

TABLE DES MATIÈRES

| | Page |
|---|------|
| INTRODUCTION | 1 |
| CHAPITRE 1 PRÉDICTION DES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE : REVUE DE LA LITTÉRATURE | 13 |
| 1.1 Introduction..... | 13 |
| 1.2 Équations d'eaux peu profondes..... | 14 |
| 1.3 Traitement des termes sources..... | 16 |
| 1.3.1 Terme source de friction | 17 |
| 1.3.2 Terme source de géométrie..... | 18 |
| 1.4 Traitement des bancs couvrants-découvrants | 19 |
| 1.4.1 Méthodes de déformation de maillage..... | 20 |
| 1.4.2 Méthodes Eulériennes ou à maillage fixe | 22 |
| 1.5 Conclusion | 28 |
| CHAPITRE 2 MODÈLE NUMÉRIQUE BIDIMENSIONNEL DE SIMULATION DES ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE : SCHÉMA VOLUMES FINIS | 29 |
| 2.1 Introduction..... | 29 |
| 2.2 Modèle numérique volumes finis..... | 30 |
| 2.3 Traitement du terme source de bathymétrie..... | 32 |
| 2.3.1 Modèle-1 (dit linéaire)..... | 33 |
| 2.3.2 Modèle-2 (dit non-linéaire)..... | 34 |
| 2.3.3 Terme source pour le modèle-1 et le modèle-2 | 35 |
| 2.4 Traitement du flux d'interface | 36 |
| 2.4.1 Approximation numérique du flux d'interface | 36 |
| 2.4.2 Propriétés de conservation | 39 |
| 2.4.3 Traitement d'une interface humide/sèche..... | 42 |
| 2.4.4 Calcul du flux aux frontières..... | 48 |
| 2.5 Conclusion | 49 |
| CHAPITRE 3 RÉSULTATS NUMÉRIQUES DU MODÈLE VOLUMES FINIS | 51 |
| 3.1 Introduction..... | 51 |
| 3.2 Problèmes d'écoulements de ruptures idéalisées de barrage | 51 |
| 3.2.1 Rupture de barrage sur lit mouillé | 52 |
| 3.2.2 Rupture de barrage sur lit sec..... | 56 |
| 3.2.3 Test-2 de CADAM..... | 61 |
| 3.3 Test-2 de vidange avec onde double de raréfaction..... | 67 |
| 3.4 Bassin à pente variable soumis à une marée..... | 71 |
| 3.5 Simulation d'un cas réel de bathymétrie..... | 74 |
| 3.5.1 L'estacade de Bordeaux (Laval)..... | 74 |

| | | |
|--|---|-----|
| 3.5.2 | Vérification des propriétés de conservation..... | 74 |
| 3.5.3 | Simulation des bancs couvrants et découvrants..... | 74 |
| 3.6 | Conclusion | 84 |
| | | |
| CHAPITRE 4 RÉDUCTION DU MODÈLE : PROBLÉMATIQUE ET ÉTAT DE L'ART | | 85 |
| 4.1 | Introduction..... | 85 |
| 4.2 | Méthodes non intrusives de réduction ou concept de la boîte noire..... | 87 |
| 4.2.1 | Les surfaces de réponse | 87 |
| 4.2.2 | Approximation de modèle basée sur les réseaux de neurones artificiels.. | 88 |
| 4.3 | Méthodes intrusives de réduction | 91 |
| 4.3.1 | Réduction de Guyan ou méthode de condensation..... | 91 |
| 4.3.2 | Réduction par approximation polynomiale..... | 92 |
| 4.3.3 | Méthode de réduction par décomposition en valeurs singulières (SVD) . | 93 |
| 4.3.4 | Réduction par projection sur des sous-espaces ou projection de Galerkin..... | 94 |
| 4.3.5 | Réduction par projection sur une base réduite-CVT..... | 96 |
| 4.3.6 | Réduction de modèle par projection sur la base réduite-POD..... | 99 |
| 4.3.7 | Conclusion | 102 |
| | | |
| CHAPITRE 5 RÉDUCTION DU MODÈLE DE SIMULATION DES ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE..... | | 105 |
| 5.1 | Introduction..... | 105 |
| 5.2 | Méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres ou POD..... | 105 |
| 5.2.1 | Formulation théorique de la méthode POD | 105 |
| 5.2.2 | La base réduite POD | 106 |
| 5.2.3 | Principe de la réduction du modèle..... | 108 |
| 5.3 | Réduction du schéma aux volumes finis..... | 109 |
| 5.3.1 | Réduction de l'équation de continuité | 109 |
| 5.3.2 | Réduction des équations de la quantité de mouvement | 113 |
| 5.3.3 | Réduction du terme source de friction..... | 118 |
| 5.3.4 | Traitement des cellules sèches..... | 120 |
| 5.3.5 | Conditions aux limites pour le modèle réduit..... | 120 |
| 5.3.6 | Propriété de conservation (C-property) | 124 |
| 5.3.7 | Extraction des bases POD..... | 124 |
| 5.3.8 | Algorithme détaillé du modèle réduit | 125 |
| 5.4 | Conclusion | 126 |
| | | |
| CHAPITRE 6 VALIDATION DU MODÈLE RÉDUIT POD/ROM | | 127 |
| 6.1 | Introduction..... | 127 |
| 6.2 | Écoulement de rupture de barrage avec lit aval sec..... | 130 |
| 6.3 | Oscillations libres dans un bassin parabolique | 134 |
| 6.4 | Rupture de barrage dans l'estacade de Bordeaux (Laval) | 141 |
| 6.5 | Conclusion | 147 |

| | | |
|------------|---|-----|
| CHAPITRE 7 | EXPLOITATION DU POD/ROM : ANALYSE DE LA SENSIBILITÉ AUX VARIATIONS DES PARAMETRES PHYSIQUES ET CONDITIONS INITIALES | 149 |
| 7.1 | Introduction..... | 149 |
| 7.2 | Rupture de barrage dans un canal avec lit aval sec : Exploitation du POD..... | 151 |
| 7.3 | Estacade de Bordeaux : Exploitation du POD/ROM..... | 155 |
| 7.3.1 | Rupture de barrage : Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation de la hauteur d'eau initiale..... | 155 |
| 7.3.2 | Rupture de barrage : Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du coefficient de Manning..... | 162 |
| 7.3.3 | Simulation d'une crue : Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit | 166 |
| 7.4 | Conclusion | 173 |
| | CONCLUSION..... | 175 |
| | RECOMMANDATIONS | 179 |
| ANNEXE I | SIMPLIFICATION DE L'EXPRESSION DU FLUX D'INTERFACE PAR L'INVARIANCE ROTATIONNELLE | 181 |
| ANNEXE II | CONDITION DE STABILITÉ DU SCHÉMA NUMÉRIQUE..... | 183 |
| ANNEXE III | MAILLAGE DE L'ESTACADE DE BORDEAUX (RIVIÈRE DES PRAIRIES)..... | 185 |
| ANNEXE IV | BANCS COUVRANTS ET DÉCOUVRANTS DANS LA RIVIÈRE DES PRAIRIES..... | 187 |
| | RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES..... | 188 |

LISTE DES TABLEAUX

| | | Page |
|-------------|---|------|
| Tableau 3.1 | Écoulement de rupture de barrage sur lit mouillé Erreurs relatives sur les prédictions de la hauteur d'eau et la vitesse..... | 53 |
| Tableau 3.2 | Écoulement de rupture de barrage sur lit sec Erreurs relatives selon la norme L^2 en fonction de la réduction de la valeur limite de la hauteur d'eau ε | 60 |
| Tableau 6.1 | Rupture de barrage sur lit aval sec. Paramètres de construction du POD/ROM..... | 130 |
| Tableau 6.2 | Rupture de barrage sur lit aval sec. Comparaison du temps CPU entre le modèle VF et le POD/ROM pour $T_s = 2,5s$ | 131 |
| Tableau 6.3 | Bassin parabolique. Temps CPU comparés entre les modèles VF et POD/ROM pour $T_s = 2,22$ s..... | 136 |
| Tableau 6.4 | Estacade de Bordeaux. Temps CPU comparés entre les modèles VF et POD/ROM pour $T_s = 50$ s..... | 142 |
| Tableau 7.1 | Rupture de barrage dans un canal. Valeurs de la hauteur d'eau en amont du barrage définissant chaque nouveau scénario..... | 153 |
| Tableau 7.2 | Estacade de Bordeaux. Analyse de sensibilité. Valeurs de la hauteur d'eau en amont (h_1) et en aval (h_2) du barrage définissant chaque nouveau scénario..... | 155 |

LISTE DES FIGURES

| | | Page |
|------------|--|------|
| Figure 1.1 | Description des variables définissant la surface libre η , la hauteur d'eau h et la bathymétrie z | 15 |
| Figure 1.2 | Correction locale de la surface libre proposée par Soulaïmani (1983)..... | 25 |
| Figure 1.3 | Redéfinition locale de la bathymétrie pour une pente adverse. Tirée de Brufau et al. (2002, p. 257) | 26 |
| Figure 1.4 | Redéfinition locale de la bathymétrie pour une cellule partiellement mouillée. Tirée de Brufau et Garcia-Navarro (2003, p. 516). | 26 |
| Figure 2.1 | Cellules voisines à la cellule calculée K_i pour un maillage triangulaire | 32 |
| Figure 2.2 | Problème de Riemann associé à l'interface Γ_{ij} | 38 |
| Figure 2.3 | Inondation d'une cellule sèche du fait des forces de gravité et d'inertie | 42 |
| Figure 2.4 | Correction de la surface libre pour une cellule courante inondée ayant une cellule voisine sèche | 43 |
| Figure 2.5 | Correction de la surface libre pour une cellule courante sèche ayant une cellule voisine inondée | 45 |
| Figure 3.1 | Écoulement de rupture de barrage sur lit mouillé. Conditions initiales | 52 |
| Figure 3.2 | Écoulement de rupture de barrage sur lit mouillé. Analyse de la convergence au maillage pour les modèles 1 et 2, solutions à $t = 4$ s | 54 |
| Figure 3.3 | Écoulement de rupture de barrage sur lit mouillé. Prédictions numériques de la surface libre et de la vitesse comparées aux solutions numériques à $t = 4$ s..... | 55 |
| Figure 3.4 | Écoulement de rupture de barrage sur lit mouillé. Conditions initiales | 56 |
| Figure 3.5 | Écoulement de rupture de barrage sur lit sec. Analyse de la sensibilité au maillage des modèles 1 et 2, hauteurs d'eau prédites à $t=2,5$ s | 58 |
| Figure 3.6 | Écoulement de rupture de barrage sur lit sec. Prédictions numériques de la surface libre et de la vitesse comparées aux solutions à $t = 2,5$ s | 59 |

| | |
|-------------|--|
| Figure 3.7 | Écoulement de rupture de barrage sur lit sec. Sensibilité de la prédiction de la vitesse à la valeur limite de la hauteur d'eau ε59 |
| Figure 3.8 | CADAM Test 2. Réservoir et canal avec obstacle triangulaire. Tirée de Loukili et Soulaïmani (2007, p. 82)61 |
| Figure 3.9 | CADAM Test 2. Plans d'eau pour les tests 1 et 2 relatifs à la vérification de la <i>C-property</i>63 |
| Figure 3.10 | CADAM Test 2. Prédictions de la surface libre à différents instants comparées aux données expérimentales et aux prédictions de Castro et al. (2006)64 |
| Figure 3.11 | CADAM Test 2. Hauteurs d'eau prédites comparées aux données expérimentales enregistrées par les jauges G4, G10, G11, G13 et G20 et aux résultats de Brufau et al., (2002).....65 |
| Figure 3.12 | CADAM test 2. Évolution des erreurs relatives à la masse66 |
| Figure 3.13 | Vidange avec onde double. Prédictions comparées de la surface libre68 |
| Figure 3.14 | Vidange avec onde double. Prédictions des niveaux d'eau (a) et débits unitaires (b) à différents instants69 |
| Figure 3.15 | Vidange avec onde double. Champs de vitesse dans le canal après 0,05 s et 0,25 s70 |
| Figure 3.16 | Bassin soumis à une marée. Prédictions comparées de la surface libre à différents instants.....72 |
| Figure 3.17 | Bassin soumis à une marée. Prédictions du débit unitaire (à gauche) et de la vitesse (à droite) à différents instants.....73 |
| Figure 3.18 | Bathymétrie de la portion de la rivière des Prairies.....76 |
| Figure 3.19 | Rivière des Prairies. Erreurs relatives à la conservation de la masse pour le test de rupture de barrage77 |
| Figure 3.20 | Rivière des Prairies. Champ de vitesses dans la prairie asséchée et inondée par une fluctuation extrême du débit d'entrée après 1200 s et 2700 s78 |
| Figure 3.21 | Rivière des Prairies. Zoom sur le champ de vitesses proche de la sortie de la prairie aux instants $t=1200$ s et $t=2700$ s79 |
| Figure 3.22 | Rivière des Prairies. Lignes de courant lors des bancs couvrants et découvrants aux instants $t=1200$ s et $t=2700$ s80 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| Figure 3.23 | Rivière des Prairies. Lignes de contour des hauteurs lors des bancs couvrants et découvrants aux instants $t=1200$ s et $t=2700$ s..... | 81 |
| Figure 3.24 | Rivière des Prairies. Lignes de contour des niveaux lors des bancs couvrants et découvrants aux instants $t=1200$ s et $t=2700$ s..... | 82 |
| Figure 3.25 | Rivière des Prairies. Vue 3-D des bancs couvrants-découvrants après 1200 s et 2700 s | 83 |
| Figure 4.1 | Modèle du fonctionnement d'un neurone artificiel | 89 |
| Figure 4.2 | Exemple d'une tessellation d'un carré pour une densité uniforme. Tirée de Du Q. et al., (2010, p. 121)..... | 98 |
| Figure 6.1 | Phase de prétraitement. Procédure de construction des matrices constantes indépendantes du modèle réduit POD/ROM | 128 |
| Figure 6.2 | Phase de traitement. Procédure de la simulation comparée d'un problème donné entre les modèles VF et POD/ROM | 129 |
| Figure 6.3 | Rupture de barrage sur lit aval sec. Diagramme spectral relatif aux variables η et hu | 130 |
| Figure 6.4 | Rupture de barrage sur lit aval sec. Description des huit premiers modes relatifs aux variables η et hu le long de l'axe central du canal | 132 |
| Figure 6.5 | Rupture de barrage dans un canal avec lit aval sec. Prédictions comparées de la surface libre et de la vitesse entre le modèle volumes finis et le modèle POD/ROM avec la solution analytique | 133 |
| Figure 6.6 | Rupture de barrage dans un canal avec lit aval sec. Évolution temporelle de l'erreur sur les prédictions de la surface libre et de la vitesse selon la norme L^2 par le modèle POD/ROM relativement au modèle VF..... | 133 |
| Figure 6.7 | Bassin parabolique. Description schématique du problème..... | 134 |
| Figure 6.8 | Bassin parabolique. Convergence des modes relativement au nombre de snapshots..... | 136 |
| Figure 6.9 | Bassin parabolique. Convergence de la solution avec le nombre de modes significatifs | 137 |
| Figure 6.10 | Bassin parabolique. Champs de vitesses comparés aux instants $t = T/6$ et $t = T/2$ entre les modèles VF et POD/ROM..... | 138 |

| | | |
|-------------|--|-----|
| Figure 6.11 | Bassin parabolique. Lignes de contours relatifs à la hauteur d'eau comparées aux instants $t = T/6$ et $t = T/2$ entre les modèles VF et POD/ROM..... | 139 |
| Figure 6.12 | Bassin parabolique. Évolution temporelle de l'erreur sur la prédiction de la surface libre selon la norme L^2 par le modèle POD/ROM relativement au modèle VF..... | 140 |
| Figure 6.13 | Estacade de Bordeaux. Évaluation de la vérification de la C-Property par le modèle réduit pour les niveaux d'eau $\eta_0 = 24$ m et $\eta_0 = 14$ m | 143 |
| Figure 6.14 | Estacade de Bordeaux. Propagations comparées de l'inondation entre les modèles VF et POD/ROM aux instants $t = 10$ s, $t = 20$ s et $t = 50$ s | 144 |
| Figure 6.15 | Estacade de Bordeaux. Champs de vitesses comparés entre les modèles VF et POD/ROM aux instants $t = 5$ s, $t = 10$ s, $t = 30$ s et $t = 50$ s | 145 |
| Figure 6.16 | Estacade de Bordeaux. Prédications comparées de la surface libre le long de l'axe de la rivière à différents instants entre les modèles VF et POD/ROM..... | 146 |
| Figure 6.17 | Estacade de Bordeaux. Évolution temporelle de l'erreur sur la prédiction de la surface libre selon la norme L^2 par le modèle POD/ROM relativement au modèle VF | 147 |
| Figure 7.1 | Phase d'exploitation du ROM. Analyse de nouveaux scénarios obtenus par variations des conditions et paramètres initiaux ayant défini le problème de base..... | 150 |
| Figure 7.2 | Rupture de barrage sur lit aval sec. Définition de nouveaux scénarios pour l'analyse de sensibilité de POD..... | 151 |
| Figure 7.3 | Rupture de barrage dans un canal. Analyse de sensibilité du POD/ROM pour huit nouveaux scénarios. Prédications comparées de la surface libre entre les modèles VF et POD/ROM..... | 153 |
| Figure 7.4 | Rupture de barrage dans un canal. Analyse de sensibilité du POD/ROM pour huit nouveaux scénarios. Évolution temporelle de l'erreur sur la prédiction de la surface libre selon la norme L^2 par le modèle POD/ROM relativement au modèle VF..... | 154 |
| Figure 7.5 | Rupture de barrage sur lit aval sec. Mise en évidence des limites des bases POD face à une variation extrême de la hauteur d'eau initiale, cas du test 8 | 154 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| Figure 7.6 | Estacade de Bordeaux. Analyse de sensibilité, conditions initiales relatives aux niveaux d'eau définissant chaque nouveau scénario..... | 156 |
| Figure 7.7 | Estacade de Bordeaux. Analyse de sensibilité. Hauteurs d'eau comparées des scénarios ($\eta_1 = 24$, $\eta_2 = 20$ m) et ($\eta_1 = 22$ m, $\eta_2 = 18$ m) à différents instants entre les modèles VF et POD/ROM..... | 157 |
| Figure 7.8 | Estacade de Bordeaux. Analyse de sensibilité. Hauteurs d'eau comparées des scénarios ($\eta_1 = 28$ m, $\eta_2 = 24$ m) et ($\eta_1 = 30$ m, $\eta_2 = 26$ m) à différents instants entre les modèles VF et POD/ROM..... | 158 |
| Figure 7.9 | Estacade de Bordeaux. Analyse de sensibilité. Hauteurs d'eau comparées des scénarios ($\eta_1 = 28$ m, $\eta_2 = 20$ m) et ($\eta_1 = 30$ m, $\eta_2 = 18$ m) entre les modèles VF et POD/ROM..... | 159 |
| Figure 7.10 | Estacade de Bordeaux. Analyse de sensibilité. Évolution temporelle de l'erreur sur la prédiction de la surface libre selon la norme L^2 par le modèle POD/ROM relativement au modèle VF pour six différents scénarios..... | 160 |
| Figure 7.11 | Estacade de Bordeaux. Analyse de sensibilité. Mise en évidence des limites des bases POD face à une variation extrême des hauteurs d'eau initiales..... | 161 |
| Figure 7.12 | Estacade de Bordeaux. Analyse de sensibilité. Variation du coefficient de friction. Contours comparés de la hauteur d'eau à l'instant $t = 30$ s | 163 |
| Figure 7.13 | Estacade de Bordeaux. Analyse de sensibilité. Variation du coefficient de friction. Contours comparés de la hauteur d'eau à l'instant $t = 60$ s | 164 |
| Figure 7.14 | Estacade de Bordeaux. Analyse de sensibilité. Variation du coefficient de friction. Niveaux d'eau comparés le long de l'axe de la rivière à $t = 30$ s et $t = 60$ s | 165 |
| Figure 7.15 | Estacade de Bordeaux. Analyse de la sensibilité de la base POD. Évolution temporelle de l'erreur sur la prédiction de la surface libre selon la norme L^2 pour des scénarios de variation du coefficient de friction de Manning | 166 |

| | | |
|-------------|--|-----|
| Figure 7.16 | Estacade de Bordeaux. Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit. Contours de la hauteur d'eau comparés à l'instant $t = 30$ s | 168 |
| Figure 7.17 | Estacade de Bordeaux. Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit. Contours de la hauteur d'eau comparés à l'instant $t = 60$ s | 169 |
| Figure 7.18 | Estacade de Bordeaux. Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit. Contours de la hauteur d'eau comparés à l'instant $t = 90$ s | 170 |
| Figure 7.19 | Estacade de Bordeaux. Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit. Niveaux d'eau comparés le long de l'axe de la rivière à $t = 10$ s et $t = 30$ s | 171 |
| Figure 7.20 | Estacade de Bordeaux. Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit. Niveaux d'eau comparés le long de l'axe de la rivière à $t = 60$ s et $t = 90$ s | 172 |
| Figure 7.21 | Estacade de Bordeaux. Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit. Évolution temporelle de l'erreur sur la prédiction de la surface libre selon la norme L^2 pour des scénarios de variation du débit | 173 |

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

| | |
|---------|--|
| ALE | Arbitrary lagrangian eulerian |
| CADAM | Concerted action on dam-break modeling |
| CFD | Computational fluid dynamics |
| CFL | Courant-Fredrichs-Lewy |
| CPU | Central processing unit |
| CVT | Centroidal Voronoi tessellation |
| CVOD | Centroidal Voronoi orthogonal decomposition |
| DTI | Direct time interval |
| ÉDP | Équations aux dérivées partielles |
| FLD | Fully lagrangian description |
| GRANIT | Groupe de recherche sur les applications numériques en ingénierie et technologie |
| H/S | Interface entre une zone humide et une zone sèche |
| ISF | Interactions fluide-structure |
| NEM | Natural element method |
| POD | Proper orthogonal decomposition |
| POD/ROM | Modèle d'ordre réduit basé sur la technique POD |
| RAN | Réseaux de neurones artificiels |
| ROM | Reduced order model |
| SWEs | Shallow water equations |
| STE | Space time element |
| SVD | Singular-value decomposition |
| TVD | Total variation diminishing |
| VF | Volumes finis |

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

Équations d'eaux peu profondes

| | |
|---------------|---|
| Ω | Domaine de calcul, m^2 |
| η | Variable relative à la surface libre, m |
| h | Variable relative à hauteur d'eau, m |
| z | Niveau local de la bathymétrie, m |
| ε | Niveau limite d'eau définissant les zones sèches, m |
| g | Accélération gravitationnelle, m/s^2 |
| n | Coefficient de friction de Manning $m^{-1/3}s$ |
| \bar{Q} | Débit d'eau par unité de longueur, m^2/s |
| \mathbf{u} | Vecteur vitesse, m/s |
| λ | Vitesse d'onde, m/s |

Modèle numérique volumes finis

| | |
|-------------------|--|
| T_s | Temps CPU de simulation, s |
| N_e | Nombre total de cellules du maillage |
| K_i | Cellule 'i' du maillage du domaine Ω |
| Γ_{ij} | Interface entre les cellules K_i et K_j |
| L_{ij} | Longueur de l'interface Γ_{ij} entre les cellules K_i et K_j , m |
| \mathbf{n}_{ij} | Vecteur normal unitaire sortant de l'interface Γ_{ij} entre les cellules K_i et K_j |
| u_i | Composante selon l'abscisse du vecteur vitesse relatif à la cellule K_i , m/s |
| v_i | Composante selon l'ordonnée du vecteur vitesse relatif à la cellule K_i , m/s |

Modèle d'ordre réduit POD

| | |
|----------------|--|
| $N_{snapshot}$ | Nombre total de solutions intermédiaires stockées |
| N_b | Nombre total de modes significatifs de la base POD |
| Φ | Base modale POD |

| | |
|------------------------|---|
| A | Variable ROM |
| M | Matrice constante indépendante caractéristique du ROM |
| λ^{pod} | Approximation de la vitesse d'onde pour le ROM |
| $\ \mathbf{u}\ ^{pod}$ | Approximation du vecteur vitesse pour le ROM |

Analyse

| | |
|------------------|---|
| E_{L^2} | Erreurs relatives selon la norme L^2 |
| $Mass_{error}$ | Erreurs relatives à la conservation globale de la masse, m^3 |
| $\%Mass_{error}$ | Pourcentage d'erreurs relatives à la conservation globale de la masse |

INTRODUCTION

Généralités et problématique

Les inondations dues aux glissements de terrains, aux séismes (entraînant des tsunamis), aux ruptures de barrages, ou aux longues intempéries sont de plus en plus catastrophiques. Il importe par conséquent, de considérer avec plus de circonspection les études relatives aux mesures préventives. Les mémoires resteront longtemps marquées par le tsunami de mars 2011 au Japon dont les dégâts ont été chiffrés à plus de 150 milliards d'euros (lemonde.fr du 29-03-2011). Dans le sud du Québec, la crue des eaux causée par de fortes pluies durant plusieurs jours a fait augmenter le niveau de l'eau sur plusieurs kilomètres au sud de la rivière Richelieu d'avril à mai 2011, frappant cette région par des inondations d'une étendue et d'une durée sans précédent. Enfin, l'histoire de la France est marquée par l'inondation de la vallée de Fréjus suite à la rupture du barrage de Malpasset en décembre 1959.

