rôle de chacun de ces mécanismes dépend :

- Des propriétés structurales du matériau (porosité...).
- De la nature de la phase aqueuse avec laquelle le matériau est mis en contact.
- Des conditions thermodynamiques (pression, température...).

Le transport d'humidité dans les milieux saturés, a été décrit à la première fois par Darcy en 1858.

Les premières modèles théoriques d'étude se fondent uniquement, sur l'apparition des phénomènes de condensations liées au mécanisme de diffusion de la vapeur au sein du matériau. Ils ont été modifiés par Krischer qui prend en compte l'influence des effets capillaires sur la phase du fluide condensé.

En faisant intervenir les effets de couplage entre transferts de masse et de chaleur, Philip Devrie et Luikov établissent la forme de cette modélisation.

## I-5 Isothermes de sorption

Le transport de la vapeur est un phénomène qui se produit lors de tout procédé de séchage. Le mouvement de la vapeur se fait soit par diffusion au sein du matériau, soit par échange au niveau de la surface entre le matériau et son environnement.

Si un produit peu humide de nature hygroscopique se trouve en contact avec la vapeur d'eau, il fixe celle-ci jusqu'à atteindre un état d'équilibre ; ce phénomène est connu sous le nom d'absorption.

Par contre lorsque le même produit est placé dans une atmosphère plus sèche, l'état d'équilibre s'établit par transfert d'humidité du produit vers l'extérieur ; ce phénomène est couramment appelé désorption. Les isothermes de sorption représentent la relation entre la teneur en liquide du produit et celle de la vapeur à la pression d'équilibre, pour des températures données.

### I-5-a forme générale

Les isothermes d'absorption/désorption présentent en général trois zones, chacune correspond à un mode de fixation particulier de l'eau sur le produit.

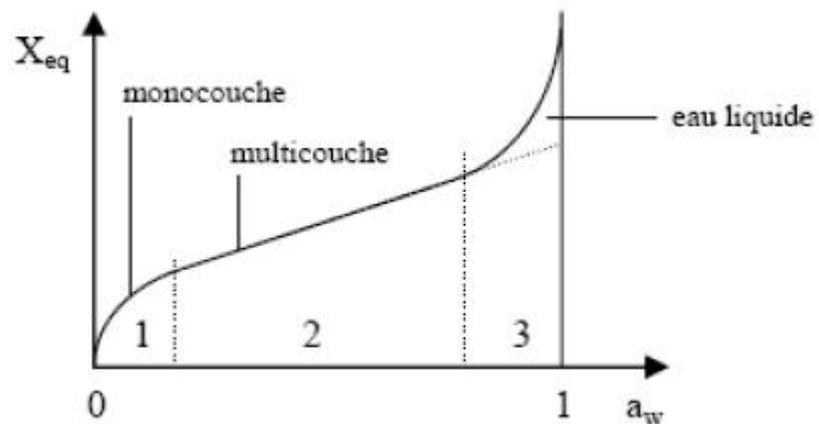


Figure I-6 : forme générale des isothermes [16]

**Zone 1 :** Constituée d'une monocouche moléculaire à la surface du produit. Elle est caractérisée de l'action des forces de Van Der Waal entre les groupements hydrophiles et les molécules d'eau. L'adsorption des molécules d'eau se fait progressivement jusqu'au produit. L'eau est à son état rigide en raison de l'importance des forces de liaisons entre

les molécules d'eau et la surface. Le passage à la zone suivante s'effectue quand toute la surface est saturée.

**Zone2 :** Adsorption des molécules sur la monocouche initiale. L'isotherme est linéaire dans cette zone et l'eau est à l'état intermédiaire entre solide et liquide.

**Zone 3 :** L'épaisseur de la pellicule est suffisante pour que l'eau soit présentée à l'état liquide dans les pores du matériau. L'eau micro capillaire constitue une phase continue.

Un écart entre l'adsorption et la désorption est observé, comme représenté dans la figure (I-6). Il est important de signaler que cet écart n'est pas encore expliqué d'une façon définitive. Certains l'attribuent au phénomène d'hystérésis dû au changement physique du matériau causé par le départ de l'eau.

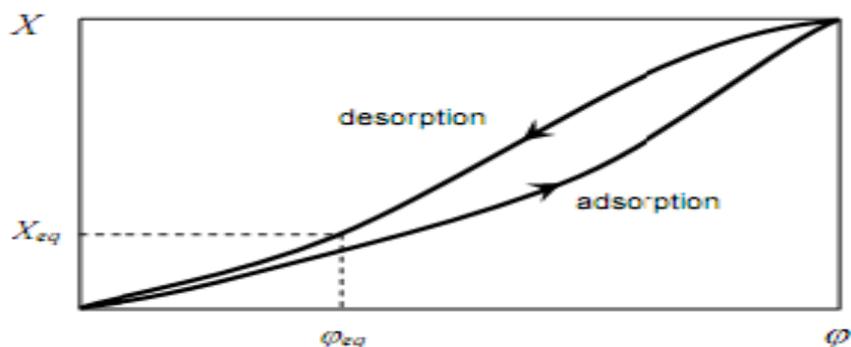


Figure I-7 : courbes de désorption et d'absorption d'un matériau hygroscopique [16]

### I-6 Pressions capillaires

La pression capillaire macroscopique est une fonction de l'eau liquide contenue. Elle est déterminée expérimentalement. Parmi les modèles expérimentaux employés pour calculer cette grandeur physique :

- Méthodes par déplacement du mercure ;
- Méthodes par centrifugation ;
- Méthodes par congélation ;
- Méthodes par gravimétrie.



L'expérience du tube capillaire met en évidence les forces de tensions superficielles au contact du liquide avec une surface, elle consiste à la mesure du liquide dans une colonne dont la base est immergée (figure I-7).

L'équation d'équilibre entre la pression hydrostatique et la tension superficielle permet d'écrire :

$$F = \alpha \cos \theta \cdot 2\pi \cdot r = \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \rho \cdot g$$

La pression capillaire est en équilibre avec la pression hydrostatique, d'où :

$$P_c = \rho \cdot g \cdot h$$

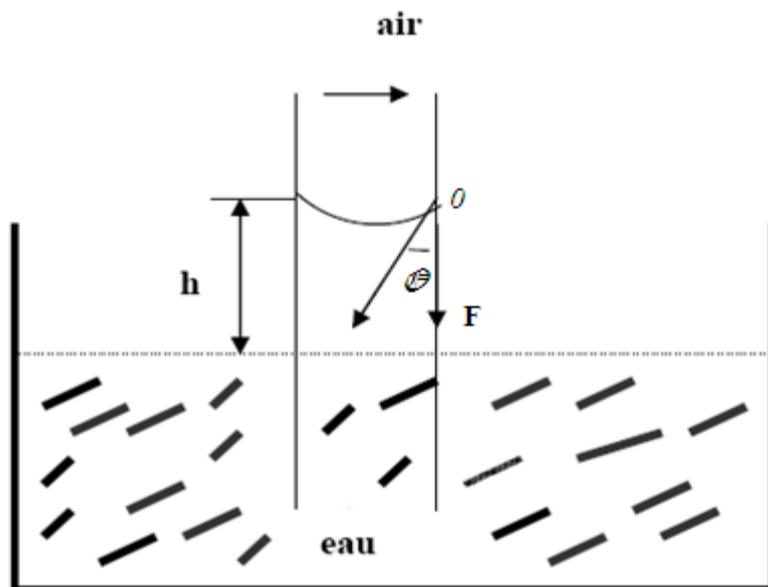


Figure I-8 : Expérience du tube capillaire mettant en évidence les forces de tension superficielle

La relation entre la pression capillaire et la tension superficielle est donnée par :

$$P_c = \frac{-2 \cdot \alpha \cos \theta}{r} \quad (I.3)$$

$\alpha$  : Tension superficielle (N/m).

$r$  : Rayon de courbure d'un pore (m).

$\theta$  : Angle de mouillage.

Comme il est difficile de trouver les caractéristiques des pores ainsi que les paramètres dont dépend la pression capillaire du milieu poreux, plusieurs études associent la variation de la pression capillaire à la variation de la teneur en eau ou saturation.

La relation entre la pression capillaire macroscopique et la teneur en humidité est appelée courbe de pression ou courbe de rétention ou courbe de sorption.

### **I-7 Déterminations de la pression capillaire par porosimétrie au mercure [8]**

La porosimétrie par intrusion de mercure est une méthode d'investigation classique pour caractériser la morphologie de solide poreux.

Elle est basée sur les lois capillaires qui gouvernent la pénétration du liquide à l'intérieur des pores minuscules. Cette loi est exprimée par Washburn pour un fluide non mouillant (le mercure est choisi grâce à ses propriétés non mouillantes à l'égard de nombreux solides) :

Le liquide pénètre dans un pore de diamètre  $D$  ( $D = \frac{1}{P} \delta \cos \theta$ ) sous l'effet d'une pression  $P$

$D$  : diamètre des pores ;

$\delta$  : La tension surfacique du mercure ;

$\theta$  : L'angle de mouillage du liquide avec le matériau.

Cette loi assimile tous les pores à des formes cylindriques, même s'ils ne le sont très rarement dans la réalité. Cependant, elle permet une représentation pratique de la distribution des pores. A chaque incrément de pression, le volume de mercure ayant pénétré dans l'échantillon est attribué au remplissage d'une catégorie de pores.

### **I-8 Lois de Darcy généralisées [6]**

On considère que le milieu poreux est totalement imbibé, c'est-à-dire que le volume des pores est entièrement rempli de fluide.

La loi de Darcy s'applique à un milieu poreux supposé homogène et isotrope parcouru par un écoulement à faible vitesse. En tenant compte de ces hypothèses, la vitesse moyenne de l'écoulement est :

$$V_f = \frac{K\Delta P}{\mu L} \quad (I.4)$$

$\mu$  : Viscosité dynamique du fluide.

$\frac{\Delta P}{L}$  : Gradient de pression appliqué à un échantillon de longueur L.

K : Perméabilité du milieu poreux.

Il est important de noter que ce paramètre est indépendant de la nature du fluide. Il ne dépend que de la structure du réseau des pores du matériau.

Il ne faut pas confondre la vitesse du filtre et la vitesse du fluide dans les pores. En effet, la vitesse de filtre est une vitesse moyenne de l'écoulement moyen effectué sur un volume comprenant une partie de solide immobile. Par conséquent, la vitesse du fluide dans les pores, appelée vitesse interstitielle, est donnée par la relation :

$V_i = \frac{V_f}{\varepsilon}$ : vitesse supérieure à la vitesse de filtre (car  $\varepsilon < 1$ ).

D'une manière générale, on peut écrire la loi de Darcy sous forme vectorielle en tenant compte de la gravité :

$$V_f = \frac{-K(\nabla P - \rho g)}{\mu} \quad (I.5)$$

## CHAPITRE II

### PARTIE A : LES MODELES DE SECHAGE

#### II-A-1 Définition

Le séchage est un processus utilisé depuis des millénaires par l'homme afin d'assurer ses besoins. Liu et al. (2002) affirme que cette opération est pratiquée en Chine depuis déjà 6000 ans. Moyne et al. (1986) rapporte que le séchage du bois a été utilisé dans des chantiers navals en Angleterre en 1772.

Le séchage est une opération qui consiste à extraire l'humidité d'un milieu poreux. Le but de cette opération est, soit de rendre aux corps traités leurs qualités mécanique ou physico-chimiques à l'état sec, soit de faciliter le transport, la manipulation du stockage ou la conservation de ses produits.

Pour sécher un matériau, il est nécessaire d'apporter de l'énergie pour évaporer l'eau qu'il contient, et d'évacuer la vapeur qui en résulte. Traditionnellement, l'apport de chaleur se fait par convection forcée à l'aide d'un courant d'air dont le flux et la température sont contrôlés. La vapeur d'eau sortant de ce produit est évacuée par ce même courant d'air, dont le pouvoir d'évaporation est également contrôlé.

#### II-A-2 Séchage des produits et matériaux poreux

Le séchage est une grande importance dans les procédés de traitement des solides. Il est souvent appliqué à un grand nombre de matériaux solides : minerais, produits pharmaceutiques, boues résiduaires, etc.

Sur le plan scientifique, le séchage est une opération caractérisée par les transferts couplés de chaleur, de masse et de la quantité de mouvement.

La modélisation du processus de séchage industriel nécessite essentiellement la connaissance des données de base, en l'occurrence les isothermes de sorption, les courbes

de la cinétique et l'évolution des dimensions du matériau au cours du séchage (quand il s'agit d'un milieu déformable).

### II-A-3 Cinétique de séchage

Les mécanismes de séchage sont complexes à décrire car les transferts de chaleur et de masse sont étroitement imbriqués. L'apport d'énergie va servir à augmenter la température du produit et à évaporer l'eau. L'eau migre de l'intérieur vers l'extérieur du produit où il est évacué par convection naturelle ou forcée vers le milieu ambiant. Plusieurs théories et modèles ont été élaborés pour prendre en compte la cinétique de séchage et appréhender les lois physiques qui contrôlent les transferts. Les complexités des mécanismes mis en jeu et le caractère variable des produits (nature, forme, propriétés physiques) empêchent de trouver un modèle unique susceptible de représenter toutes les situations. Il n'est pas étonnant dans ces conditions que les courbes caractéristiques de la cinétique de séchage présentent plusieurs étapes qui, individuellement et au cours d'une même opération, sont contrôlées par différents phénomènes de transfert.

#### II-A-3-1 Les différentes phases d'un séchage convectif :

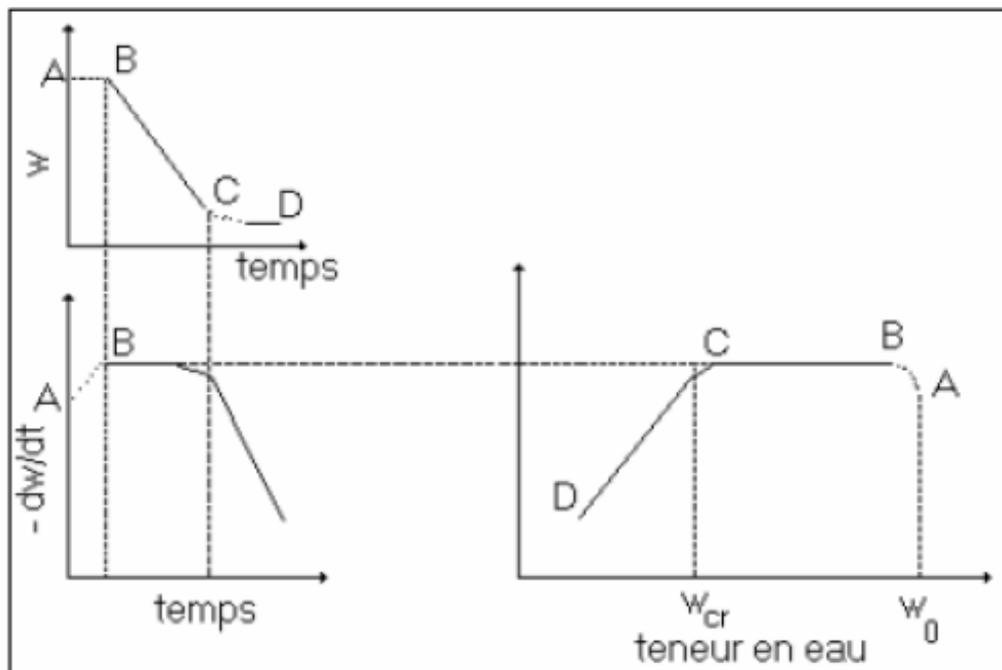


Figure II-1 : Courbes typiques de séchage convectif (Ali mohammed1992)

Le suivi de la teneur en eau  $w$  du produit exprimé en fonction du temps permet d'obtenir la vitesse de séchage ( $\frac{dw}{dt}$ ) en fonction du temps ou de la teneur en eau, et d'établir les courbes classiques de séchage. Il est habituel de considérer l'existence d'une succession d'étapes au cours de l'opération de séchage. Après une période de mise en régime dite période d'initiation (période AB) on observe souvent une période de séchage à vitesse constante (période BC) puis une ou deux périodes à allure décroissante, voir figure (II-1). Cette phase est définie comme étant une phase de mise en régime des transferts de chaleur et de matière à la surface saturée du produit. La quantité de chaleur apportée durant cette période contribue à élever la température du produit tout en vaporisant une certaine quantité de soluté. Ce phénomène se produit jusqu'à ce que le transfert de chaleur compense exactement le transfert de matières. Cette période est également courte par rapport au temps global du séchage.

➤ **Phase à vitesse constante**

Pendant cette phase, l'humidité est acheminée en flux continu vers la surface du produit. Les caractéristiques du milieu ambiant étant fixées, le flux massique à la paroi est, par conséquent constant. Pendant cette phase la vitesse dépend uniquement des paramètres externes. Cette phase s'achève lorsque le matériau atteint une humidité moyenne  $W_{cr}$  appelée humidité critique. Cette valeur correspond à la limite supérieure du domaine hygroscopique.

➤ **Phase de ralentissement de la vitesse de séchage**

En dessous de  $W_{cr}$  les forces capillaires ne sont plus suffisantes pour acheminer l'eau vers la surface du produit, c'est le début de la 1<sup>ère</sup> phase de ralentissement. La vitesse de séchage ne peut plus être maintenue constante et elle commence à décroître. Les propriétés physiques du corps ont séché influent de plus en plus sur le déroulement du séchage. Les mécanismes de déplacement mis en œuvre pendant cette phase, sous l'effet de la capillarité tout au long des parois des pores, sont l'évaporation et la condensation. Ces mécanismes reposent sur l'idée d'une diffusion d'eau sous forme gazeuse à travers les pores du solide et d'une immobilisation partielle par adsorption (mécanisme de condensation).

#### **II-A-4 les différentes approches proposées de la littérature**

La modélisation dans les milieux poreux, s'inspire des méthodes classiques de la mécanique des milieux continus. Plusieurs approches ont été utilisées pour décrire les mécanismes de séchage. Ces approches supposent généralement la prédominance d'un ou de plusieurs mécanismes de transfert. Elles sont classées comme suit :

- Les modèles cinétiques qui supposent que l'étape limitante est le transfert de l'eau liquide du cœur du produit vers la surface sans tenir compte de l'apport énergétique (diffusion liquide isotherme, et migration de l'eau par capillarité).
- Les modèles cinétiques où interviennent simultanément les transferts de chaleur et de matière. L'humidité est transférée essentiellement par les mécanismes diffusionnels : diffusion limitée à la phase gazeuse, et diffusion simultanée de plusieurs phases.
- Les modèles prenant en compte les transferts de matières et de chaleur avec incidence réciproque de l'un sur l'autre selon le principe thermodynamique des processus irréversibles.

##### **II-A-4-a Modèle de Sherwood**

L'approche faite par Sherwood assimile le mécanisme de transfert interne à une diffusion moléculaire décrite par la loi de Fick :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (\text{II.1})$$

D : coefficient de diffusion

Ce modèle appliqué au séchage du bois et de l'argile, il donne des résultats plus ou moins satisfaisants. Les différences constatées pour certains matériaux sont attribuées à l'obligation de mener les calculs avec un coefficient de diffusion constant [3].

##### **II-A-4-b Couplage des transferts**

La mise en place des équations de couplage des différents transferts de chaleur et de masse est essentiellement le fruit du travail de Krisher et Philip Devries. Ces théories supposent que le milieu poreux est continu et localement en équilibre thermodynamique.

➤ **Théorie de Krisher (1963)**

Cette théorie est basée sur l'analyse des transferts de chaleur et de masse d'une grande variété du milieu poreux. Elle suppose que, pendant le séchage, l'humidité peut se déplacer sous forme liquide par capillarité et sous forme vapeur sous l'action d'un gradient de concentration en vapeur.

Les flux de vapeur et de liquide ont pour expressions :

$$q_l = D_L \rho_l \text{grad}(w) \quad (\text{II.2})$$

$$q_v = D_V \rho_v \text{grad}(P_v) \quad (\text{II.3})$$

Avec  $D_L, D_V$  sont respectivement les valeurs des coefficients de diffusion de la vapeur et du liquide.

➤ **Modèle de Luikov (1961)**

Luikov met en évidence le phénomène de thermo diffusion et établit qu'un thermo gradient provoque le déplacement de l'humidité à l'intérieur du matériau.

Pour modéliser les transferts de chaleur et de masse dans les milieux poreux, il a proposé la division des flux de liquide et de vapeur en deux parties, l'une induite par un gradient de concentration, et l'autre par un gradient thermique ce qui donne le système d'équations suivant :

$$q_l = D_L \rho_s \text{grad}(w) - D_{LT} \rho_s \text{grad}(T) \quad (\text{II.4})$$

$$q_v = D_V \rho_s \text{grad}(w) - D_{VT} \rho_s \text{grad}(T) \quad (\text{II.5})$$

Ce système d'équations est ensuite associé aux bilans d'énergie et de masse. Pour expliciter le terme de vaporisation –condensation, Luikov introduit le taux de changement de phase. Le terme de la variation temporelle locale de la quantité de vapeur condensée est représenté par  $\varepsilon' \rho_s \frac{\partial w}{\partial t}$  où  $\varepsilon'$  est le taux de changement de phase, qui est une fonction inconnue. Le système d'équations suivant peut être formulé :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div}[ \text{grad}(w) + \delta_s \text{grad}(T) ] \quad (\text{II.6})$$

$$\frac{c_p \rho_s \partial t}{\partial t} = \text{div} [D_T \text{grad} w] - \frac{L_{vs} \rho_s}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

$L_V$ : Chaleur latente de vaporisation

$D_V + D_L$  : Coefficient de diffusion total

$$\delta_S = \frac{(D_{VT} + D_{LT})}{(D_V + D_L)} : \text{coefficient de thermodiffusion.}$$

L'indétermination des rend le calcul du terme de changement de phase, et par voie de conséquence du bilan énergétique tout à fait arbitraire.

### ➤ **Modèle de Philip\_DeVries (1957)**

Ce modèle propose une description des transferts de chaleur et de masse dans les milieux poreux non saturés. Cette approche est basée sur l'étude des comportements thermiques et hydriques des sols pour lesquels le mouvement de l'humidité est supposé s'effectuer par capillarité et diffusion ou sous l'action des gradients d'humidité, de température et également de gravité. Les flux liquides et vapeur sont calculés individuellement, ce qui permet d'obtenir le taux de changement de phase.