Les mesures préventives relatives aux inondations sont nombreuses. La protection physique contre les inondations consiste généralement en des actions sur le cours d'eau à travers la canalisation des débits, le calibrage du lit mineur, mais aussi en des aménagements tels que la construction de digues de protection, de barrages écrêteurs de crues ou des canalisations d'évacuation. Au titre des mesures préventives, figure également l'établissement des cartes d'inondations identifiant les zones inondables selon les scénarios les plus critiques pour l'établissement d'un plan d'évacuation d'urgence. La mise en œuvre de telles mesures de protection nécessite l'intervention de l'hydraulicien dans la description de la physique du phénomène d'inondation et la dynamique des écoulements subséquents.

Les défis auxquels est confronté l'hydraulicien prennent de nouvelles dimensions face à la violence de plus en plus accrue des catastrophes dues aux inondations. La construction d'aménagements de défense contre les crues et les inondations ne peuvent se faire sans la prise en compte des interactions avec un plus grand système formé du bassin versant, de l'ensemble des vallées et plaines inondables. La modélisation de la dynamique de l'ensemble de ce système comprend un volet hydrodynamique, un volet sédimentaire et désormais un

volet environnemental avec entre autres la dynamique des polluants (Dewals, 2006). En hydrodynamique particulièrement, la prédiction des zones inondables doit être de plus en plus précise et ce à travers le développement d'un modèle numérique adéquat de simulation des bancs couvrants et découvrants. Par ailleurs, les paramètres physiques (bathymétrie, débit, coefficient de résistance) régissant les écoulements réels ne peuvent être saisis avec précision du fait de leur variabilité naturelle. En outre, les crues et les inondations ont un caractère aléatoire. Il convient donc d'associer à l'étude hydrodynamique une analyse probabiliste.

Dans la construction des infrastructures de protections sécuritaires contre les inondations, la prise en compte des incertitudes dans la pratique courante consiste à appliquer des facteurs de sécurité. Il en résulte un surdimensionnement des constructions pouvant se traduire par l'ajout d'une unité de mesure supplémentaire ou plus sur la crête prédite des digues de protection. Dans l'élaboration des cartes d'inondation, il est parfois recommandé de minorer le temps d'arrivée des ondes. De telles corrections sont basées sur une analyse unique considérant un débit extrême et peuvent donc être défailtantes.

La prise en compte des incertitudes liées aux paramètres physiques utilisés lors des simulations numériques nécessite idéalement une analyse probabiliste couplée au modèle déterministe. Cependant, l'analyse probabiliste requiert un nombre relativement élevé de simulations dont le coût peut être prohibitif pour des systèmes réels complexes malgré les progrès fulgurants enregistrés dans le domaine de l'informatique. Le besoin de faire des calculs répétitifs dans l'analyse des incertitudes doublé de la nécessité de résoudre de façon accélérée les cas d'écoulements hypothétiques pour l'aide à la prise de décision en situation d'urgence exigent l'utilisation d'un modèle réduit de simulation assurant une accélération significative des calculs et des résultats d'une précision acceptable.

Équations de Saint-Venant

Les écoulements caractérisant les inondations peuvent être modélisés à travers les équations d'eaux peu profondes ou équations de Saint-Venant. En effet, ces écoulements sont généralement de faibles profondeurs et constituent des processus de propagation avec de longues longueurs d'onde. Les équations de Saint-Venant dérivent d'un système d'équations plus générales dites équations de Navier Stokes par application de l'hypothèse de la pression hydrostatique. Elles sont constituées des formes différentielles des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. La complexité des écoulements d'inondation, l'étendue du domaine couvert et la variabilité des paramètres physiques les décrivant ont longtemps imposé l'utilisation d'études expérimentales, la résolution analytique des systèmes d'équations correspondantes étant pratiquement impossible. Avec l'avènement et le développement accéléré de l'outil informatique, la résolution numérique des problèmes physiques à l'aide d'ordinateurs ou la CFD (Computational Fluid Dynamics) a connu un essor impressionnant depuis ces dernières décennies.

La CFD est utilisée comme un outil d'appoint ou de substitution (pour compléter ou suppléer) aux méthodes expérimentales beaucoup plus onéreuses. Des efforts intensifs ont été consacrés au développement d'algorithmes numériques capables de simuler la dynamique des écoulements à surface libre ces dernières décennies (Audusse E. et al., 2004; Bradford et Sanders, 2002; Brufau, Garcia-Navarro et Vazquez-Cendon, 2004; Castro et al., 2005; Jiang et Wai, 2005; Kramer et Jozsa, 2007; Krüger et Rutschmann, 2006; Liang et Borthwick, 2009; Liao, Wu et Liang, 2007; Nikolos et Delis, 2009; Song et al., 2010; Tchamen et Kahawita, 1998; Zhang et al., 2007). Cependant, plusieurs millions de degrés de liberté sont parfois nécessaires à l'obtention d'un certain seuil de précision des résultats issus du modèle numérique. En outre, une difficulté spécifique à la modélisation des écoulements d'inondation réside dans la mobilité de la frontière du domaine mouillé avec parfois de fortes variations sur les berges. Il en résulte un problème de conditions aux limites non-linéaires et non-stationnaires (Soulaimani, 1983).

Bancs couvrants et découvrants

Le problème de conditions aux limites non-linéaires et non-stationnaires se caractérise également par l'évolution des bancs couvrants et découvrants. Ceux-ci constituent un phénomène très présent dans les écoulements d'eaux peu profondes tels que les écoulements estuariens, lagunaires, fluviaux, les inondations et tout cours d'eau sujet à une oscillation de sa surface libre. Les bancs couvrants et découvrants se traduisent par l'exondation ou l'inondation d'une zone, ou encore par leur production alternée selon la vitesse et la hauteur d'eau à l'intérieur du domaine et la variabilité de la bathymétrie. Le mouvement des frontières humide/sec (H/S) en résultant constitue un aspect très important dans une étude préventive des inondations. La reproduction adéquate des bancs couvrants et découvrants est restée longtemps un défi pour les modèles numériques. Parmi les études pionnières de modélisation des écoulements à surface libre, figurent les travaux de Reid et Bodine (1968), Leendertse et Gritton (1971) et de Lynch et Gray (1978).

Les approches proposées dans la littérature pour le traitement des bancs couvrants et découvrants sont de deux types :

- (i) Modification ou adaptation continue du maillage du domaine occupé par le fluide, ou méthode de Lagrange ou d'Euler-Lagrange.
- (ii) Maillage fixe d'un domaine maximal pouvant être occupé par le fluide durant l'écoulement ou méthode d'Euler.

L'accent est mis, au delà de ces approches, sur le traitement des termes sources de friction (Heniche et al., 2000) et de géométrie (Bradford et Sanders, 2002), mais aussi et surtout sur le traitement de l'interface H/S assimilable au problème de Riemann (Beffa et Connell, 2001; Brufau et Garcia-Navarro, 2003; Brufau, Vazquez-Cendon et Garcia-Navarro, 2002).

Réduction du modèle

La modélisation des écoulements à surface libre à partir des équations aux dérivées partielles (ÉDP) conduit à une résolution numérique des équations discrétisées formant des systèmes non-linéaires de très grandes tailles pour des écoulements réels complexes. La résolution de tels systèmes requiert des ressources informatiques assurant une grande capacité de mémoire

et une rapidité d'exécution appréciable. Bien que les ressources informatiques connaissent un essor considérable (grande capacité de mémoire, processeurs assurant le parallélisme d'exécution), la résolution de systèmes de très grande taille avec des nombres très élevés de degrés de liberté (allant jusqu'à l'ordre du million) reste coûteuse en temps de calculs. D'autre part, les exigences rencontrées par les ingénieurs en termes de précision, de fiabilité et de rapidité d'exécution sont de plus en plus importantes (réduction de la consommation de fuel des véhicules, optimisation des processus industriels).

Le besoin de fiabilité des prédictions numériques tient de ce que les paramètres physiques d'entrée sont entachés d'incertitudes. L'analyse de fiabilité pour la prise en compte des incertitudes est généralement réalisée à travers une approche probabiliste nécessitant des calculs répétitifs avec plusieurs appels au modèle déterministe. À titre illustratif, l'utilisation de la méthode de Monte Carlo requiert un nombre de réalisations de l'ordre de $100/p$ pour un événement de probabilité p . Le temps de calculs nécessaire pour un événement de faible probabilité peut être donc très prohibitif. Par ailleurs, en situation d'urgence, ou dans le domaine du contrôle actif où la simulation en temps quasi-réel est nécessaire, l'utilisation d'un modèle explicite (coûteux en temps de calcul) n'est d'aucune praticité (Dibike, Solomatine et Abbott, 1999; Liberge et Hamdouni, 2010; Ravindran, 2000b).

La construction d'un modèle d'ordre réduit (ROM) s'avère être une approche efficace assurant la possibilité de réduire le temps de calculs en conservant la dynamique prédominante du système étudié. Une fois construit, le modèle d'ordre réduit devrait être de plusieurs ordres de grandeur plus rapide que le code primaire. Il devrait être en outre utile de par sa précision dans la prédiction des problèmes définis par des paramètres d'entrée différents de ceux ayant servi à sa conception (Forrester, Sóbester et Keane, 2008). Les principales attentes d'un modèle réduit sont :

- (i) La rapidité d'exécution : une réduction significative du temps de prédiction relativement au modèle primaire.
- (ii) La précision : l'obtention de résultats exploitables assez proches de ceux du modèle primaire.

- (iii) L'utilité : la possibilité d'exploitation du modèle par application à de nouveaux scénarios.
- (iv) L'autonomie de l'utilisateur : la possibilité d'utilisation du modèle réduit sans grande expertise.

Objectifs et méthodologie

L'objectif principal de cette thèse est de proposer un modèle numérique de simulation des écoulements à surface libre en général (des inondations en particulier) et de proposer un modèle numérique d'ordre réduit subséquent. Un code écrit en langage FORTRAN 90 est développé à cet effet afin de servir d'outil d'aide à l'analyse.

Les objectifs spécifiques sont :

- (i) La construction d'un modèle numérique explicite bidimensionnel simulant adéquatement les bancs couvrants et découvrants.
- (ii) La satisfaction des propriétés de conservation (*C-property* et masse globale) en présence de discontinuités formées par les zones sèches externes et internes.
- (iii) La construction d'un modèle d'ordre réduit (ROM) assurant une accélération significative des simulations et des résultats assez proches de ceux fournis par le modèle explicite.
- (iv) L'exploitation du modèle réduit à travers une analyse de sensibilité aux paramètres initiaux.

La construction du modèle numérique est basée sur la discrétisation des équations de Saint-Venant à travers la technique des volumes finis. La prise en compte des bancs couvrants et découvrants est assurée par un traitement approprié des interfaces H/S. Les flux aux interfaces sont calculés à travers un schéma simple mais robuste de Lax-Friedrichs avec un terme artificiel de dissipation. Le choix de ce schéma est justifié par le besoin d'assurer la vérification des propriétés de conservation, soit la solution stationnaire ou *C-property* (Bermúdez et Vazquez, 1994) et la masse globale à travers un calcul symétrique aux interfaces.

Le ROM est réalisé à travers la projection de Galerkin des équations de Saint-Venant discrétisées sur un sous-espace engendré par des bases spécifiques. Ces bases sont obtenues par la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) (Lumley, 1967; Sirovich, 1987) de la matrice des *snapshots*. Cette dernière est obtenue par stockage d'un certain nombre de solutions numériques du problème étudié durant le temps de simulation. Des approximations judicieuses des termes non-linéaires sont proposées pour contourner les difficultés relatives à la réduction, le but étant essentiellement de garantir un gain appréciable en temps de calculs sans compromettre la précision des résultats.

Originalité et contributions

L'originalité et les contributions apportées par ce projet se présentent sous trois axes :

Premièrement, nous proposons un modèle numérique bidimensionnel simple (facile à implémenter) de simulation des bancs couvrants et découvrants. Les instabilités numériques dues à l'apparition des zones sèches à l'intérieur du domaine inondé sont résolues dans le présent modèle. Les propriétés de conservation sont également assurées en situation générale. Le travail réalisé à ce premier niveau a permis de publier un article dans la revue scientifique *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* :

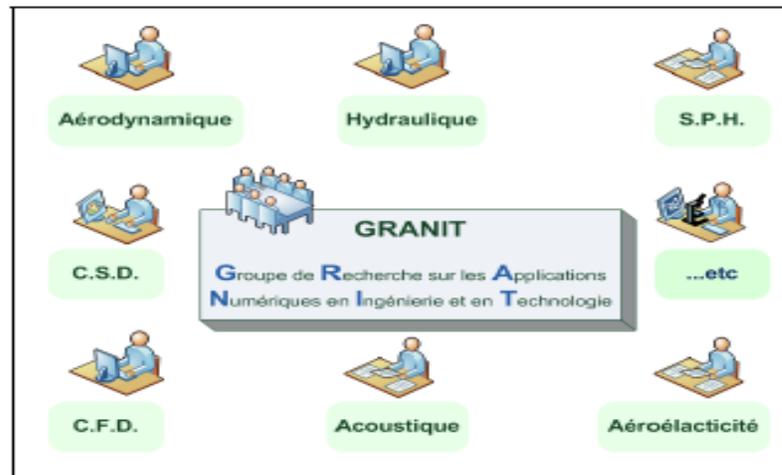
Zokagoa, Jean-Marie, et Azzeddine Soulaïmani. 2010. « Modeling of wetting-drying transitions in free surface flows over complex topographies ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, p. 2281-2304. doi:10.1016/j.cma.2010.03.023.

En second lieu, nous proposons un modèle d'ordre réduit de simulation des écoulements à surface libre par un traitement direct des équations de Saint-Venant, ce qui à notre connaissance n'avait pas encore été réalisé. Les équations de Saint-Venant sont fortement non-linéaires si bien que leur réduction a toujours été éludée à travers l'utilisation d'équations transformées allégeant la difficulté de la présence des composantes non-scalaires du vecteur vitesse (Esfahanian et Ashrafi, 2009). Dans la présente étude, nous résolvons ces difficultés par la définition de matrices ou de tenseurs constants et indépendants définis par l'utilisation de la technique POD et de la projection de Galerkin. Des approximations des

termes fortement non-linéaires sont utilisées afin d'assurer la célérité des calculs. L'utilité du modèle est mise en évidence à travers une étude de sensibilité aux paramètres initiaux ayant servi à construire un modèle d'ordre réduit d'un problème d'écoulement donné. Des perturbations des paramètres initiaux définissant des scénarios différents sont considérées afin de confirmer la possibilité d'utilisation du modèle déterministe d'ordre réduit dans une analyse de fiabilité par couplage avec un modèle stochastique. Le modèle d'ordre réduit est implémenté de sorte à être facilement utilisable. Le passage d'un problème d'écoulement à un autre ne nécessite pas une expertise particulière de la part de l'utilisateur, ce qui représente une caractéristique déterminante dans la construction d'un modèle d'ordre réduit. À ce niveau, un second article a été publié dans la revue scientifique *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* :

Zokagoa, Jean-Marie, et Soulaïmani Azzeddine. 2011. « A POD-based reduced-order model for free surface shallow water flows over real bathymetries for Monte-Carlo-type applications ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. doi:10.1016/j.cma.2011.11.012.

Enfin, le code de calcul CUTEFLOW utilisé durant ce travail a été entièrement élaboré au sein du groupe de recherche sur les applications numériques en ingénierie et technologie (GRANIT). Notre contribution fait suite aux travaux de Youssef Loukili (Loukili et Soulaïmani, 2007) ayant établi les bases du code CUTEFLOW. Nous y avons inséré les modules de traitement des bancs couvrants et découvrants et un module de calculs accélérés basé sur la traduction en FORTRAN 90 du modèle numérique d'ordre réduit de simulation des écoulements à surface libre ici proposé. Le développement intégral de code est d'importance capitale car il évite la nécessité du recours aux codes commerciaux disponibles sous forme compilée uniquement. Nous avons ainsi un contrôle total sur l'ensemble des étapes des calculs et des modifications à apporter au besoin.



Description du groupe de recherche GRANIT
Tirée de Ben Haj Ali (2008)

Organisation de la thèse

Cette thèse est rédigée afin de ne pas imposer une lecture séquentielle du document bien que chaque chapitre ait une importance spécifique. Un organigramme de la structure du document présentant l'agencement des chapitres est fourni afin de guider le lecteur pour un parcours de la thèse selon ses priorités.

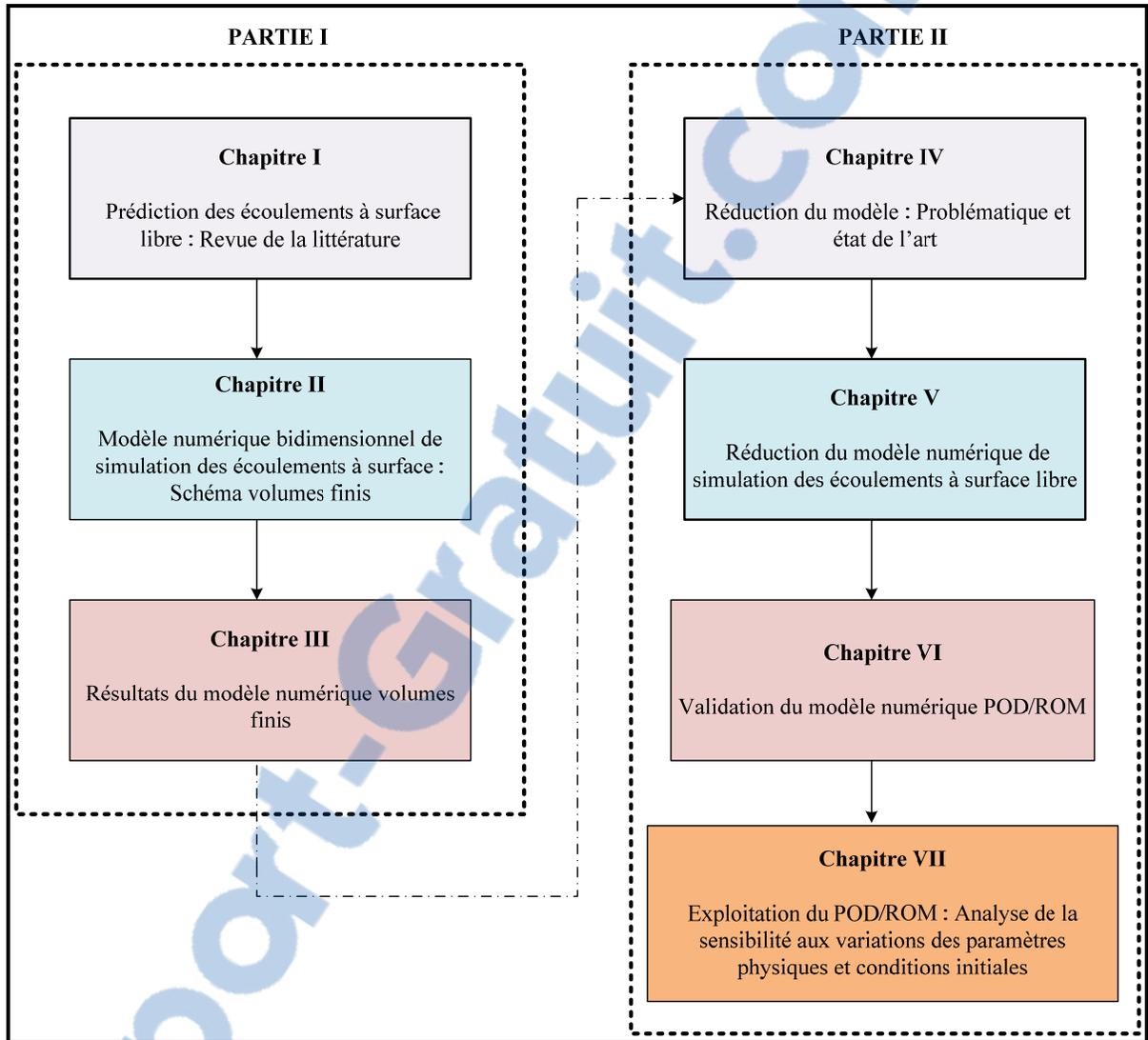
La présente thèse est écrite en deux parties essentielles. La première composée des trois premiers chapitres porte sur la présentation du modèle numérique volumes finis pour la simulation des écoulements d'eaux peu profondes et des inondations en particulier. La seconde partie composée des quatre derniers chapitres porte sur le développement du modèle d'ordre réduit du modèle précédent.

Le premier chapitre présente une revue de la littérature des traitements des bancs couvrants et découvrants. Nous y décrivons les différentes approches de traitement des interfaces H/S en relevant leurs limites et/ou leurs avantages. Le second chapitre est consacré à la discrétisation

des équations de Saint-Venant par les volumes finis et au traitement des interfaces H/S pour la simulation des bancs couvrants et découvrants. Le troisième chapitre porte sur la validation du modèle numérique présenté au chapitre 2 à travers des tests numériques. Les premiers tests sont des tests classiques rencontrés dans la littérature. Le dernier test porte sur l'estacade de Bordeaux, une portion de la rivière des Prairies à Laval (Québec). Les bancs couvrants et découvrants y sont simulés avec des conditions aux limites extrêmes de sorte à mettre à l'épreuve la robustesse du modèle proposé.

Le quatrième chapitre entame la seconde partie du document et présente une revue généralisée des méthodes de réduction. Le cinquième chapitre porte sur le modèle réduit relatif au schéma numérique présenté au chapitre 2. La méthode de réduction par la technique POD y est exposée de façon détaillée de sorte à en faciliter l'implémentation. Le sixième chapitre est consacré à la validation du modèle numérique d'ordre réduit. Les tests simulés portent sur des problèmes de rupture de barrages pour des bathymétries simples et la portion de la rivière des Prairies considérée au chapitre 3. Chaque test est d'abord simulé à partir du modèle numérique volumes finis pour le stockage des snapshots et la construction des matrices et tenseurs définissant le modèle réduit du problème précédemment simulé. Ensuite, le problème est simulé à nouveau avec les mêmes conditions et paramètres initiaux à l'aide du modèle réduit. Les résultats issus des deux modèles sont comparés : cette étape correspond à la *phase de reproduction*.

Le dernier chapitre porte sur la *phase d'exploitation*. Le modèle réduit est appliqué à des problèmes adjacents (nouveaux scénarios) définis par des conditions initiales et des paramètres physiques différents de ceux ayant servi à sa construction. Cette phase permet de mettre en évidence les limites d'exploitation d'une base POD obtenue, mais aussi et surtout la possibilité d'utilisation du modèle réduit d'un problème considéré dans une étude d'optimisation ou de fiabilité par couplage avec des méthodes de calculs stochastiques.



Organisation générale de la thèse

CHAPITRE 1

PRÉDICTION DES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE : REVUE DE LA LITTÉRATURE

1.1 Introduction

Les écoulements à surface libre sont généralement prédits à travers la résolution des équations d'eaux peu profondes '*shallow water equations*' (SWEs). Ces équations sont adaptées à la description des écoulements en canal, dans les rivières, les baies, les estuaires et les régions océaniques côtières. Ces équations sont également adaptées à la modélisation des écoulements catastrophiques tels que les inondations ou les tsunamis. Cependant, la résolution des équations d'eaux peu profondes pour des écoulements dans des domaines présentant des topographies complexes avec des déformations tridimensionnelles de la bathymétrie présente quelques difficultés. Celles-ci résident dans le traitement des termes de gravité et dans le traitement du terme de friction. Ces termes en effet doivent être intégrés de façon cohérente avec le schéma numérique utilisé pour les termes différentiels sous forme divergente (Tchamen, 2006).

D'autre part, les écoulements d'eaux peu profondes sont également caractérisés par l'exondation ou l'inondation d'une zone, ou encore par leur production alternée selon la vitesse et la hauteur d'eau à l'intérieur du domaine. Ce phénomène des bancs couvrants et découvrants caractérise tout cours d'eau sujet à une oscillation de sa surface libre et le mouvement des frontières humide/sec (H/S) en résultant constitue un aspect très important dans une étude préventive des inondations. Il en résulte en effet, un problème de conditions aux limites non-linéaires et non-stationnaires dont la résolution adéquate est restée pendant des décennies un défi pour les modèles numériques.

Ce premier chapitre présente les équations d'eaux peu profondes ou équations de Saint-Venant et traite des méthodes proposées dans la littérature pour la résolution des difficultés liées aux traitements des termes sources et des interfaces (H/S).

1.2 Équations d'eaux peu profondes

Les équations d'eaux peu profondes ou équations de Saint-Venant dérivent du système d'équations plus générales que sont les équations de Navier Stokes auxquelles est affectée l'hypothèse de la pression hydrostatique. Ces équations ont un caractère hyperbolique et sont formées d'un ensemble de trois équations couplées, soient l'équation de continuité, et les deux équations de la conservation de la quantité de mouvement. Considérant un fluide incompressible dans un domaine Ω et négligeant les effets de diffusion, les forces de Coriolis et l'action du vent, les équations de Saint-Venant peuvent s'écrire en 2D sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \text{ sur } \Omega \times]0, T_s] \quad (1.1)$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{b_x} - S_{f_x}) \\ gh(S_{b_y} - S_{f_y}) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} S_{b_x} \\ S_{b_y} \end{bmatrix} = \nabla z, \quad \mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} S_{f_x} \\ S_{f_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \\ \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

- h désigne la hauteur d'eau telle que $h = \eta - z$ avec η représentant la surface libre et z la bathymétrie comme l'indique la figure 1.1.
- (u, v) sont les composantes de la vitesse moyenne.
- g est l'accélération gravitationnelle.
- n est le coefficient de friction de Manning.

- S_f désigne le terme de friction.
- T_s est le temps.