Les flux liquides et vapeur en fonction des gradients d'humidité et de température ont pour expressions :

$$q_l = D_L \text{grad}(w) - D_{LT} \rho_s \text{grad}(T) - D_i \quad (\text{II.8})$$

$$q_v = D_V \text{grad}(w) - D_{VT} \rho_s \text{grad}(T) \quad (\text{II.9})$$

Les coefficients  $D_L, D_{LT}$  de migration de la phase liquide sont déterminés à partir de la courbe de succion capillaire.

$D_i$  : Flux due à la gravité

$D_{VT}$  : Coefficient de thermo- migration de la vapeur.

Le système d'équations gouvernant la migration de l'humidité et la chaleur est tel que :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div} [D \text{grad}(w) + D_T \text{grad}(T)] \quad (\text{II.10})$$

$$\frac{c_p \rho_s \partial t}{\partial t} = \text{div} [D_T \text{grad} T] + L_V \text{div} [D \text{grad}(w)] \quad (\text{II.11})$$

## II-A-5 Evolutions récentes

Les milieux poreux se présentent également comme des matrices solides comportant un réseau des pores pouvant contenir plusieurs phases fluides. Les écoulements et les transferts qui prennent place dans tels milieux sont d'une approche difficile. En effet, la modélisation des transferts en milieu poreux à l'échelle du pore (microscopique) est pratiquement irréalisable.

Le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique s'effectue selon plusieurs méthodes citons par exemple les méthodes de réseau basées sur la notion de percolation de gaz sur réseaux, et les méthodes d'homogénéisation.

L'approche que nous utilisons est l'approche dite « macroscopique », basée sur l'existence d'un volume élémentaire représentatif (V.E.R).

### II-A-5-1 Concept de volume élémentaire représentatif (V.E.R)

Il permet la définition d'une grandeur macroscopique comme la moyenne sur ce V.E.R de la grandeur prise à l'échelle microscopique (ou échelle des pores). La taille de ce V.E.R doit être suffisamment grande pour que les hétérogénéités présentes à l'échelle microscopique ne soient plus apparentes à l'échelle macroscopique.

L'existence de ce V.E.R est admise lorsque la taille des pores est très petite devant les longueurs caractéristiques du solide poreux.

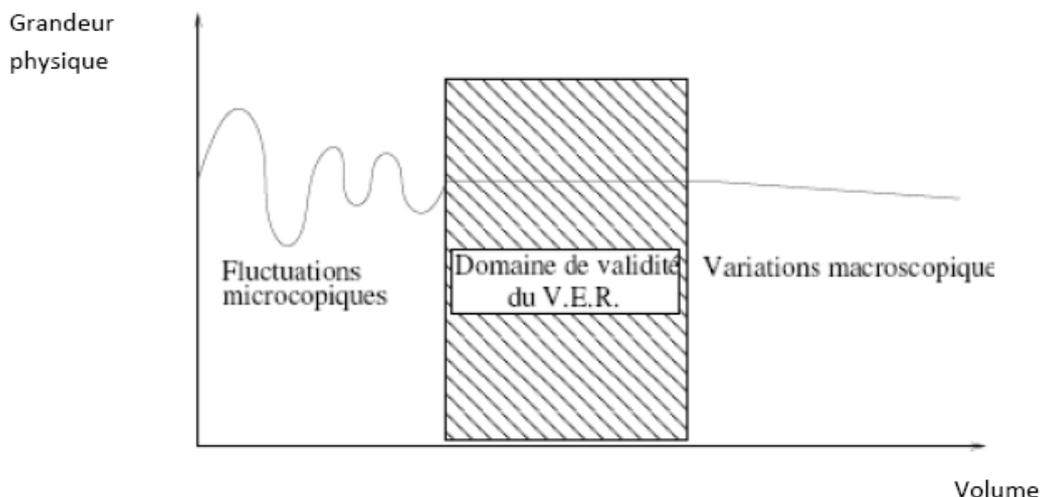


Figure II-2 : Volume Élémentaire Représentatif

### **II-A-5-2 modèle de Whitaker (1980)**

L'utilisation de la démarche du V.E.R, a permis en particulier à Whitaker de mettre en place un modèle couplé de transfert de chaleur, de masse et de quantité de mouvement applicable au processus de séchage. Whitaker a émis des hypothèses et a procédé à des simplifications conduisant à un système complet d'équations pouvant modéliser le déroulement du séchage des corps poreux. Le passage à la moyenne fait apparaître de nombreux termes supplémentaires qui, pour la majorité, sont uniquement accessibles du point de vue macroscopique.

Le modèle de Whitaker est basé sur les considérations suivantes : [13]

- La phase solide qui constitue le milieu poreux est rigide et isotropique dans le sens macroscopique.
- La pression totale de la phase gazeuse est uniforme et constante.
- Il n'y a pas de réaction chimique entre les phases solides, liquides et gazeuse.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligé.
- Les effets de la dissipation dans l'écoulement sont négligeables.
- Le flux d'apport d'humidité est négligé.

### **II-A-5-3 Modèle de diffusion**

Ce modèle est gouverné par l'équation de diffusion. Le premier qui a suggéré son utilisation est Lewis en 1921 [3].

Il a écrit : « l'humidité fraîche se diffuse de l'intérieur du solide, vers la surface pour restituer sa teneur en humidité. Les profils d'humidité seront déterminés par l'intégral de l'équation de diffusion ».

Sherwood et Coworker sont pris cette idée et ont établi des solutions à l'équation de diffusion aussi bonne que les données expérimentales.

Suivant le modèle de diffusion, le point critique est atteint quand l'humidité de surface du produit est la valeur d'équilibre ou nulle pour les solides non hygroscopiques.

## **PARTIE B**

### **DETERMINATION DU COEFFICIENT DE DIFFUSION MASSIQUE**

#### **II-B-1 Définition**

La diffusivité massique est la propriété d'un corps, qui permet de caractériser l'aptitude de l'eau d'y migrer sous l'influence d'un gradient de concentration, de teneur en eau, de pression partielle de vapeur, etc....

#### **II-B-2 Le coefficient de diffusion massique**

Bien que faisant partie des paramètres physiques auxquels les scientifiques s'intéressent depuis des décennies, le coefficient de diffusion massique dépend de la température et de la teneur en eau. Toutefois, il est possible de travailler à température constante et de faire varier l'humidité relative de façon à minimiser l'effet du gradient de teneur en eau. Lorsque le coefficient de diffusion est calculé à partir d'une solution analytique des lois de Fick, comme c'est le cas dans les travaux de Zohoum1998 ; Mouchot2002, on peut considérer sa valeur constante.

La recherche des techniques fiables et rapides amène les scientifiques à proposer des différentes approches tant théoriques qu'expérimentales. La connaissance du coefficient de diffusion massique spécifique au milieu étudié est nécessaire afin de pouvoir simuler numériquement la distribution de l'humidité dans diverses situations subies par le milieu poreux étudié.

Ce coefficient peut être obtenu par calcul théorique à l'aide d'expressions théoriques ou par détermination expérimentale en utilisant des formules empiriques.

#### **II-B-3 Méthodes expérimentales [13][17]**

La diffusivité massique est un paramètre phénoménologique, sa détermination est basée sur deux étapes complémentaires :

-La collecte de données expérimentales.

-L'analyse de ses données.

Dans la collecte des données on distingue :

➤ **Mesures en régime permanent**

On mesure l'évolution de la masse d'un échantillon jusqu'à l'équilibre, soumis à deux valeurs d'humidité relative d'une part et d'autres.

La technique la plus classique est celle du « vaporimètre » dont le perfectionnement s'est développé à travers des années.

➤ **Mesures en régime transitoire**

C'est le suivi au cours du temps de la teneur en eau d'un échantillon préalablement en équilibre, et à l'humidité relative contrôlée, subissant une variation brusque. Dans ce cas on utilise la technique de la pesée successive, et la gravimétrie. Le principe de la méthode gravimétrique consiste à découper l'échantillon en tranches, déterminer la teneur en eau de chaque tranche, et peser les tranches avant et après le séchage.

Une cellule de diffusion du type de Wicke et Kallenbach (utilisée depuis longtemps pour mesurer la diffusivité apparente des réactifs au sein du milieu poreux comme les catalyseurs solides) a été mis au point par Mouchot et al (2002) pour mesurer de façon indirecte la diffusivité de la vapeur d'eau dans le bois grâce à la diffusion de gaz inertes à travers le bois. En plus de ces techniques, il existe d'autres moyens de mesure du coefficient de diffusion par ultra son (Minamisawa et al 1994). La mesure du flux de vapeur d'eau par Tomographie (1999), la résonance magnétique nucléaire (NMR) (L. Pel, 1995), les rayonnements micro-ondes, mesure de la diffusivité massique à partir de la résistance électrique du matériau bois, mesure de la teneur en eau du bois à l'aide des rayons X (Remon).

Deuxième étape ; l'analyse des données : bien que l'expérimentation soit une base primordiale du processus, le choix conséquent d'une méthode théorique pour analyser correctement les données expérimentales est aussi indispensable. Le phénomène de transport de l'humidité dans les milieux poreux est gouverné par une série d'équations aux dérivées partielles non linéaires dont la résolution analytique est difficile.

Il existe plusieurs solutions analytiques, (quelques exemples ont été cités dans [13], [14]. Etant donné les limites des méthodes analytiques, la simulation numérique est beaucoup

plus adaptée à la détermination de la diffusivité massique en régime transitoire. La prise en compte plus ou moins complète des conditions initiales et aux limites est l'un des atouts majeurs de la simulation numériques.

Un modèle numérique de résolution des phénomènes de transferts peut être utilisé de deux façons assez différentes :

Le premier type de simulation permet de prédire le champ spatial des variables d'état (teneur en eau, température, pression) au cours du temps. Dans ce cas, le modèle utilise des valeurs mesurées, calculées ou estimées pour les paramètres physiques.

EL-Kouali et al (1992) ont par exemple mis au point un modèle numérique susceptible de prédire la cinétique d'absorption ou de désorption en 3D lorsque le coefficient de diffusion est connu [13]. De même, le code de transport (Perré 1992 ; Perré et Turner 1999) la simulation de transferts couplés de chaleur et de masse en milieux poreux fait partie de la même famille.

La méthode inverse, permet d'identifier des paramètres inconnus par comparaison avec des résultats expérimentaux.

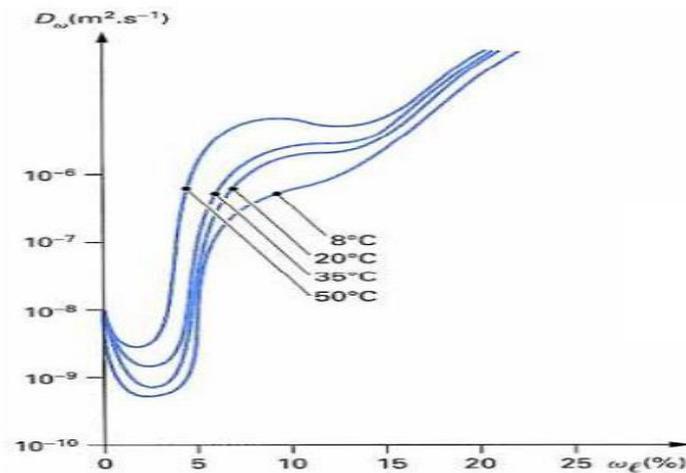
### **II-B-3-1 Expérience de Crausse**

Crausse [15][18] a effectué des expériences sur du sable quartzéux, le dispositif expérimental est composé de cellules métalliques cylindriques, de section circulaire dans lesquelles est mis en place le milieu poreux préalablement humidifié par mouillage. Ces cellules sont ouvertes à l'une des extrémités et imperméables sur les autres surfaces. Une deuxième cellule contenant un produit desséchant, ou un autre matériau poreux en équilibre hygrométrique est montée à l'extrémité ouverte. L'ensemble étanche, constitué de deux cellules montées bout à bout, est placé dans une enceinte à température constante.

La teneur en eau pondérale initiale du milieu étudié (a été choisie de l'ordre de 5%), la plage de la teneur en eau est de  $5\% \leq S \leq 23\%$ . Les expériences se sont déroulées à des températures moyennes de 8°C, 20°C, 35°C, et 50°C.

Les résultats ont montré un transfert d'humidité dans le dessicatif ou vers l'autre matériau poreux ; transfert en phase liquide et vapeur pour le premier cas, et transfert en phase liquide seulement dans le deuxième cas.

Ce qui permet pour l'expérience, l'accès au coefficient de diffusion global  $D$ , et aussi à celui du coefficient de diffusion de la phase liquide grâce à l'expérience avec les deux milieux poreux, et par conséquent le coefficient de diffusion de la phase vapeur est obtenu. L'allure du coefficient de diffusion est représentée dans la figure ci-dessous (à différentes températures).



Rapport-gratuit.com  
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MEMOIRE

Figure II-3 : Diffusivité massique effective totale (gaz+liquide) d'après Crausse [18]

L'évolution générale de ces coefficients décrite par De Vries (1958) est représentée sur la (figure II-4). Tous les chercheurs s'accordent en ce qui concerne la croissance logique du coefficient  $D_l$  avec la teneur en eau.

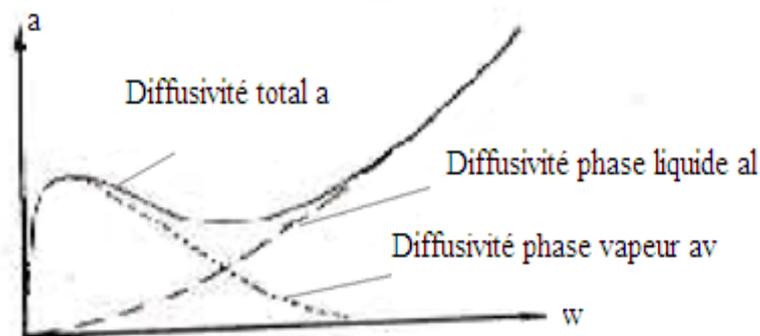


Figure II-4 : Evolution du coefficient de diffusion capillaire (température constante) [17]

#### II-B-3-2 Expérience d'Ohtani et al

La valeur du coefficient de diffusion a été déterminée à partir d'un dispositif expérimental servant à mesurer la concentration d'humidité dans un lit granulaire, contenant soit du sable de mer ou de la brique en poudre.

Le dispositif expérimental est constitué des cellules exposées à un air chaud de température 60°C, l'humidité est maintenue constante grâce à une micro seringue qui assure l'alimentation en eau à une très faible vitesse.

Ohtani et al ont mesuré la variation de la quantité d'humidité durant toute la période de l'expérience, ils ont pu établir des relations empiriques donnant l'expression du coefficient de diffusion en fonction de la concentration d'humidité.

Pour le sable de mer

$$D=2.5 \times 10^{-5} \exp^{0.032C} \quad C \leq 225 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{II.12})$$

Pour la brique

$$D=4.6 \times 10^{-6} \exp^{0.04C} \quad C \leq 230 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{II.13})$$

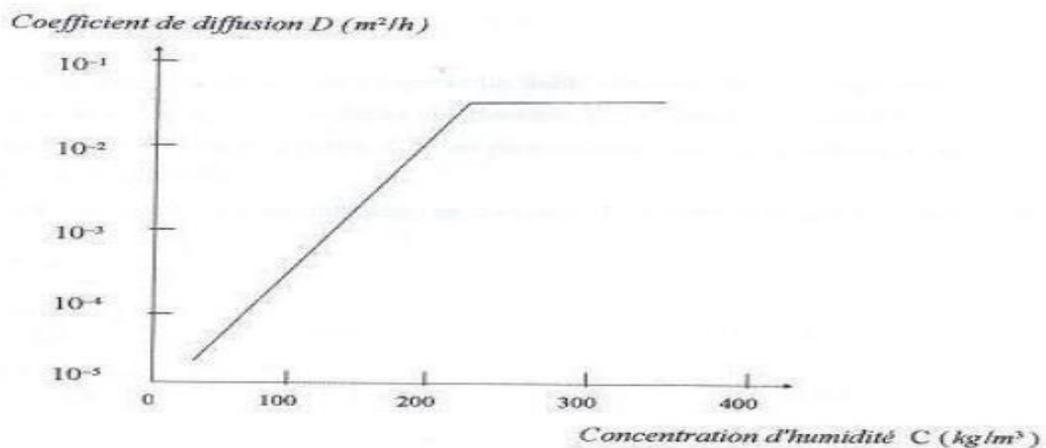


Figure II-5 : Résultat expérimental de la diffusion de l'humidité dans la brique par Ohtani [17]

Pour notre étude nous nous servirons de la courbe de Crausse, précédemment citée pour représenter sous forme empirique la variation du coefficient de diffusion massique isotherme avec la saturation.

Les courbes expérimentales obtenues par Crausse ont été mises sous forme mathématique grâce à un logiciel d'interpolation « FITTING », une expression polynomiale a été choisie avec un coefficient de corrélation égale à 99%. Cette corrélation est donnée comme suit :

$$\log D = -8.14606 - 132.068S + 5097.55S^2 + 57519.6S^3 + 266822S^4 + 439586S^5 + 3944.53S^6 \text{ (II.14)}$$

### II-B-3-3 Coefficient de diffusion de l'argile

Le modèle est appliqué au séchage de l'argile de Kaolin, où l'évolution de l'humidité a été mesurée au moyen de formation d'images de (NMR) résonance magnétique nucléaire, pendant le séchage d'un morceau d'argile de Kaolin. Le coefficient de diffusion est ensuite évalué à partir des résultats expérimentaux.

D'abord, ce coefficient de diffusion est obtenu à partir des profils monodimensionnels du réseau de neurones artificiel (ANN) de l'évolution de l'humidité, les résultats obtenus sont dans la figure ci-dessous :

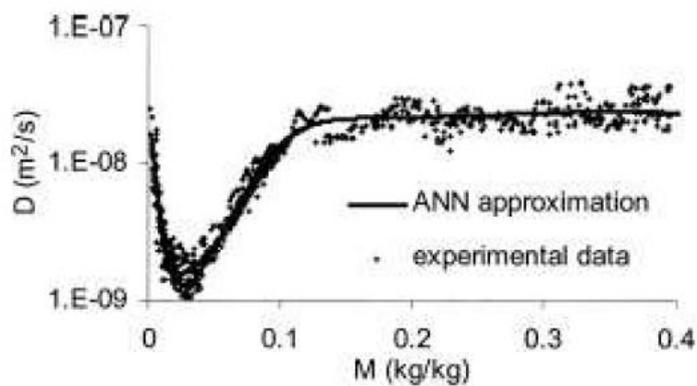


Figure II-6 : Coefficient de diffusion obtenu dans le cas monodimensionnel à 20°C

Ensuite le coefficient de diffusion de l'argile de Kaolin a été calculé à partir des résultats de l'expérience bidimensionnelle en utilisant une méthode fondée sur l'hypothèse, et que D dépend seulement du contenu d'humidité. Les résultats obtenus sont représentés dans la figure suivante :

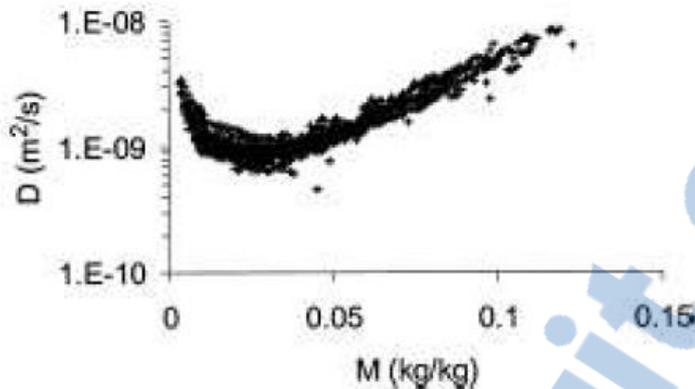


Figure II-7 : Coefficient de diffusion à partir de l'évolution du profil de l'humidité en 2D.

#### **II-B-3-4 Influence des conditions de séchage sur la diffusion et le coefficient de diffusion massique**

Les travaux de recherche menés par Sander sur l'argile montrent que la température de l'air de séchage et la teneur en humidité initiale influent fortement sur les propriétés de séchage et la cinétique de séchage. Ceci est confirmé par les travaux de Chemkhi qui a travaillé dans des différentes conditions expérimentales en changeant la température et l'humidité relative de l'air de séchage et de l'argile. Le coefficient de diffusion a été déterminé expérimentalement, en fonction du contenu d'humidité. Une modélisation polynomiale du coefficient de diffusion effectif a été faite pour réduire que, le coefficient de diffusion dépend des conditions expérimentales. Par conséquent, le coefficient de diffusion est en fonction de la teneur en eau et des conditions de séchage.

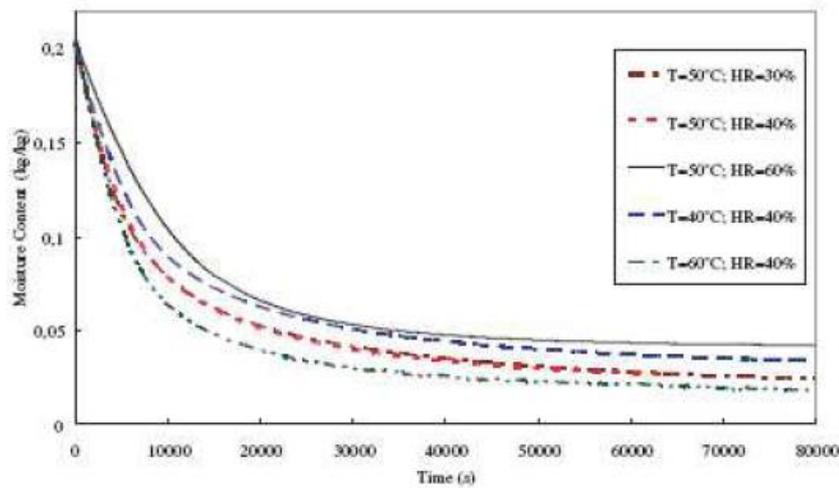


Figure II-8 : Cinétique de séchage de l'argile pour différents conditions expérimentales [21]

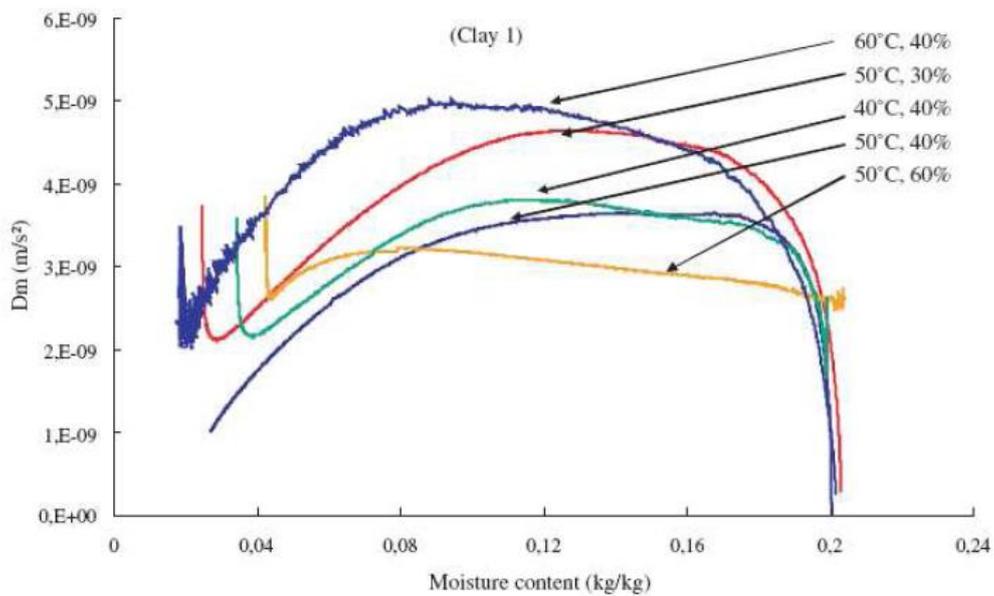


Figure II-9 : Diffusivité massique de l'argile pour différents conditions de séchage [21]

Le coefficient de diffusion massique global isotherme est la somme du coefficient de la phase liquide et de la phase vapeur, dont l'expression est la suivante :

$$D = D_L + D_V \quad (\text{II.15})$$

$$D_L = \left( \frac{\rho_L}{\rho_0} \right) \frac{k(S,T) \partial \psi(S,T)}{\partial S} T \quad (\text{II.16})$$

$$D_V = \frac{F(S)D_V[M_V 2P_{VS}P]}{\rho_0 R^2 T^2 P - P_V} g\left(\frac{\partial \psi}{\partial S}\right) t \phi \quad (\text{II.17})$$

La détermination de ces coefficients requiert la connaissance de paramètre représentant des propriétés thermo physique des fluides, accessible par les tables. Toutefois les grandeurs fondamentales, caractérisant les interactions de la matrice solide sur le comportement dynamique et statique de l'humidité nécessitent une détermination. Il s'agit respectivement de K (conductivité hydraulique), de  $\psi$  (succion), de F (coefficient de pondération), de coefficient de diffusion moléculaire de la vapeur et de  $\phi$  (humidité relative d'équilibre).

### La relation $\psi(S, T)$

Plusieurs moyens expérimentaux sont mis en œuvre en vue d'accéder à cette relation, selon le type de matériau étudié, on cite par exemple une méthode utilisant le principe de remontée capillaire de l'humidité dans des échantillons de milieu poreux en contact avec une surface libre d'eau. La distribution d'humidité obtenue en régime permanent permet d'obtenir  $\psi(S)$  à une température donnée. Cette procédure est utilisée pour des matériaux à faibles propriétés de relation capillaire, comme la laine de verre.

On cite aussi l'expérience où les échantillons de milieu poreux, probablement humidifiés à teneur en eau faible, sont introduits dans un dessiccateur placé dans une enceinte thermo statée. La pression de vapeur dans le dessiccateur est contrôlée par une solution aqueuse d'acide sulfurique de concentration donnée. La succion correspondant à l'équilibre thermodynamique, une fois celui-ci est alors calculée par application de la relation de Kelvin.

$$\Psi = \frac{RT}{Mg} \log \phi \quad (\text{II.18})$$

$$\text{Avec } \phi = \frac{P_V}{P_{VS}}$$

La teneur en eau était déduite de la pesée de l'échantillon.

-la détermination d'expression de la succion  $\psi$  en fonction de la saturation nécessite le calcul de la pression capillaire à l'aide de la loi de Laplace :

$$P_C = \frac{2\alpha \cos \theta}{r} = \rho_L g \Psi(S) \quad (\text{II.19})$$

$$\Psi(S) = \frac{-2\alpha \cos \theta}{r \rho_l g} \quad (\text{II.20})$$

### La relation K(S, T)

La perméabilité des milieux poreux constitue un facteur de proportionnalité entre la vitesse moyenne de l'écoulement et le gradient de potentiel provoquant cet écoulement. La détermination de ce paramètre par voie expérimentale est nécessaire, son expression est donnée par la loi de Darcy :

$$v = -K \text{ grad} \Phi \quad (\text{II.21})$$

Avec  $\Phi = \psi - z$

$v$  : vitesse de filtration ou densité de flux volumique.

$\Phi$  : Potentiel à la cote  $z$ .

La vitesse de filtration et le gradient de potentiel sont déterminés expérimentalement dans des conditions isothermes.

Lorsqu'on impose un cycle de drainage à une colonne de milieux, la détermination locale des densités de flux volumiques évacuées entre divers instants, et des gradients de potentiels correspondants, permettent d'évaluer  $K$ .

La dépendance de  $K$  vis -à-vis de la température est liée essentiellement à la connaissance de la viscosité dynamique  $\nu$ , d'où l'expression suivante :

$$k(S, T) = \frac{k(S)g}{\nu(T)} \quad (\text{II.22})$$

### Relation de F(S)

Le paramètre  $F(S)$  prend principalement en compte les effets de tortuosité du milieu. Des études récentes (Bories et al, 1980), relatives à l'influence de la température sur la conductivité thermique des milieux poreux non saturés, ont permis d'inclure de manière globale dans le coefficient  $F(S)$ , non seulement les effets de tortuosité, mais également les effets de distillation de la vapeur pouvant se développer dans le milieu considéré.

## II-B-5 Transferts thermiques

Le transfert thermique à travers un milieu poreux s'effectue selon trois modes de transfert : conduction, convection et rayonnement. Dans cette étude, nous nous intéressons exclusivement au transfert thermique par conduction, ainsi nous négligerons les autres modes de transfert.

Par définition, le transfert thermique par conduction au sein d'un milieu s'effectue sans déplacement de la matière sous la seule influence de la différence de températures entre deux zones.

La théorie de la conduction repose sur la loi de Fourier, la densité du flux est proportionnelle au gradient de la température :

$$\vec{\phi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (\text{II.23})$$

L'équation générale de la conservation de l'énergie est donnée par la relation : [19]

$$C_p \rho_S \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \Delta h v \left[ \frac{\partial \dot{m}_v}{\partial x} + \varepsilon \frac{(1-s)}{RT} M_v \frac{\partial P_v}{\partial t} \right] - Q_0 = 0 \quad (\text{II.24})$$

- Le premier terme est la variation de la température du corps au cours du temps.
- Le deuxième terme est la densité du flux de chaleur par conduction.
- Le troisième terme est le flux consommé par l'évaporation de l'eau dans le corps, le terme  $\varepsilon \frac{(1-s)}{RT} M_v \frac{\partial P_v}{\partial t}$  est souvent négligé.
- Le quatrième terme est la densité volumique du flux de chaleur apportée par rayonnement (dans notre étude, il est négligé).

L'équation (II-23) devient :

$$C_p \rho_S \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \Delta h v \left[ \frac{\partial \dot{m}_v}{\partial x} \right] \quad (\text{II.25})$$

Tel que :

$\lambda$  : La conductivité thermique du milieu.

$C_p \rho_S$  : La chaleur volumique.

$\Delta h_v$  : La chaleur latente de vaporisation.

$\dot{m}_v$ : Flux massique d'évaporation.

## II-B-6 La conductivité thermique dans les milieux poreux

La conductivité thermique est une propriété caractérisant le transfert thermique des milieux, sa mesure est souvent complexe car elle dépend de plusieurs paramètres. La conductivité thermique apparente doit prendre en compte certains paramètres tels que la conductivité thermique de chaque phase, leurs fractions volumiques, la structure de la matière solide, et les zones de contacts entre particules.

Les modèles décrits dans la littérature sont des outils de prédictions développés afin d'appréhender les mécanismes de transfert thermique dans les solides. Ces modèles devraient permettre la prise en compte de petites échelles (forme de particules, zones de contact) et de grandes échelles (conditions aux limites, porosité).

### II-B-6-1 Variation de la conductivité thermique en fonction de la porosité

Dans le tableau (II-1), nous allons présenter quelques modèles proposés dans la littérature.

Modèle	Formules	Remarques
Parallèle	$\lambda_{app} = \sum \varepsilon_i \lambda_i$	Milieu constitué de plusieurs strates parallèles entre elles
Série	$\lambda_{app} = (\sum \varepsilon_i \lambda_i)^{-1}$	Milieu constitué de plusieurs strates en série entre elles
Maxwell	$\lambda_{app} = \frac{\varepsilon \lambda_f (2\lambda_f + \lambda_s) + 3\alpha \lambda_s \lambda_f}{\varepsilon (2\lambda_f + \lambda_s) + 3\alpha \lambda_f}$	Particules sphériques sans aucune interaction mutuelle entre elles.
De Vries	$\lambda_{app} = \frac{\varepsilon \lambda_f + \alpha \lambda_s G}{\varepsilon + \alpha G}$	Extension du modèle de Maxwell aux particules ellipsoïdales
Krisher	$\lambda_{app} = \frac{\lambda_{serie} \lambda_{parallele}}{b \lambda_{serie} + (1-b) \lambda_{parallele}}$	Combinaison du modèle en série avec celui en parallèle.

Tableau II-1 : Modèles de mesure de la conductivité thermique à partir de la porosité [23].

$\lambda_s$ : Conductivité thermique de la phase solide.

$\lambda_f$ : Conductivité thermique du fluide.

$\varepsilon_i = \varepsilon, \alpha$  représente la porosité de la phase fluide continue et celle de la phase solide discontinue.

G : représente le rapport des gradients moyens de température dans la matrice fluide et dans les particules solides.

Pour un lit fixe, la valeur de  $b=0,2$  est recommandée par les auteurs.

Pour le cas du milieu poreux, la variation de la conductivité est décroissante en fonction de la porosité. Lorsque la porosité augmente, la conductivité thermique apparente diminue voir (figure II-10), cela est dû à l'intervention de l'air qui représente un milieu isolant pour le passage de la chaleur.

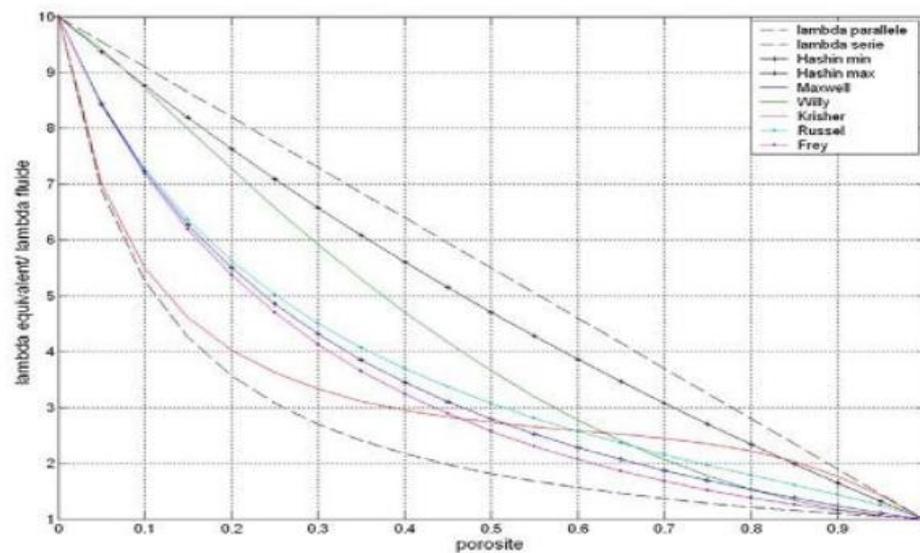


Figure II-10 : Variation de la conductivité thermique en fonction de la porosité pour plusieurs modèles [25].

## II-B-6-2 La variation de conductivité thermique en fonction de la teneur en eau

L'humidité peut s'évaporer et se condenser dans des parties plus froides du matériel. Ces phénomènes peuvent mener à des ambiguïtés pour définir la conductivité thermique.

La valeur de la conductivité thermique d'un milieu poreux donné, se situe entre la conductivité thermique de la phase solide  $\lambda_s$ , et celle de la phase fluide  $\lambda_f$ , quel que soit l'état de saturation en fluide.

Le transport de chaleur dû à la diffusion de la vapeur d'eau dans les corps poreux a été étudié expérimentalement et théoriquement par Krischer et De Vries.

Les courbes ci-dessous représentent la variation du rapport de la conductivité thermique humide divisé par la conductivité à l'état sec, en fonction de la teneur en eau, à une température moyenne de 20°C.

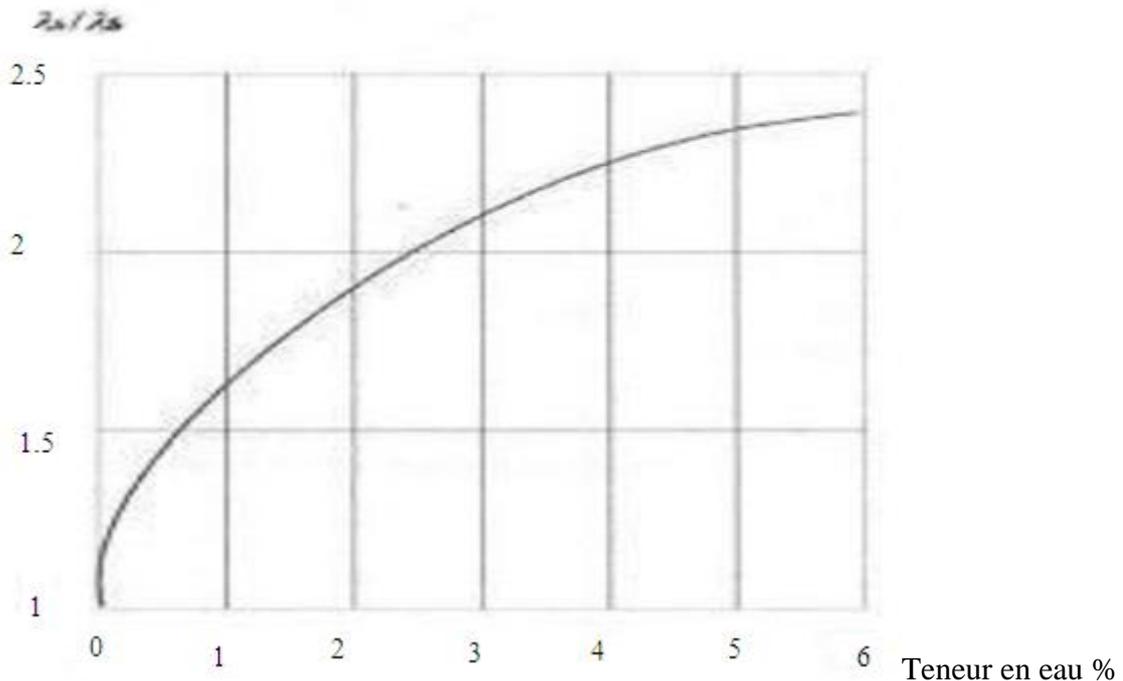


Figure II-11 : Variation du rapport des conductivités pour le béton d'agrégats de quartzite  $\rho=2200(\text{kg}/\text{m}^3)$ .

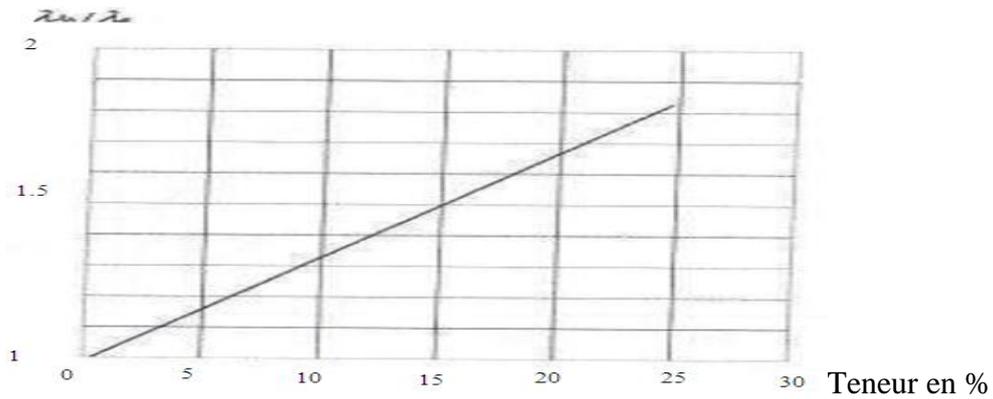


Figure II-12 : Variation du rapport des conductivités pour le béton d'argile expansé  $\rho=2200(\text{kg/m}^3)$ .

Les figures (II-11) et (II-12) montrent l'augmentation de la conductivité thermique d'un matériau poreux en fonction de la teneur en eau dont l'effet est notable et ne peut être, en aucun cas négligé. Plusieurs modèles (conceptuels ou empiriques) ont été établis par plusieurs chercheurs tels que (Krischer, Woodside-assad,...) [21].

Ces modèles proposés nous permettent une meilleure interprétation de la conductivité thermique équivalente du milieu poreux, lors du transfert de la chaleur par conduction, en tenant compte de plusieurs paramètres et de différentes hypothèses.

Modèle	Formules	Remarques
Parallèle	$\lambda_{app} = (1-\varepsilon)\lambda_s + \varepsilon S\lambda_l + \varepsilon(1-\varepsilon)\lambda_g$	Milieu constitué de plusieurs couches parallèles entre elles.
Série	$\lambda_{app} = \frac{\lambda_s \lambda_l \lambda_g}{\lambda_l \lambda_g + \varepsilon \lambda_l (\lambda_s - \lambda_g) + \varepsilon \lambda_s (\lambda_g - \lambda_l) S}$	Milieu constitué de plusieurs couches en série entre elles.
Woodside-assad	$\lambda_{app} = \lambda_l^{\varepsilon S} \lambda_s^{(1-\varepsilon)} \lambda_g^{\varepsilon(1-S)}$	Relation géométrique pondérée des trois phases.
Krischer	$\lambda_{app} = \alpha \lambda_{parallèle} + (1-\alpha) \lambda_{série}$	Combinaison du modèle série et parallèle.

Tableau II-2 : Modèles de mesure de la conductivité thermique tenant compte de la saturation en eau.

$\lambda_s$ : Conductivité thermique de la phase solide.

$\lambda_l$  : Conductivité thermique de la phase liquide.

$\lambda_g$  : Conductivité thermique de la phase gazeuse.

$\varepsilon$  : Porosité du matériau.

S : Saturation

$\alpha$  : Fraction en conduction parallèle de la phase liquide.

$1-\alpha$  : Représente la fraction en conduction série de la phase liquide évaporée.

Dans notre étude nous utilisons pour le calcul de la conductivité thermique, les résultats obtenus de l'expérience effectuée par Belhamri et Rebahi [25], sur des échantillons de bétons armés avec des morceaux en bois, utilisant la méthode des boites à une température de 20°C.

La figure II-13 montre l'évolution de la conductivité thermique avec la teneur en eau du matériau.

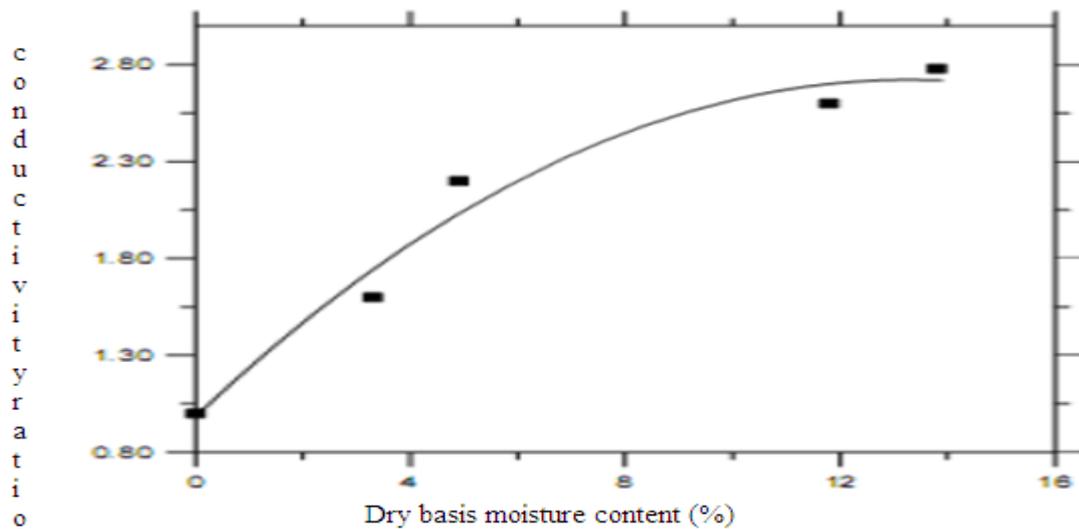


Figure II-13 : Variation de la conductivité thermique avec la teneur en eau du matériau

[11].

Cependant, sur cette courbe, la conductivité thermique est très influencée par rapport à la teneur en eau. Une corrélation est obtenue pour estimer l'effet de la saturation sur la conductivité thermique pour le béton armé avec les morceaux en bois.

$$\lambda_{app} = -0.41222S^2 + 0.77459S + 0.20601 \quad (\text{II.26})$$

## CHAPITRE III

### FORMULATION MATHÉMATIQUE

#### III-1 Position du problème

Le système étudié, représenté sur la figure (III-1), est composé d'une plaque poreuse humide non saturé ayant les caractéristiques du béton, d'une longueur  $L=1\text{m}$  et d'une épaisseur  $2e=10\text{cm}$ , formée de trois phases ; solide (indéformable), liquide (eau pure) et gazeuse (mélange d'air et de vapeur d'eau).