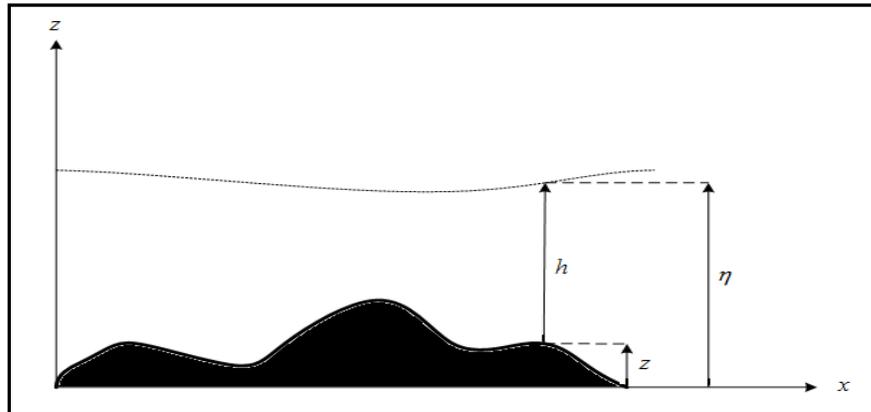


Figure 1.1 Description des variables définissant la surface libre η , la hauteur d'eau h et la bathymétrie z

Les techniques numériques de résolution des équations de Saint-Venant sont basées sur les différences finies, les éléments finis et les volumes finis apparus ces 20 à 30 dernières années. Ces techniques nécessitent un maillage du domaine d'étude pouvant être celui occupé par le fluide ou un domaine plus étendu. Selon les conditions initiales ou durant l'écoulement, des cellules ou nœuds du maillage peuvent passer du sec au mouillé ou inversement selon la complexité de la topographie. Des pentes adverses peuvent en effet se dresser et créer des interfaces humide/sec (H/S) ou des cellules partiellement mouillées. Le traitement numérique de ces discontinuités est très souvent source d'erreurs de stabilité non négligeables pouvant se traduire par la génération d'une hauteur d'eau irréaliste, infinie ou négative. Il en résulte un schéma instable ou non conservatif.

Parmi les études pionnières de modélisation des écoulements à surface libre, figurent les travaux de Reid et Bodine (1968), Leendertse et Gritton (1971) et de Lynch et Gray (1978).

Les avancées pertinentes jusque là enregistrées sont celles relatives à la capacité pour certains codes à simuler des écoulements avec une gamme assez importante de conditions aux limites et initiales. Ce sont entre autres les écoulements sous critiques et supercritiques, ceux autour et à travers des structures simples, les recouvrements de lits initialement secs, les bathymétries présentant des irrégularités simplifiées (Bradford et Sanders, 2002; Brufau et Garcia-Navarro, 2003; Castro et al., 2006). Il existe cependant quelques résultats intéressants pour des écoulements réels à bathymétries complexes (Brufau, Vazquez-Cendon et Garcia-Navarro, 2002; Díaz et al., 2008; Heniche et al., 2000; Loukili et Soulaïmani, 2007; Sleigh et al., 1998; Tchamen et Kahawita, 1998; Tchamen, 2006). Pour certains cas isolés, l'on dispose de quelques données de comparaison. Il s'agit entre autres de la simulation du bris de barrage de Malpasset au sud de la France en 1959 (Brufau, Garcia-Navarro et Vazquez-Cendon, 2004; Hervouet, 2000; Tchamen, 2006), l'inondation du bief de la Rivière de Meuse en Hollande en 1995 (Bates et De Roo, 2000) et celle de la Rivière Severn au centre-ouest de l'Angleterre (Bates et al., 2004). Les données pour ces derniers cas ont pu être obtenues par photo satellite (Synthetic Aperture Radar). Les données expérimentales les plus fournies sont celles relatives au bief de la Rivière Culm (Devon, UK) (Nicholas et Mitchell, 2003); la fréquence des inondations (six fois par an) en fait un cadre idéal de collecte de données.

La simulation adéquate des bancs couvrants et découvrants présents dans les écoulements de type inondation nécessite une intégration appropriée des termes sources et un calcul judicieux des flux d'interfaces.

1.3 Traitement des termes sources

La présence de termes sources dans les équations peut enfreindre le critère de positivité consistant à éviter la génération d'une hauteur d'eau négative. Les termes sources pour les équations d'eaux peu profondes sont composés des termes de géométrie et de friction. Le terme source de géométrie est obtenu par la décomposition du terme relatif aux forces de gravité en une composante de pression et une composante de variation de la géométrie. Comme l'indique Tchamen (2006), cette décomposition aboutit à une forme propice à

l'utilisation des schémas classiques de Riemann, mais il reste à intégrer les termes sources de friction et de géométrie de manière cohérente avec le schéma numérique pour les termes différentiels exprimés sous forme divergente. En particulier, en volumes finis, la difficulté dans la modélisation numérique des équations d'eaux peu profondes contenant les termes sources réside dans l'équilibre global entre le gradient du flux et les termes sources lorsqu'un problème à bathymétrie variable est considéré.

1.3.1 Terme source de friction

Le terme source de friction est exprimé en général en fonction du coefficient de friction de Manning et nécessite seulement une discrétisation appropriée en temps. Lors de la propagation des bancs couvrants et découvrants, à l'interface H/S, la hauteur d'eau h dans (1.3) tend vers zéro. Les forces de friction deviennent alors très grandes et peuvent générer des instabilités numériques. Heniche et al.,(2000) proposent à cet effet une adaptation du coefficient de friction à la fluctuation du niveau d'eau :

$$\begin{cases} n_{(h \geq 0)} = n \\ n_{(h < 0)} = n(1 + \beta |h|) \end{cases} \quad (1.4)$$

La validation du modèle montre qu'une meilleure précision est obtenue pour des valeurs élevées de β mais les calculs deviennent alors assez coûteux. D'autres auteurs (Bradford et Sanders, 2002; Loukili et Soulaïmani, 2007; Tchamen et Kahawita, 1998; Tchamen, Kahawita et Tessier, 1994) ont procédé plutôt à une intégration du terme source de friction selon un schéma implicite ou semi-implicite. Cette démarche respecte le caractère réactif du terme source de friction et permet d'éviter les changements brusques de vitesses et de niveaux d'eau, sources d'instabilités numériques.

1.3.2 Terme source de géométrie

Le traitement du terme source de géométrie consiste en général à équilibrer le flux d'interface avec la pente du lit afin d'assurer la condition du fluide au repos. Cette condition se rapporte à la propriété de conservation dite '*C-property*' (Bermúdez et Vazquez, 1994) et permet d'éviter l'apparition d'oscillations parasites dues à la discrétisation du terme source. A cet effet, la technique d'adaptation du terme source de géométrie a été couramment utilisée afin de satisfaire à la C-property en présence d'interfaces H/S. Cette approche est souvent précédée de la stratégie de différentiation décentrée vers l'amont (*upwinding*) présentant plusieurs avantages à la base (Bermúdez et Vazquez, 1994; Castro et al., 2005; Van Leer, 1992; Vazquez-Cendon, 1999). Les schémas numériques en résultant sont robustes notamment pour des écoulements à régimes changeants. Ils prennent en compte la non-linéarité des équations et sont adaptés à leur nature hyperbolique.

D'autres auteurs ont procédé à un traitement direct de la forme intégrale du terme source de géométrie à travers une approximation locale ou une substitution de la hauteur effective. Bradford et Sanders (2002) ont proposé en effet, la substitution de h par $\eta - z$ utilisée ensuite par Loukili et Soulaïmani (2007). L'expression suivante est alors obtenue :

$$\int_{\Omega} g \left(\eta \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial z^2}{\partial x} \right) d\Omega \approx -g \left(\eta \frac{\overline{\partial z}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial z^2}}{\partial x} \right) \Omega \quad (1.5)$$

Ainsi, puisque η (niveau de la surface libre) est constant pour un plan d'eau au repos, le modèle ne génère aucun mouvement. L'approche s'est avérée cependant moins précise dans la simulation des grandes vagues. Tchamen Georges (2006) a plutôt proposé une approximation locale à travers la linéarisation du terme $h \nabla \eta$:

$$\int_{\Omega_i} h \nabla \eta ds = \bar{h}_i \int_{\Omega_i} \nabla \eta ds \quad (1.6)$$

L'intérêt de cette approximation réside dans l'obtention d'une forme divergente des termes de gravité permettant ainsi d'éviter le traitement direct des termes sources de géométrie, à l'origine d'instabilités numériques.

1.4 Traitement des bancs couvrants-découvrants

Les bancs couvrants-découvrants sont des phénomènes inhérents aux écoulements d'eaux peu profondes sur une bathymétrie variable qui produisent un mouvement du front d'onde pouvant se manifester par l'inondation ou l'assèchement des zones. Le mouvement des frontières H/S en résultant constitue un aspect très important dans l'étude de la propagation des ondes de crue ou d'inondation. Il en résulte un problème de conditions aux limites non-linéaires et non-stationnaires qui est resté longtemps un défi pour les modèles numériques. Les effets d'inondation étaient en effet négligés dans les premières études, et des frontières solides étaient plutôt considérées.

Les approches proposées dans la littérature pour le traitement des bancs couvrants et découvrants sont de deux types :

- (i) Modification ou adaptation continue du maillage du domaine occupé par le fluide, ou méthode de Lagrange ou d'Euler-Lagrange.
- (ii) Maillage fixe d'un domaine maximal pouvant être occupé par le fluide durant l'écoulement ou méthode d'Euler.

L'accent est précisément mis sur le traitement numérique de l'interface H/S où la hauteur d'eau tend à s'annuler. Ainsi, lorsque les composantes de la vitesse (u, v) sont obtenues des rapports $(hu/h, hv/h)$, sans aucun traitement particulier, des instabilités numériques peuvent être générées.

1.4.1 Méthodes de déformation de maillage

Méthodes Lagrangiennes

Les méthodes Lagrangiennes considèrent un état initial d'écoulement et de maillage dont les nœuds aux frontières seront déplacés selon la vitesse de la ligne de front. Le maillage est donc continuellement généré (au moins en partie) et adapté aux frontières du domaine mouillé. (Akanbi et Katopodes, 1988; Barr et Das, 1980; Beckett et al., 2002; Lynch et Gray, 1978; Titov et Synolakis, 1995; Vasiliev, 1970). Selon Lynch et Gray (1978), le front d'eau peut être modélisé par les relations suivantes:

$$\eta - z = 0 \quad \text{à} \quad x(t) = x(0) + \int_0^t v_b dt \quad (1.7)$$

v_b désigne la vitesse du front d'onde et $x(t)$, la position de la ligne de front. Le premier modèle selon Balzano (1998) semble appartenir à Reid et Bodine (1968) considérés par ce dernier comme les pionniers dans l'étude des fluides en écoulement. Plusieurs travaux se sont consacrés à l'approche Lagrangienne mais pour la plupart, à des problèmes unidimensionnels. Vasiliev (1970) a développé en effet une technique en différences finies adaptée au déplacement des nœuds du maillage mise en œuvre par Barr et Das (1980). Plus tard Akanbi et Katopodes (1988) proposeront un schéma de déformation et de génération de maillage simulant la propagation ou la régression de l'onde en éléments finis.

Récemment, Ata, Soulaïmani et al. (2007) ont proposé dans une formulation purement Lagrangienne, un modèle utilisant un algorithme de remaillage continu basé sur la méthode dite NEM (natural element method). Le modèle reste cependant complexe dans son implémentation et coûteux en temps de calculs. Feng et Peric (2000a; 2003) de même, ont proposé une méthode dite FLD (fully lagrangian description) dans laquelle une technique d'adaptation du maillage assurant un contrôle sur sa densité et sa distorsion est introduite. Selon le constat de Tchamen et Kahawita (1998), la méthode Lagrangienne pour un modèle bidimensionnel doit également adapter le flux au mouvement des nœuds. Cependant, comme

l'affirment Bates et Horritt (2005), les approches Lagrangiennes rencontrent en général de sérieux problèmes numériques à l'intérieur du domaine. En effet, leur efficacité peut être sérieusement compromise par l'assèchement d'une zone à l'intérieur du domaine (apparition d'une île). L'alternative consiste généralement à coupler les méthodes Eulérienne et Lagrangienne.

Méthodes Euler-Lagrange

Selon le modèle d'Euler-Lagrange de Petera et Nassehi (1996), seuls les nœuds passant du sec au mouillé ou inversement entre deux pas de temps successifs sont déplacés. Les critères de remaillage utilisés sont ceux de Kawahara et Umetsu (1986). Dans la méthode FLD pour les éléments finis 3-D proposée par Feng et Perić (2003) et (2000b), le maillage est déplacé avec les particules fluides. Les fonctions d'interpolation sont linéaires par morceaux mais constantes dans le temps. Une technique dite '*spatially adaptive remeshing*' permettant le contrôle de la densité du maillage et le recouvrement des aspérités est proposée pour optimiser la distorsion de chaque élément. Les détails de cette technique sont donnés dans Feng et Perić (2000a).

En général, la méthode FLD rencontre également des instabilités numériques à l'intérieur du domaine d'où l'utilisation plus courante de la méthode ALE (arbitrary lagrangian eulerian). Celle-ci définit une équation supplémentaire relative à la vitesse de déplacement des nœuds. Lorsqu'il n'y a aucun mouvement de nœud, l'approche devient eulérienne par simple annulation de la vitesse supplémentaire. Soulaïmani (1983) proposera une approche ALE bidimensionnelle où seuls les éléments à la frontière sont déplacés. Le modèle était cependant sujet à d'importantes distorsions des éléments si bien qu'il ne fut applicable qu'aux écoulements en canalisations simplifiées. Dans l'approche de Christian et Palmer (1997), les fonctions de base sont traitées à la fois comme des fonctions d'espace et de temps. Deux techniques dites DTI (discrete time interval) et STE (space-time element) sont utilisées pour la résolution de problèmes unidimensionnels d'écoulements d'eaux peu profondes. D'autre part, Soulaïmani et al (1991) ont développé un algorithme du type Newton de second

ordre et Soulaïmani et Saad (1998), l'algorithme GMRES pour des problèmes 2-D et 3-D. A la frontière du domaine une condition cinématique est imposée :

$$(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.8)$$

\vec{n} représente le vecteur normal sortant. Au cours de la simulation, le mouvement du front entraîne celui des nœuds à l'intérieur du domaine selon \vec{w} .

La technique de déformation du maillage constitue l'approche la plus précise de suivi de la ligne de front d'eau. Elle permet d'éviter les distorsions non représentatives de la topographie du domaine notamment pour des bathymétries complexes impliquant des déformations tridimensionnelles. Cependant, l'opération de remaillage consistant à ajouter des nœuds ou cellules ou à en retrancher selon que le front d'eau avance ou recule reste un sérieux handicap à l'efficacité du modèle numérique. Ces méthodes sont coûteuses en ressources informatiques et ne demeurent applicables efficacement qu'à des problèmes à topographies simples (Bates et Horritt, 2005; Bermúdez et al., 1998; Tchamen et Kahawita, 1998). Aussi le besoin de simuler des écoulements réels comprenant des zones alternativement inondées puis asséchées avec éventuellement apparition d'îlots à l'intérieur du domaine priorise-t-il les modèles à maillage fixe.

1.4.2 Méthodes Eulériennes ou à maillage fixe

Le choix d'une approche Eulérienne est motivée par le fait qu'elle soit naturellement adaptée au contexte physique de la prédiction des bancs couvrants et découvrants (Heniche et al., 2000). Les méthodes à maillage fixe simulent le problème d'écoulement considéré sur un domaine plus étendu que celui occupé initialement par le fluide afin d'éviter l'opération de remaillage. Le domaine peut ainsi contenir des îlots qui pourront éventuellement être inondés. La difficulté majeure dans cette approche réside dans la précision des calculs à l'interface H/S. En effet en considérant un maillage fixe, il peut résulter de la position de la ligne de front d'eau des cellules partiellement mouillées. L'identification de telles cellules où

la hauteur d'eau tend à s'annuler et leur traitement numérique requiert une attention particulière car pouvant être le foyer d'instabilités numériques générées par une prédiction de très grandes vitesses et d hauteurs d'eau négatives. Balzano (1998) a en effet mis en évidence des oscillations au voisinage de la ligne de front d'eau prédite par quelques modèles unidimensionnels pour une pente adverse. Pour faire face à cette difficulté, la technique couramment utilisée est le *raffinement local* du maillage (Kramer et Jozsa, 2007; Liang et Borthwick, 2009; Liang et al., 2007; Skoula, Borthwick et Moutzouris, 2006; Sleigh et al., 1998; Zhao et al., 1994). Cette opération affecte cependant le temps de calculs.

Les premiers travaux relatifs au traitement des interfaces H/S selon la littérature ont été effectués par Sielecki et Wurtele (1970), Leendertse et Gritton (1971) en différences finies et Holz et Nitsche (1980) en éléments finis. Dans certains travaux pionniers, le problème était simplifié par le retrait des cellules sèches ou partiellement inondées (Falconer et Owens, 1987; Leendertse et Gritton, 1971). Une autre approche consistait à utiliser une mince épaisseur d'eau partout dans le domaine (Zhang et Cundy, 1989) de sorte à éviter les instabilités numériques engendrées par l'amincissement de la hauteur d'eau dans une cellule partiellement mouillée. Cette méthode évidemment viole le principe de conservation de la masse mais aussi serait susceptible de générer des instabilités numériques avec l'apparition de zones sèches à l'intérieur du domaine (Bradford et Sanders, 2002).

En éléments finis, quelques auteurs ont développé une approche prenant en compte l'apparition d hauteurs d'eau négatives dans le traitement d'une pente adverse de sorte à assurer la conservation de la masse (Heniche et al., 2000; Khan, 2000). Une hauteur d'eau positive correspond alors à un nœud inondé et une hauteur d'eau négative, à un nœud sec. Il reste cependant que cette approche est dénuée de tout sens physique et que les propriétés de conservation ne sont pas complètement satisfaites pour les problèmes transitoires à bathymétrie complexe. De ce constat, résulte la méthode de limitation de la hauteur d'eau (water depth limitation) dans laquelle une valeur minimale ε est utilisée. Celle-ci peut être assignée arbitrairement, par calibration ou obtenue selon le coefficient de rugosité du lit du cours d'eau (Falconer et Chen, 1991). Ainsi (Falconer et Chen, 1991; Falconer et Owens,

1987; Leendertse et Gritton, 1971; Zhao et al., 1994) ont proposé le retrait des calculs de toute cellule dont le niveau d'eau venait à être inférieur à ε .

En volumes finis, le traitement à l'interface peut être réduit à un problème de Riemann dans lequel l'une des hauteurs d'eau est nulle. Pour deux éléments voisins mouillé ($h_j > \varepsilon$) et sec ($h_{j+1} \leq \varepsilon$), le flux à l'interface est calculé à travers un solveur de Riemann. Imposer un flux nul comme proposé par Sleigh, Gaskell et al. (1998) revient à imposer une frontière solide, ce qui provoquerait un saut inapproprié en hauteur d'eau. Dans l'approche de Castro, Diaz et al. (2005; 2006; 2008), le flux à l'interface H/S est calculé en annulant la vitesse dans la cellule mouillée. Loukili et Soulaïmani (2007) ont plutôt opté pour l'annulation de la vitesse seulement dans la cellule sèche en y imposant: $h_{j+1} = \varepsilon, u = 0, v = 0$.

Le critère de déclaration d'une cellule sèche ou mouillée demeure un facteur non négligeable dans la simulation des bancs couvrants et découvrants. Il peut être préjudiciable à un modèle aussi bon soit-il (Balzano, 1998). Ces modèles restent donc sensibles à l'ordre de grandeur de ε , pouvant induire des pertes de masse et des problèmes de stabilité. D'autres méthodes de traitements aux interfaces H/S ont été proposées et peuvent être regroupées comme le décrivent les paragraphes suivants :

Correction de la surface libre et propriété dite 'Well-Balancing'

Certains auteurs ont préconisé un traitement spécifique des cellules partiellement inondées avec pour objectif essentiel d'éviter la création d'un gradient de niveau d'eau à l'interface H/S. En éléments finis, Soulaïmani (1983) a proposé un algorithme dans lequel lorsqu'un élément est sec, les vitesses nulles y sont imposées. Pour un élément partiellement mouillé, soit lorsque le niveau moyen de la surface libre coupe celui-ci en faisant apparaître au moins un point d'intégration sec, la vitesse est annulée au nœud sec correspondant et la hauteur fixée égale à la hauteur moyenne de sorte à avoir une surface libre approximativement horizontale (Figure 1.2). Dans des études plus récentes, Horritt (2002) et Ern, et al.(2008) ont également procédé à la modification locale du flux de sorte à obtenir un gradient de surface libre nul dans un élément partiellement mouillé.

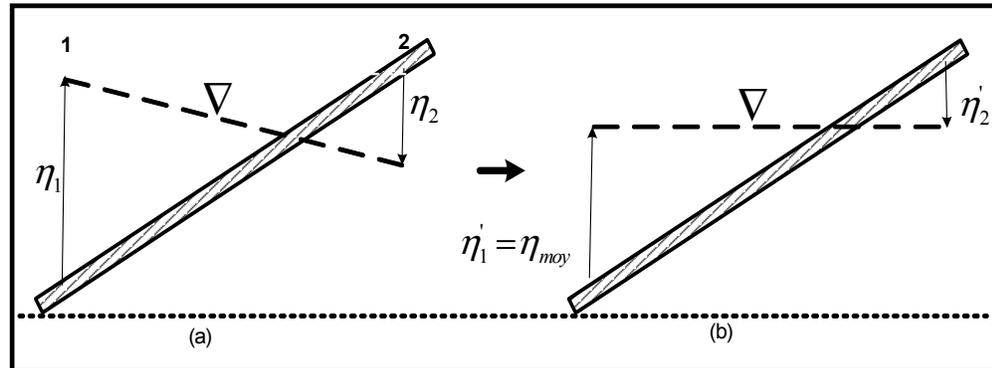


Figure 1.2 Correction locale de la surface libre proposée par Soulaïmani (1983)

Utilisant les volumes finis, Beffa et Connell (2001) ont plutôt proposé une redéfinition locale de la bathymétrie telle que $\eta_{sec} = \eta_{mouillé}$; $z_{sec} = z_{mouillé}$, lorsque $\eta_{mouillé} < \eta_{sec}$ avec annulation de la vitesse à l'interface où η désigne la surface libre et z la bathymétrie. Les modifications apportées aux traitements des interfaces H/S ne doivent pas cependant violer les principes de conservation. A cet effet, certains auteurs se sont assurés de l'équilibre entre le flux numérique d'interface et les termes sources, propriété connue sous l'appellation 'well-balancing'. Ainsi Bermúdez et al (1998) et Brufau, et al. (2002) ont proposé une technique de redéfinition de la bathymétrie obtenue de l'équilibre entre le flux numérique d'interface et les termes sources pour un système au repos ($u = 0$; $v = 0$). Les figures 1.3 et 1.4 décrivent les traitements proposés pour une cellule partiellement mouillée par Brufau, et al. (2002) et Brufau et Garcia-Navarro (2003) en volumes finis et éléments finis respectivement.

La technique de redéfinition locale de la bathymétrie basée sur la condition de fluide au repos ne garantit pas nécessairement le respect des propriétés de conservation pour des problèmes transitoires. Bradford et Sanders (2002), ont conséquemment proposé une technique d'extrapolation de la vitesse afin d'éviter les erreurs résultant de la résolution des équations de conservation de la quantité de mouvement sur des cellules partiellement inondées. Dans une logique identique, Brufau et al. (2004) ont développé une méthode de redéfinition locale de la bathymétrie plus performante, adaptée à la nature supercritique ou sous-critique de l'écoulement.