Les côtés verticaux de la plaque poreuse sont considérés adiabatiques et imperméables à la matière. Les deux faces haute et basse de la plaque poreuse représentent l'interface perméable, exposés à un flux d'air chaude parallèle à la surface libre du milieu poreux. Les conditions de séchage (vitesse  $U_\infty$ , température  $T_\infty$  et fraction massique  $C_{v,\infty}$ ) de l'air chaud sont supposées constantes à l'entrée de la plaque voir (figure III-1).

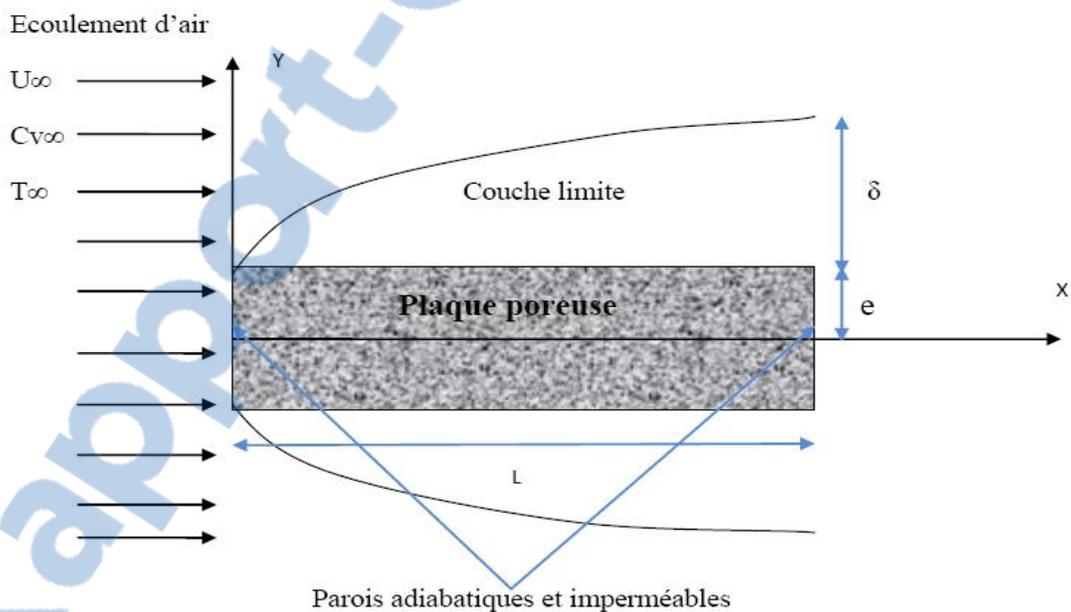


Figure III-1 : schéma du modèle

## III-2 Description du phénomène

On considère une plaque plane soumise à un écoulement d'air extérieur parallèle à ses deux faces. Lorsque la plaque est humide, il se produit à la surface un phénomène d'évaporation qui s'accompagne d'une absorption de chaleur.

### III-2-1 Formulation dans l'air

#### III-2-1-a Hypothèses

Les caractéristiques des deux parois sont supposées identiques et par conséquent le problème est entièrement symétrique par rapport à un plan médian.

-L'air est visqueux, son écoulement au-dessus de la paroi solide conduit à un développement des couches limites dynamiques thermiques et massiques sur les deux faces.

-Le régime de l'écoulement est laminaire et stationnaire.

-L'écoulement est bidimensionnel.

-On néglige la dissipation d'énergie par frottement.

-Vitesse assez faibles, fluide incompressible.

-Les variations de température sont assez faibles, toutes les caractéristiques physiques (viscosité, conductivité thermique, capacité calorifique,...) sont considérées comme constantes.

Compte tenu de ces hypothèses, les équations de conservations énoncées ci-dessus s'écrivent sous la forme simplifiées :

#### III-2-1b Equations de conservation

- Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.1})$$

- Equation de conservation de mouvement

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{III.2})$$

- Equation de conservation de l'énergie

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{III.3})$$

- Equation de conservation des espèces :

$$u \frac{\partial c_v}{\partial x} + v \frac{\partial c_v}{\partial y} = D_v \frac{\partial^2 c_v}{\partial y^2} \quad (\text{III.4})$$

$\nu$ ,  $a$  et  $D_v$  sont respectivement la viscosité cinématique, la diffusivité thermique et la diffusivité de la vapeur d'eau dans l'air.

$T$  : Température de l'air.

$c_v$  : Concentration en humidité de l'écoulement, ou fraction massique.

### III-2-2 Formulation du problème dans la paroi poreuse

#### III-2-2-a Hypothèses

Les hypothèses considérées sont les suivantes :

- les effets de dissipation sont négligeables.
- Les effets Dufour et Soret sont négligeables.
- Le travail de compression est négligeable, l'eau est incompressible.
- l'évaporation est superficielle.
- l'interface solide-gaz est en équilibre thermodynamique local.
- les phénomènes convectifs sont négligeables devant les transferts conductifs et la diffusion.
- la plaque poreuse est homogène et isotrope.
- les termes de dispersion et de tortuosité sont interprétés par des termes de diffusion.
- la déformation de la matrice solide n'est pas prise en compte.

-la coordonnée  $y$  est celle qui est normale à la surface, son origine est prise sur l'axe du matériau.

Ces hypothèses conduisent aux systèmes d'équations suivantes :

### III-2-2-b Système d'équation

➤ Equation de diffusion :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial S}{\partial y} \right) \quad (\text{III.5})$$

➤ Equation de l'énergie :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{III.6})$$

### III-3 Conditions initiales et au limites

#### III-3-1 Dans la couche limite

On suppose que l'écoulement libre est uniforme et que la température et l'humidité du fluide sont également uniformes et constantes, soit :

Pour  $x=0$   $\forall y$  on a :  $T=T_\infty, C_v=C_\infty$

Pour  $y=0$   $\forall x$  on a :  $u=v=0$

Pour  $y \rightarrow \infty$   $\forall x$  on a :  $u=u_\infty, T=T_\infty, C_v=C_{v\infty}$

- La concentration en vapeur interfaciale est donnée en appliquant l'équation de la continuité de la pression partielle de la vapeur d'eau :

$$C_{vi} = \frac{M_v P_{vi} M_a P_g}{P_{vi} + M_v P_{vi}} \quad (\text{III.7})$$

Où  $M_v$  et  $M_a$  sont respectivement les masses molaires de la vapeur pure et de l'air sec.

- La vitesse interfaciale du mélange air-vapeur d'eau est déduite en supposant que l'interface liquide-vapeur est perméable uniquement à la vapeur.

$$v_{gi} = - \frac{D_v}{1-C_v} \frac{\partial C_v}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (\text{III.8})$$

-La densité du flux de chaleur reçue par la surface, par conduction est exprimée comme

$$\text{suit : } \varphi_{tx} = -[\lambda_g \frac{\partial T}{\partial y}]_{y=0} \quad (\text{III.9})$$

-La densité de flux de masse évaporée sous l'effet du  $\varphi_{tx}$  a pour expression :

$$m'_{vx} = - \left[ \frac{\rho_g D_v}{1 - C_v} \frac{\partial C_v}{\partial y} \right]_{y=0} \quad \text{Pour } 0 \leq C_v(x, 0) < 1 \quad (\text{III.10})$$

### III-3-2 Dans la paroi :

Une distribution linéaire de la température et de la saturation a été proposée :

$$\text{Au temps } = 0 : \begin{cases} T = Ay + B \\ S = Ey + F \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

A, B, E, F des constants qui dépendent des conditions à l'intérieur de la paroi et les conditions extérieures auxquelles elle est soumise.

Conditions aux limites à la surface du matériau :

Aux limites, à  $y = \mp e$ , le flux massique et le flux thermique ont été imposés (conditions de

$$\text{Newman) } \frac{\partial S}{\partial y} = h(\rho_{v \text{ surf}} - \rho_{air}) \quad (\text{III.12})$$

Où  $h_{tx}$  et  $h_{mx}$  sont respectivement les coefficients de transfert thermique et massique locaux, déterminés après résolution des équations des couches limites.

$$\lambda_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial y} = h_{tx} (T_{air} - T_{surf}) + h_{mx} (\rho_{v \text{ surf}} - \rho_{air}) \Delta h_v \quad (\text{III.13})$$

$\Delta h_v$ : La chaleur latente de vaporisation

Conditions sur l'axe du matériau (par symétrie) :

$$-D \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{y=0} = 0 \quad (\text{III.14})$$

$$-\lambda_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=0} = 0 \quad (\text{III.15})$$

### III-4 Mise sous forme adimensionnelle des équations de la couche limite

La mise sous forme adimensionnelle des équations régissant un phénomène est destinée essentiellement à rendre les solutions universelles, afin qu'elles puissent décrire le maximum des cas possibles. Elle sert aussi à simplifier l'écriture des relations de manière à faire regrouper les paramètres dans des nombres adimensionnels classiques, tels que le nombre de Reynolds, pour les problèmes dynamiques, le nombre de Prandtl pour les transferts thermiques, le nombre de Schmidt pour les transferts massiques, etc.

Le changement de variable le plus approprié à la situation présente, semble être le suivant :

$$x^+ = \frac{x}{L}, y^+ = \frac{y}{L} \sqrt{\text{Re}}, U^+ = \frac{U}{U_\infty}, V^+ = \frac{V}{U_\infty} \sqrt{\text{Re}}, T^+ = \frac{T - T_\infty}{T_{surf} - T_\infty}, C^+ = \frac{C}{C_\infty}$$

$L$  : Longueur de la plaque,

$R_e$  : Nombre de Reynolds classique ( $R_e = \frac{U_\infty L}{\nu}$ ) relatif à la vitesse de l'air libre et à la longueur  $L$  de la paroi.

$T_{surf}$  : Température à la surface de la paroi.

$T$  et  $C$  : représente respectivement la température et la concentration en eau dans la couche limite.

Les équations régissant les différents phénomènes dans le fluide, prennent ensuite la nouvelle forme suivante :

➤ Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = 0 \quad (\text{III.16})$$

➤ Equation de conservation de la quantité de Mouvement :

$$u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^{+2}} \quad (\text{III.17})$$

➤ Equation de conservation de l'énergie :

$$u^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{+2}} \quad (\text{III.18})$$

➤ Equation de conservation des espèces :

$$u^+ \frac{\partial C_v^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial C_v^+}{\partial y^+} = \frac{1}{S_c} \frac{\partial^2 C_v^+}{\partial y^{+2}} \quad (\text{III.19})$$

On remarque que le changement de variables fait apparaître deux nombres adimensionnels caractéristiques : Le nombre de Prandtl et le nombre de Schmidt

$$\text{Le nombre de Prandtl : } P_r = \frac{\nu}{\alpha} \frac{\rho C_p}{\lambda_{\text{fluide}}} \quad (\text{III.20})$$

$$\text{Le nombre de Schmidt : } S_c = \frac{\nu}{D_v} \quad (\text{III.21})$$

Le problème étant relatif à une évaporation d'eau dans un écoulement d'air à une température égale 30°C, les valeurs du nombre de Prandtl et de Schmidt sont respectivement égales à 0.70 et 0.60.

Les conditions aux limites deviennent alors :

$$x^+ = 0 : \forall y, u^+ = 1 ; T^+ = 0 ; C_v^+ = 1$$

$$y^+ = 0 : \forall x, u^+ = 0 ; v^+ = 0$$

Remarque :

Pour ne pas alourdir le texte des variables adimensionnelles seront écrites sans le signe (+)

### III-5 Calcul des coefficients de transfert

Lorsque les distributions de température et de concentration sont établies dans la couche limite, on peut déduire les valeurs des flux thermiques et massiques caractérisant le transfert convectif entre l'air asséchant et la paroi humide.

## Flux locaux

Ils correspondent aux quantités de chaleur et de masse échangées en une abscisse précise. Leurs valeurs sont directement proportionnelles aux gradients thermique ou massique en ce point. Ils sont donnés respectivement par :

$$\varphi_{tx} = - \left[ \lambda_g \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (\text{III.22})$$

$m'_{vx} = -\rho_g D_v \frac{\partial c_v}{\partial y}$ , est celui-ci dû à la diffusion au niveau de l'interface.

### III-5-1 Coefficient local de transfert thermique

$$h_{tx} = - \frac{\lambda_g \frac{\partial T}{\partial y}}{(T_\infty - T_{ix})} \Big|_{y=0}$$

$(T_\infty - T_{ix})$  Représente l'écart de température entre la paroi et celle de l'air libre, mis en jeu lors du déroulement de processus de transfert.

### III-5.2 Coefficient local de transfert massique

$$h_{mx} = \frac{m_{vx}}{\rho_{vx} - \rho_{v\infty}} \quad (\text{III.23})$$

$\rho_{v\infty}$ : Masse volumique de la vapeur d'eau, prise aux conditions de l'air humide.

$\rho_{vx}$ : Masse volumique de la vapeur d'eau, calculée en considérant la température de la paroi.

Les valeurs de la masse volumiques de la vapeur d'eau peuvent être données à partir du tableau exprimant sa valeur en fonction de la température, ou calculées en assimilant la vapeur d'eau à un gaz parfait [31] :

$$PV = nRT, n = \frac{m_v}{M_v} \Rightarrow PV = \frac{m_v}{M_v} RT \Rightarrow PM_v = \frac{m_v}{V} RT \quad (\text{III.24})$$

$$\rho = \frac{m_v}{V} \Rightarrow PM_v = \rho RT \Rightarrow \rho = \frac{PM_v}{RT}$$

La masse molaire de la vapeur d'eau  $M_v = 18.016$  kg/mole,

La constante des gaz parfait  $R = 8314.4$  j/k mol k,

La constante de la vapeur d'eau  $= \frac{R}{M_v} = 461.5$

$$\rho_{vx} = \frac{1}{461.5} \left( \frac{P_v S}{T_p} \right) \quad (\text{III.25})$$

$$\rho_\infty = \frac{1}{461.5} \left( \frac{P_v}{T_{air}} \right) \quad (\text{III.26})$$

$P_{VS}$  Pression de la vapeur saturante à la température de la paroi.

Dans la littérature, plusieurs expressions sont proposées. Pour ce calcul, nous avons retenu la forme suivante [20]:

$$P_{VS} = 9.81 \cdot 104.10 \left(5.978 - \frac{2225}{T}\right) \quad (\text{III.27})$$

$$P_v = P_{vs} \cdot \emptyset \quad (\text{III.28})$$

Avec  $\emptyset$  représente l'humidité relative de l'air.

### III-6 Coefficients de transferts adimensionnels (Nombres de Nusselt et de Sherwood)

Nombre de Nusselt local

$$Nu(x) = \frac{ht(x)L}{\lambda g} \quad (\text{III.29})$$

Nombre de Sherwood local

$$Sh(x) = \frac{ht(x)L}{Dv} \quad (\text{III.30})$$

Où L est une longueur caractéristique. Elle est dans notre cas égal à la longueur de la paroi.

Compte tenu des valeurs de  $ht(x)$  et  $hm(x)$

$$Nux = \frac{\frac{\partial T}{\partial y}}{T_{\infty} - T_{ix}} \Big|_{y=0,L} \quad (\text{III.31})$$

$$Shx = - \frac{\frac{\partial cv}{\partial y}}{(\rho_{vx} - \rho_{v\infty})} \Big|_{y=0,L} \quad (\text{III.32})$$

Leur évolution, le long de la paroi, est donc déterminée directement à partir du calcul des gradients thermique et massique, adimensionnels, normaux à la surface.

# CHAPITRE IV

## MODELISATION NUMERIQUE

### IV-1 Introduction :

Pour résoudre un problème de la physique il faut distinguer le modèle physique du modèle mathématique. Le modèle physique peut exprimer en mots et phrases qu'il est nécessaire de traduire en expressions mathématiques. Lorsque le problème est ainsi bien posé, il est alors possible de le résoudre soit mathématiquement (solution analytique) ou numériquement (solution numérique). Les solutions analytiques, basées sur la forme locale du problème (Equations aux dérivées partielles : « E.D.P » associées aux conditions initiales et aux limites), ne peuvent être déterminées dans le cas général où il y a des difficultés si l'on résout les équations aux dérivées partielles qui régissent les phénomènes étudiés, on fait alors appel aux méthodes numériques. Le principe de ces méthodes est de transformer les équations différentielles en un système d'équations algébriques. Il y a trois méthodes numériques qui sont utilisées généralement pour la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles régissant. Ces méthodes sont :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des volumes finis.
- La méthode des éléments finis.
  
- **Méthode des différences finies**

Est la plus ancienne des méthodes numériques, elle a été introduite en 18<sup>ème</sup> siècle par Euler. Elle s'avère la plus adaptée et la plus facile d'utilisation pour les problèmes à géométrie simple (Kalla, 1999). Cette méthode est basée sur la technique du développement en séries de Taylor qui permet d'approximer la valeur d'une fonction en un point voisin en espace ou en temps. A l'aide de la méthode de différence finis l'équation aux dérivées partielles sera transformée en équation algébrique. Cette équation est appliquée sur tous les nœuds de la grille de calcul, donc on obtient un système d'équation algébrique comportant autant d'équations que d'inconnues, résolu par une méthode appropriée.

### ➤ **Méthode des volumes finis**

Développée à l'origine par Patankar et Spalding, la méthode des volumes finis appliquée à la résolution des équations de Navier- Stokes, a connu un essor important au cours des années 1980 de par sa facilité de mise en œuvre, sa robustesse numérique, et surtout par son formalisme très proche de la réalité physique (Bilan de flux). Pour ces raisons cette méthode est devenue très populaire chez les physiciens, dont le formalisme mathématique de certaines autres méthodes rebutait.

La clé de cette méthode réside dans l'application du théorème de la divergence ou théorème d'Ostrogradski, qui permet de changer une intégrale de volume en intégrale de surface. L'un des principaux avantages de la méthode des volumes finis est d'assurer une conservation intégrale exacte des grandeurs quelle que soit la taille du maillage et c'est pour cette raison qu'elle est très largement utilisée pour la résolution des phénomènes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

### ➤ **Méthode des éléments finis**

Est une technique de calcul numérique qui consiste à discrétiser en sous-ensembles un objet (ou une partie d'un objet) dont on veut étudier certaines de ses propriétés. Ces sous-ensembles sont appelés éléments, ces derniers sont connectés entre eux par des nœuds. La discrétisation de l'objet se nomme le maillage.

## **IV.2 FORMULATION PAR ELEMENTS FINIS**

### **IV.2.1 Formulation variationnelle**

#### **IV.2.1.1 Etape de convection**

Considérons l'équation de convection, qui s'écrit en notations d'Einstein :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial u_i C}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Nous étudierons les schémas suivants :

- ❖ Euler Explicite (EE)
- ❖ Taylor-galerkine Explicite à l'ordre 2 (ETG2)

- ❖ Taylor-galerkine Explicite à l'ordre 3 (ETG3)
- ❖ Euler implicite (IE).

$\Omega$  : désigne le domaine d'étude et  $\Gamma$  sa frontière (Figure IV.1).

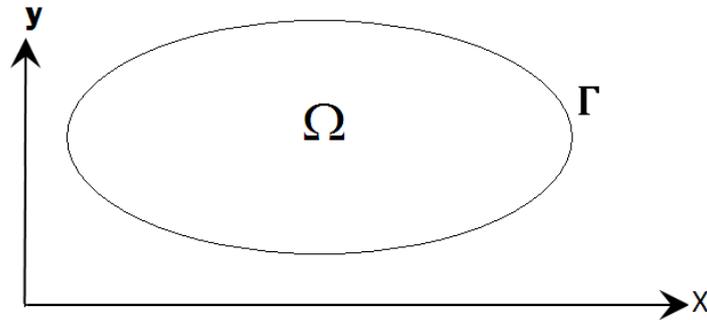


Figure IV-1 : Domaine étudié

Le maillage est illustré par la figure IV-2. Le domaine  $\Omega$  est discrétisé par des éléments T3 (élément triangulaire à 3 nœuds), et la frontière  $\Gamma$  est discrétisée par des éléments L2 (élément linéaire à 2 nœuds).

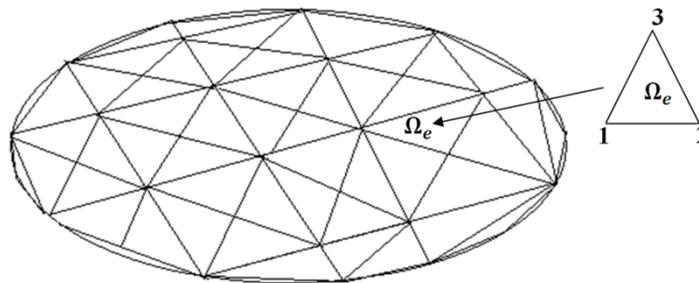


Figure IV-2:Maillage

La méthode des éléments finis suppose que la variable  $C$  à l'intérieur de l'élément dépend uniquement de celles des nœuds.

$$C(x, y, t) = N_1(x, y)C_1(t) + N_2(x, y)C_2(t) + N_3(x, y)C_3(t) = \langle N \rangle \{C_n\} \quad (\text{IV.2})$$

Les fonctions  $\langle N \rangle$  sont appelées fonctions d'approximation ou fonctions de forme.  $\{C_n\}$  Sont appelées variables nodales, ce sont les valeurs de la variable C aux nœuds de l'élément.

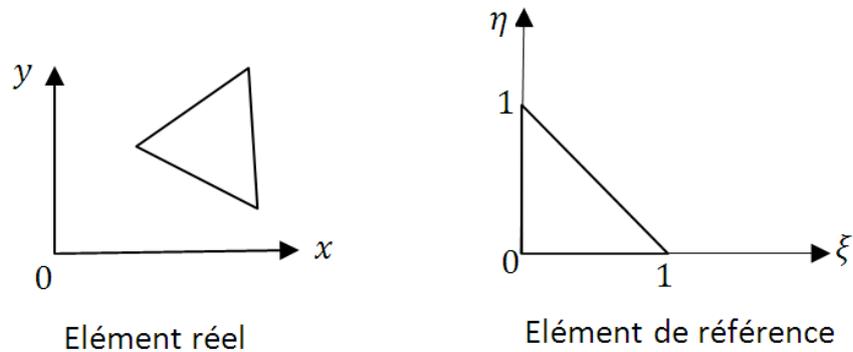


Figure IV-3 : Elément réel, Elément de référence

Pour simplifier les calculs, on utilise l'élément de référence (figure IV-3), on écrit :

$$C(x, y, t) = \langle N(\xi, \eta) \rangle \{C_n\} \quad (IV.3)$$

Les fonctions de formes sont :

$$N_1(\xi, \eta) = \xi, \quad N_2(\xi, \eta) = \eta, \quad N_3(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

La frontière  $\Gamma$  est discrétisée par des éléments L2 (élément linéaire à 2 nœuds) dont l'élément de référence est donné par la figure (IV.4).