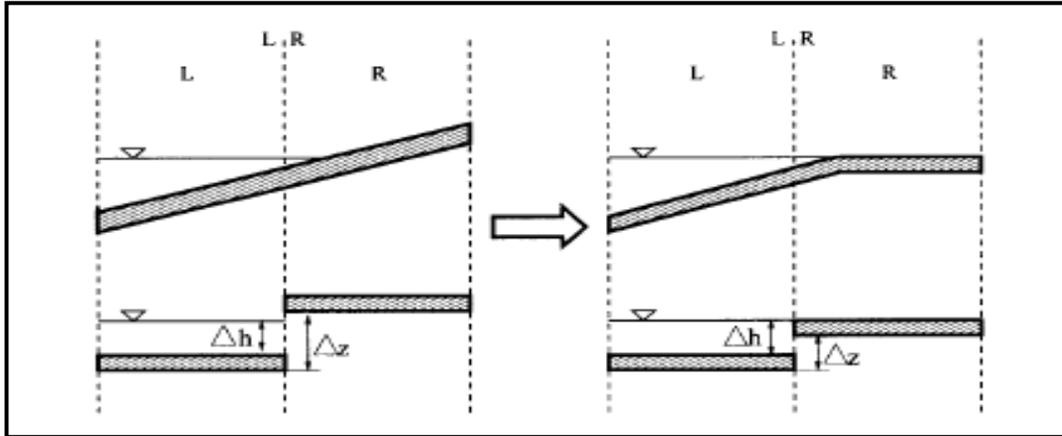


Figure 1.3 Redéfinition locale de la bathymétrie pour une pente adverse
Tirée de Brufau et al. (2002, p. 257)

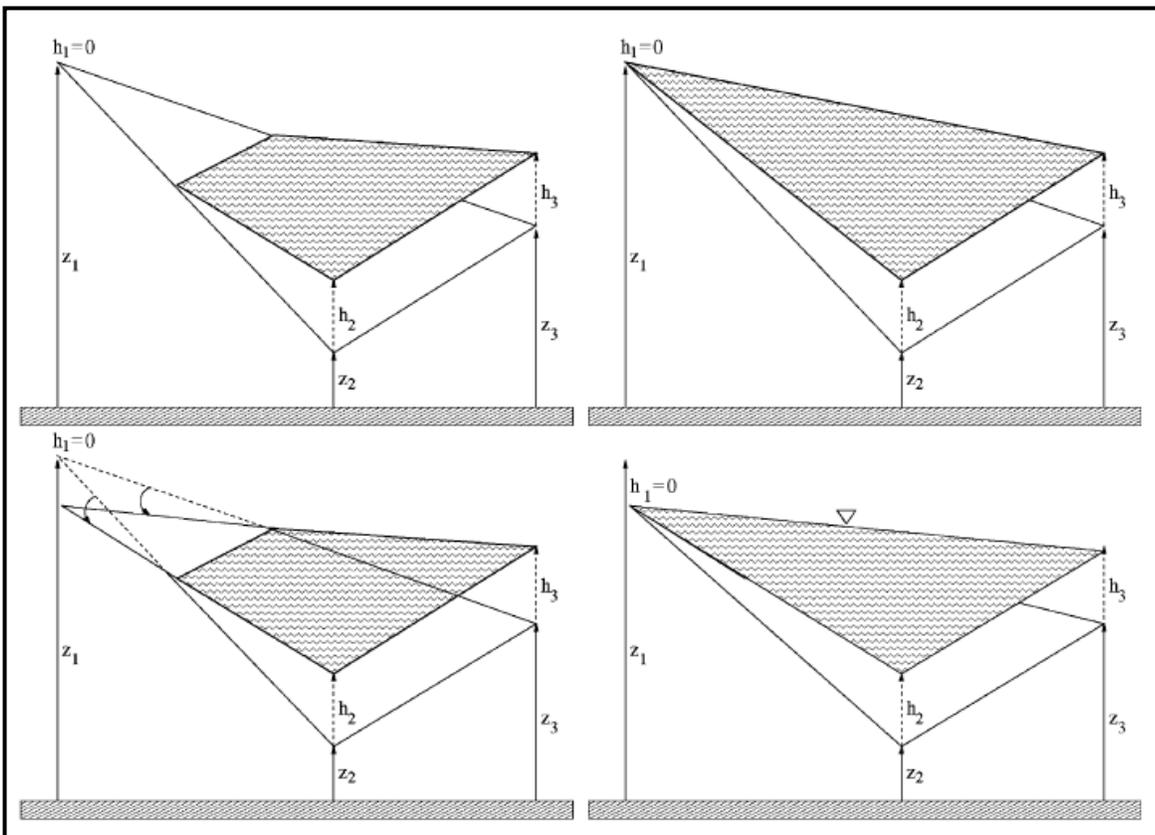


Figure 1.4 Redéfinition locale de la bathymétrie pour une cellule partiellement mouillée
Tirée de Brufau et Garcia-Navarro (2003, p. 516).

La technique de correction de la surface libre reste cependant sujette à un handicap majeur. Elle peut en effet, introduire une surestimation du volume d'eau à l'intérieur de la cellule partiellement inondée (Horritt, 2002).

Conservation globale de la masse

Le critère d'identification d'une cellule sèche ou mouillée comme mentionné plus haut demeure un facteur important dans la modélisation des bancs couvrants et découvrants. En effet, les modèles fixant une valeur limite de la hauteur d'eau dans une cellule restent sensibles à la valeur de ε . Plus cette valeur est d'un faible ordre de grandeur, plus le modèle est précis. Ceci pourrait cependant générer des vitesses infinies aux interfaces H/S lorsque celles-ci sont calculées par division par la hauteur d'eau, des variables conservatives (hu , hv). Il s'agit donc de trouver un meilleur compromis entre la précision des résultats et la stabilité du modèle. Il apparaît d'autre part que pour des écoulements supercritiques et pour une certaine pente limite du lit d'écoulement, une valeur négative de la hauteur d'eau peut être prédite (Brufau, Garcia-Navarro et Vazquez-Cendon, 2004). La mise à jour de la solution en ramenant cette valeur à ε suppose donc l'ajout d'un volume supplémentaire d'eau au volume global d'eau du système. Ce volume d'eau supplémentaire, bien que très faible devant le volume total, viole tout de même la propriété de la conservation globale de la masse. Fort de ce constat, quelques auteurs (Bai et Jin, 2009; Brufau, Garcia-Navarro et Vazquez-Cendon, 2004; Liang et Borthwick, 2009; Nikolos et Delis, 2009) ont proposé une phase de correction au cours de laquelle le volume d'eau ajouté est retiré du volume global d'eau du système.

1.5 Conclusion

Cette revue sans être totalement exhaustive visait à couvrir l'aspect général des approches rencontrées dans la littérature pour le traitement des bancs couvrants et découvrants. Elle aura permis d'entrevoir l'évolution de l'étude de ce phénomène et de prendre connaissance des forces et des faiblesses des méthodes proposées. Ce projet dans sa première partie sera donc consacré à trouver un modèle simple, robuste et vérifiant les propriétés de conservation tant à l'intérieur du domaine qu'aux frontières humide/sec. Les difficultés relatives au traitement du terme source soulignées dans cette revue sont prises en compte. Les calculs aux interfaces utilisés dans cette étude sont inspirés également des limites des approches proposées par certains auteurs nous ayant précédé dans l'étude de la propagation des bancs couvrants et découvrants.

CHAPITRE 2

MODÈLE NUMÉRIQUE BIDIMENSIONNEL DE SIMULATION DES ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE : SCHÉMA VOLUMES FINIS

2.1 Introduction

Les modèles numériques de simulations des écoulements à surface libre utilisent en général la technique de discrétisation par les différences finies, les éléments finis ou les volumes finis. La technique des volumes finis présente cependant plusieurs avantages relativement aux deux premières méthodes de discrétisation. En effet, les différences finies sont confrontées à des difficultés de conservation de la masse. Les éléments finis conservent la masse dans le domaine entier mais non à l'intérieur de chaque élément ou à chaque nœud (Rogers, Borthwick et Taylor, 2003).

La technique des volumes finis s'applique à la forme intégrale des équations d'eau peu profondes. Elle est adéquate à la résolution des systèmes conservatifs et permet une meilleure prise en compte des conditions aux limites. Les volumes finis présentent également une grande tolérance vis-à-vis du maillage; maillage de type éléments finis conforme ou non, maillage hybride avec des triangles et des quadrangles. Les flux sont calculés à chaque interface par identification à un problème de Riemann (Toro, 1999; 2001) à l'interface des cellules voisines.

Ce chapitre est consacré au développement d'un modèle numérique bidimensionnel en volumes finis pour la résolution des équations d'eaux peu profondes.

2.2 Modèle numérique volumes finis

Considérons un domaine Ω avec un maillage tel que: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_e} K_i$, N_e désignant le nombre total de volumes de contrôle K_i . Soit Γ_Ω , l'ensemble des interfaces du domaine. L'interface Γ_{ij} est alors définie par : $\Gamma_{ij} = K_i \cap K_j$; $\|\Gamma_{ij}\| = L_{ij}$, $\forall i \neq j \in N_e$, $|K_i|$ étant l'aire du volume de contrôle. La discrétisation par les volumes finis après la formulation intégrale de (1.1) s'écrit:

$$\iint_{K_i \times I} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega dt + \iint_{\partial K_i \times I} (\mathbf{G}(\mathbf{U})n^x + \mathbf{H}(\mathbf{U})n^y) d\Gamma dt = \iint_{K_i \times I} \mathbf{S}(\mathbf{U}) d\Omega dt, \quad \forall K_i \in \Omega \quad (2.1)$$

$\mathbf{n} = [n^x \quad n^y]^T$ représente le vecteur unitaire normal extérieur au volume de contrôle K_i .

$I = [T, T + \Delta t]$ désigne l'intervalle de temps.

Les vecteurs \mathbf{G} et \mathbf{H} présentent l'avantage de satisfaire à la propriété de l'invariance rotationnelle introduite par Spekreijse (1988) et Toro (1999) (Annexe I, pp. 177).

$$\mathbf{G}(\mathbf{U})n^x + \mathbf{H}(\mathbf{U})n^y = \mathbf{T}_n^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{U}) \quad (2.2)$$

\mathbf{T}_n est la matrice de rotation d'expression :

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n^x & n^y \\ 0 & -n^y & n^x \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Cette propriété permet de ramener le calcul du flux à un problème de Riemann unidimensionnel selon la normale à chaque interface en utilisant uniquement le vecteur \mathbf{G} .

Par ailleurs, en considérant la variable moyennée

$$\mathbf{U}_i = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} \mathbf{U} d\Omega \quad (2.4)$$

et en utilisant les relations suivantes :

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} = \int_I \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} dt, \quad \text{avec } \mathbf{U}_i^n = \mathbf{U}_i(n \Delta t), \quad \Delta t = t^{n+1} - t^n \quad (2.5)$$

une approximation de (2.1) est donnée par :

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} = \left[-\frac{1}{|K_i|} \sum_j^m \mathbf{T}_{n_{ij}}^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{T}_{n_{ij}} \cdot \mathbf{U}_i^n) L_{ij} + \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} \mathbf{S}(\mathbf{U}_i^n) d\Omega \right], \quad \forall K_i \in \Omega \quad (2.6)$$

avec $\mathbf{n}_{ij} = [n_{ij}^x \quad n_{ij}^y]^T$ désignant le vecteur normal extérieur à Γ_{ij} orienté de la cellule calculée K_i vers la cellule voisine K_j ($j \leq m$) comme illustré à la figure 2.1. $T_{n_{ij}}$ est la matrice de rotation associée au vecteur normal \mathbf{n}_{ij} .

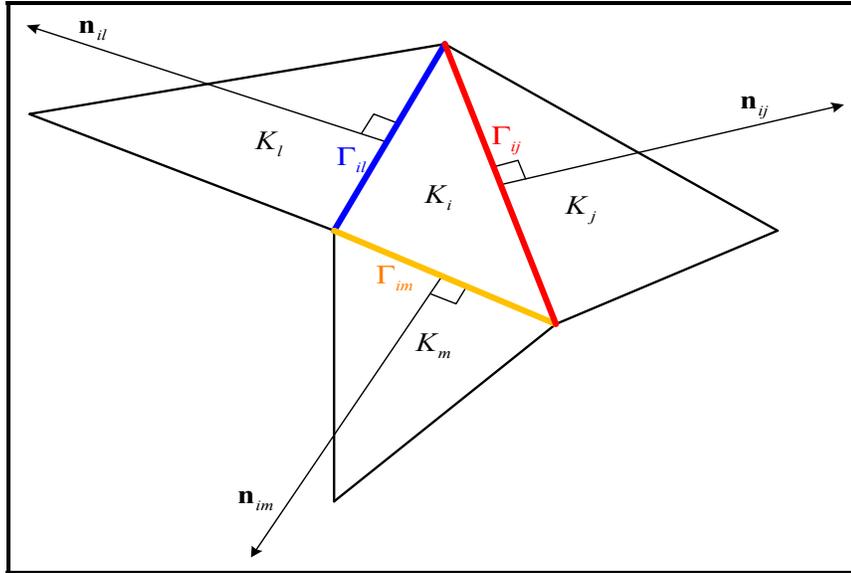


Figure 2.1 Cellules voisines à la cellule calculée K_i pour un maillage triangulaire

2.3 Traitement du terme source de bathymétrie

Comme relevé au chapitre précédent, une attention particulière doit être accordée au traitement numérique des termes sources de bathymétrie de sorte à assurer le respect des propriétés de conservation pour des problèmes à bathymétrie variable. Dans cette étude, nous utilisons une méthode basée sur l'obtention d'une forme divergente du terme de bathymétrie.

Substituant z par $\eta - h$:

$$\int_{K_i} h \nabla z d\Omega = \int_{K_i} h \nabla \eta d\Omega - \int_{K_i} \frac{1}{2} \nabla h^2 d\Omega \quad (2.7)$$

Par simplification avec le terme $\int_{K_i} \frac{1}{2} g \nabla h^2 d\Omega$ figurant dans l'expression du flux de convection (combinaison des équations (1.1) et (1.2) (2.1)), il vient :

$$\mathbf{S}_{b_i} = \int_{K_i} g h \nabla \eta d\Omega \quad (2.8)$$

Les expressions des flux de convection sont conséquemment modifiées. Deux approches de calcul du terme $h \nabla \eta$ sont considérées et il en résulte deux modèles numériques.

2.3.1 Modèle-1 (dit linéaire)

Le premier modèle numérique est basé sur une linéarisation locale du terme \mathbf{S}_{b_i} initialement proposée par Tchamen (2006) :

$$\mathbf{S}_{b_i} \approx \bar{h} \int_{K_i} g \nabla \eta d\Omega \quad (2.9)$$

Les vecteurs \mathbf{G} et \mathbf{H} en (2.1) s'écrivent alors :

$$\mathbf{G}^1 = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \bar{h} g \eta \\ huv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^1 = \begin{bmatrix} hu \\ huv \\ hv^2 + \bar{h} g \eta \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

La hauteur d'eau moyennée \bar{h} doit être définie en accord avec les propriétés de conservation. Pour ce faire \bar{h} sera défini selon la nature de l'interface mouillée ou H/S. Ce modèle dit linéaire s'avère tout de même très robuste.

2.3.2 Modèle-2 (dit non-linéaire)

Dans le second modèle, la différence entre le niveau de la surface libre et la bathymétrie $h = \eta - z$ est substituée à la hauteur d'eau h en (2.8) lorsque $h = \eta - z > 0$. Le terme de gravité s'écrit alors :

$$\mathbf{S}_{b_i} = \int_{K_i} g h \nabla \eta d\Omega = \int_{K_i} g \nabla \left(\frac{\eta^2}{2} \right) d\Omega - \int_{K_i} g z \nabla \eta d\Omega \quad (2.11)$$

La linéarisation dans ce cas est plutôt portée sur le paramètre bathymétrique fixe z . Ainsi, en approximant le terme $\int_{K_i} g z \nabla \eta d\Omega$ par $g \bar{z} \int_{K_i} \nabla \eta d\Omega$, la relation (2.8) devient :

$$\mathbf{S}_{b_i} \approx g \int_{K_i} \nabla \left(\frac{\eta^2}{2} - \bar{z} \eta \right) d\Omega \quad (2.12)$$

Les vecteurs \mathbf{G} et \mathbf{H} s'écrivent par conséquent :

$$\mathbf{G}^2 = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + g \frac{\eta^2}{2} - \bar{z} g \eta \\ huv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^2 = \begin{bmatrix} hu \\ huv \\ hv^2 + g \frac{\eta^2}{2} - \bar{z} g \eta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Ce second modèle conduit à une meilleure résolution des discontinuités du fait de la conservation du terme non linéaire $\eta^2/2$ dans l'expression du flux satisfaisant ainsi la condition de Rankine-Hugoniot (Toro, 2001).

2.3.3 Terme source pour le modèle-1 et le modèle-2

Suite aux modifications apportées aux vecteurs \mathbf{G} et \mathbf{H} en utilisant le modèle-1 ou le modèle-2, le terme source en (2.1) se réduit au terme de friction :

$$\mathbf{S}(\mathbf{V}) = \left[0 \quad -g h \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad -g h \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \right]^T \quad (2.14)$$

L'intégration sur chaque volume de contrôle est donnée par les relations :

$$\begin{cases} \int_{K_i} g h S_{f_x} d\Omega \approx |K_i| g h_i S_{f_x} = |K_i| g h_i \frac{n^2 u_i \sqrt{u_i^2 + v_i^2}}{h_i^{4/3}} \\ \int_{K_i} g h S_{f_y} d\Omega \approx |K_i| g h_i S_{f_y} = |K_i| g h_i \frac{n^2 v_i \sqrt{u_i^2 + v_i^2}}{h_i^{4/3}} \end{cases} \quad (2.15)$$

Remarques

Les relations (2.15) sont valables seulement pour toute cellule inondée, soit $h_i > \varepsilon$. Pour une cellule sèche, nous imposons un terme source de friction nul : $\mathbf{S} = \mathbf{0}$. Le critère d'identification de la cellule sèche ou mouillée sera généralement pris entre les valeurs $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$ et 10^{-6} m . Par ailleurs, pour la prise en compte des instabilités numériques dues à d'éventuelles variations brusques dans la hauteur d'eau et la vitesse, une discrétisation semi-implicite du terme source est considérée :

$$\mathbf{S}_f \approx \mathbf{S}_f^n + \frac{1}{2} \mathbf{J}_f^n (\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n), \text{ avec } \mathbf{J}_f^n = \frac{\partial \mathbf{S}_f^n}{\partial \mathbf{V}} \quad (2.16)$$

Finalement, les traitements numériques affectés au terme source de friction et au flux d'interface conduisent au choix du vecteur d'inconnues suivant pour chaque cellule K_i :

$$\mathbf{V}_i = [\eta_i, (hu)_i, (hv)_i]^T \quad (2.17)$$

L'équation numérique à résoudre sur chaque volume de contrôle s'écrit alors :

$$\frac{\mathbf{V}_i^{n+1} - \mathbf{V}_i^n}{\Delta t} = \left[\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{J}_f^n \right]^{-1} \cdot \left[-\frac{1}{|K_i|} \sum_j^m \mathbf{T}_{n_{ij}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{ij}(\mathbf{V}_i^n, \mathbf{V}_j^n, \mathbf{n}_{ij}) L_{ij} - \mathbf{S}_f^n \right], \quad \forall K_i \in \Omega, \quad (2.18)$$

\mathbf{I} est la matrice identité et $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}$ le flux numérique à l'interface Γ_{ij} dont l'expression est donnée à la section suivante. Le pas de temps Δt est obtenu de la condition de CFL (Annexe II, pp. 179).

2.4 Traitement du flux d'interface

Le flux à l'interface est calculé selon un schéma de type Godunov (1959). L'information relative à l'écoulement est propagée à travers la résolution d'une séquence de problèmes de Riemann en considérant une distribution discrète de données constantes à l'intérieur des cellules du maillage. Le problème de Riemann se définit comme un problème hyperbolique à valeurs initiales dans un domaine comportant une discontinuité entre deux états initialement constants (Tchamen, 2006). Plusieurs schémas numériques de résolution du problème de Riemann dits *solvers de Riemann* ont été développés (Toro, 1999; 2001). Le schéma de Roe (Roe, 1981) passe pour être l'un des premiers solvers de Riemann pour les équations d'Euler.

2.4.1 Approximation numérique du flux d'interface

Dans le modèle numérique proposé, le flux d'interface est calculé localement dans la direction normale aux interfaces par identification à un problème de Riemann présentant les états $(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j)$ de part et d'autre de l'interface Γ_{ij} (Figure 2.2). Pour le calcul du flux, le choix est porté sur un schéma centré (Lax-Friedrichs) avec un terme dissipatif artificiel :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ij}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{n}_{ij}) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{G}(\mathbf{T}_{n_{ij}} \cdot \mathbf{V}_i) + \mathbf{G}(\mathbf{T}_{n_{ji}} \cdot \mathbf{V}_j) \right\} - \frac{1}{2} D_{ij} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) \quad (2.19)$$

où \mathbf{G} désigne soit \mathbf{G}^1 (équation (2.10)), soit \mathbf{G}^2 (équation (2.13)). D_{ij} est un paramètre dissipatif de stabilisation à définir ultérieurement.

Le flux d'interface tel qu'exprimé selon la relation (2.19) ne satisfait pas toujours à la propriété de la conservation du fluide au repos ou *C-property*. Les paramètres \bar{h} , \bar{z} et D_{ij} des relations (2.10) (2.13) et (2.19) doivent être définis conséquemment :

Modèle-1 :

Dans le premier modèle, \bar{h} (équation (2.10)) est fixé égale à la hauteur d'eau dans la cellule calculée: $\bar{h} = h_i$ et le flux devient :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ij}^{(1)}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{n}_{ij}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_i u_{i,n} + h_j u_{j,n} \\ h_i u_{i,n}^2 + h_j u_{j,n}^2 + g h_i (\eta_i + \eta_j) \\ h_i u_{i,n} v_{i,n} + h_j u_{j,n} v_{j,n} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} D_{ij} \begin{bmatrix} \eta_j - \eta_i \\ h_j u_{j,n} - h_i u_{i,n} \\ h_j v_{j,n} - h_i v_{i,n} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Modèle-2 :

Posant $\bar{z} = z_i$, le flux selon le second modèle s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ij}^{(2)}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{n}_{ij}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_i u_{i,n} + h_j u_{j,n} \\ h_i u_{i,n}^2 + h_j u_{j,n}^2 + \frac{1}{2} g (\eta_i^2 + \eta_j^2) - g z_i (\eta_i + \eta_j) \\ h_i u_{i,n} v_{i,n} + h_j u_{j,n} v_{j,n} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} D_{ij} \begin{bmatrix} \eta_j - \eta_i \\ h_j u_{j,n} - h_i u_{i,n} \\ h_j v_{j,n} - h_i v_{i,n} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

avec $u_{k,n} = u_k n_{ij}^x + v_k n_{ij}^y$ et $v_{k,n} = v_k n_{ij}^x - u_k n_{ij}^y$, ($k = i, j$).

Divers choix de calcul du terme D_{ij} existent dans la littérature. Loukili and Soulaïmani (2007) ont utilisé un schéma de Lax-Friedrichs avec :

$$D_{ij} = \left\| \begin{bmatrix} u_{i,n} & v_{i,n} \end{bmatrix}^T \right\| + \sqrt{gh_i} \quad (2.22)$$

Davis (1988), prenant en considération la cellule voisine K_j a proposé :

$$D_{ij}^{Davis} = \max \left\{ |u_{i,n} - \sqrt{gh_i}|, |u_{j,n} - \sqrt{gh_j}|, |u_{i,n} + \sqrt{gh_i}|, |u_{j,n} + \sqrt{gh_j}| \right\} \quad (2.23)$$

Un schéma plus simple et robuste a été proposé par Toro (1999) :

$$D_{ij}^{Toro} = \max \left\{ |u_{i,n}| + \sqrt{gh_i}, |u_{j,n}| + \sqrt{gh_j} \right\} \quad (2.24)$$

Il importe cependant que le schéma utilisé vérifie certaines propriétés de conservation. Le modèle de calcul du terme D_{ij} retenu dans cette étude est guidé par cet impératif. Nous proposons à cet effet l'expression suivante :

$$D_{ij} = \lambda_{ij} = \alpha \max \left\{ |\bar{u}_{ij,n} - \bar{c}_{ij}|, |\bar{u}_{ij,n}|, |\bar{u}_{ij,n} + \bar{c}_{ij}| \right\} \quad (2.25)$$

où

$$0 < \alpha \leq 1, \quad \bar{u}_{ij,n} = \frac{u_{i,n} + u_{j,n}}{2} \quad \text{et} \quad \bar{c}_{ij} = \sqrt{g \frac{h_i + h_j}{2}} \quad (2.26)$$

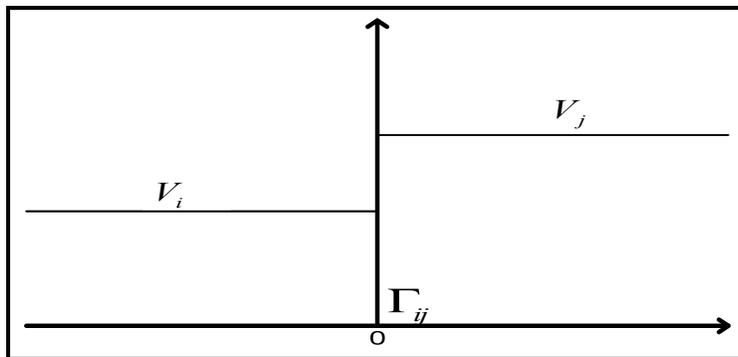


Figure 2.2 Problème de Riemann associé à l'interface Γ_{ij}

2.4.2 Propriétés de conservation

Les propriétés de conservation se rapportent à la conservation globale de la masse et à la vérification de la solution du fluide au repos ou C-property.

Conservation globale de la masse

La conservation globale de la masse est assurée par une discrétisation adéquate de l'équation de continuité. Celle-ci doit être telle que la somme totale des flux aux interfaces excluant les frontières du domaine s'annule. Le modèle numérique proposé vérifie bien cette propriété. Pour en faire la preuve, il suffit d'additionner deux à deux les flux de part et d'autre d'une interface donnée. Considérons à cet effet, la première composante du vecteur flux à l'interface Γ_{ij} correspondant à l'équation de continuité pour deux cellules voisines K_i et K_j :

$$\begin{cases} \left(\tilde{\mathbf{F}}_{ij}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{n}_{ij}) \right)^1 = \frac{1}{2} \left\{ h_i u_{i,n_{ij}} + h_j u_{j,n_{ij}} - \lambda_{ij} (\eta_j - \eta_i) \right\} \\ \left(\tilde{\mathbf{F}}_{ji}(\mathbf{V}_j, \mathbf{V}_i, \mathbf{n}_{ji}) \right)^1 = \frac{1}{2} \left\{ h_j u_{j,n_{ji}} + h_i u_{i,n_{ji}} - \lambda_{ji} (\eta_i - \eta_j) \right\} \end{cases}, \quad \forall K_i, K_j \in \Omega, \quad K_i \cap K_j = \Gamma_{ij} \quad (2.27)$$

avec $u_{k,n} = u_k n_{ij}^x + v_k n_{ij}^y$ et $v_{k,n} = v_k n_{ij}^x - u_k n_{ij}^y$, ($k = i, j$).