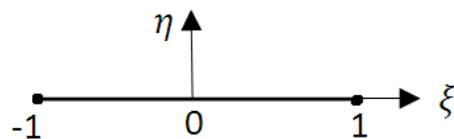


Figure IV-4 Elément de référence

Les fonctions de formes sont :

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1 - \xi}{2}, \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1 + \xi}{2}$$



❖ **Euler explicite (EE)**

L'équation (IV.1) conduit à la relation suivante :

$$\Delta C + \Delta t \frac{\partial u_i C^n}{\partial x_i} = 0 \quad (IV.4)$$

Avec  $\Delta C = C_{t+\Delta t} - C_t = C^{n+1} - C^n$

La formulation variationnelle correspondante, associée à la méthode des résidus pondérés s'écrit, en utilisant des fonctions de pondération  $C^*$  de type Galerkinge :

$$W = \int_{\Omega} C^* \left( \Delta C + \Delta t \frac{\partial u_i C^n}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (IV.5)$$

La fonction de pondération appelée aussi fonction test est prise de la même forme que la fonction  $C$ .

$$C^*(x, y) = \langle C_n^* \rangle \{N(\xi, \eta)\} \quad (IV.6)$$

La forme intégrale appliquée sur le domaine discrétisé, conduit au système matriciel suivant :

$$[M]\{\Delta C\} + \Delta t [K]\{C^n\} = 0 \quad (IV.7)$$

$[M]$  est la matrice masse globale obtenue à partir de la matrice masse élémentaire  $[m_e]$  donnée par :

$$[m_e] = \int_{\Omega_e} \langle N \rangle \{N\} d\Omega \quad (IV.8)$$

$[K]$  est la matrice de convection globale obtenue à partir de la matrice élémentaire  $[k_e]$  donnée par :

$$[k_e] = \int_{\Omega_e} \langle N \rangle u_i \{N_{,x_i}\} d\Omega \quad (IV.9)$$

❖ **Schéma explicite de Taylor- Galerkinge d'ordre 2 (ETG2)**

La relation (IV.1) conduit à :

$$\Delta C + \Delta t \frac{\partial u_i C^n}{\partial x_i} - \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i \frac{\partial u_j C^n}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (IV.10)$$

Nous voyons apparaître un terme de diffusion négative, qui va annuler exactement la diffusion positive qui provient de l'erreur de troncature opérée par la discrétisation au premier ordre du schéma explicite d'Euler Explicite.

La formulation variationnelle correspondante s'écrit, après intégration par parties des termes de dérivée seconde :

$$W(C) = \int_{\Omega} \left[ C^* \Delta C + \Delta t C^* \frac{\partial u_i C^n}{\partial x_i} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial C^*}{\partial x_i} \left( u_i \frac{\partial u_j C^n}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega - \frac{(\Delta t)^2}{2} \oint_{\Gamma} C^* u_i \frac{\partial u_j C}{\partial x_j} m_i dS \quad (\text{IV.11})$$

$m_i$  sont les cosinus directeurs de l'élément de surface  $dS$ .

D'où le système matriciel suivant :

$$[M]\{\Delta C\} + \Delta t \left[ [K] + \frac{\Delta t}{2} [K_{uv}] \right] \{C^n\} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

$[K_{uv}]$  est une matrice supplémentaire globale obtenue à partir de la matrice élémentaire :

$$[k_{uve}] = \int_{\Omega_e} \langle N_{,x_i} \rangle u_i u_j \{N_{,x_j}\} d\Omega$$

### ❖ Schéma explicite de Taylor- Galerkin d'ordre 3 (ETG3)

La relation (IV.1) conduit à :

$$\left[ 1 - \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right] \Delta C + \Delta t \frac{\partial u_i C^n}{\partial x_i} - \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i \frac{\partial u_j C^n}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (\text{IV.13})$$

De même que pour ETG2, nous voyons apparaître un terme de diffusion négative, qui va annuler exactement la diffusion positive qui provient de l'erreur de troncature opérée par la discrétisation au premier ordre du schéma explicite d'Euler Explicite. De plus, il apparaît un terme supplémentaire dans la matrice masse.

La formulation variationnelle correspondante s'écrit, après intégration par parties des termes de dérivées secondes. (IV.14)

$$W(C) = \int_{\Omega} \left[ C^* \Delta C + \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial C^*}{\partial x_i} u_i \frac{\partial u_j \Delta C}{\partial x_j} + \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial C^*}{\partial x_i} \left( u_i \frac{\partial u_j C^n}{\partial x_j} \right) \right] - \frac{(\Delta t)^2}{6} \oint_{\Gamma} C^* u_i \frac{\partial u_j \Delta C^n}{\partial x_j} m_i dS - \frac{(\Delta t)^2}{2} \oint_{\Gamma} C^* u_i \frac{\partial u_j \Delta C^n}{\partial x_j} m_i dS$$

La formulation variationnelle appliquée sur le domaine discrétisé, conduit au système matriciel suivant :

$$\left[ M + \frac{(\Delta t)^2}{6} K_{uv} \right] \{\Delta C\} + \Delta t \left[ K_t + \frac{\Delta t}{2} K_{uv} \right] \{C\} = 0 \quad (\text{IV.15})$$

❖ **Euler Implicite (IE)**

La relation (IV.14) conduit à :

$$\left( 1 + \Delta t u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Delta C + \Delta t \frac{\partial u_i C^n}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{IV.16})$$

La formulation variationnelle correspondante s'écrit :

$$W(C) = \int_{\Omega} C^* \left[ \left( \Delta C + \Delta t \frac{\partial u_i \Delta C}{\partial x_i} \right) + \Delta t \left( \frac{\partial u_i C^n}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega \quad (\text{IV.17})$$

Ce qui conduit au système matriciel suivant :

$$([M] + \Delta t [K]) \{\Delta C\} + \Delta t [K] \{C\} = 0 \quad (\text{IV.18})$$

### IV.2.1.2 Etape de diffusion

Par analogie avec la présentation des formes intégrales liées à l'équation de convection nous allons prendre pour base d'étude, les schémas suivants :

- ❖ Euler Explicite (EE)
- ❖ Taylor-galerkine Explicite à l'ordre 2 (ETG)
- ❖ Euler implicite (IE)

Considérons l'équation de convection-diffusion, qui s'écrit en notations d'Einstein :

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (\text{IV.19})$$

❖ **Euler explicite (EE)**

L'équation (IV.18) conduit à :

$$\Delta C - \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left( k_i \frac{\partial C^n}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (\text{IV.20})$$

La formulation variationnelle correspondante s'écrit :

$$W(C) = \int_{\Omega} \left( C^* \Delta C + \Delta t \frac{\partial C^*}{\partial x_i} k_i \frac{\partial C^n}{\partial x_i} \right) d\Omega - \Delta t \oint_{\Gamma} C^* k_i \frac{\partial C^n}{\partial x_i} m_i dS \quad (\text{IV.21})$$

Ce qui conduit au système matériel suivant :

$$[M]\{\Delta C\} + \Delta t[K_S]\{C^n\} = 0 \quad (\text{IV.22})$$

Où  $[K_S]$  est une matrice de diffusion globale obtenue à partir de la matrice élémentaire  $[K_{se}]$  :

$$[K_{se}] = \int_{\Omega_e} \langle N_{,x_i} \rangle k_i \{N_{,x_i}\} d\Omega$$

#### ❖ Euler implicite (IE)

La relation (IV.18) conduit à :

$$\left[ 1 - \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] \Delta C - \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_i \frac{\partial C^n}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (\text{IV.23})$$

La formulation variationnelle s'écrit :

$$W(C) = \int_{\Omega} \left( C^* \Delta C + \Delta t \frac{\partial C^*}{\partial x_i} k_i \frac{\partial \Delta C}{\partial x_i} + \Delta t \frac{\partial C^*}{\partial x_i} k_i \frac{\partial C^n}{\partial x_i} \right) d\Omega - \Delta t \oint_{\Gamma} C^* k_i \left( \frac{\partial \Delta C}{\partial x_i} + \frac{\partial C^n}{\partial x_i} \right) m_i dS \quad (\text{IV.24})$$

Ce qui conduit au système matriciel suivant :

$$[M + \Delta t K_S]\{\Delta C\} + \Delta t[K_S]\{C^n\} = 0 \quad (\text{IV.25})$$

## IV.3 Discrétisation des équations de transfert de chaleur et de masse dans la couche limite et la paroi poreuse

### IV.3.1 Dans la couche limite

#### IV.3.1.1 Equations à résoudre

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.26})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{IV.27})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{IV.28})$$

$$u \frac{\partial cv}{\partial x} + v \frac{\partial cv}{\partial y} - D_v \frac{\partial^2 cv}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{IV.29})$$

#### IV.3.1.2 Formulation variationnelle

$$W = \int_{\Omega} u^* (1) d\Omega + \int_{\Omega} v^* (2) d\Omega + \int_{\Omega} T^* (3) d\Omega + \int_{\Omega} cv^* (4) d\Omega$$

$$\Omega = \sum \Omega_e$$

$$W = \sum W_e$$

$$W = W_u^e + W_v^e + W_T^e + W_{cv}^e$$

$$U = N_1 U_1 + N_2 U_2 + N_3 U_3 = \langle N \rangle \{U_n\}$$

$$v = \langle N \rangle \{v_n\}$$

$$T = \langle N \rangle \{T_n\}$$

$$C_v = \langle N \rangle \{C_{v_n}\}$$

$$u^* = \langle u_n^* \rangle \{N\}; v^* = \langle v_n^* \rangle \{N\}; T^* = \langle T_n^* \rangle \{N\}; cv_n^* = \langle cv_n^* \rangle \{N\};$$

$$W_u^e = \int_{\Omega_e} u^* \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] d\Omega + \int_{\Omega_e} u^* v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} d\Omega$$

$$w_u^e = \int_{\Omega_e} u^* \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] d\Omega + \int_{\Omega_e} u^* v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} d\Omega$$

$$w_u^e = \int_{\Omega_e} u^* \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] d\Omega + \int_{\Omega_e} v \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega_e} u^* v \frac{\partial u}{\partial y} d\Gamma$$

$$w_u^e = \langle u_n^* \rangle \left[ \int_{\Omega_e} \{N\} u \langle N, x \rangle d\Omega + \int \{N\} v \langle N, y \rangle d\Omega \right] + \int \{N; y\} \langle N, y \rangle \{u_n\} d\Omega$$

$$w_u^e = \langle u_n^* \rangle [K] + \{u_n\} + w_u^c$$

$$[K_u] = \int (\{N\} [u \langle N, x \rangle v \langle N, y \rangle] + v \{N, y\} \langle N, y \rangle) d\Omega$$

$$\Delta w_u^e = \int [u^* (u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) d\Omega] + \int [v \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega] - \int u^* v \frac{\partial u}{\partial y} d\Gamma$$

$$\Delta u = \langle N \rangle \{\Delta u_n\} \quad ; \quad \Delta v = \langle N \rangle \{\Delta v_n\}$$

$$\Delta w_e = \int \langle u_n^* \rangle \{N\} [u \langle N, x \rangle \{\Delta u_n\} + \frac{\partial u}{\partial x} \langle N \rangle \{\Delta u_n\} + v \langle N, y \rangle \{\Delta u_n\} + \frac{\partial u}{\partial y} \langle N \rangle \{\Delta v_n\}] + \langle u_n^* \rangle [\{N, y\} v \langle N, y \rangle \{\Delta u_n\} + w_u^c]$$

$$\Delta w_e = \langle u_n^* \rangle \left[ \int \{N\} u \langle N, x \rangle \{\Delta u_n\} + \frac{\partial u}{\partial x} \{N\} \langle N \rangle \{\Delta u_n\} + v \{N\} \langle N, y \rangle \{u_n\} + \frac{\partial u}{\partial y} \langle N \rangle \{\Delta v_n\} \right] + \langle u_n^* \rangle [\{N, y\} v \langle N \rangle] \{\Delta u_n\} + w_u^c$$

$$\Delta w_e = \langle u_n^* \rangle [K_{uu}] \{\Delta u_n\} + w_{cu} + [K_{uv}] \{\Delta v_n\}$$

$$[K_{uu}] = T_x u + \frac{\partial u}{\partial x} T_T + v T_Y + v T_{yy}$$

$$[K_{vu}] = \frac{\partial u}{\partial y} T_T$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$w_e = \int v^* (2) d\Omega = \int v^* \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int v^* \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega$$

$$w_e = \int \langle v^* \rangle \{N\} [\langle N, x \rangle \{u_n\} + \langle N, y \rangle] \{u_n\} d\Omega$$

$$w_e = \langle v^* \rangle \int \{N\} [\langle N, x \rangle + \langle N, y \rangle] \{u_n\} d\Omega$$

$$\text{Alors } [T_v] = T_x + T_y$$

$$u \frac{\partial T}{\partial u} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{p_r} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$w_e = \int T^* (IV.28) d\Omega$$

$$w_e = \int T^* \left[ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] d\Omega + \int \left( \frac{1}{p_r} \frac{\partial T^*}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega - \int \frac{1}{p_r} T^* \frac{\partial T}{\partial y} d\Gamma$$

$$w_e = \langle T^* \rangle \left[ \int \{N\} u \langle N, x \rangle d\Omega + \int \{N\} v \langle N, y \rangle d\Omega + \int \{N, y\} \frac{1}{p_r} \langle N, y \rangle d\Omega \right] + w_T^c$$

$$w_T^e = \langle T^* \rangle [K_T] \{T_n\} W_T^c$$

$$[K_T] = u_{Tx} + v_{Ty} + \frac{1}{p_r} T_{yy}$$

$$u \frac{\partial c_v}{\partial x} + v \frac{\partial c_v}{\partial y} - \frac{1}{s_c} \frac{\partial^2 c_v}{\partial y^2} = 0$$

$$W_{c_v}^e = \int c_v^* \left[ u \frac{\partial c_v}{\partial x} + v \frac{\partial c_v}{\partial y} - \frac{1}{s_c} \frac{\partial^2 c_v}{\partial y^2} \right] d\Omega$$

$$W_{c_v}^e = \int c_v^* \left[ u \frac{\partial c_v}{\partial x} + v \frac{\partial c_v}{\partial y} \right] d\Omega + \int \left( \frac{1}{s_c} \frac{c_v^*}{\partial y} \frac{\partial c_v}{\partial y} \right) d\Omega - \int \frac{1}{s_c} c_v^* \frac{\partial c_v}{\partial y} d\Gamma$$

$$W_{c_v}^e = \langle c_v^* \rangle \left[ \int \{N\} u \langle N, x \rangle + \int \{N\} v \langle N, y \rangle + \frac{1}{s_c} \int \{N, y\} \langle N, y \rangle \right] \{c_v^*\} d\Omega$$

$$W_{c_v}^e = \langle c_v^* \rangle [K_{c_v}] \{c_v^n\} d\Omega$$

### IV.3.2 Dans le milieu poreux

#### IV.3.2.1 Equations à résoudre

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (IV.30)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (IV.31)$$

$$w_s^e = \int s^* \frac{\partial S}{\partial t} d\Omega + \int D \frac{\partial S^*}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} d\Omega - \int D S^* \frac{\partial S}{\partial y} D_y$$

$$w_s^e = \langle s^* \rangle \left[ \int \{N\} \langle N \rangle + D \int \{N, y\} \langle N \rangle \right] \{s_n\} d\Omega$$

$$w_s^e = \langle s^* \rangle [T_s] \{s_n\} + w_s^c$$

$$[T_s] = T_T + D T_{yy}$$

$$(IV.31) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$w_T^e = \int T^* \left[ \frac{\partial T}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] d\Omega$$

$$w_T^e = \int T^* \frac{\partial T}{\partial t} + \beta \frac{\partial T^*}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} - \int \beta T \frac{\partial T}{\partial y} d\Gamma$$

$$[K_T] = T_T + \beta T_{yy}$$

Rapport-Gratuit.com

# CHAPITRE V

## RESULTATS ET DISCUSSIONS

### V.1 Dans la couche limite

#### V.1.1 Résultats relatifs aux champs de vitesses

La figure V.1 montre la variation de la composante longitudinale de la vitesse  $U$  en fonction de la hauteur  $Y$  pour plusieurs valeurs de l'abscisse  $x$  ; (0.05 ;0.25 ;0.45 ;0.65 et 0.85) .

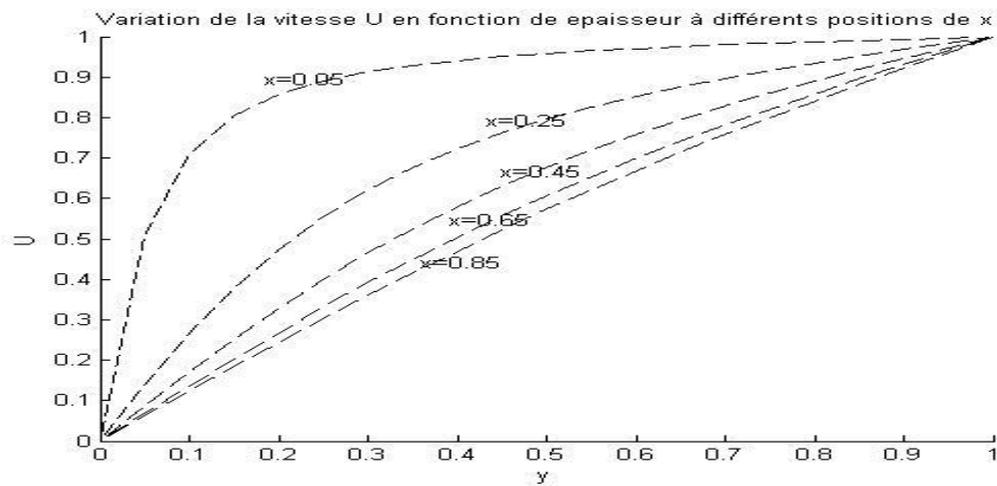


Figure V-1 :La Variation de la vitesse adimensionnelle  $U$  en fonction d'épaisseur de la plaque  $Y$  à différents position  $x$  dans la couche limite.

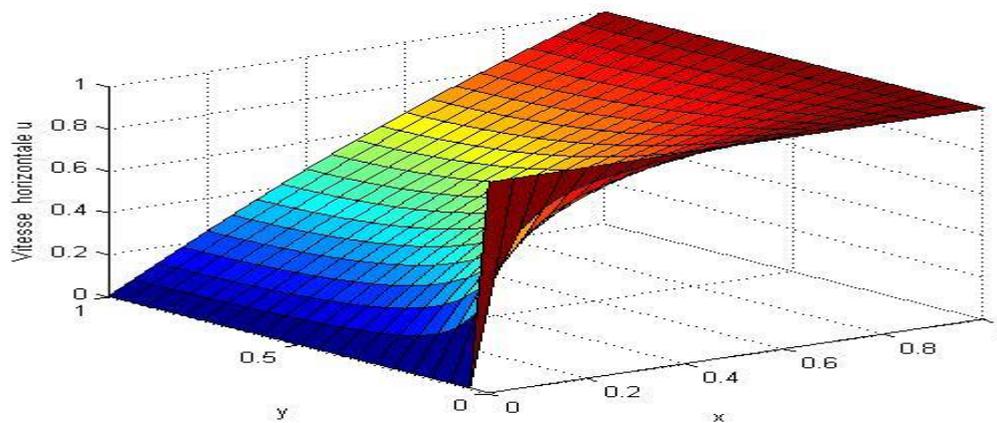


Figure V-2 :La Variation de la vitesse adimensionnelle  $U$  en fonction d'épaisseur de la plaque  $Y$  à différents position  $x$  dans la couche limite en 3 D

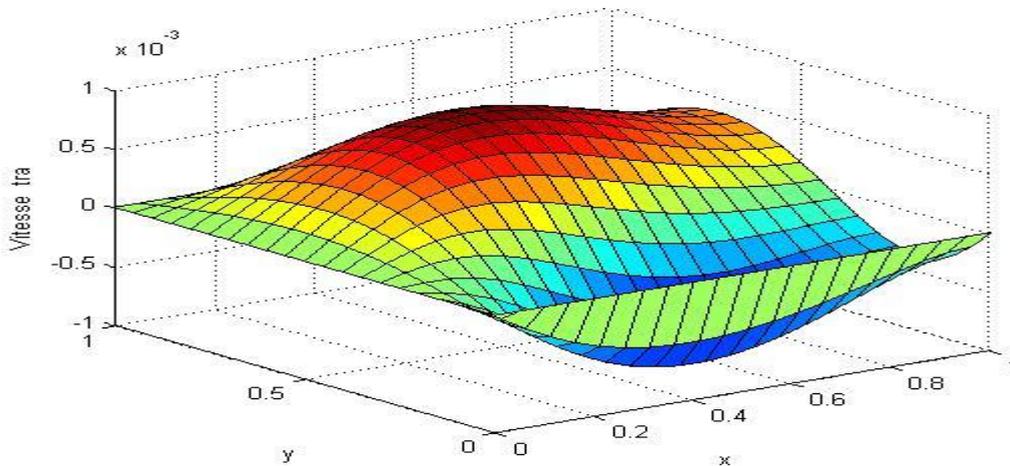


Figure V-3 :La Variation de la vitesse adimensionnelle U en fonction d'épaisseur de la plaque Y à differentes position x dans la couche limite en 3 D

Le profil est initialement parabolique supérieure en amont de la plaque voir (figure V.1), se transforme au fur et à mesure du développement des couches limites et tendre à un profil plat. Les profils de vitesse ont une représentation unique, quelles que soient les conditions de températures et d'humidité de l'air à l'extérieur.

On observe q'au début du processus de séchage la vitesse du matériau augmente rapidement .ce phénomène à une evaporation rapide beaucoup plus accentuée pour les points  $x=0.85$  et  $x=0.65$  que pour les points  $x=0.05$  et  $x=0.25$ . Ces résultats sont en bon accord avec ceux trouvés voir (figure V-4, figure V-5, figure V-6).