Puisque

$$n_{ij} = -n_{ji} \quad (2.28)$$

$$h_i u_{i,n_{ij}} + h_i u_{i,n_{ji}} = h_j u_{j,n_{ij}} + h_j u_{j,n_{ji}} = 0 \quad (2.29)$$

et la somme des flux en (2.27) se réduit au terme de dissipation :

$$\left(\tilde{\mathbf{F}}_{ij} + \tilde{\mathbf{F}}_{ji} \right)^1 = (\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) (\eta_i - \eta_j). \quad (2.30)$$

Il résulte alors du caractère symétrique du calcul du terme dissipatif λ_{ij} donné par les équations (2.25-2.26) que :

$$\left(\tilde{\mathbf{F}}_{ij} + \tilde{\mathbf{F}}_{ji}\right)^1 = 0, \quad \forall K_i, K_j \in \Omega, \quad K_i \cap K_j = \Gamma_{ij}. \quad (2.31)$$

Finalement, la somme des flux relatifs à la masse aux interfaces sur le domaine entier se réduit à la somme sur les éléments de frontière $\partial\Gamma_\Omega$:

$$\sum_{\Gamma_{ij} \in \Gamma_\Omega} \left(\mathbf{T}_{n_{ij}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{ij}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{n}_{ij})\right)^1 L_{ij} = \sum_{\Gamma_{ij} \in \partial\Gamma_\Omega} \left(\mathbf{T}_{n_{ij}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{ij}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{n}_{ij})\right)^1 L_{ij} \quad (2.32)$$

d'où la vérification de la propriété de la conservation globale de la masse :

$$\sum_i |K_i| \left(\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t}\right) + \sum_{\Gamma_{ij} \in \partial\Gamma_\Omega} \tilde{\mathbf{F}}_{ij}^{(1)}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{n}_{ij}) L_{ij} = 0 \quad (2.33)$$

Conservation de la solution du fluide au repos ou la C-property

Un schéma satisfait à la C-property (Bermúdez et Vazquez, 1994) lorsqu'il conserve la solution du problème hydrostatique suivant :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \eta(x, y, t) \\ hu(x, y, t) \\ hv(x, y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad \forall \eta_0, \quad \text{et } t \in]0, T_s] \quad (2.34)$$

Considérant le problème défini en (2.34), pour un domaine entièrement inondé :

- Le Modèle-1 conduit à :

$$\frac{\mathbf{V}_i^{n+1} - \mathbf{V}_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{|K_i|} \sum_j^m L_{ij} \begin{bmatrix} -\sqrt{g \frac{h_i + h_j}{2}} (\eta_j - \eta_i) \\ \frac{1}{2} n_{ij}^x g h_i (\eta_j + \eta_i) \\ \frac{1}{2} n_{ij}^y g h_i (\eta_j + \eta_i) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Le niveau d'eau étant constant partout dans le domaine, il vient :

$$\frac{\mathbf{V}_i^{n+1} - \mathbf{V}_i^n}{\Delta t} = -\frac{g h_i \eta_0}{|K_i|} \sum_j^m L_{ij} \begin{bmatrix} 0 \\ n_{ij}^x \\ n_{ij}^y \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

- Le Modèle-2 de façon similaire aboutit à :

$$\frac{\mathbf{V}_i^{n+1} - \mathbf{V}_i^n}{\Delta t} = -\frac{g \left(\frac{\eta_0^2}{2} - z_i \eta_0 \right)}{|K_i|} \sum_j^m L_{ij} \begin{bmatrix} 0 \\ n_{ij}^x \\ n_{ij}^y \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Puisque chacune des cellules vérifie

$$\sum_{j=1}^m L_{ij} n_{ij}^x = \sum_{j=1}^m L_{ij} n_{ij}^y = 0 \quad (2.38)$$

finalement :

$$\mathbf{V}_i^{n+1} - \mathbf{V}_i^n = 0 \quad (2.39)$$

2.4.3 Traitement d'une interface humide/sèche

Le système d'équations (1.1-1.3) n'étant valide que pour un domaine inondé vérifiant donc la condition $h = \eta - z > 0$, les calculs numériques à chaque interface H/S doivent être adaptés. En effet, h tendant à s'annuler, sans aucune adaptation, le modèle numérique tel que proposé peut générer des instabilités numériques. En outre, le calcul du flux numérique doit assurer l'inondation d'une cellule seulement lorsque physiquement possible.

A une interface Γ_{ij} entre une cellule inondée ($h_i > \varepsilon$) et une cellule sèche ($h_j \leq \varepsilon$), lorsque $z_j \leq \eta_i$, les forces de gravité et d'inertie permettent le transfert d'eau de la cellule mouillée à la cellule sèche comme l'indique la figure 2.3. Dans ce cas, les flux (2.19) et (2.20) sont calculés en imposant $\mathbf{V}_j = [z_j \ 0 \ 0]^T$ dans la cellule sèche.

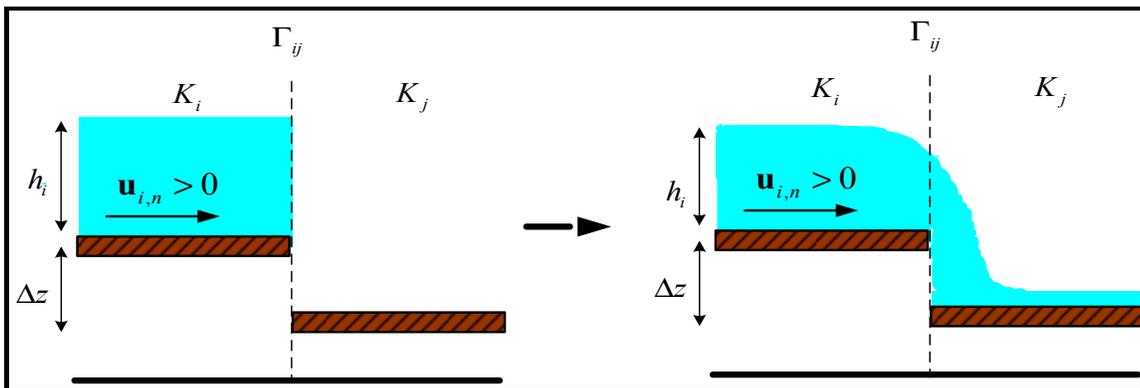


Figure 2.3 Inondation d'une cellule sèche du fait des forces de gravité et d'inertie

Par ailleurs, lorsque le front d'eau avance sur une pente ascendante $z_j > \eta_i$ (Figures 2.4 et 2.5), la correction locale de la surface libre est appliquée. L'idée de base est similaire à celle évoquée dans les travaux réalisés par Beffa et Connell, (2001), Brufau, et al. (2002), Liang et Borthwick (2009). L'objectif est d'éviter la création d'un gradient de surface d'eau ($\nabla \eta \neq 0$), lequel engendrerait des flux non-physiques à travers l'interface Γ_{ij} et des instabilités numériques.

La correction de la surface libre proposée dans cette étude est formulée comme suit :

Cas (a) : Considérant une cellule courante inondée K_i ($h_i > \varepsilon$) ayant une interface H/S, les conditions requises à la correction de la surface libre et les modifications locales subséquentes s'écrivent :

$$\begin{cases} \eta_i < z_j \\ h_i > \varepsilon \geq h_j \\ u_{i,n} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta_i = \eta_j \\ z_j = \eta_i \\ h_j = 0 \\ u_j = v_j = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

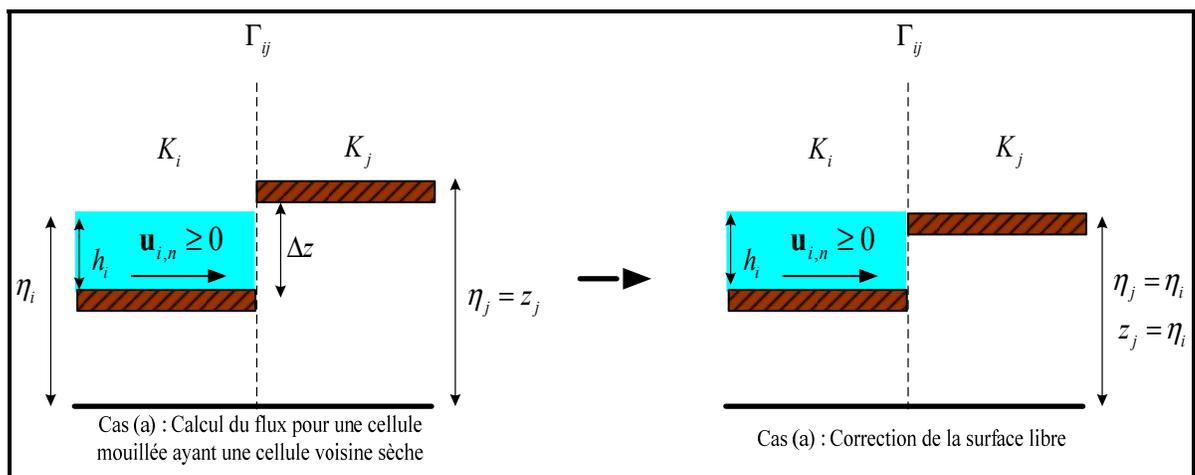


Figure 2.4 Correction de la surface libre pour une cellule courante inondée ayant une cellule voisine sèche

La condition $u_{i,n} \geq 0$ suppose que l'eau s'écoule de la cellule inondée vers la cellule sèche (ou un fluide statique) de sorte que le calcul du flux à travers Γ_{ij} traduise cet écoulement durant le pas de temps considéré.

L'approximation du flux selon les modèles 1 et 2 s'écrit :

Modèle-1 :

$$\mathbf{T}_{n_{ij}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{ij}^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_i u_{i,n} \\ n_{ij}^x h_i u_{i,n}^2 - n_{ij}^y h_i u_{i,n} v_{i,n} + 2n_{ij}^x g h_i \eta_i \\ n_{ij}^y h_i u_{i,n}^2 + n_{ij}^x h_i u_{i,n} v_{i,n} + 2n_{ij}^y g h_i \eta_i \end{bmatrix} - \frac{1}{2} D_{ij} \begin{bmatrix} 0 \\ -n_{ij}^x h_i u_{i,n} - n_{ij}^y h_i v_{i,n} \\ n_{ij}^y h_i u_{i,n} + n_{ij}^x h_i v_{i,n} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Modèle-2 :

$$\mathbf{T}_{n_{ij}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{ij}^2(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{n}_{ij}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_i u_{i,n} \\ n_{ij}^x h_i u_{i,n}^2 - n_{ij}^y h_i u_{i,n} v_{i,n} + n_{ij}^x g (\eta_i^2 - 2z_i \eta_i) \\ n_{ij}^y h_i u_{i,n}^2 + n_{ij}^x h_i u_{i,n} v_{i,n} + n_{ij}^y g (\eta_i^2 - 2z_i \eta_i) \end{bmatrix} - \frac{1}{2} D_{ij} \begin{bmatrix} 0 \\ -n_{ij}^x h_i u_{i,n} - n_{ij}^y h_i v_{i,n} \\ n_{ij}^y h_i u_{i,n} + n_{ij}^x h_i v_{i,n} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

avec

$$D_{ij} = \lambda_{ij} = \max \left\{ \left| \frac{u_{i,n}}{2} - \sqrt{g \frac{h_i}{2}} \right|, \left| \frac{u_{i,n}}{2} \right|, \left| \frac{u_{i,n}}{2} + \sqrt{g \frac{h_i}{2}} \right| \right\} \quad (2.43)$$

Les relations (2.41) et (2.42) diffèrent par les termes $2gh_i\eta_j$ et $g(\eta_j^2 - 2z_i\eta_j)$ lesquels représentent l'effet du gradient de la surface libre. L'expression du flux donnée par (2.42) peut être problématique lorsque la cellule courante est sèche.

Cas (b) : Considérant une cellule courante sèche K_i ($h_i > \varepsilon$) et supposant son inondation par la contribution d'une cellule voisine inondée K_j ($u_{j,n} \leq 0$), des modifications similaires sont apportées :

$$\begin{cases} z_i > \eta_j \\ h_i \leq \varepsilon < h_j \\ u_{j,n} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta_i = \eta_j \\ z_i = \eta_j \\ h_i = 0 \\ u_{i,n} = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

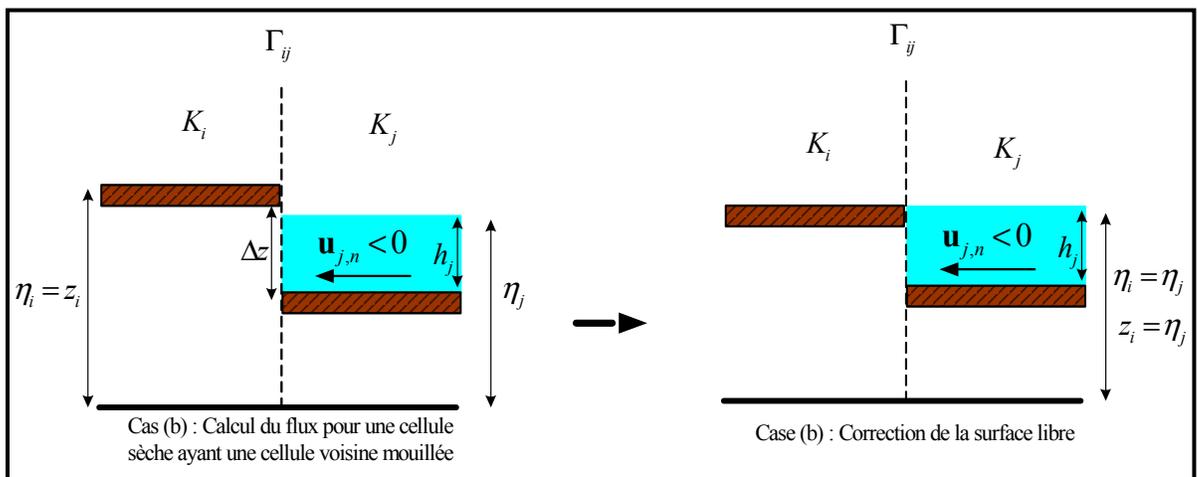


Figure 2.5 Correction de la surface libre pour une cellule courante sèche ayant une cellule voisine inondée

Le flux à l'interface Γ_{ij} s'écrit alors :

- Modèle-1 :

$$\mathbf{T}_{n_{ij}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{ij}^1(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{n}_{ij}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_j u_{j,n} \\ n_{ij}^x h_j u_{j,n}^2 - n_{ij}^y h_j u_{j,n} v_{j,n} \\ n_{ij}^y h_j u_{j,n}^2 + n_{ij}^x h_j u_{j,n} v_{j,n} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} D_{ij} \begin{bmatrix} 0 \\ -n_{ij}^x h_j u_{j,n} - n_{ij}^y h_j v_{j,n} \\ n_{ij}^y h_j u_{j,n} + n_{ij}^x h_j v_{j,n} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

- Modèle-2 :

$$\mathbf{T}_{n_{ij}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{ij}^2(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{n}_{ij}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_j u_{j,n} \\ n_{ij}^x h_j u_{j,n}^2 - n_{ij}^y h_j u_{j,n} v_{j,n} + n_{ij}^x g(\eta_j^2 - 2z_i \eta_j) \\ n_{ij}^y h_j u_{j,n}^2 + n_{ij}^x h_j u_{j,n} v_{j,n} + n_{ij}^y g(\eta_j^2 - 2z_i \eta_j) \end{bmatrix} - \frac{1}{2} D_{ij} \begin{bmatrix} 0 \\ -n_{ij}^x h_j u_{j,n} - n_{ij}^y h_j v_{j,n} \\ n_{ij}^y h_j u_{j,n} + n_{ij}^x h_j v_{j,n} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Il apparaît clairement à travers la relation (2.45) que la cellule sèche sera inondée du fait de la force d'inertie dans la cellule voisine. Cependant, alors que le gradient numérique de la surface libre s'annule dans le modèle-1, le terme supplémentaire $g(\eta_j^2 - 2z_i \eta_j)$ apparaît dans le modèle-2. Faisant l'hypothèse que la hauteur libre dans la cellule inondée est égale à la bathymétrie dans la cellule sèche voisine ($z_i = \eta_j$), ce terme se réécrit $g(\eta_j^2 - 2z_i \eta_j) = -g\eta_j^2$ et traduit l'existence d'une force de pression non-physique. Ce constat procède de ce que l'expression du flux donné en (2.21) n'est valide que pour $h = \eta - z > 0$. En conséquence, en présence d'une frontière H/S, seules les relations (2.41) et (2.45) n'introduisant aucune force fictive devront être utilisées.

En définitive, l'utilisation du modèle-2 suivra la procédure suivante :

- (i) Toute cellule inondée est traitée avec la relation (2.21).
- (ii) Une interface H/S est traitée avec la relation (2.41) ou (2.45) selon que la cellule courante est inondée ou sèche respectivement.
- (iii) Lorsqu'une cellule a au moins une interface H/S, les flux à toutes ses interfaces sont calculés selon les relations : (2.20), (2.41) ou (2.45) afin d'assurer la C-property.

Remarques :

Lors de la mise à jour de la solution numérique, la hauteur d'eau dans une cellule précédemment sèche est évaluée à partir de la relation $h_j = \eta_j - z_{j,original}$ où $z_{j,original}$ désigne la bathymétrie originale. Cela suppose une inondation systématique de la cellule sèche voisine du fait de l'apport de la cellule inondée voisine K_i vérifiant :

$$\Delta\eta_j = -\frac{\Delta t}{2|K_j|} h_i u_{i,n} L_{ij} > \varepsilon \quad (2.47)$$

Il importe alors de s'assurer dans une certaine mesure de l'effectivité de cette inondation afin d'éviter une propagation trop rapide voire irréaliste du front d'eau sur le sec. A cet effet, nous proposons de remplacer les conditions $u_{i,n} \geq 0$ en (2.40) et $u_{j,n} \leq 0$ en (2.44) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i,n}^2}{2g} + h_i > z_j - z_i > 0 \quad \text{si } u_{i,n} > 0 \\ \text{et} \\ \frac{u_{j,n}^2}{2g} + h_j > z_i - z_j > 0 \quad \text{si } u_{j,n} < 0 \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Ces conditions assurent qu'il y a suffisamment d'énergie dans la cellule inondée pour que l'écoulement atteigne le centre de la cellule voisine sèche. Ainsi, les modifications en (2.40) et (2.44) ne seront appliquées que si les conditions (2.48) sont vérifiées.

2.4.4 Calcul du flux aux frontières

Le flux numérique doit être également calculé aux interfaces des cellules $K_{i,\partial\Omega}$ coïncidant avec les frontières du domaine. Les conditions aux limites y fixées sont généralement des conditions débit, de sortie d'eau ou d'imperméabilité. Les flux aux frontières sont calculés en considérant, une cellule fictive $K'_{i,\partial\Omega}$ à l'extérieur du domaine et partageant la même interface avec la cellule $K_{i,\partial\Omega}$. Les valeurs appropriées de la hauteur d'eau et des composantes de la vitesse sont ensuite attribuées à la cellule fictive de sorte à définir un problème de Riemann. Les modèles décrits plus haut peuvent être alors utilisés pour le calcul du flux.

Spécifiquement, pour une condition de mur ou d'imperméabilité nous imposons $u_{i,n} = u'_{i,n} = 0$ et $\eta_i = \eta'_i$ et le flux s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i',wall} = \begin{bmatrix} 0 \\ h_i g \eta_i \\ h_i g \eta_i \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Pour un débit imposé, le flux est calculé selon la relation :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i'} = \begin{bmatrix} -\bar{Q} \\ \frac{\bar{Q}^2}{h_i} + g h_i \eta_i \\ \frac{\bar{Q}^2}{h_i} + g h_i \eta_i \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

où $\bar{Q} = Q/l$ est le débit par unité de longueur avec l , la longueur de la frontière considérée.

2.5 Conclusion

Dans cette première partie de notre étude, un modèle Eulérien pour la simulation des bancs couvrants et découvrants a été proposé. Il résulte de la discrétisation des équations d'eaux peu profondes par la technique des volumes finis. Les difficultés relatives au traitement des termes sources des équations gouvernantes et aux calculs aux interfaces H/S ont été prises en compte afin d'éviter les instabilités numériques générées pour des problèmes à bathymétries variables. Un schéma de Lax-Friedrichs avec un terme de dissipation artificielle est utilisé pour le calcul des flux aux interfaces. La propagation des bancs couvrants et découvrants est prise en compte à travers une adaptation des calculs des flux. Des traitements spécifiques basés sur la correction de la surface libre sont appliqués aux interfaces (H/S) afin d'assurer la vérification des propriétés de conservation. Les calculs symétriques aux interfaces assurent au modèle la conservation de la masse et de la C-property. Il reste à valider le modèle proposé par application à des tests numériques.

CHAPITRE 3

RÉSULTATS NUMÉRIQUES DU MODÈLE VOLUMES FINIS

3.1 Introduction

Le présent chapitre se rapporte à la validation du modèle numérique précédemment développé. A cet effet, plusieurs tests de validations sont considérés. Les trois premiers tests simulent une rupture de barrage idéalisée (rupture complète et instantanée). Le quatrième test porte sur la vidange d'un canal à bathymétrie présentant une singularité, par imposition d'une onde double de raréfaction. Le cinquième test simule les bancs couvrants et découvrants dans un bassin à pente variable, par imposition d'une condition de marée à l'entrée.

Pour ces différents tests, les résultats numériques sont comparés soit à des solutions analytiques, soit à des données expérimentales, soit encore aux prédictions numériques obtenues par d'autres auteurs. Les modèles numériques 1 et 2 sont également comparés pour la mise en évidence de l'apport du traitement non-linéaire du terme de gravité dans le calcul du flux. Le modèle-2 est enfin appliqué dans le dernier test à un cas de bathymétrie réelle pour la simulation des bancs couvrants et découvrants. Il s'agit de l'estacade de Bordeaux, une portion de la rivière des Prairies à Laval (Québec).

3.2 Problèmes d'écoulements de ruptures idéalisées de barrage

Les problèmes d'écoulements de ruptures idéalisées de barrages sont des tests simples mis en œuvre pour évaluer l'aptitude des modèles à capturer les ondes de choc. Ces problèmes sont par ailleurs d'autant plus utiles qu'il existe des solutions analytiques pour la comparaison avec les résultats numériques (Chanson, 2006; Stoker, 1957). Dans cette section, deux tests de rupture de barrage sur des lits plats mouillé et sec sont considérés respectivement. Dans le troisième test un obstacle triangulaire est ajouté dans le canal en aval du barrage.

3.2.1 Rupture de barrage sur lit mouillé

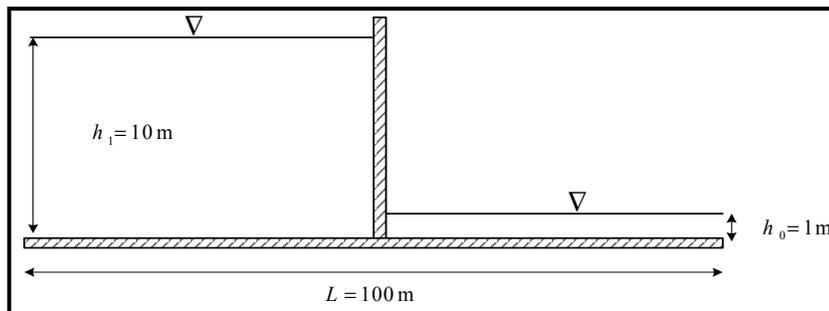


Figure 3.1 Écoulement de rupture de barrage sur lit mouillé
Conditions initiales

Ce test porte sur un écoulement subséquent à la rupture d'un barrage situé à $x = L/2$ où $L = 100$ m est la longueur totale du canal horizontal. Le barrage est caractérisé par des plans d'eau de hauteurs $h_1 = 10$ m en amont et $h_0 = 1$ m en aval de la position $x = L/2$ (Figure 3.1). Un maillage structuré de 1000 nœuds est utilisé pour les simulations numériques. On suppose un effondrement complet et instantané du barrage.

Une analyse de convergence au maillage a été réalisée (Figure 3.2). A cet effet, une valeur plus faible du coefficient $\alpha = 0.3$ (équations 2.25-2.26) a été utilisée pour réduire l'effet de la viscosité artificielle en plus d'un CFL=0.25. Pour un maillage de 50 nœuds selon l'axe longitudinal, on observe une imprécision des prédictions numériques au voisinage de la discontinuité et ceci est beaucoup plus manifeste avec les prédictions de la vitesse. Le modèle-2 semble légèrement plus précis que le premier modèle. La convergence au maillage est atteinte à partir de 200 nœuds.

Les prédictions des hauteurs d'eau et des vitesses à $t = 4$ s issues des modèles proposés pour un maillage plus fin sont très proches des solutions analytiques comme le montre la figure 3.3. L'excellente correspondance entre les résultats numériques et analytiques témoigne de la conservation de la masse par le modèle numérique.

Du point de vue quantitatif, l'erreur relative selon la norme L^2 est calculée à travers la relation :

$$E_{L^2} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{nd} (Y_{k,numérique} - Y_{k,analytique})^2}{\sum_{k=1}^{nd} (Y_{k,analytique})^2}} \quad (3.1)$$

où Y représente soit la profondeur h , soit la vitesse u et nd désigne le nombre de nœuds.

Le tableau 3.1 montre de très faibles erreurs pour h et u , confirmant ainsi la précision du modèle numérique proposé.

Tableau 3.1 Écoulement de rupture de barrage sur lit mouillé
Erreurs relatives sur les prédictions de la hauteur d'eau et la vitesse
Solutions à 200 nœuds

| | h | u |
|-----------|----------|----------|
| E_{L^2} | 0,000623 | 0,001795 |

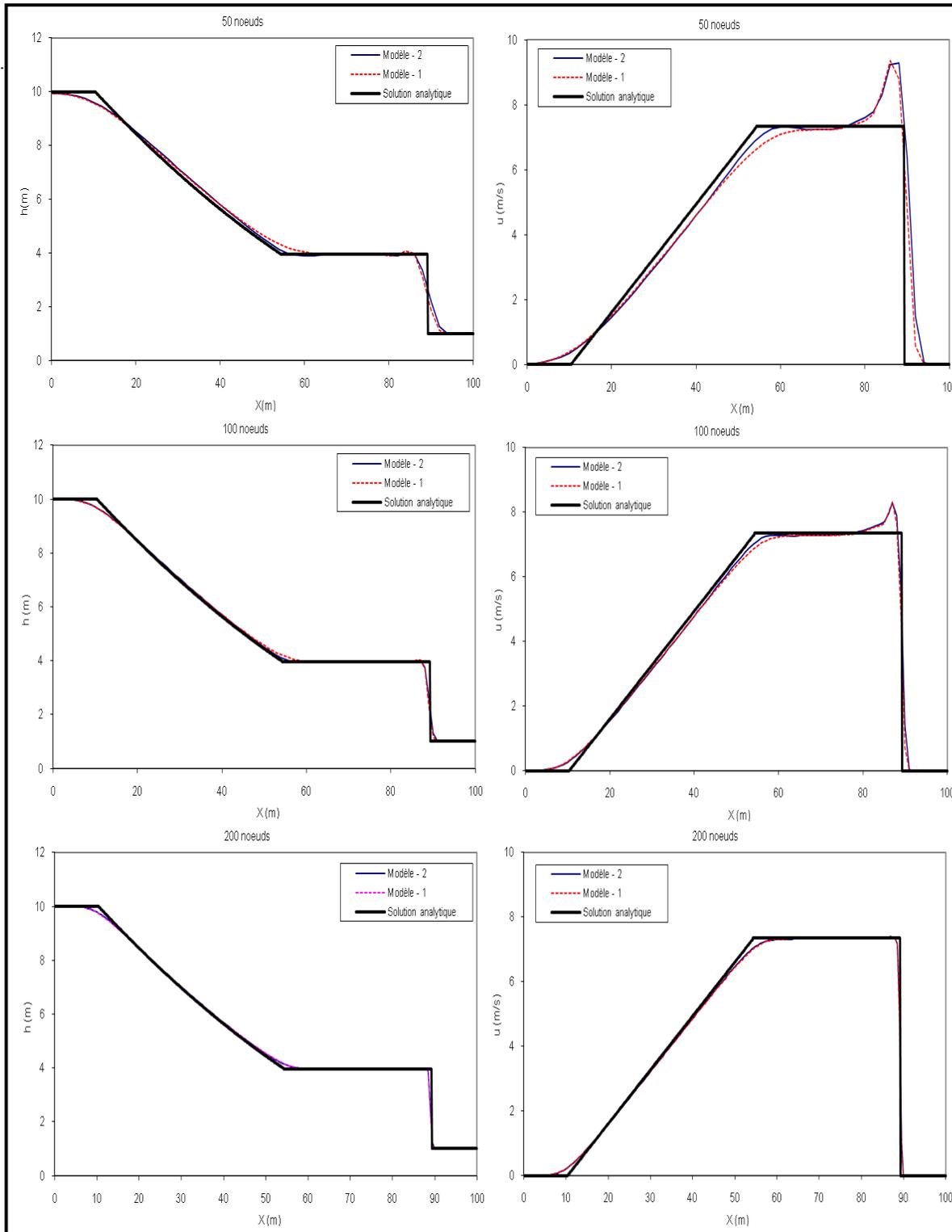


Figure 3.2 Écoulement de rupture de barrage sur lit mouillé
Analyse de la convergence au maillage pour les modèles 1 et 2, solutions à $t = 4$ s

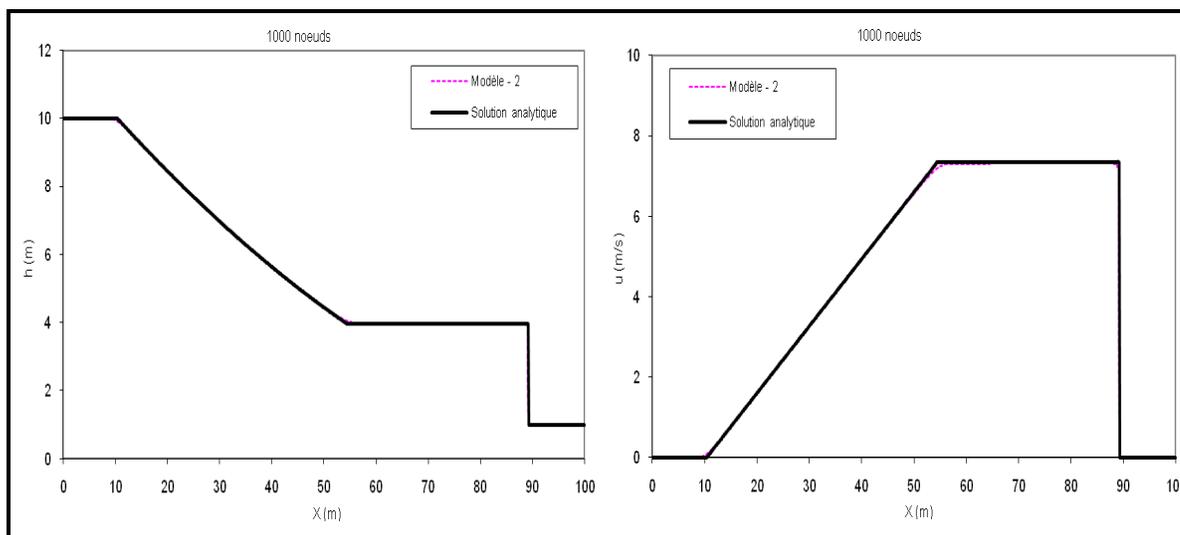


Figure 3.3 Écoulement de rupture de barrage sur lit mouillé
Prédictions numériques de la surface libre et de la vitesse comparées aux solutions
numériques à $t = 4$ s

3.2.2 Rupture de barrage sur lit sec

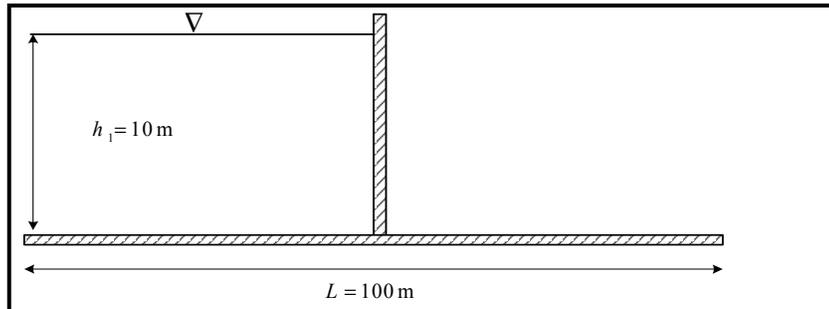


Figure 3.4 Écoulement de rupture de barrage sur lit mouillé
Conditions initiales

Le second test est beaucoup plus sévère en ce sens que la propagation se fait sur un lit sec. La configuration géométrique est identique à celle du cas précédent à l'exception de la considération d'un lit sec en aval du barrage $h_0 = 0$ (Figure 3.4). Le barrage est supposé s'effondrer instantanément. Ce problème ne présente aucune onde de choc, mais une onde d'expansion et une annulation amortie de la hauteur d'eau.

Une analyse de la convergence au maillage a été également entreprise pour les deux modèles avec $\alpha = 0,3$. La figure 3.5 montre que les écarts entre les prédictions numériques sont plus significatifs pour le maillage grossier (50 nœuds selon l'axe du canal), notamment pour la vitesse. De légères différences sont observables entre les prédictions issues des deux modèles jusqu'à la convergence à 400 nœuds. Contrairement au premier test de rupture de barrage avec lit aval mouillé, ce test nécessite plus de nœuds pour la convergence du fait de l'influence du traitement des interfaces H/S.

Les prédictions numériques de la vitesse et la hauteur d'eau à $t = 2,5 \text{ s}$ restent assez proches des solutions analytiques (Figure 3.6). Cependant, des différences importantes sont observées dans la prédiction de la vitesse et pourraient être attribuées au fait que le schéma soit du premier ordre. Il reste cependant que le même constat est fait par Vincent et al. (2001) qui ont utilisé un schéma de Mac-Cormack TVD (total variation diminishing) du second ordre.

Nous notons par ailleurs que la valeur limite de la hauteur d'eau assignée à ε a un effet non négligeable sur les prédictions, notamment celle de la vitesse (Figure 3.7). Le tableau 3.2 montre en effet, une réduction significative de l'erreur relative selon qu'une valeur plus faible de ε est utilisée.

Les résultats obtenus pour ces premiers tests sont semblables, voire plus précis que certains résultats rencontrés dans la littérature où des modèles encore plus sophistiqués ont été utilisés (Glaister, 1993; Jha, Akiyama et Ura, 2001; Vincent, Caltagirone et Bonneton, 2001; Zhao et al., 1994; Zoppou et Roberts, 1999). Enfin, nous observons que pour des maillages relativement fins, les modèles 1 et 2 convergent. Par conséquent, le modèle-2 a été utilisé pour les prochaines simulations.

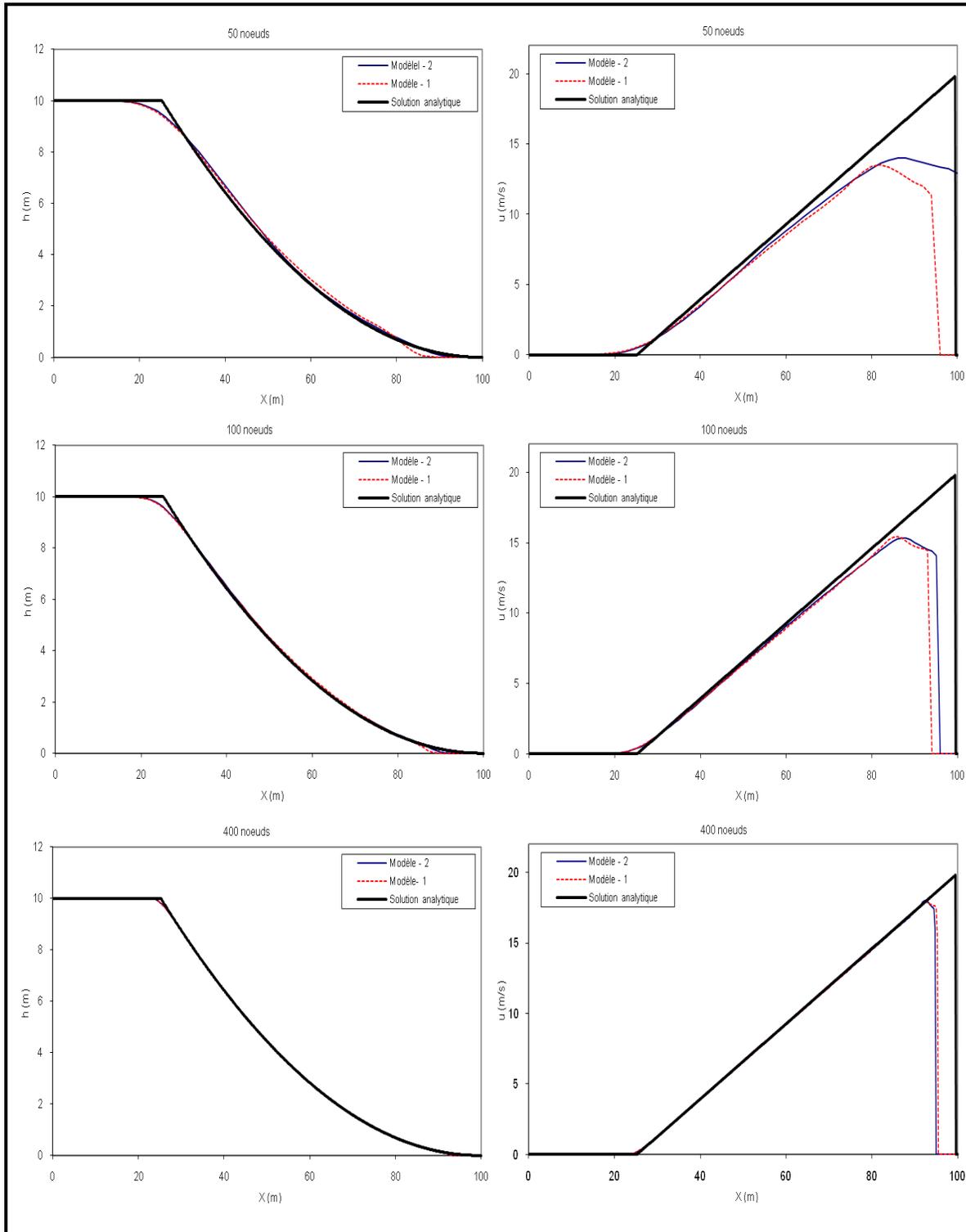


Figure 3.5 Écoulement de rupture de barrage sur lit sec
Analyse de la sensibilité au maillage des modèles 1 et 2, hauteurs d'eau prédites à $t=2,5$ s

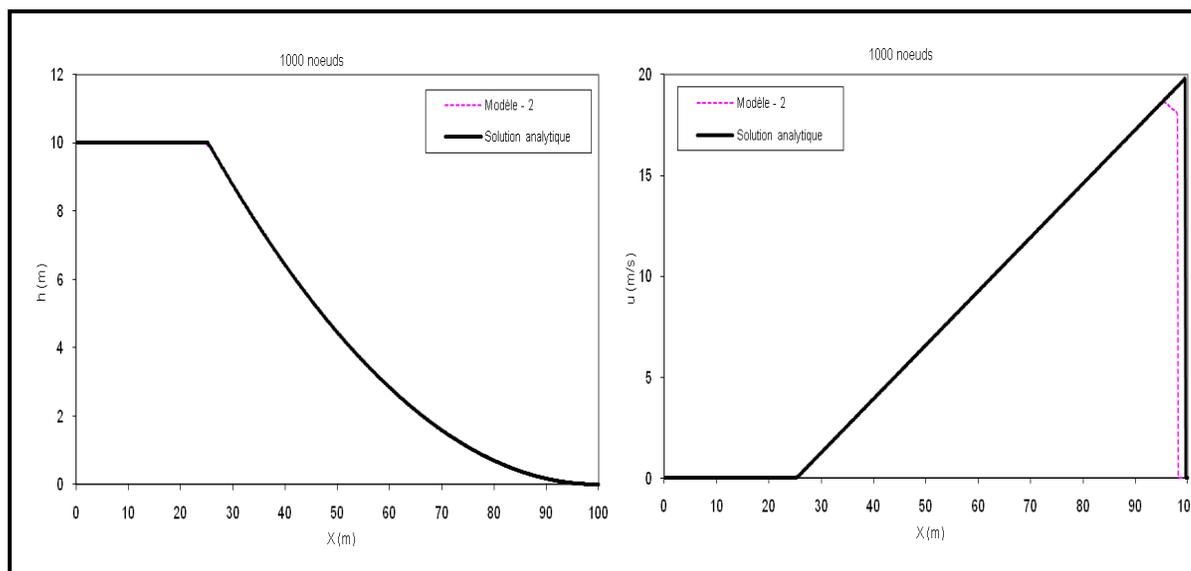


Figure 3.6 Écoulement de rupture de barrage sur lit sec
Prédictions numériques de la surface libre et de la vitesse comparées aux solutions
à $t = 2,5$ s

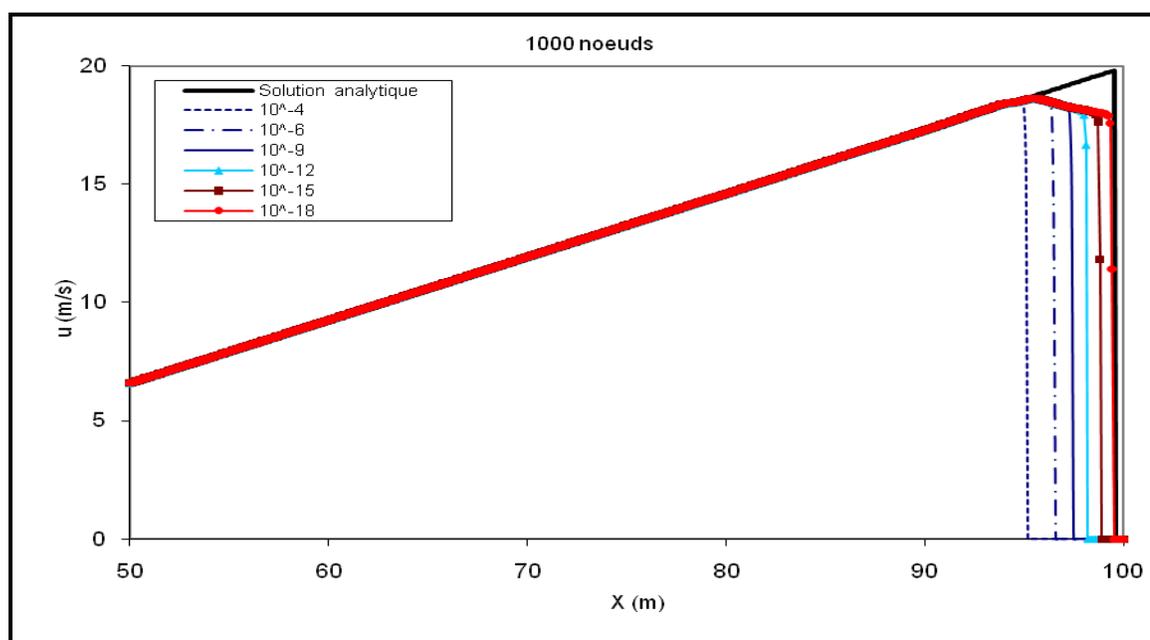


Figure 3.7 Écoulement de rupture de barrage sur lit sec
Sensibilité de la prédiction de la vitesse à la valeur limite de la hauteur d'eau ε

Tableau 3.2 Écoulement de rupture de barrage sur lit sec
Erreurs relatives selon la norme L^2 en fonction de la réduction
de la valeur limite de la hauteur d'eau ε

| | $E_{L^2}(\mathbf{h}) \times 10^{-5}$ | $E_{L^2}(\mathbf{u}) \times 10^{-2}$ |
|----------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $\varepsilon = 10^{-4} m$ | 7,26494 | 1,73317 |
| $\varepsilon = 10^{-6} m$ | 7,11837 | 1,44698 |
| $\varepsilon = 10^{-9} m$ | 7,10515 | 1,21796 |
| $\varepsilon = 10^{-12} m$ | 7,13318 | 0,99982 |
| $\varepsilon = 10^{-15} m$ | 7,09777 | 0,72075 |
| $\varepsilon = 10^{-18} m$ | 7,09768 | 0,30728 |

3.2.3 Test-2 de CADAM

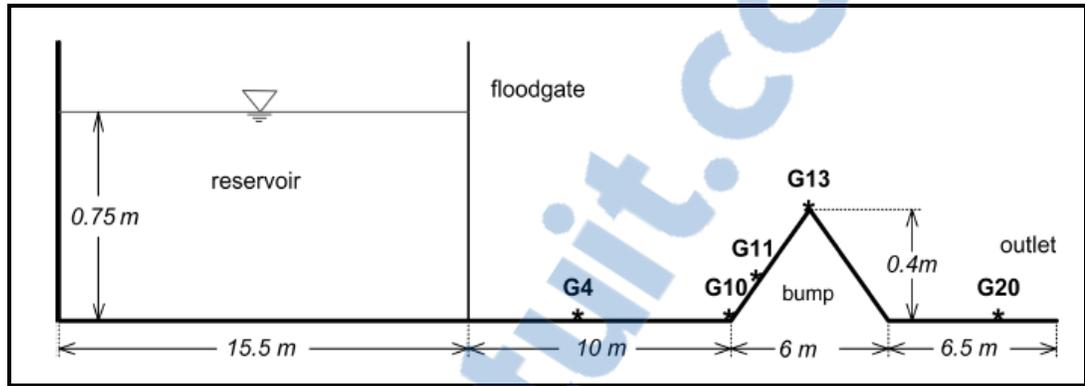


Figure 3.8 CADAM Test 2. Réservoir et canal avec obstacle triangulaire
Tirée de Loukili et Soulimani (2007, p. 82)

Le présent test est une proposition du CADAM (concerted action on dam-break modeling), lors de ses premières assises du 2 au 4 mars 1998 à Wallingford UK (Alcrudo et Frazão, 1999). L'objectif était d'évaluer la capacité des modèles numériques à simuler correctement des écoulements présentant des caractéristiques d'écoulements réels. Ce test a été expérimenté dans le Laboratoire de Recherches Hydrauliques de Châtelet à l'Université Libre de Bruxelles par l'équipe du professeur JM Hiver.

La simulation porte sur une rupture de barrage avec un obstacle symétrique coudé dans le canal. Les caractéristiques géométriques du domaine sont données à la figure 3.8. On considère initialement un réservoir d'eau à une hauteur de 0,75 m et un canal rectangulaire asséché. L'obstacle situé à 10 m de l'entrée du canal est triangulaire avec une pente de $7,59^\circ$. La friction est calculée pour une valeur de $n = 0,0125 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ du coefficient de rugosité de Manning. Les frontières sont des murs hormis la sortie du canal. Des jauges sont fixées comme l'indique la figure 3.8 pour la mesure de la hauteur d'eau à des intervalles de temps de 0,1 s.

Les tests numériques ont été effectués avec un maillage structuré de 12000 éléments triangulaires et les paramètres $\alpha = 1$, $CLF = 0,9$. Afin de vérifier la *C-property*, deux problèmes préliminaires ont été simulés en imposant une vitesse nulle, des hauteurs d'eau respectives de 0,3 m et 0,5 m dans tout le domaine et une condition de mur à la sortie du canal. Le modèle numérique n'a généré aucune vitesse et le niveau d'eau est resté toujours constant (Figure 3.9).

Le test de CADAM a été ensuite simulé et les prédictions numériques sont présentées à plusieurs instants successifs à la rupture du barrage. La figure 3.10 montre les prédictions de la surface libre comparées à celles de Castro et al.(2006) et aux données expérimentales du Laboratoire de Recherches Hydrauliques de Châtelet. Les résultats numériques obtenus cadrent en général avec l'esprit du test. Le modèle en effet propage l'onde le long du réservoir, inonde l'obstacle coudé et produit les interactions ultérieures attendues entre les ondes de choc et de raréfaction.

A la figure 3.11, les prédictions relatives aux jauges G4 et G10 situées avant le coude indiquent une assez bonne estimation du temps d'arrivée de l'onde alors que la jauge G11 présente une simulation satisfaisante des bancs couvrants et découvrants. Les jauges G13 et G20 montrent respectivement une sous-estimation et une surestimation du niveau d'eau comparées aux mesures expérimentales. Les erreurs relatives entre les prédictions et les données expérimentales du Professeur Hiver (obtenues avec une précision de reproductivité de plus de 5%) n'excèdent pas 4%. La conservation globale de la masse a été vérifiée durant la simulation. A cet effet, le volume total d'eau prédit est calculé selon la relation :

$$Vol_{\Omega}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_i |K_i| h_i^k \quad (3.2)$$

Le volume d'eau à l'intérieur du domaine résulte de volume initial Vol_{Ω}^{init} , du débit et des conditions de sortie :

$$\tilde{V}_{\Omega}^{n+1} = Vol_{\Omega}^{init} + \sum_{k=1}^{n+1} (Vol_{inflow}^k - Vol_{outflow}^k) \quad (3.3)$$

Par conséquent, les erreurs relatives à la conservation de la masse peuvent être calculées selon les relations :

$$Mass_{error}^{n+1} = Vol_{\Omega}^{n+1} - \tilde{V}_{\Omega}^{n+1} \quad (3.4)$$

$$\%Mass_{error}^{n+1} = 100 \times \frac{Vol_{\Omega}^{n+1} - \tilde{V}_{\Omega}^{n+1}}{\tilde{V}_{\Omega}^{n+1}} \quad (3.5)$$

Dans le cas du test de CADAM, il n'y a aucun débit. Les erreurs relatives à la conservation de la masse sont calculées pour 40 s à partir du volume d'eau initial et la condition de sortie et vérifient $|Mass_{error}^{n+1}| < 6 \times 10^{-13} \text{ m}^3$ et $|\%Mass_{error}^{n+1}| < 4 \times 10^{-12} \%$.