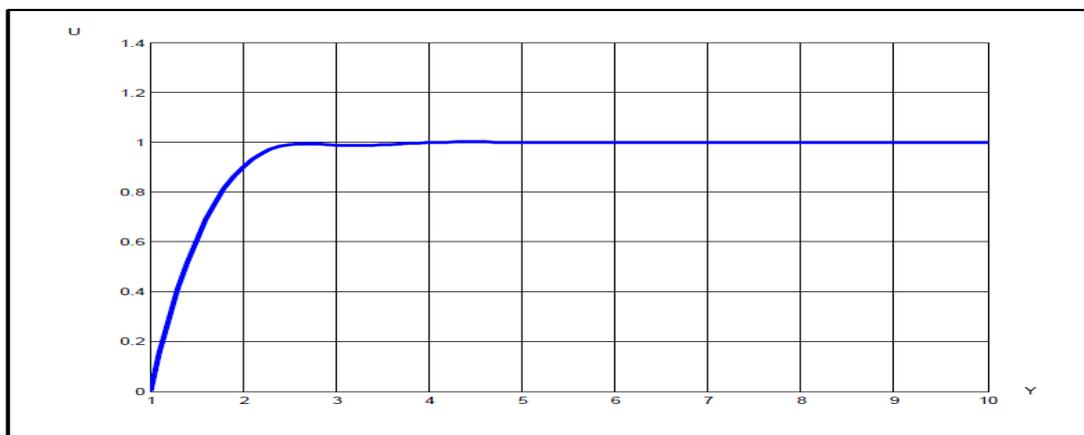


Figure V-4 : Evolution de la vitesse adimensionnelle U en fonction de y dans la couche limite à la première station  $x=0.05$  [17]

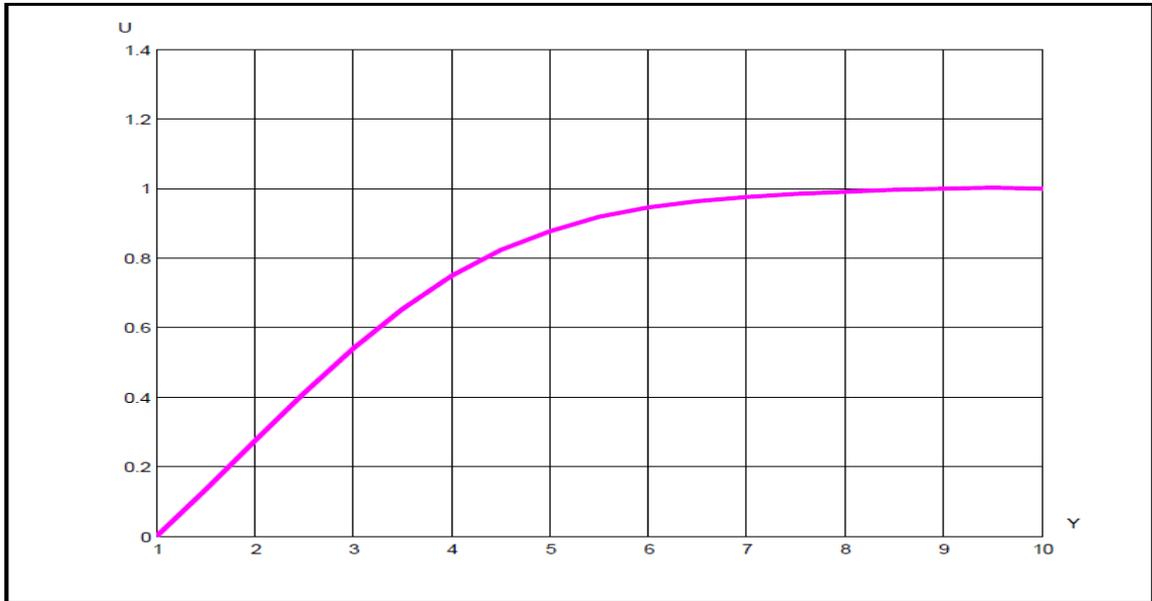


Figure V-5 : Evolution de la vitesse adimensionnelle  $U$  en fonction de  $y$  dans la couche limite à la cinquième station  $x=0.45$  [17]

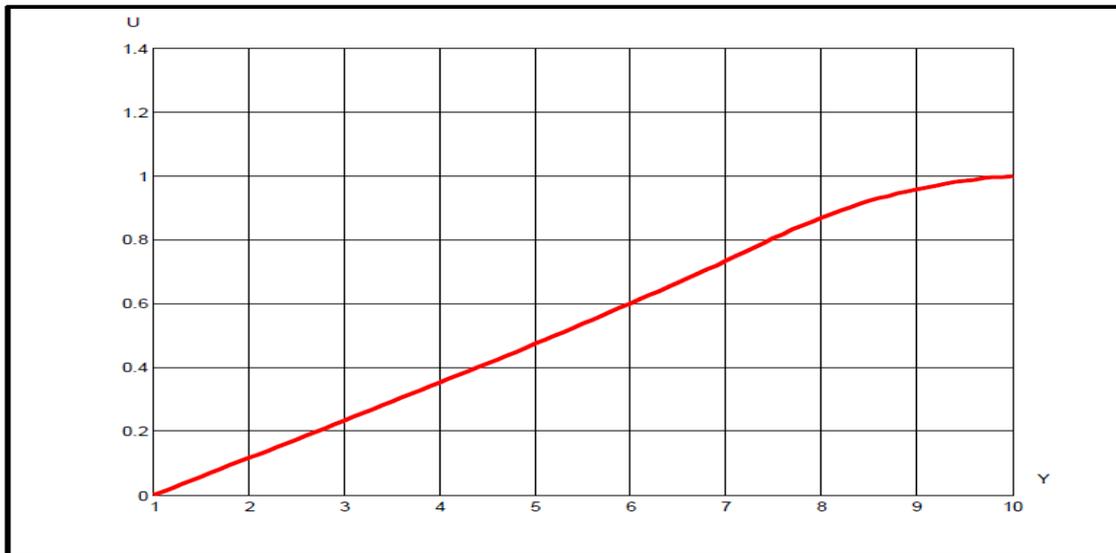


Figure V-6 : Evolution de la vitesse adimensionnelle  $U$  en fonction de  $y$  dans la couche limite à la dernière station  $x=1$  [17]

## V.1.2 Résultats relatifs aux champs de la température

La figure V-5 montre la variation de la température  $T$  en fonction de la hauteur  $Y$  pour plusieurs valeurs de  $x$  ; (0.05 ;0.25 ;0.45 ;0.65et 0.85) .

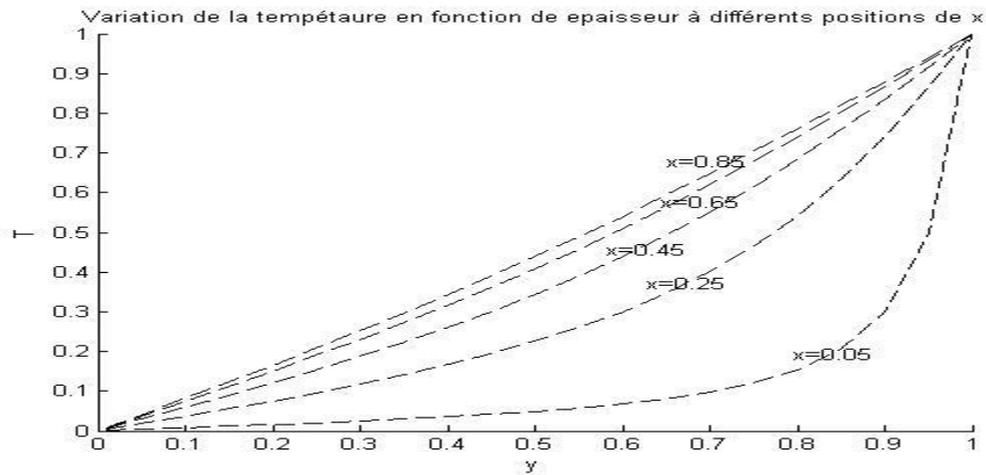


Figure V-7 :La variation de la température adimensionnelle  $T$  en fonction d'épaisseur de la plaque  $Y$  à différentes positions  $x$  dans la couche limite.

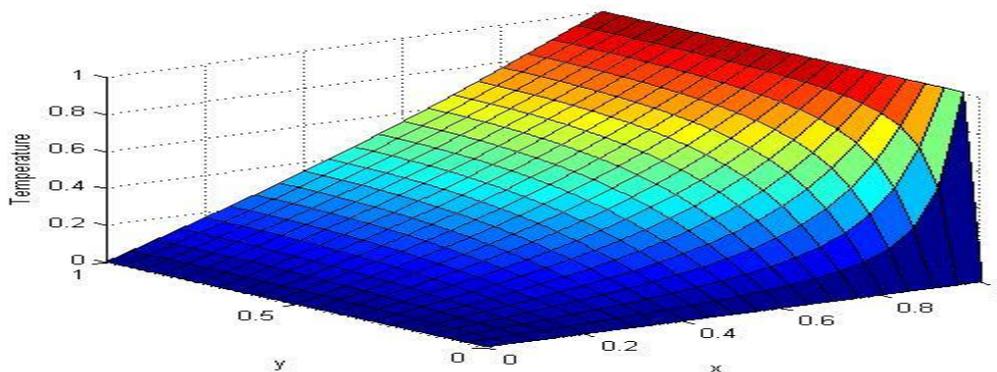


Figure V-8 :La variation de la température adimensionnelle  $T$  en fonction d'épaisseur de la plaque  $Y$  à différentes positions  $x$  dans la couche limite en 3D.

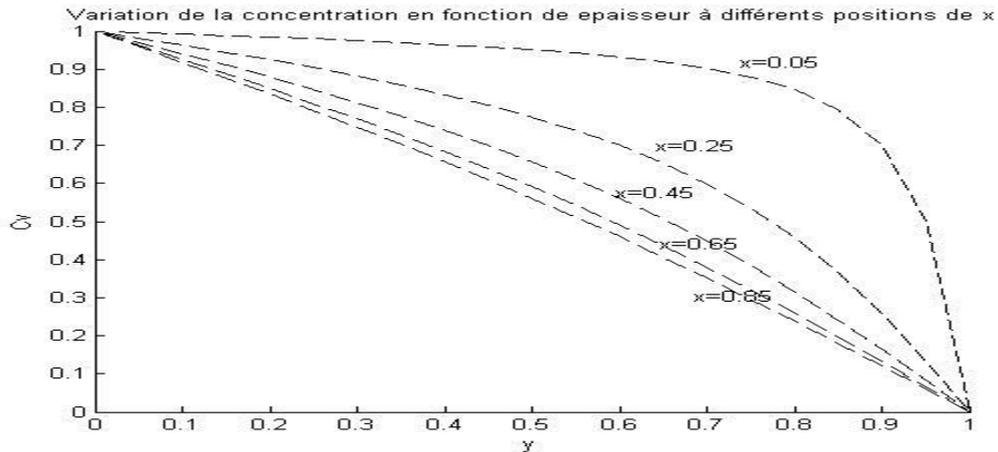
Le profil est initialement parabolique inférieure en amont de la plaque voir (figure : V.7), se transforme au fur et à mesure du développement des couches limites et tendre à un profil plat .

On observe q'au début du processus de séchage la température du materiau augmente rapidement .Ce phénomène à une évaporation rapide beaucoup plus accentuée pour les points  $x=0.85$  et  $x=0.65$  que pour les points  $x=0.05$ et  $x=0.25$ .

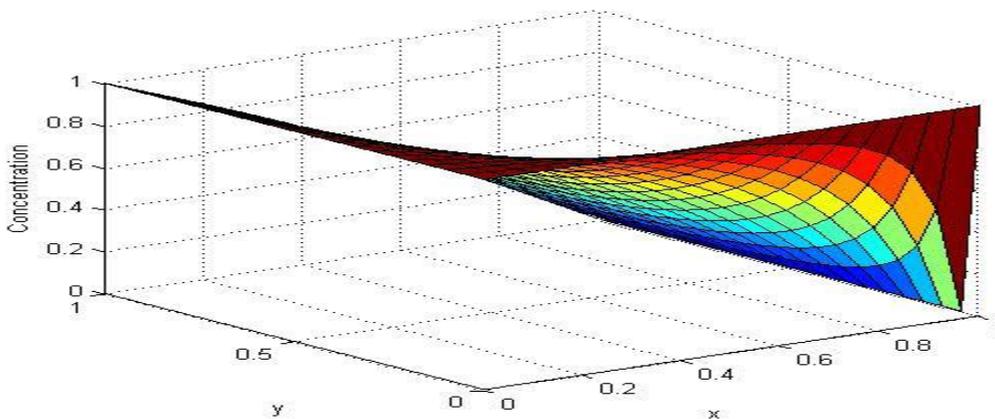
### V.1.2 Résultats relatifs aux champs de la concentration en eau

La figure V-3 montre la composante longitudinale de la concentration en eau  $C_v$  en fonction de la hauteur  $Y$  et ceci pour plusieurs valeurs de  $x$  ;(0.05 ;0.25 ;0.45 ;0.65et 0.85)

Le profil est initialement parabolique supérieure en amont de la plaque voir (figure V.9), se transforme au fur et à mesure du développement des couches limites et tendre à un profil plat .



FigureV-9 :La variation de la concentration adimensionnelle  $C_v$  en fonction d'épaisseur de la plaque  $Y$  à différents position  $x$  dans la couche limite.



FigureV-10 :La variation de la concentration adimensionnelle  $C_v$  en fonction d'épaisseur de la plaque  $Y$  à différents position  $x$  dans la couche limite en 3D.

La concentration en vapeur d'eau est maximale à l'interface ,puis décroît avec  $y$  pour atteindre la concentration en vapeur d'eau de l'ambiance.

On observe q'au début du processus de séchage la concentration du materiau augmente rapidement .Ce phénomène a une évaporation rapide beaucoup plus accentuée pour les points  $x=0.85$  et  $x=0.65$  que pour les points  $x=0.05$ et  $x=0.25$ .

## CONCLUSION

Cette étude consiste à développer un modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis permettant de résoudre d'une façon couplée les équations de transfert de masse et d'énergie dans un milieu poreux non saturé ayant les caractéristiques du béton.

La formulation du problème de séchage nécessite l'obtention et la connaissance de beaucoup de paramètres et des conditions physiques du processus. La connaissance des couches limites autour des pièces à sécher permet de déduire les coefficients de transfert de chaleur et de masse. Une variation de l'humidité et de la température est observée le long de la plaque poreuse pouvant provoquer des déformations.

La formulation mathématique du problème est faite en prenant en compte un modèle de diffusion capable de reproduire le séchage du milieu poreux pourvu que les coefficients d'échange de masse et de chaleur soient introduits.

Pour la discrétisation du domaine par élément fini, nous avons utilisé des éléments triangulaires à trois nœuds T3.

En se basant sur le modèle mathématique, nous avons élaboré un programme qui permet de décrire les évolutions des contraintes au cours de séchage dans un milieu poreux constitué d'un morceau de bois.

Les résultats des simulations numériques ont permis de visualiser des champs de vitesse, température et d'humidité dans la couche limite et à l'intérieur du milieu poreux de certains paramètres pertinents du matériau comme la température initiale, l'humidité initiale, la porosité et l'épaisseur du matériau sur le processus de séchage.

Une validation du modèle proposé a été faite en comparant nos résultats simulés avec des données bibliographiques. Les résultats obtenus sont satisfaisants et valident notre travail.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1]BEN NASRALLAH SASSI: Contribution à l'étude des transferts couplés de chaleur et de masse. Application aux phénomènes d'évaporation par convection naturelle et du séchage convectif de milieu poreux. Thèse de doctorat d'état en science physique. Université de Poitiers, (1987).

[2]RAMDANE YOUNSI : Simulation numérique du transfert de chaleur et de masse en milieux fluides poreux .Thèse de doctorat d'état en physique, Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene décembre 2002.

[3]DOUED MIHOUBI : Déshydratation d'argiles par compression et séchage. Aspects de modélisation et simulation. Thèse de doctorat d'état, Université de peau et des pays de l'Adour 2004.

[4]C. BASILICO et M. MARTIN, Approche expérimentale des mécanismes de transfert au cours du séchage convectif à haute température d'un bois résineux, Int. J. Heat and Mass Transfer, vol.27, pp 657-668, 1984.

[5] P. PERRE et A. DEGIOVANNI, Simulation par volumes finis des transferts couplés en milieux poreux anisotropes : séchage du bois à basse et à haute température, Int. J. Heat and Mass Transfer, vol.33, pp 2463-2478, 1990.

[6] J.F DAIAN : équilibre et transfert en milieux poreux 13 septembre 2013.

[7] YVES JANNOT : isothermes de sorption, modèle et détermination janvier 2003.

[8]REMACHE REBIA LEILA : Modélisation des phénomènes de transfert de chaleur et de masse dans les milieux poreux hygroscopique. Thèse de doctorat en science, génie climatique mars 2011.

[9]R.REMOND : Approche déterministe du séchage des avives de résineux poreux de fortes épaisseurs pour proposer des conduites industrielles adaptées. Thèse de doctorat 2004, Ecole nationale de génie rural, des eaux et des forêts, centre de Nancy.

[10]A. MOBARKI : Etude des transferts de masse et de chaleur lors du séchage, Thèse de Doctorat, Université de Monastir, Décembre 2005.

[11]L.BENNAMO : Contribution à l'étude des transferts couplés avec changement de phase dans un milieu poreux. Influence des conditions d'air variables sur les cinétiques de séchage et le comportement global d'un séchoir solaire, Thèse de doctorat, Université de Mentouri, Constantine.

[12]N.BOUKADIDA, S.BEN NASRALLAH and P.PERRE: Mechanism of heat and mass transfer during convective drying of porous media, drying technology, PP1367-1388, 2000.

[13]S.WHITAKER: Simultaneous heat mass and momentum transfer in porous media: Theory of drying, Advances in heat transfer, Academic press, New York, Vol. 13, pp 119-203, 1977.

[14] S.WHITAKER: Toward a diffusion theory of drying, Int. Eng Chen. Fund, Vol.16, pp 408-414, 1977.

[15]BENKAFADA FAOUZIA : Contribution à l'étude de transfert de masse et de chaleur dans un canal poreux, thèse de Doctorat 2008, Université de Constantine.

[16] YVES JANNOT : Transferts thermique, Ecole des Mines Nancy 2011.

[17]KAHLERRAS LOUBNA : Contribution à l'étude de l'influence des conditions de surface sur les transferts thermo-hydriques dans les milieux poreux, thèse Magister en Génie maritime, université de Constantine.

[18]C.KOUCHADE : Détermination en routine de la diffusivité massique dans le bois par la méthode inverse à partir de la mesure électrique en régime transitoire, Thèse de doctorat en science forestières et bois, Ecole nationale de génie rural, des eaux et des forêts, Centre de Nancy,2004.

[19] T.RYOZO: Drying mechanism of capillary bodies; advances in drying, vol.2, chap.8, edited by Arun-S.Mujumdar 1980.

[20] P.CRAUSSE, G.BACON et S.BORIS : Etude fondamentale des transferts couplés chaleur-masse en milieu poreux, Int.J.Heat and mass Transfer, 1984, vol.27, N°.5.pp657-668.

[21] SABER CHEMKHI, F.ZAGROUBA : Water diffusion coefficient in clay material from drying data, Institut national de recherche scientifique et technique 2005, Tunisie

[22] SABER CHEMKHI : Séchage d'un milieu déformable non saturé : modélisation du couplage hydromécanique, Thèse de Doctorat soutenue le 31 janvier 2008

[23] M.FILALI : Conductivité thermique apparente des milieux granulaires soumis à des contraintes mécaniques : modélisation et mesures. Thèse de doctorat, énergétique et génie de procédés ; institut national polytechnique de Toulouse 2006.

[24] GOURI DHATT, GILBERT TOUZOT et EMMANUEL LEFRANCOIS ; Méthode des éléments finis, Lavoisier 2005.

[25] F.TEHRANIAN, M.ABDOU, and M.S.TILLACK: effects of external pressure on particulate bed effective thermal conductivity. Journal of materials, pp212-215.1985.

[26] DIMCLIM (2008), Technique de conditionnement de l'air humide.

[27] BOUHADEF K. : Evaporation d'eau entre plaques parallèles humides sous l'effet d'un écoulement d'air en convection forcée. Application à l'évaluation des transferts couplés de chaleur et de masse, Thèse de doctorat sciences physiques. Université de Poitiers 1988

## ANNEXE I

### NOTIONS SUR LES MILIEUX POREUX

Un matériau poreux est un solide de forme compliquée contenant des vides (pores) qui peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides susceptibles de s'écouler et éventuellement d'échanger entre elles et avec le solide de la matière et de l'énergie (fig. I.1).

L'humidité contenue dans les corps solides ou liquides se présente soit sous la forme d'une solution dans laquelle l'eau constitue le solvant. Il s'agit d'une solution capable de cristalliser ou d'une solution colloïdale.

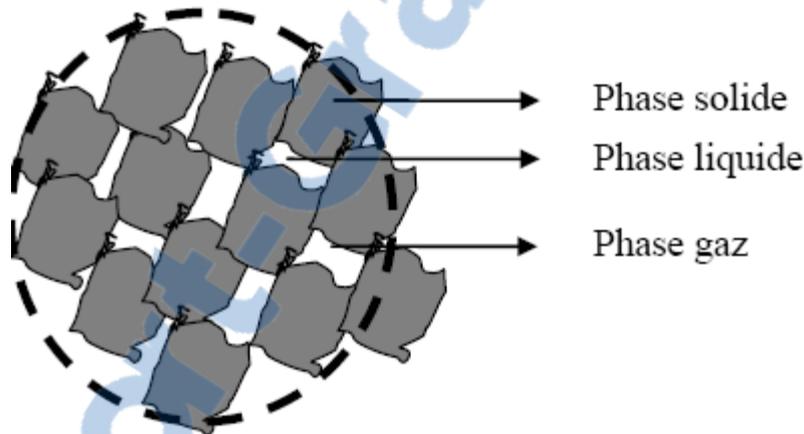


Figure I-1 Les phases d'un matériau poreux

Les corps humides sont généralement des types capillo poreux et leurs propriétés sont principalement fonctions de la nature des liaisons avec l'eau qu'ils contiennent. On classifie ces liaisons selon l'énergie des corps humides qui est l'énergie libre du processus de déshydratation ou déshumidification.

Eau combinée cliniquement : Elle est sous forme d'ions hydroxyles.