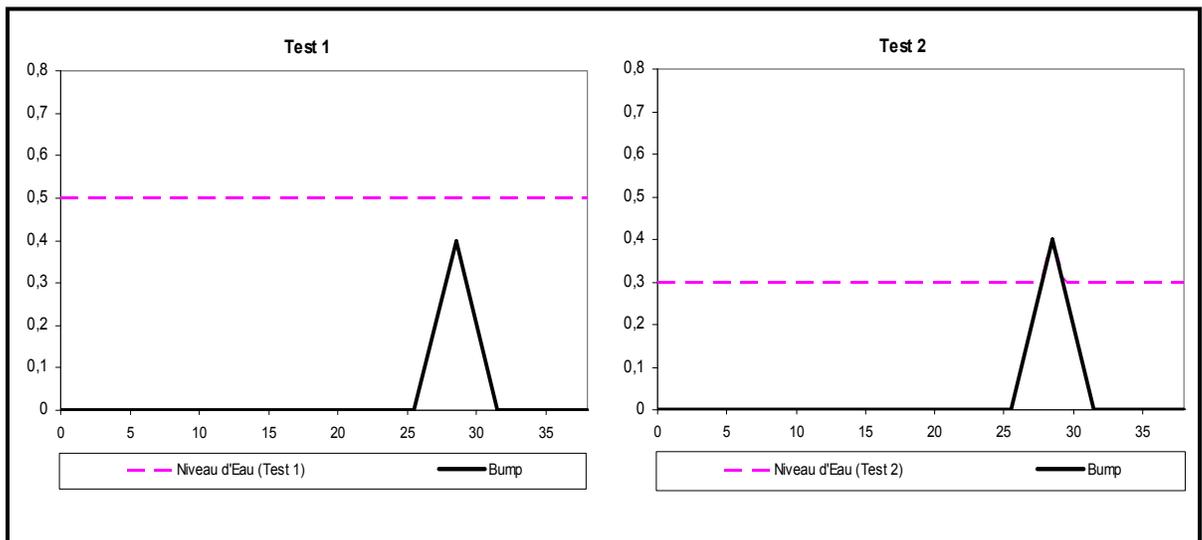


Figure 3.9 CADAM Test 2

Plans d'eau pour les tests 1 et 2 relatifs à la vérification de la *C-property*

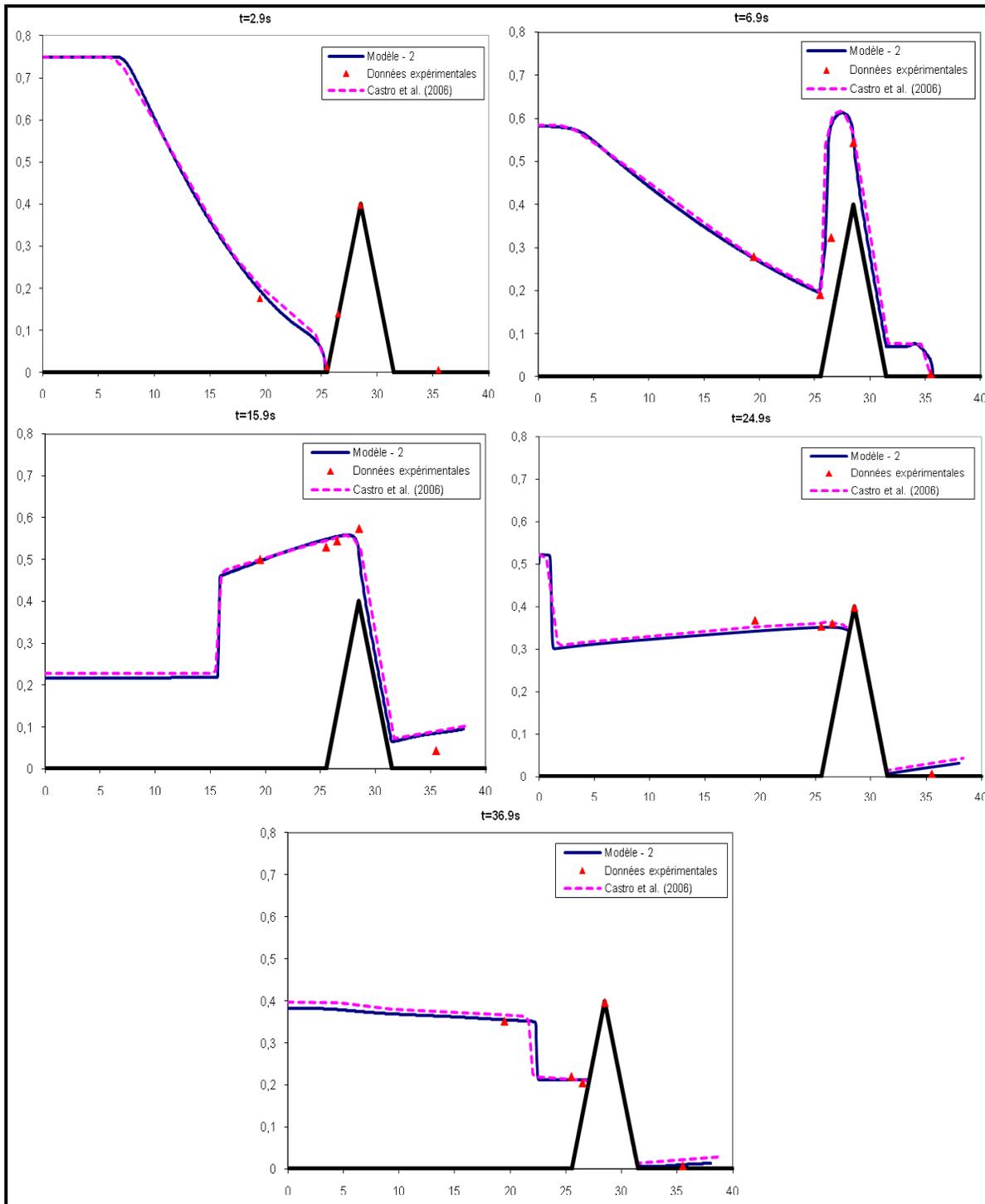


Figure 3.10 CADAM Test 2
 Prédictions de la surface libre à différents instants comparées
 aux données expérimentales et aux prédictions de Castro et al. (2006)

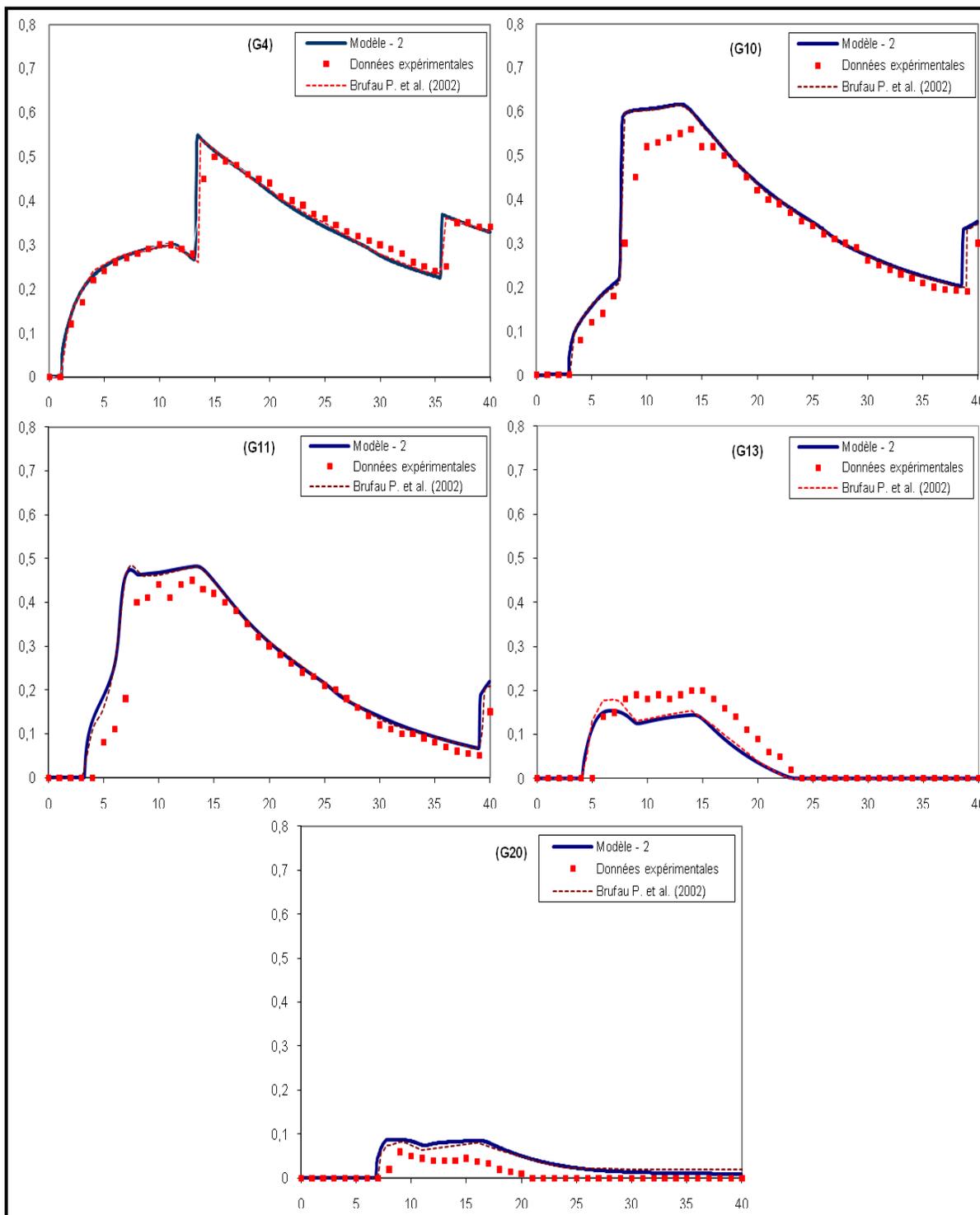


Figure 3.11 CADAM Test 2

Hauteurs d'eau prédites comparées aux données expérimentales enregistrées par les jauges G4, G10, G11, G13 et G20 et aux résultats de Brufau et al., (2002)

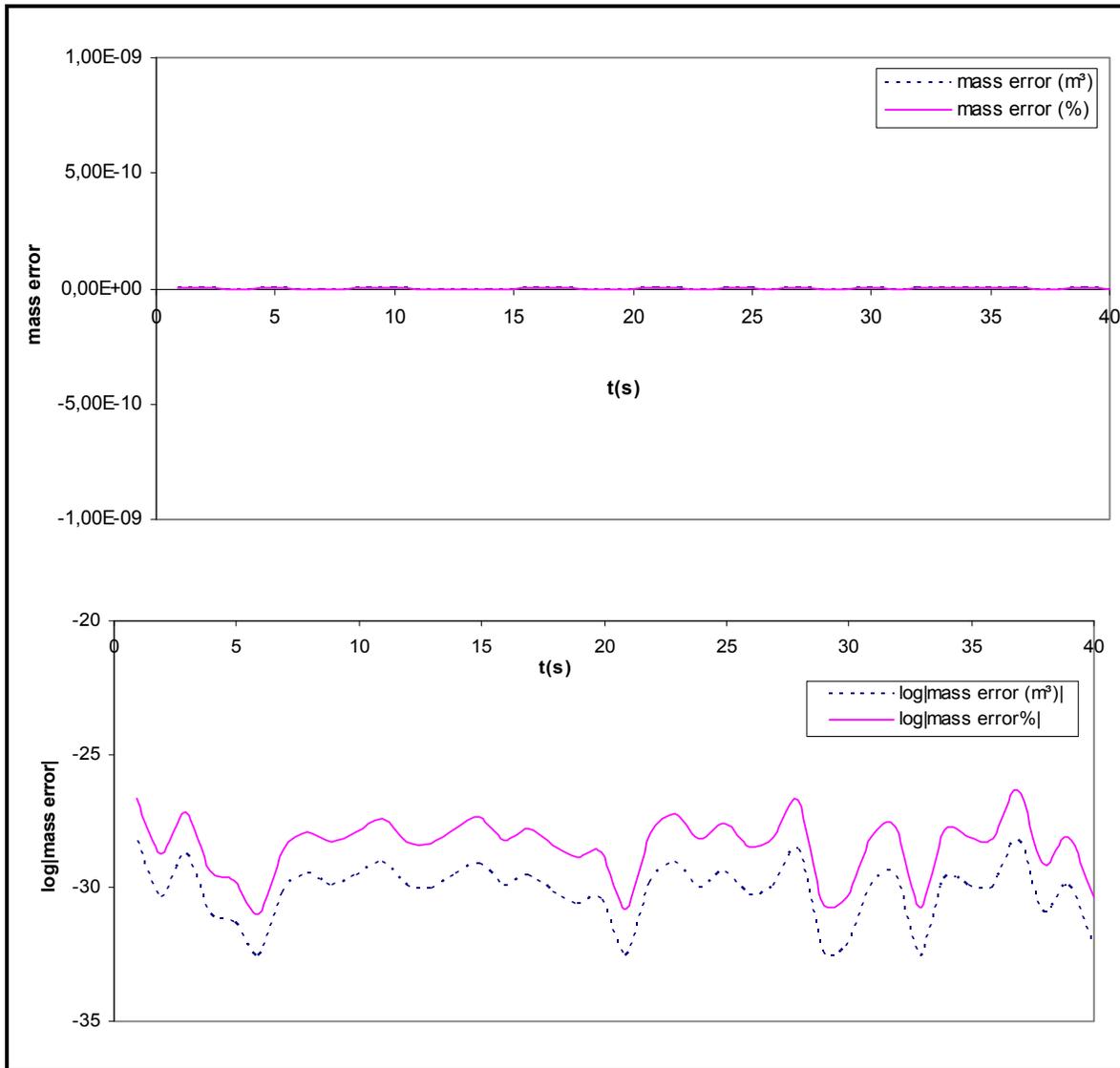


Figure 3.12 CADAM test 2
Évolution des erreurs relatives à la masse

3.3 Test de vidange avec onde double de raréfaction

Ce test a été initialement proposé par Toro (2001) et vise à simuler la vidange d'un canal rectangulaire ($25 \times 1 \text{ m}^2$) présentant les états initiaux et la bathymétrie suivants :

$$\begin{aligned} hu(x, y, 0) &= \begin{cases} 350 & \text{pour } x > 50/3 \\ -350 & \text{pour } x < 50/3 \end{cases} \\ \eta(x, y, 0) &= 10 \text{ m} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Galloüet et al.(2003) ont introduit la singularité bathymétrique suivante :

$$z_b(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 25/3 < x < 50/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.7)$$

Les positions $y = 0$ et $y = 1 \text{ m}$ correspondent aux frontières solides et les positions $x = 0$ et $x = 25 \text{ m}$, aux sorties de fluide.

Les prédictions numériques ont été obtenues pour un maillage de 3900 triangles et un temps de simulation de $T_s = 0,25 \text{ s}$. Les conditions initiales imposent un écoulement supercritique avec un nombre de Froude de $F_r = u / \sqrt{gh} = \pm 35 / \sqrt{0,9 \times 10} = \pm 3,53$ de part et d'autre de la position $x = 50/3 \text{ m}$, générant deux ondes de raréfaction et une vidange progressive du réservoir. La présence du fond surélevé provoque la naissance d'une onde de choc. La figure 3.13 compare les surfaces libres prédites par le présent modèle et celui de Díaz et al (2008). Les prédictions des niveaux d'eau et débits unitaires (hu) sont données à la figure 3.14 aux instants $t = 0,05 \text{ s}$, $t = 0,25 \text{ s}$, $t = 0,45 \text{ s}$, $t = 0,65 \text{ s}$. La figure 3.15 montre clairement que les vitesses s'annulent avec l'exondation. Les erreurs relatives à la conservation restent par ailleurs très faibles et vérifient $|Mass_{error}^{n+1}| < 2 \times 10^{-12} \text{ m}^3$ et $|\%Mass_{error}^{n+1}| < 5 \times 10^{-11} \%$.

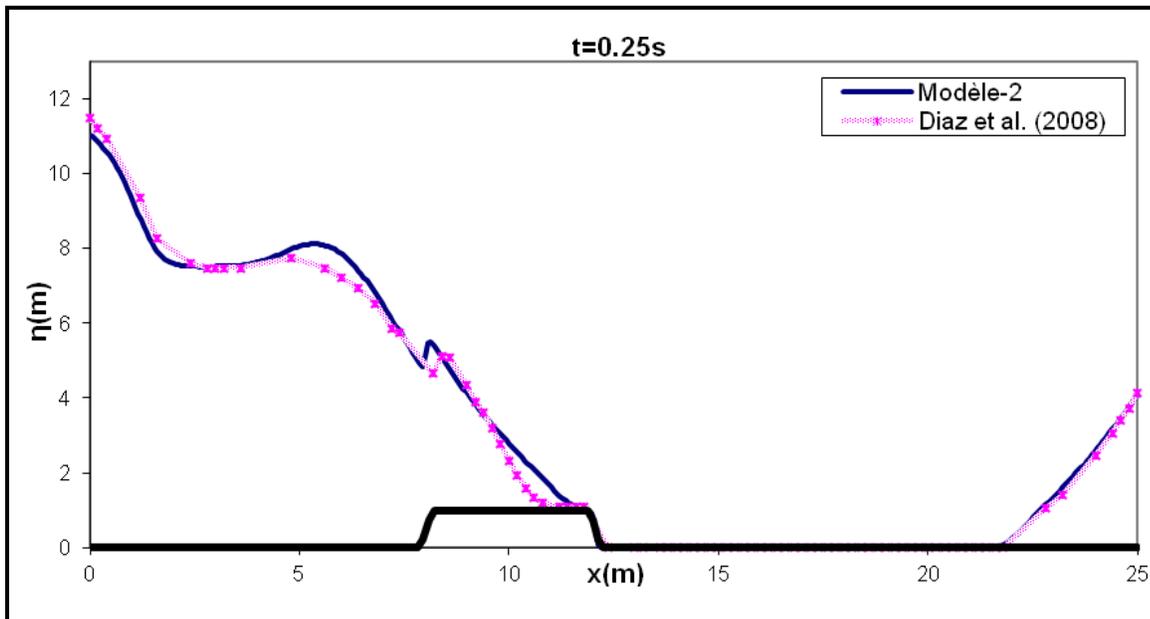


Figure 3.13 Vidange avec onde double
Prédictions comparées de la surface libre

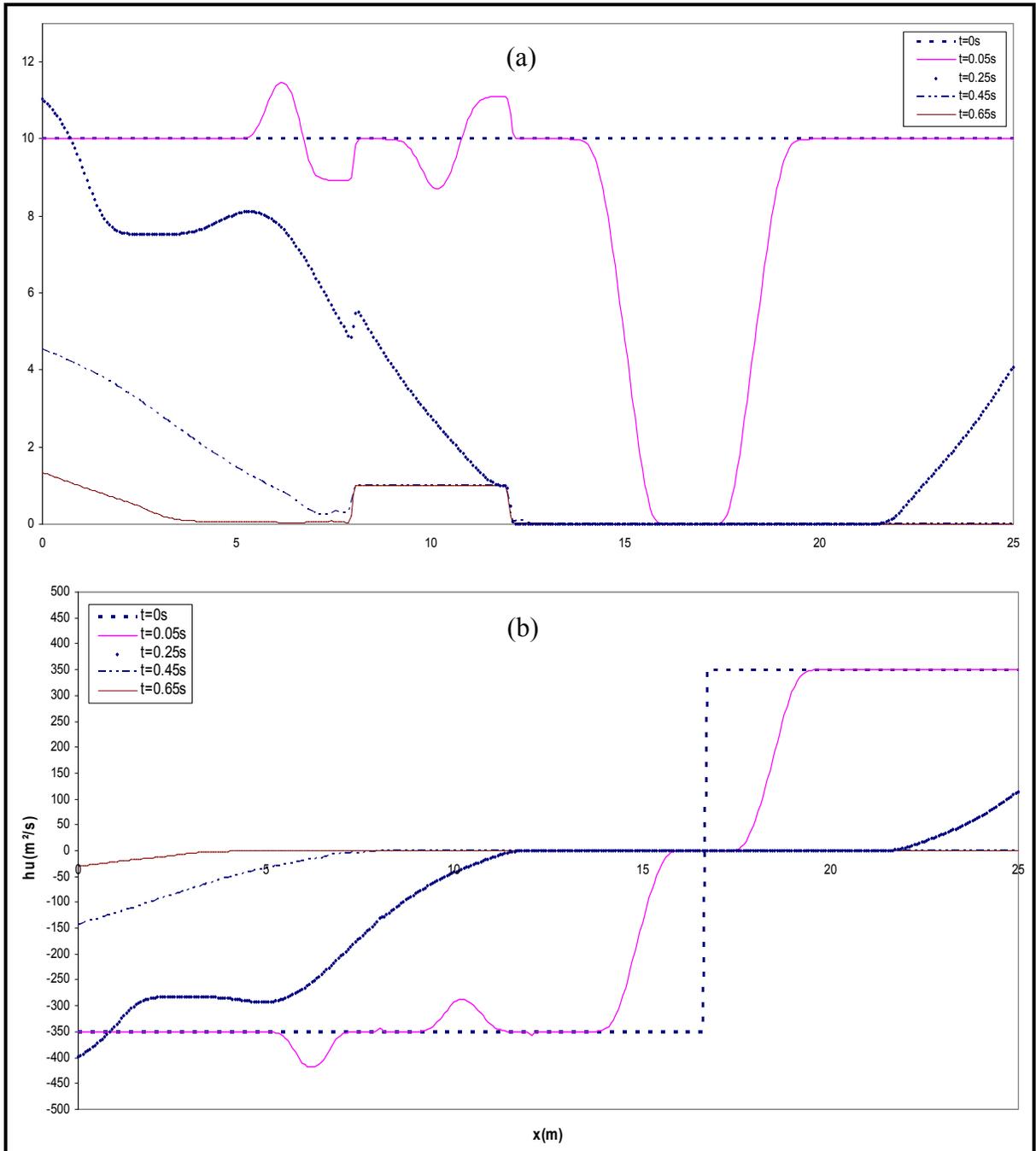


Figure 3.14 Vidange avec onde double
Prédictions des niveaux d'eau (a) et débits unitaires (b) à différents instants

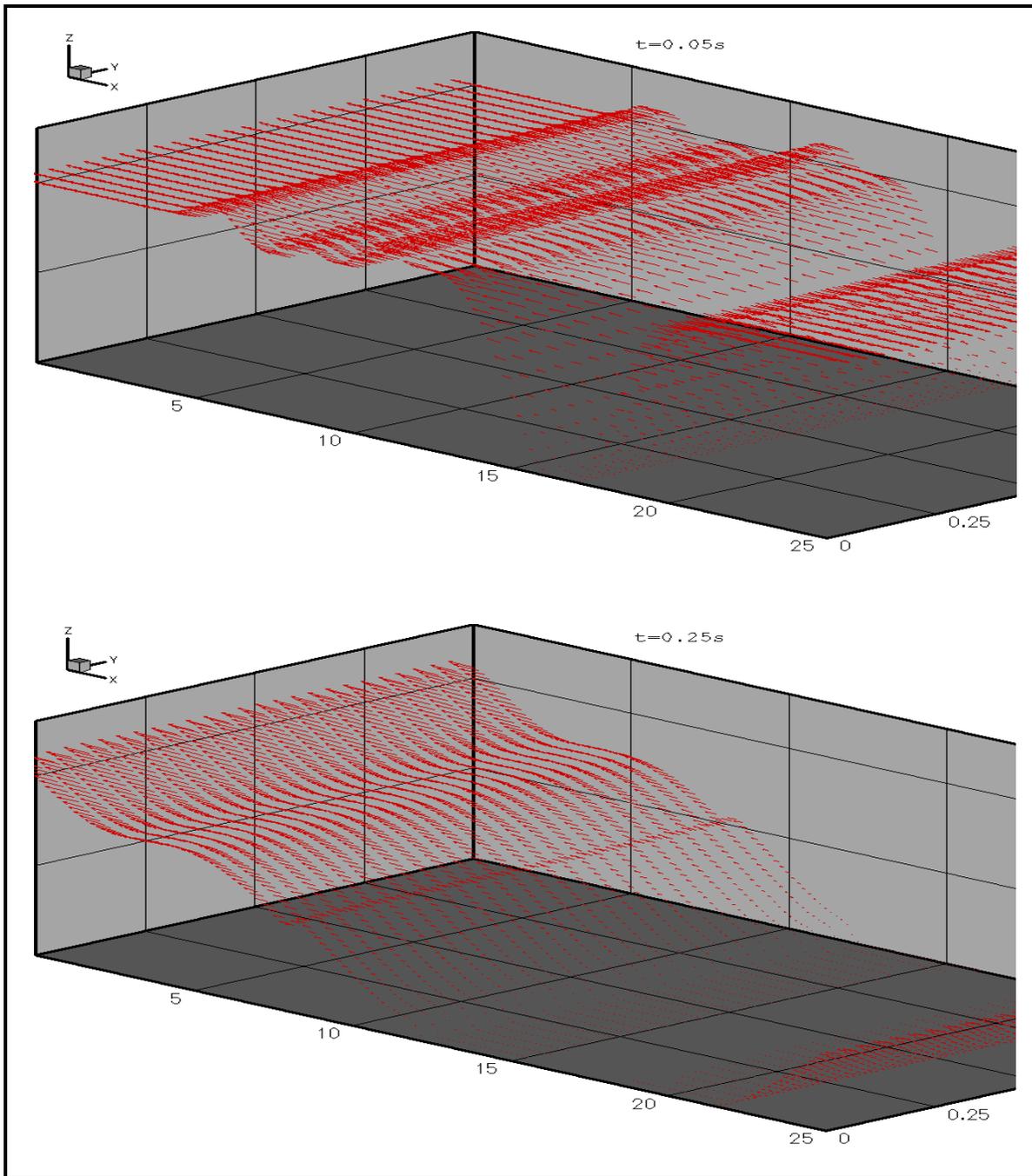


Figure 3.15 Vidange avec onde double
Champs de vitesse dans le canal après 0,05 s et 0,25 s

3.4 Bassin à pente variable soumis à une marée

Ce test introduit par Leclerc et al. (1990) simule l'influence d'une marée sur un bassin rectangulaire de dimensions $500 \times 25 \text{ m}^2$ à pente variable. La hauteur d'eau est fixée initialement à $\eta = 1,75 \text{ m}$ et un niveau d'eau fluctuant est imposé à l'entrée ($x = 500 \text{ m}$) selon l'expression suivante :

$$\eta(500, t) = 1 + 0,75 \cos\left(2\pi \frac{t}{3600}\right) \quad (3.8)$$

Toutes les autres frontières sont soumises à des conditions de mur. Les simulations ont été réalisées avec un pas de discrétisation en espace égal à $\Delta x = \Delta y = 5 \text{ m}$ et un coefficient de friction de Manning $n = 0,03 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$.