Eau absorbée : Elle est principalement constituée d'une couche monomoléculaire répartie sur les surfaces externes du corps capillo poreux. L'adsorption est considérée comme le déplacement d'une substance dans le film limite entre deux phases voisines sans que la nature de l'énergie nécessaire au phénomène entre en compte. Elle est spontanée,

exotherme et toujours accompagnée d'une diminution de l'énergie libre du système correspondant à la chaleur d'adsorption.

Eau osmotique : le passage de l'adsorption à l'osmose correspond à l'annulation de l'effet thermique de l'adsorption. Pour certain taux d'humidité, la chaleur d'adsorption devient nulle, l'eau est alors fixée par osmose et sa pression de saturation est égale à celle de l'eau libre.

Eau libre : Elle est maintenue dans le produit par les seules forces mécaniques (eau retenue par capillarité, eau dans les pores).

## ANNEXE II

### THEORIE DE L'ADSORPTION

L'adsorption moléculaire de fluide par un solide est généralement représentée par des courbes indiquant l'évolution de la quantité absorbée à l'équilibre, en fonction de la pression relative de vapeur, à température constante donnée.

Diverses théories ont été développées pour expliquer et quantifier l'allure de ces courbes. Les principales d'entre elles sont citées ci-dessous, par ordre chronologique.

Adsorption mono moléculaire, théorie de LANGMUIR

Selon LANGMUIR, la quantité absorbée à l'équilibre résulte de l'égalité des vitesses d'évaporation et de condensation sur la surface solide (figure II.1).

La vitesse de désorption est proportionnelle à la surface S recouverte d'absorbât et aussi à la pression relative h, la surface libre ( $S_m - S$ ) ;  $S_m$  désigne la surface spécifique du solide.

A l'équilibre on obtient :  $Ch(S_m - S) = S$

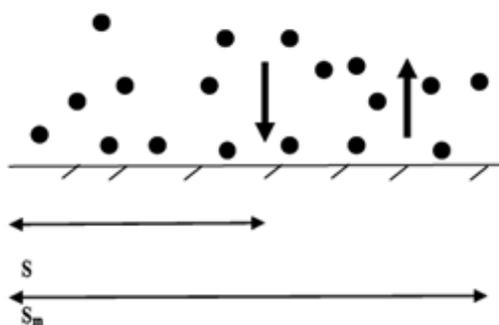
Pour des vitesses moléculaires conformes à la répartition statistique de Boltzmann, la constante C s'écrit :

$$C = \exp(E_1/RT)$$

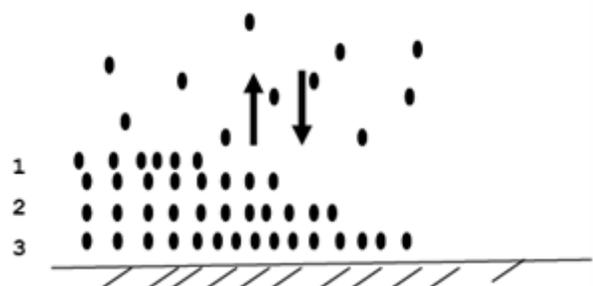
Avec  $E_1$  : chaleur molaire d'absorption de la couche absorbée,

$$\text{En posant } \frac{S_s}{S_m} = \frac{W}{W_m} = \frac{\Theta}{\Theta_m}$$

$$\text{Il vient : } h = \frac{W}{C(W_m - W)} \text{ ou } \frac{w}{W_m} \text{ ou } \frac{ch}{1 + ch}$$



Absorption multimoléculaire LANGMUIR



Absorption multimoléculaire ;theorie BET

Figure II-1 : Schématisation du phénomène d'adsorption

## Adsorption multimoléculaire ; Théorie BET [6]

Cette théorie, dû à BRUNAUER EMMETT et TELLER (1938), constitue multimoléculaire de la loi de LANGMUIR. Elle est fondée sur les hypothèses suivantes :

-la surface des pores est recouverte de couches moléculaires superposées. L'équilibre résulte de l'égalité successive des vitesses d'évaporation des couches d'ordre  $i$  et de condensation d'ordre  $(i-1)$ .

-La chaleur d'absorption dans toutes les couches autres que la première est égale à la chaleur de vaporisation de l'eau, et  $E_i=E_L$  pour  $i>1$ .

-La chaleur d'absorption dans toutes les couches autres que la première est égale à la chaleur de vaporisation.

$E_i>E_L$  avec  $E_L$  chaleur molaire latente de vaporisation de l'eau, et  $E_i=E_L$  pour  $i>1$ .

-Le nombre de couches pouvant être absorbées n'est pas limité par la dimension des pores.

$$\frac{W}{W_m} = \frac{ch}{(1-h)(1-h+ch)} \text{ avec } c = \exp\left(\frac{E_i - E_L}{RT}\right)$$

Cette équation donne une teneur en eau infinie pour  $h=1$ , ce qui limite son applicabilité aux valeurs moyennes de  $h$ .

La théorie BET est actuellement la plus largement utilisée, mais elle est critiquable sur les points suivants :

-Elle néglige les effets d'interaction mutuelle entre molécules absorbées.

-Elle suppose que seule la première couche subit l'effet de surface. Les autres couches, énergétiquement équivalentes à un liquide ordinaire, ne pourraient donc pas en principe demeurer en équilibre avec la vapeur non saturée.

Le modèle GAB se propose d'y remédier en tenant compte de la chaleur d'absorption de toutes les couches moléculaires.

### Modèle GAB

Il a été établi indépendamment par les auteurs GUGGENHEIM, ANDERSON et DEBOER. Il constitue en principe une extension de la théorie BET, dans la mesure où il tient compte d'une chaleur d'absorption pour toutes les couches moléculaires :  $E_n \neq E_L$

L'équation GAB s'écrit alors :

$$\frac{W}{W_m} = \frac{c'k}{(1-kh)(1-kh+c'kh)} \text{ avec } k = \exp\left(\frac{E_L - E_m}{RT}\right) \text{ et } c' = \exp\left(\frac{E_i - E_m}{RT}\right)$$

Ce modèle comme celui de BET n'est physiquement valable qu'en l'absence de condensation capillaire, son champ d'application théorique ne concerne donc que les faibles et moyennes valeurs de h.

L'équation GAB s'est toutefois avéré un excellent outil de lissage mathématique des isothermes de sorption sur la quasi-totalité du domaine des valeurs de h. Elle fournit ainsi un moyen de calcul des expressions de h(w) et de la pente dw/dh, qu'on utilisera en particulier lors des simulations numériques :

$$h(w) = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4(1-c')}}{2k(1-c')} \quad \text{avec} \quad a = 2 + \frac{c'(W_m - W)}{W}$$

$$\frac{aw}{ah} = (-\alpha + \delta/h^2)W^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{k(1-c')}{c'} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{c1}{c'kW_m}$$

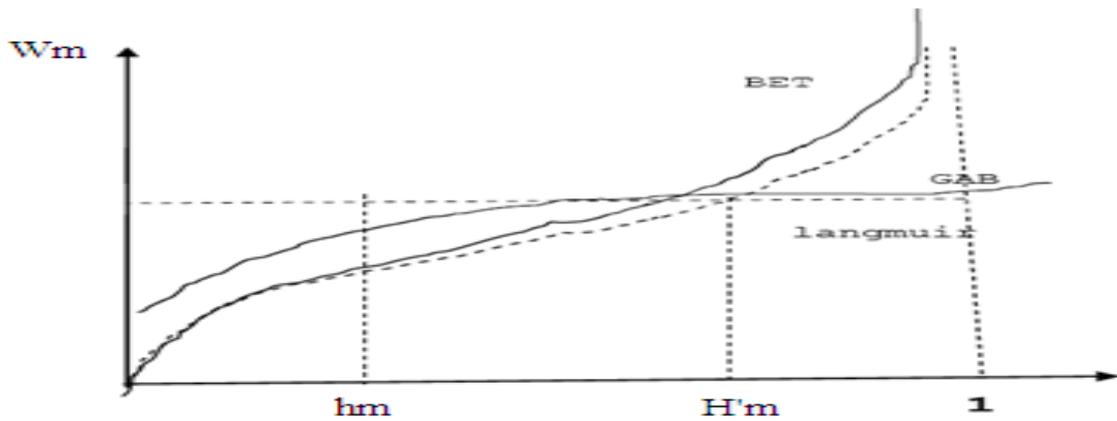


Figure II-2 : Allure globales des courbes correspondant aux différents modèles d'absorption

## ANNEXE III

# MECANISME DE TRANSFERT DE MASSE DANS LE MILIEU POREUX

### Loi de Fick

On considère que le transport de la vapeur d'eau est un processus diffusif régi par la loi de Fick qui s'exprime en milieu poreux par :

$$\vec{J} = -D \overrightarrow{\text{grad}} C_v$$

ou :

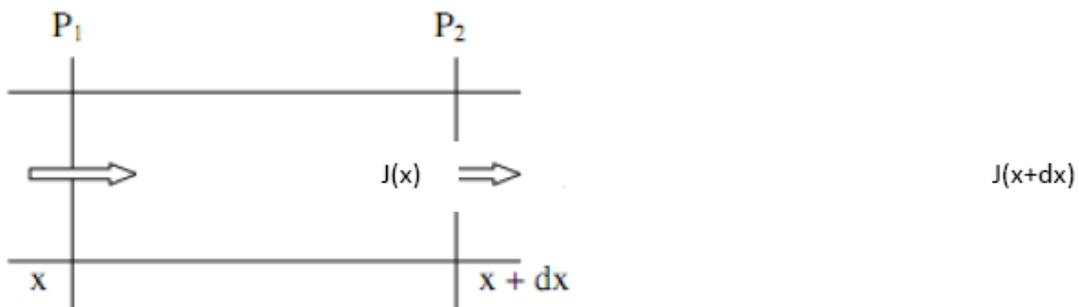
$J$  : la densité de flux de masse.

$D$  : le coefficient de diffusivité de la vapeur d'eau en ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).

$C_v$  : la concentration en vapeur d'eau en ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ).

L'équation de diffusion est obtenue en considérant un volume élémentaire limité par les plans  $P_1$  et  $P_2$  d'abscisse respectives  $x$  et  $(x+dx)$ . Les valeurs des flux à travers les deux plans 1 et 2 sont respectivement  $J(x)$  et  $J(x+dx)$  :

La quantité de matière accumulée dans l'élément de volume limité par les deux plans  $P_1$  et  $P_2$  est donnée par la relation :



$$[J(x) - J(x+dx)] dt = \frac{\delta J}{\delta x} dx dt$$

Cette quantité de matière peut également s'exprimer en fonction de la variation temporelle de la concentration dans l'élément de volume de longueur  $dx$ , soit :

$$[C_v(t+dt)-C_v(t)].dx=\frac{\delta C_v}{\delta x}dt dx$$

En égalisant les deux expressions, on obtient :

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial C_v}{\partial t}$$

En combinant les équations, on obtient la deuxième loi de Fick :

$$\frac{\partial C_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial C_v}{\partial x} \right)$$

Cette relation représente l'équation de diffusion.

### Loi de Darcy

En 1854 Dupuit a fait des expériences sur les filtres urbains de l'eau, il a déduit que la baisse de pression provoquée par le filtre était proportionnelle à la vitesse de filtration.

Henry Darcy a prouvé cette hypothèse en 1856 grâce à des expériences effectuées sur divers paquets de gravier de sable. Darcy a trouvé que l'écoulement de l'eau à travers le filtre de sable correspond à la formule suivante :

$$q=A \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

avec :

A : La section transversale perpendiculaire à la direction de l'écoulement.

k : La perméabilité, c'est une propriété du milieu .

L : La longueur dans la direction de l'écoulement.

$\Delta P$  : La différence de pression le long de l'écoulement.

$\mu$  : La viscosité du fluide.

## ANNEXE IV

Les simulations sont effectuées sur un matériau de construction moderne qui est le béton renforcé avec des copeaux de bois. Les caractéristiques géométriques et thermo physiques du matériau et de l'air sont représentées ci-dessous :

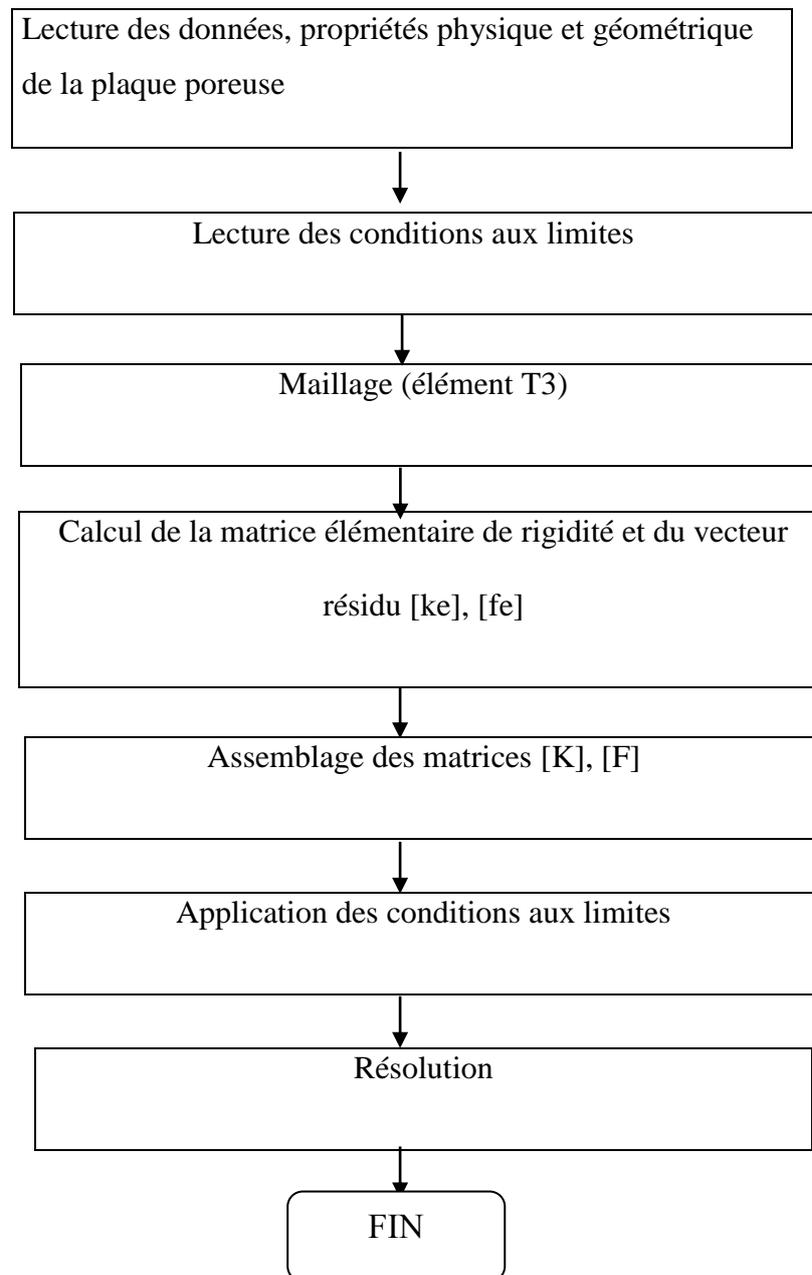
Nature du matériau	Béton armé avec des morceaux en bois
Epaisseur de plaque	10cm
Longueur de la plaque	1m
Porosité $\varepsilon$	77%
Masse volumique du solide $\rho_s$	2300kg/m <sup>3</sup>
Conductivité thermique $\lambda_{sec}$	0.33w/m.k
Chaleur spécifique $C_p$	1050J/kg.k
Masse volumique du liquide $\rho_L$	1000kg/m <sup>3</sup>
Température de l'air de séchage	303K
Concentration d'humidité de l'air de séchage	0.5
Vitesse de l'air	5m/s
Masse volumique de l'air humide $\rho_g$	1.195kg/m <sup>3</sup>
Conductivité thermique de l'air $\lambda_{air}$	0.0267w/m.k
Chaleur spécifique de l'air $C_{pair}$	1005J/kg.k
Viscosité de l'air	0.000016m <sup>2</sup> /s
Pas du temps	900 s
Test de convergence	10 <sup>-5</sup>

Tableau IV.1 : Caractéristiques géométriques et thermo physique du matériau et de l'air

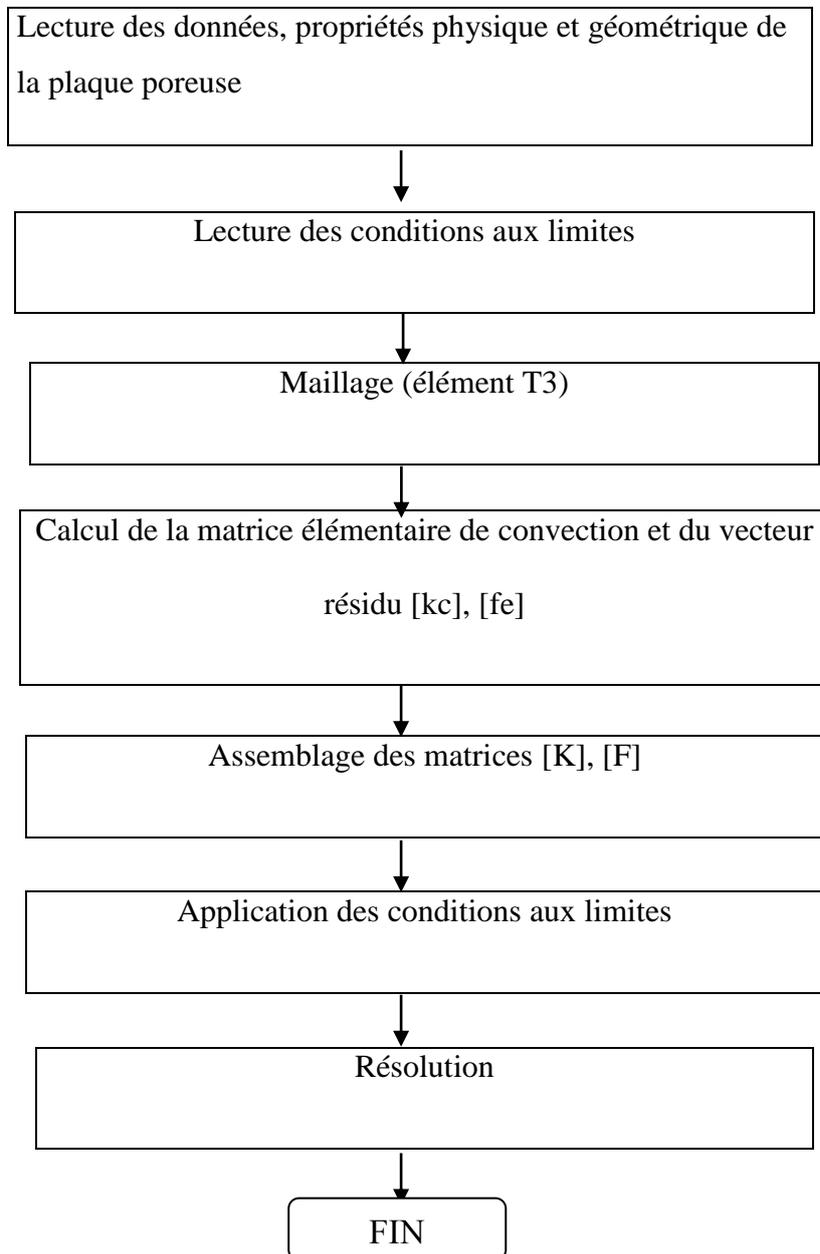
## ANNEXE V

### ORGRANIGRAMMES

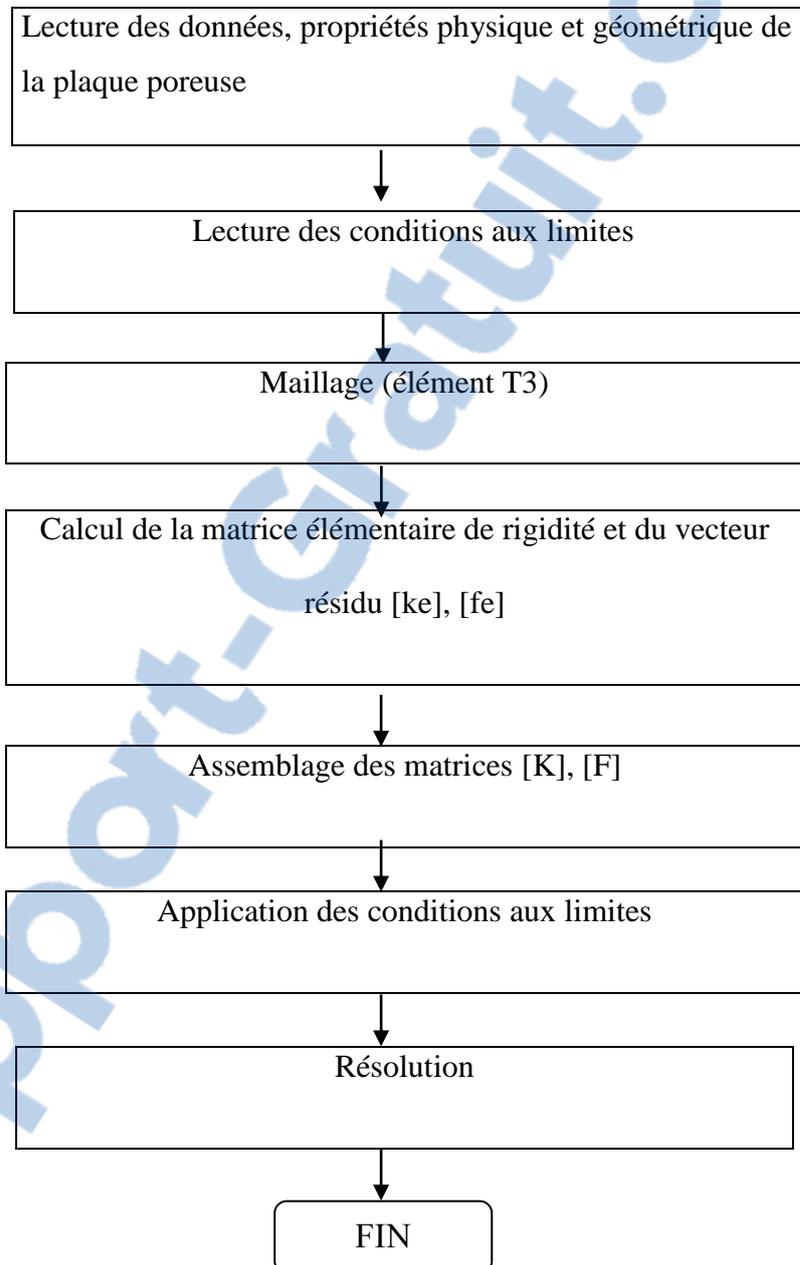
#### Calcul des vitesses $u, v$



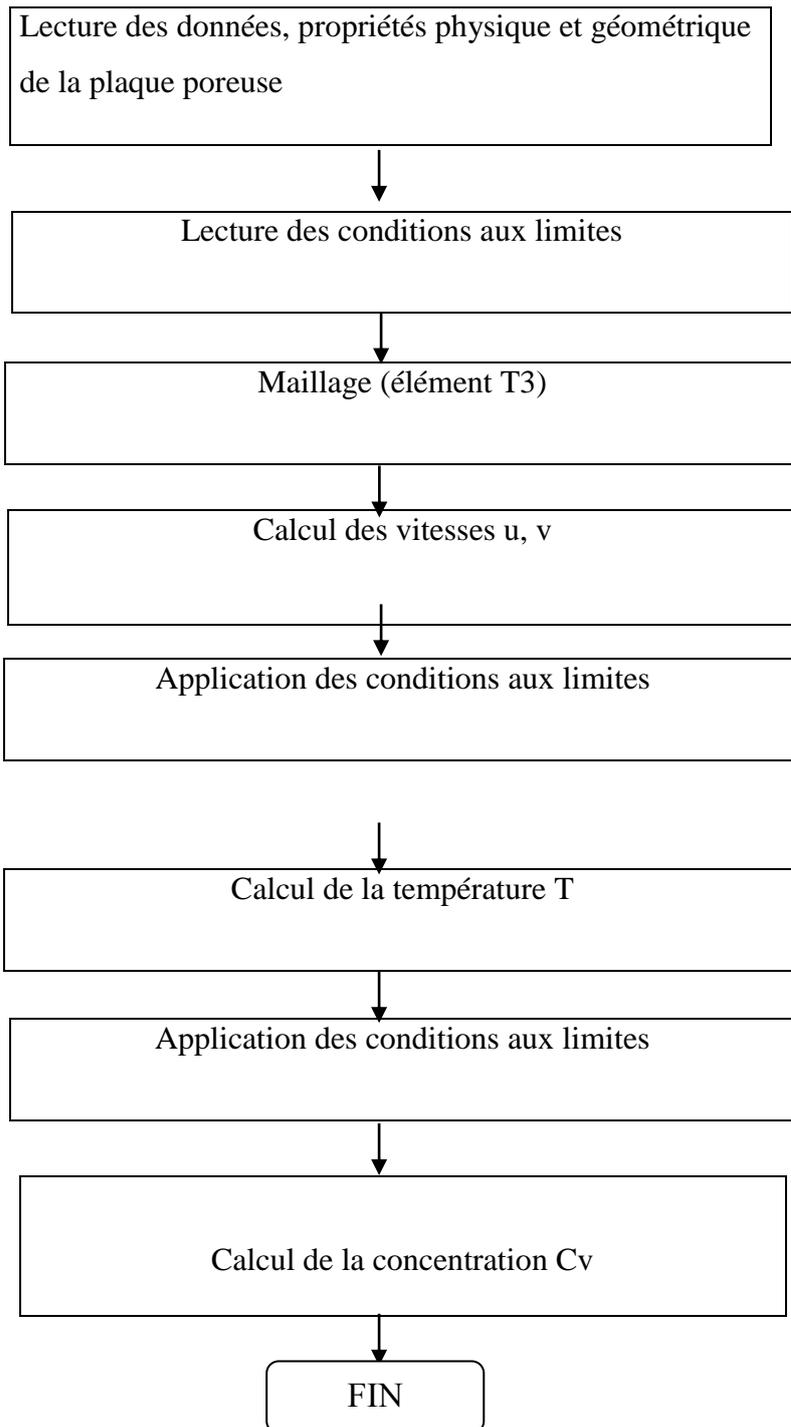
## Calcul de la température T



## Calcul de la concentration $C_v$



# Organigramme global pour calculer la température $T$ et la concentration $C_v$



# PROGRAMME ELEMENTS FINIS EN LANGAGE

## MATLAB

```
%*****
% Calcul des composantes u et v de la vitesse
% en résolvant les équations de Navier-Stokes
%*****
%---Lecture des données physiques
nu=0.01; xnorm=1.;
%----Lecture des conditions aux limites
ndlt=2*nnt; % ndlt: nombre de degré de libertés total
vdlg=zeros(ndlt,1);kcond=zeros(ndlt,1);vcond=zeros(ndlt
,1);
%Lecture des conditions aux limites
for i=1:nx
% Coté y=0
in=i;
ii=kdlc(in);
kcond(ii+1)=1; kcond(ii+2)=1; vcond(ii+1)=0;
vcond(ii+2)=0;
% Coté y=e
in=(ny-1)*nx+i; ii=kdlc(in); kcond(ii+1)=1;
vcond(ii+1)=1;
end
for j=1:ny
% Coté x=0
in=(j-1)*nx+1; ii=kdlc(in);
kcond(ii+1)=1; kcond(ii+2)=1; vcond(ii+1)=1;
vcond(ii+2)=0;
% Coté x=1
in=j*nx; ii=kdlc(in); kcond(ii+2)=1; vcond(ii+2)=0;
end

for i=1:ndlt
ifkcond(i) == 1
vdlg(i)=vcond(i);
end
end

%----Boucle sur les itérations de Newton-Raphson
```

```

while xnorm > 0.01
%---Initialisation de la matrice tangente et vecteur
force
vktg=zeros(ndlt,ndlt); vfg=zeros(ndlt,1);

%-----Boucle sur les éléments
for ie=1:nelt
loce=convec(ie,:); %loce: connectivité élémentaire
for i=1:nnel      % kdle: table de localisation
élémentaire
ii=loce(i); jj=kdlc(ii);
kdle(2*i-1)=jj+1; kdle(2*i)=jj+2;
end
    x1=x(loce(1)); x2=x(loce(2)); x3=x(loce(3));
    y1=y(loce(1)); y2=y(loce(2)); y3=y(loce(3));
xm=(x1+x2+x3)/3; ym=(y1+y2+y3)/3;
Ae=0.5*((x2-x1)*(y3-y1)-(x3-x1)*(y2-y1));
    j=[y3-y1 -(y2-y1); -(x3-x1) x2-x1]/(2*Ae); D=[-1 1
0;-1 0 1]; B=j*D;
%---Calcul des différentes matrices
matrice
%----Calcul élémentaire
vdle=vdlg(kdle); ue=vdle(numu); ve=vdle(numv);
um=(ue(1)+ue(2)+ue(3))/3; ux=DNDX*ue;
vm=(ve(1)+ve(2)+ve(3))/3; vy=DNDY*ve;
    Ku=um*VKTX+vm*VKTY+nu*(VKYY+VKXX); Fu=Ku*ue;
Kv=vm*VKTY+um*VKTX+nu*(VKYY+VKXX); Fv=Kv*ve;
Kuu=um*VKTX+ux*VKTT+vm*VKTY+nu*(VKYY+VKXX);
Kuv=vy*VKTT;
Kvu=VKTX; Kvv=vm*VKTY+vy*VKTT+um*VKTX+nu*(VKYY+VKXX);
%----Assemblage
vfe(numu)=Fu; vfe(numv)=Fv;
vkte(numu,numu)=Kuu; vkte(numu,numv)=Kuv;
vkte(numv,numu)=Kvu; vkte(numv,numv)=Kvv;
%---Assemblage
vktg(kdle,kdle)=vktg(kdle,kdle)+vkte;
vfg(kdle)=vfg(kdle)-vfe';
end
%---Application des Conditions aux limites
for i =1:ndlt
ii=kcond(i);
if ii > 0
val=0.; %vcond(i);
vfg=vfg-vktg(:,i)*val;          % modifvfg
vktg(:,i)=zeros(ndlt,1);      % ligne col zero
vktg(i,:)=zeros(1,ndlt);      % et un sur la diagonale

```

```

vktg(i,i)=1;
vfg(i,1)=val; %vcond(i);
end
end

%---Résolution
dvdlg=vktg\vfg;
vdlg=vdlg+dvdlg;
xnorm=(dvdlg'*dvdlg)/(vdlg'*vdlg)
end

%*****Fin du programme

for i=1:nnt
ii=kdlc(i)
ug(i)=vdlg(ii+1); vg(i)=vdlg(ii+2);
end

%%%%TRACE des courbes

for i=2:3:nx
for j=1:ny
kk=[2 33 64 95]
%kk(j)=(j-1)*nx+i; % kk=[2 33 64 95] ]kknuméro
des noeuds
end
holdon
plot(y(kk),ug(kk))
end

% résolution de l'équation de convection-diffusion en
2D stationnaire, en
% utilisant des schémas décentrés

% Coefficient de diffusion Dv
k=0.001 % (k==Dv)

% Choix du schéma
isch=2; % 1= N : 2= LDA 3= LDB
vkg=zeros(nnt,nnt);
fg=zeros(nnt,1);kcd=zeros(nnt,1);vcd=zeros(nnt,1);
vdg=zeros(nnt,1);

for i=1:nx

```

```

% Coté y=0
in=i; kcd(in)=1; vcd(in)=0;
% Coté y=e
in=(ny-1)*nx+i; kcd(in)=1; vcd(in)=1;
end
for j=1:ny
% Coté x=0
in=(j-1)*nx+1; kcd(in)=1; vcd(in)=1;
end

for i=1:nnt
ifkcd(i) == 1
vdg(i)=vcd(i);
end
end

forie=1:nelt
loce=connecc(ie,:);
x1=x(loce(1)); x2=x(loce(2));x3=x(loce(3));
y1=y(loce(1)); y2=y(loce(2));y3=y(loce(3));
xm=(x1+x2+x3)/3; ym=(y1+y2+y3)/3;
u1=ug(loce(1)); u2=ug(loce(2));u3=ug(loce(3));
v1=vg(loce(1)); v2=vg(loce(2));v3=vg(loce(3));
um=(u1+u2+u3)/3; vm=(v1+v2+v3)/3; u=[um,vm];
Ae=0.5*((x2-x1)*(y3-y1)-(x3-x1)*(y2-y1));
j=[y3-y1 -(y2-y1);-(x3-x1) x2-x1]/(2*Ae); D=[-1 1
0;-1 0 1]; B=j*D;
n1=[-(y3-y2);x3-x2]; n2=[-(y1-y3);x1-x3]; n3=[-(y2-
y1);x2-x1];
k1=0.5*u*n1; k2=0.5*u*n2; k3=0.5*u*n3;
% Calcul de la matrice de convection [Kc]
if (k1 > 0)&(k2 > 0)
ifisch == 1
vkc=[-k1 0 k1;0 -k2 k2;0 0 0];
elseifisch ==2
vkc=[k1*k1/k3 k1*k2/k3 k1;k1*k2/k3 k2*k2/k3 k2; 0 0 0];
elseifisch == 3
P=pi/2-acos(2*k2/(norm(u)*norm(n2)));
Q=pi/2-acos(2*k1/(norm(u)*norm(n1)));
a1=cos(P)*sin(Q)/sin(P+Q);
a2=sin(P)*cos(Q)/sin(P+Q);
vkc=-[a1*k1 a1*k2 a1*k3; a2*k1 a2*k2 a2*k3;0 0 0];
end
elseif (k1 > 0)&(k3 > 0)
ifisch == 1
vkc=[-k1 k1 0;0 0 0;0 k3 -k3];

```

```

elseifisch == 2
vkc=[k1*k1/k2 k1 k1*k3/k2;0 0 0;k1*k3/k2 k3 k3*k3/k2];
elseifisch == 3
    P=pi/2-acos(2*k3/(norm(u)*norm(n3)));
    Q=pi/2-acos(2*k1/(norm(u)*norm(n1)));
    a1=cos(P)*sin(Q)/sin(P+Q);
a2=sin(P)*cos(Q)/sin(P+Q);
vkc=-[a1*k1 a1*k2 a1*k3;0 0 0; a2*k1 a2*k2 a2*k3];
end
elseif (k2 > 0)&(k3 > 0)
ifisch == 1
vkc=[0 0 0;k2 -k2 0;k3 0 -k3];
elseifisch == 2
vkc=[0 0 0;k2 k2*k2/k1 k2*k3/k1; k3 k2*k3/k1 k3*k3/k1];
elseifisch == 3
    P=pi/2-acos(2*k3/(norm(u)*norm(n3)));
    Q=pi/2-acos(2*k2/(norm(u)*norm(n2)));
    a1=cos(P)*sin(Q)/sin(P+Q);
a2=sin(P)*cos(Q)/sin(P+Q);
vkc=-[0 0 0; a1*k1 a1*k2 a1*k3; a2*k1 a2*k2 a2*k3];
end
elseif (k1 > 0)&(k2*k3 >=0)
vkc=[-k1 -k2 -k3; 0 0 0;0 0 0];
elseif (k2 > 0)&(k1*k3 >=0)
vkc=[0 0 0;-k1 -k2 -k3; 0 0 0];
elseif (k3 > 0)&(k1*k2 >=0)
vkc=[0 0 0;0 0 0;-k1 -k2 -k3];
end
% Calcul de la matrice de diffusion [Kd]
vkd=k*Ae*B'*B;
% Calcul de la matrice de convection-diffusion
élémentaire
vke=Ae*vkc+vkd;
% calcul du vecteur force
vfe=[0;0;0];
% Assemblage
vkg(loce,loce)=vkg(loce,loce)+vke;
fg(loce)=fg(loce)+vfe;

end
% Application des conditions aux limites
for i =1:nnt
ii=kcd(i);
if ii > 0
val=vcd(i);
fg=fg-vkg(:,i)*val;           % modiffg

```

```

vkg(:,i)=zeros(nnt,1);           % ligne col zero
vkg(i,:)=zeros(1,nnt);         % et un sur la diagonale
vkg(i,i)=1;
fg(i,1)=val; %vcd(i);
end
end
% Resolution
vdg=vkg\fg;

%%%%%%TRACE des courbes

for i=2:3:nx
for j=1:ny
kk(j)=(j-1)*nx+i;
end
holdon
plot(y(kk),vdg(kk))
end

ZERO=0.; DETJ=2*Ae;EE=0.5/DETJ;SIS=1/6;AA=DETJ/24;
%
%----- DERIVEES PAR RAPPORT A X ET Y
%
DNDX(1)=y2-y3;DNDX(2)=y3-y1;DNDX(3)=y1-y2;
DNDY(1)=x3-x2;DNDY(2)=x1-x3;DNDY(3)=x2-x1;
%
%----- CALCUL MATRICIELLE
%
VKTT(1,1)=2*AA;VKTT(1,2)=AA;VKTT(1,3)=AA;
VKTT(2,1)=AA;VKTT(2,2)=2*AA;VKTT(2,3)=AA;
VKTT(3,1)=AA;VKTT(3,2)=AA;VKTT(3,3)=2*AA;
%
for I=1:nnel
for J=1:nnel
VKTX(I,J)=SIS*DNDX(J);
VKTY(I,J)=SIS*DNDY(J);
VKXX(I,J)=EE*DNDX(I)*DNDX(J);
VKXY(I,J)=EE*DNDX(I)*DNDY(J);
VKYX(I,J)=EE*DNDY(I)*DNDX(J);
VKYY(I,J)=EE*DNDY(I)*DNDY(J);
end
end

```

## LISTE DES FIGURES

Figure I-1 : phase liquide, solide et gazeuse dans VER (Volume élémentaire représentatif d'un milieu poreux .....	14
Figure I-2 : Eau liée dans les pores .....	15
Figure I-3 : les deux types de porosité (Salazar, 2006).....	16
Figure I-4 : schéma du V.E.R (volume élémentaire représentatif) d'un milieu poreux saturé .....	20
Figure I-5 : tensions de surface fluide-fluide et fluide-solide ( $\theta$ angle de contact).....	21
Figure I-6: forme générale des isothermes.....	23
Figure I-7: courbes de désorption et d'absorption d'un matériau hygroscopique.....	24
Figure I-8: expérience du tube capillaire mettant en évidence les forces de tension superficielle .....	25
Figure II-1: courbes typiques de séchage convectif.....	29
Figure II-2: volume élémentaire représentatif.....	34
Figure II-3: Diffusivité massique effective totale (gaz+liquide) d'après Crausse [16].....	39
Figure II-4: Evolution du coefficient de diffusion capillaire (température constante)[15].....	39
Figure II-5 : Résultat expérimental de la diffusion de l'humidité dans la brique par Ohtani [23].....	40
Figure II-6 : coefficient de diffusion obtenu dans le cas monodimensionnel à 20°C.....	41
Figure II-7 : coefficient de diffusion a partir de l'évolution du profil de l'humidité en bidimensionnel. [20].....	42
Figure II-8 : cinétique de séchage de l'argile pour différents conditions expérimentales [21].....	43
Figure II-9 : Diffusivité massique de l'argile pour différents conditions de séchage [21] .....	43
Figure II-10 : Variation de la conductivité thermique en fonction de la porosité pour plusieurs modèles [24].....	48

Figure II-11 : variation du rapport des conductivités pour le béton d'agrégats de quartzite $\rho=2200(\text{kg}/\text{m}^3)$ .....	49
Figure II-12 : variation du rapport des conductivités pour béton d'argile expansé $\rho=2200(\text{kg}/\text{m}^3)$ .....	50
Figure II-13 : Variation de la conductivité thermique avec la teneur en eau du matériau [11].....	51
Figure III-1 : schéma du modèle.....	52
Figure V-1 : Domaine étudié.....	63
Figure IV-2:Maillage.....	63
Figure IV.3 : Elément réel, Elément de référence.....	64
Figure IV-4 : Elément de référence.....	64
Figure V-1 : La variation de la vitesse adimensionnelle U en fonction d'épaisseur de la plaque Y à différents position x dans la couche limite.....	73
Figure V-2 : La variation de la vitesse adimensionnelle horizontal U en fonction d'épaisseur de la plaque Y à différents position x dans la couche limite en 3D.....	73
Figure V-3 : La variation de la vitesse adimensionnelle transversale V en fonction d'épaisseur de la plaque Y à différents position x dans la couche limite en 3D.....	73
Figure V-4 : Evolution de la vitesse adimensionnelle U en fonction de y dans la couche limite à la première station $x=0.05$ [17].....	74
Figure V-5 : Evolution de la vitesse adimensionnelle U en fonction de y dans la couche limite à la cinquième station $x=0.45$ [17].....	75
Figure V-6 : Evolution de la vitesse adimensionnelle U en fonction de y dans la couche limite à la dernière station $x1=1$ [17].....	76
FigureV-7:La variation de la temperature adimensionnelle T en fonction d'epaisseur de la plaque Y à differents position x dans la couche limite.....	77
Figure V-8 : La variation de la temperature adimensionnelle T en fonction d'epaisseur de la plaque Y à differents position x dans la couche limite en 3D.....	77
Figure V-9 : La variation de la concentration adimensionnelle $C_v$ en fonction d'epaisseur de la plaque Y à differents position x dans la couche limite.....	80
Figure V-10 :La variation de la concentration adimensionnelle $C_v$ en fonction d'epaisseur de la plaque Y à differents position x dans la couche limite en 3D.....	80

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1 : Porosité de quelque matériau.....	16
Tableau I.2 : Perméabilité de quelques matériaux.....	19
Tableau II.1 : Modèles de mesure de la conductivité thermique à partir de la porosité.....	47
Tableau II.2 : Modèles de mesure de la conductivité thermique en tenant compte de la saturation en eau.....	50

Rapport-Gratuit.com

## LISTE DES EQUATIONS

Equation I.1.....	15
Equation I.2.....	22
Equation I.3.....	25
Equation I.4.....	27
Equation I.5.....	27
Equation II.1.....	31
Equation II.2.....	32
Equation II.3.....	32
Equation II.4.....	32
Equation II.5.....	32
Equation II.6.....	32
Equation II.7.....	33
Equation II-8.....	33
Equation II.9.....	33
Equation II-10.....	33
Equation II.11.....	33
Equation II.12.....	40
Equation II.13.....	40
Equation II.14.....	41
Equation II.15.....	43
Equation II.16.....	43
Equation II17.....	44
Equation II.18.....	44
Equation II.19.....	45
Equation II.20.....	45

Equation II.21 .....	45
Equation II.22 .....	45
Equation II.23 .....	46
Equation II.24 .....	46
Equation II.25 .....	46
Equation III.1 .....	53
Equation III.2 .....	53
Equation III-3 .....	54
Equation III.4 .....	54
Equation III.5 .....	55
Equation III.6 .....	55
Equation III.7 .....	55
Equation III.8 .....	55
Equation III.9 .....	56
Equation III-10 .....	56
Equation III.11 .....	56
Equation III.12 .....	56
Equation III.13 .....	56
Equation III.14 .....	56
Equation III.15 .....	56
Equation III.16 .....	57
Equation III.17 .....	57
Equation III.18 .....	57
Equation III.19 .....	58
Equation III.20 .....	58
Equation III.21 .....	58

Equation III.22.....	59
Equation III.23.....	59
Equation III.24.....	59
Equation III.25.....	59
Equation III.26.....	59
Equation III.27.....	60
Equation III.28.....	60
Equation III.29.....	60
Equation III.30.....	60
Equation III.31.....	60
Equation III.32.....	60
Equation IV.1.....	62
Equation IV.2.....	63
Equation IV.3.....	64
Equation IV.4.....	65
Equation IV-5.....	65
Equation IV.6.....	65
Equation IV.7.....	65
Equation IV.8.....	65
Equation IV.9.....	65
Equation IV.10.....	65
Equation IV.11.....	66
Equation IV.12.....	66
Equation IV.13.....	66
Equation IV.14.....	67
Equation IV.15.....	67

Equation IV.16.....	67
Equation IV.17.....	67
Equation IV.18.....	67
Equation IV.19.....	68
Equation IV.20.....	68
Equation IV.21.....	68
Equation IV.22.....	68
Equation IV.23.....	68
Equation IV.24.....	68
Equation IV.25.....	69
Equation IV.26.....	69
Equation IV.27.....	69
Equation IV.28.....	69
Equation IV.29.....	69
Equation IV.30.....	71
Equation IV.31.....	72