Les résultats sont comparés à ceux de Brufau et al. (2002) et Heniche et al. (2000) qui ont utilisé respectivement les volumes finis et les éléments finis. A la figure 3.16 à $t = 36 \text{ mn}$, on observe l'assèchement de la partie avale du canal dû au reflux de l'eau. Le flux augmente ensuite jusqu'à inonder complètement le canal à $t = 54 \text{ mn}$. Les résultats comparés décrivent des prédictions relativement semblables. On remarque cependant une surestimation du niveau d'eau pour le modèle proposé à $t = 36 \text{ mn}$ et $t = 48 \text{ mn}$ avec une onde entamant la deuxième et la dernière pente respectivement. Ceci met en évidence l'influence du traitement numérique à l'interface humide/sec. En effet, dans Brufau et al. (2002), la vitesse est systématiquement annulée à l'interface afin d'éviter une avancée trop rapide du front d'eau sur la pente. Dans Heniche et al (2000), la hauteur d'eau est fixée à une valeur limite ($H_{\min} = 5.10^{-2} \text{ m}$) avec des traitements spécifiques de sorte à stabiliser la solution. Cette dernière approche conduit à une surestimation de la position du front d'eau relativement à celle proposée par Brufau et al. (2002) et le modèle-2. La figure 3.17 montre l'évolution du débit unitaire (hu) et la vitesse à différents instants. Les erreurs relatives à la masse restent toujours assez faibles : $|Mass_{error}^{n+1}| < 8 \times 10^{-11} \text{ m}^3$ et $|\%Mass_{error}^{n+1}| < 6 \times 10^{-12} \%$.

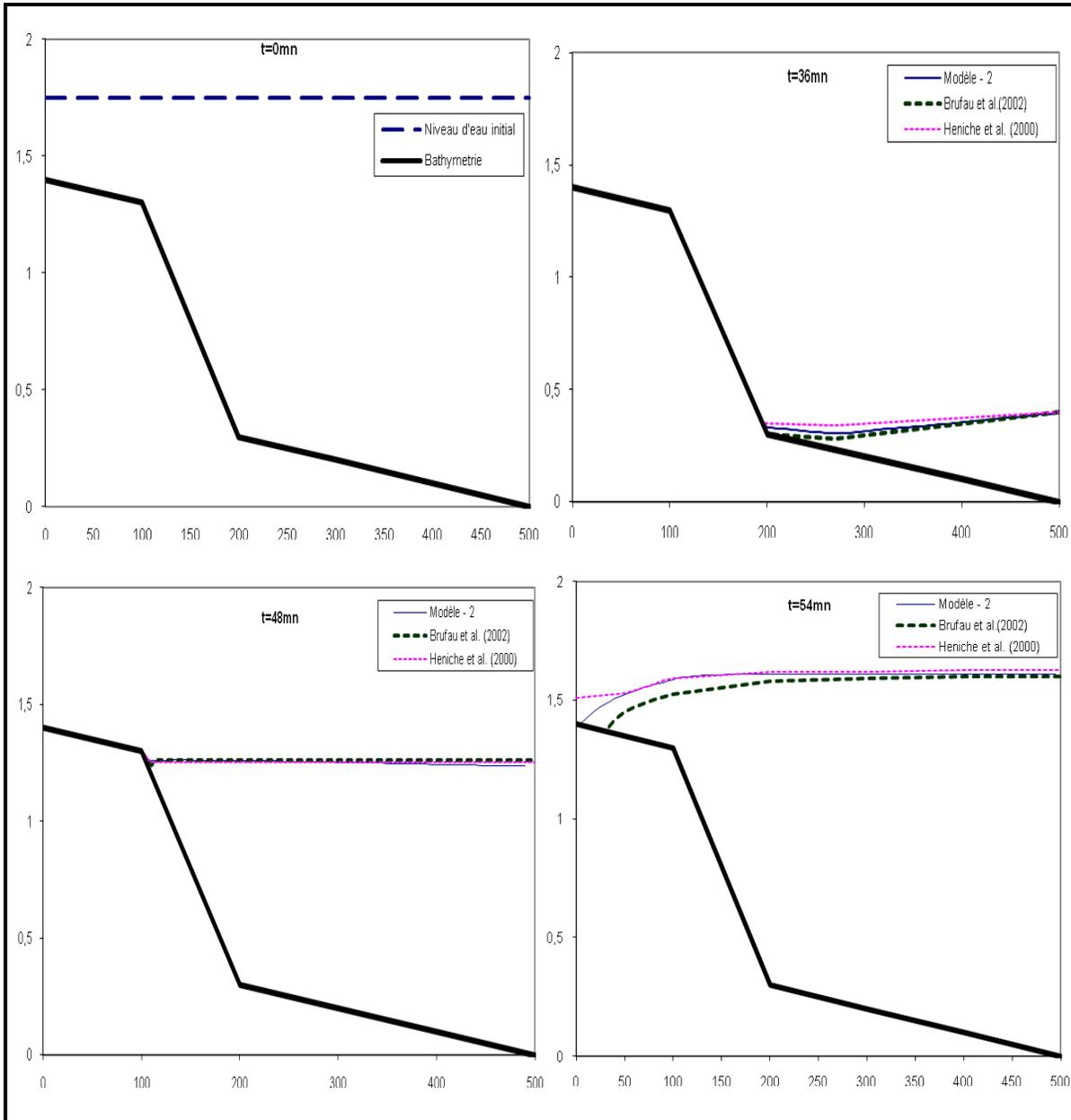


Figure 3.16 Bassin soumis à une marée
Prédictions comparées de la surface libre à différents instants

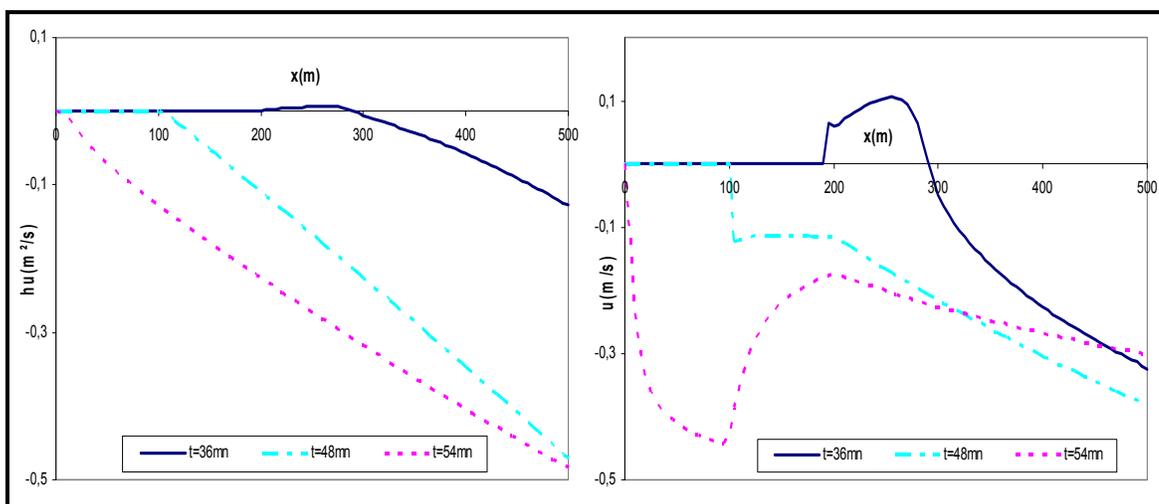


Figure 3.17 Bassin soumis à une marée
Prédictions du débit unitaire (à gauche) et de la vitesse (à droite) à différents instants

3.5 Simulation d'un cas réel de bathymétrie

3.5.1 L'estacade de Bordeaux (Laval)

L'estacade de Bordeaux est une portion de la rivière des Prairies située à proximité de la ville de Laval (Québec). Le domaine a fait l'objet de quelques travaux dont ceux de (Loukili et Soulaïmani, 2007). Les données relatives à la bathymétrie (Figure 3.18) et au maillage non-structuré (Annexe III, pp. 180) ont été fournies par Hydro-Québec. Le maillage est constitué de 25976 éléments triangulaires et de 13217 nœuds pour un domaine couvrant approximativement $720 \times 400 \text{ m}^2$. Les simulations sont effectuées avec $\varepsilon = 10^{-6} \text{ m}$ et un coefficient de Manning fixé à $n = 0,03 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$.

3.5.2 Vérification des propriétés de conservation

Afin de vérifier la C-property, des conditions de mur ont été imposées à toutes les frontières. Un plan d'eau fixé à $\eta_0 = 16 \text{ m}$ a été considéré de sorte à créer des zones sèches à l'intérieur du domaine. Les simulations n'ont généré aucune vitesse et le plan d'eau statique a été conservé. Pour la vérification de la conservation du volume d'eau, une rupture d'un barrage fictif situé à la position $x = 601000 \text{ m}$ a été simulée. Pour un niveau d'eau fixé à $\eta_0 = 19 \text{ m}$, le volume total d'eau dans le réservoir était de $378\,991,133 \text{ m}^3$. Les erreurs relatives à la masse sont restées quasiment nulles avec $|Mass_{error}^{n+1}| < 4,1 \times 10^{-9} \text{ m}^3$ et $|\%Mass_{error}^{n+1}| < 8,1 \times 10^{-13} \%$ (Figure 3.19).

3.5.3 Simulation des bancs couvrants et découvrants

La dernière étape a consisté en la simulation des bancs couvrants et découvrants dans la rivière. Pour ce faire, dans un premier temps, afin d'obtenir un régime permanent, le niveau d'eau a été fixé à $\eta_0 = 16 \text{ m}$ et les frontières d'entrée et de sortie soumises aux conditions :

$$\begin{cases} Q_{\text{inflow}} = 1000 \text{ m}^3/\text{s} \\ \eta_{\text{outlet}} = \eta_0, \quad \text{si } (\vec{u} \cdot \vec{n})_{\text{outlet}} > 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Le régime permanent a été atteint avec un niveau d'eau moyen égal à $\bar{\eta}_1 = 16,34 \text{ m}$. A partir de cette solution, de nouvelles conditions aux limites ont été imposées avec un débit fluctuant selon la relation :

$$\begin{cases} Q_{\text{inflow}}(t) = Q_0 - Q_{\text{max}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ F_r < 1 \Rightarrow \eta_{\text{outlet}} = \eta_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

La condition de relaxation basée sur le calcul du nombre de Froude imposée à la sortie s'est avérée déterminante dans l'obtention des résultats escomptés. Le débit d'entrée fluctuant énormément en plus de la grande variabilité de la géométrie à la sortie de la prairie, l'écoulement peut y devenir assez complexe. Il convenait donc d'imposer une condition de sortie relative au régime d'écoulement.

Les simulations ont été faites pour une amplitude maximale $Q_{\text{max}} = 900 \text{ m}^3/\text{s}$, une période $T_s = 3600 \text{ s}$ pour une durée totale de 10800 s. Dans une première phase, on observe une baisse progressive du niveau d'eau jusqu'à un niveau moyen de 15,5 m après 1200 s. Il apparaît alors des zones sèches avec de petites îles éparses dans la prairie. C'est l'exondation due à la baisse du débit d'entrée. Le niveau d'eau monte ensuite progressivement avec l'arrivée d'une onde due à l'augmentation du débit. Les zones tantôt asséchées sont inondées et le niveau d'eau moyen atteint 16,6 m après 2700 s. La prairie présente alors pour seules zones sèches une île au sud-est et les berges hautes. Le processus se reproduit cycliquement jusqu'au bout de la simulation (Annexe IV, pp. 181).

Les phases extrêmes de l'évolution des bancs couvrants-découvrants sont décrites par les figures 3.20-3.25. Les figures 3.20 et 3.21 présentent le champ de vitesse et montrent que les vitesses s'annulent avec l'exondation et l'apparition de zones sèches. A la figure 3.22, les lignes de courant contournent les zones sèches pendant l'exondation et reviennent couvrir tout le domaine durant l'inondation. Les lignes de contour décrivant les hauteurs et niveaux d'eau pour les valeurs moyennes observées sont représentées sur les figures 3.23 et 3.24. Une vue 3-D des phases extrêmes de la propagation des bancs couvrants-découvrants dans cette portion de la rivière est présentée à la figure 3.25.

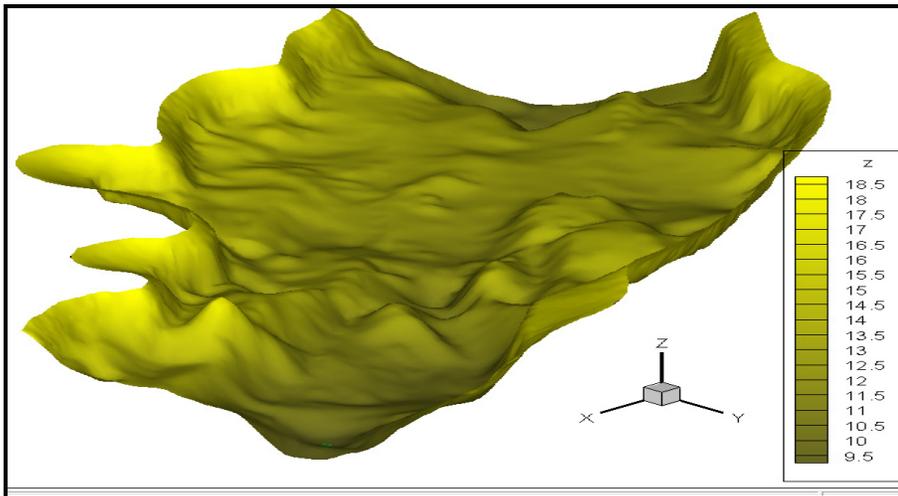


Figure 3.18 Bathymétrie de la portion de la rivière des Prairies

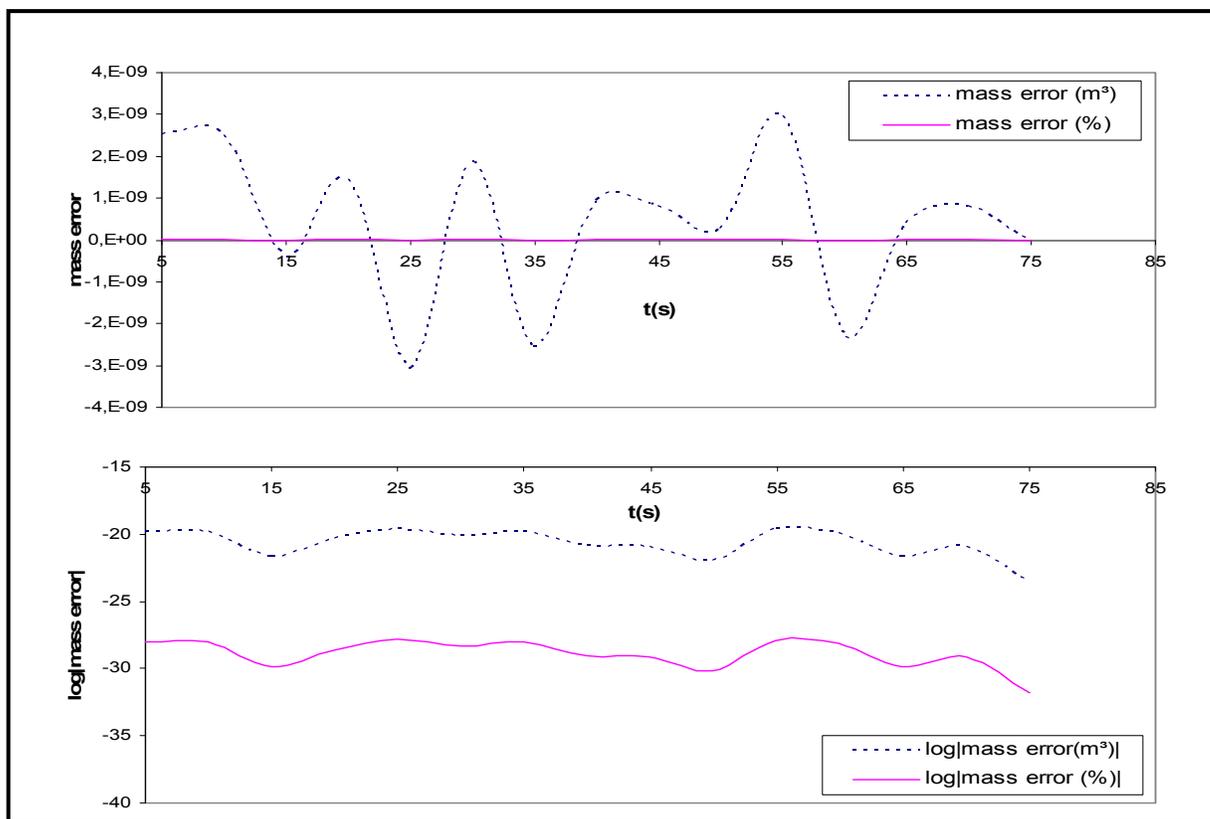


Figure 3.19 Rivière des Prairies
Erreurs relatives à la conservation de la masse pour le test de rupture de barrage

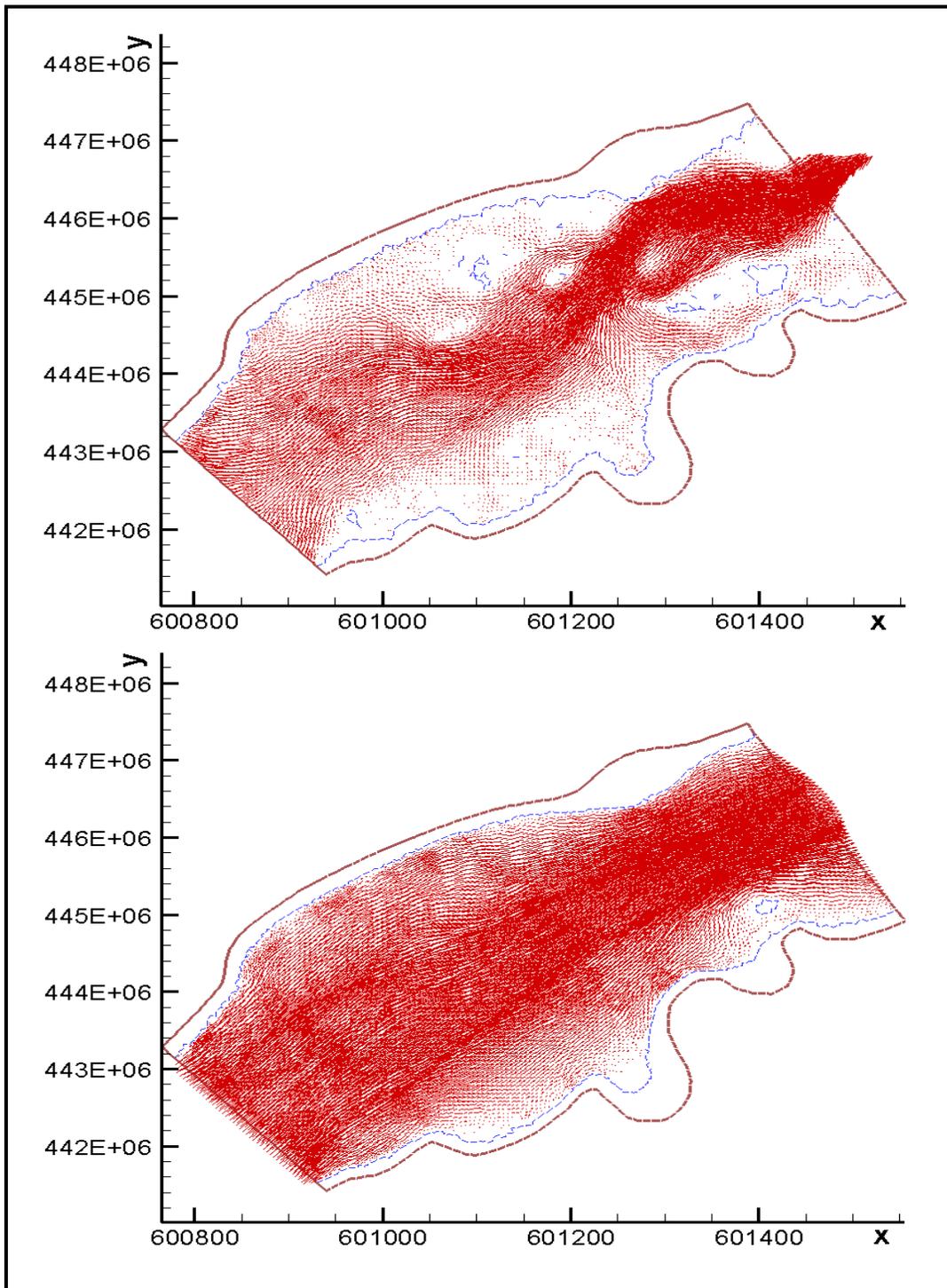


Figure 3.20 Rivière des Prairies
Champ de vitesses dans la prairie asséchée et inondée
par une fluctuation extrême du débit d'entrée après 1200 s et 2700 s

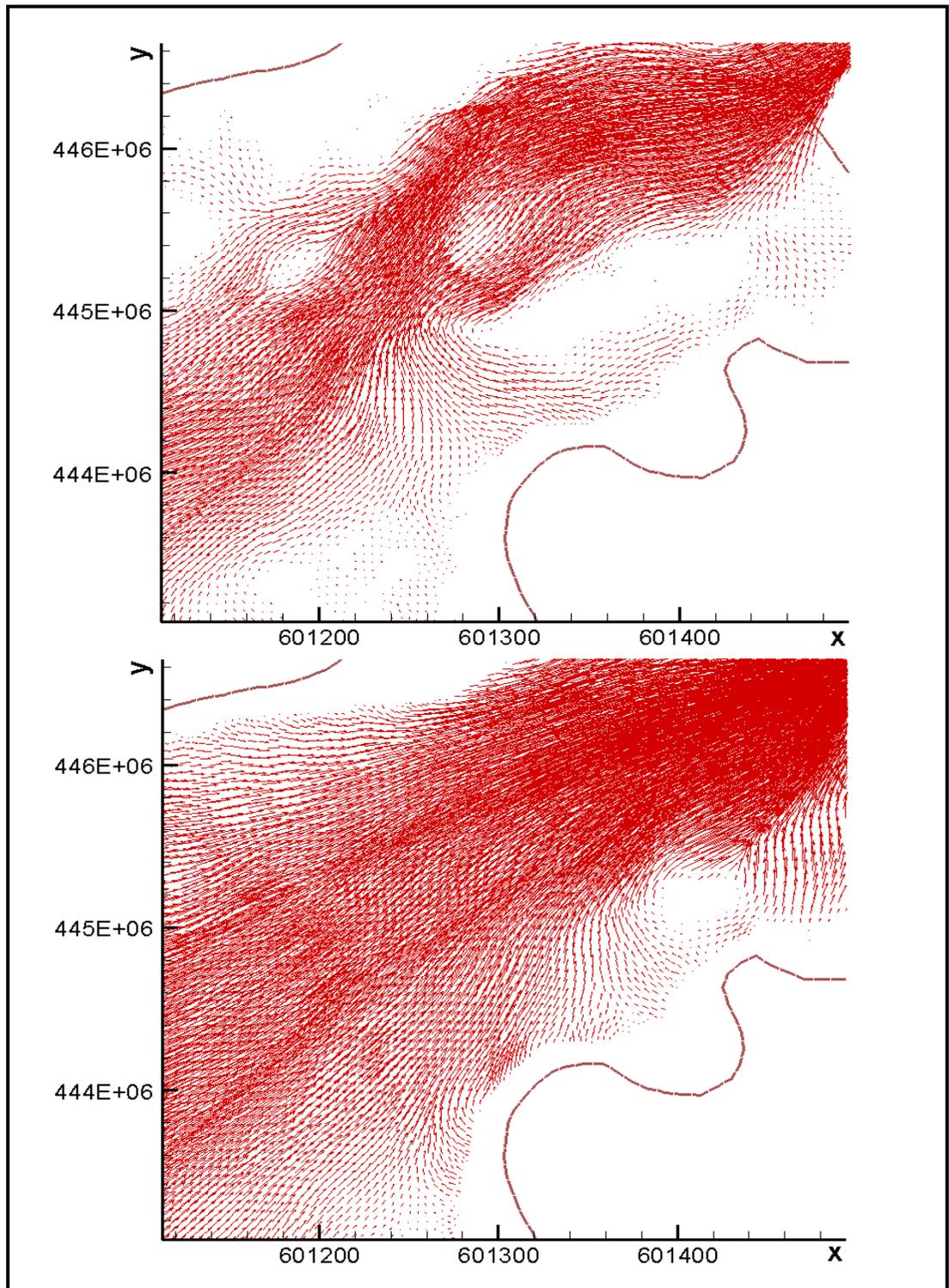


Figure 3.21 Rivière des Prairies
Zoom sur le champ de vitesses proche de la sortie de la prairie
aux instants $t=1200$ s et $t=2700$ s

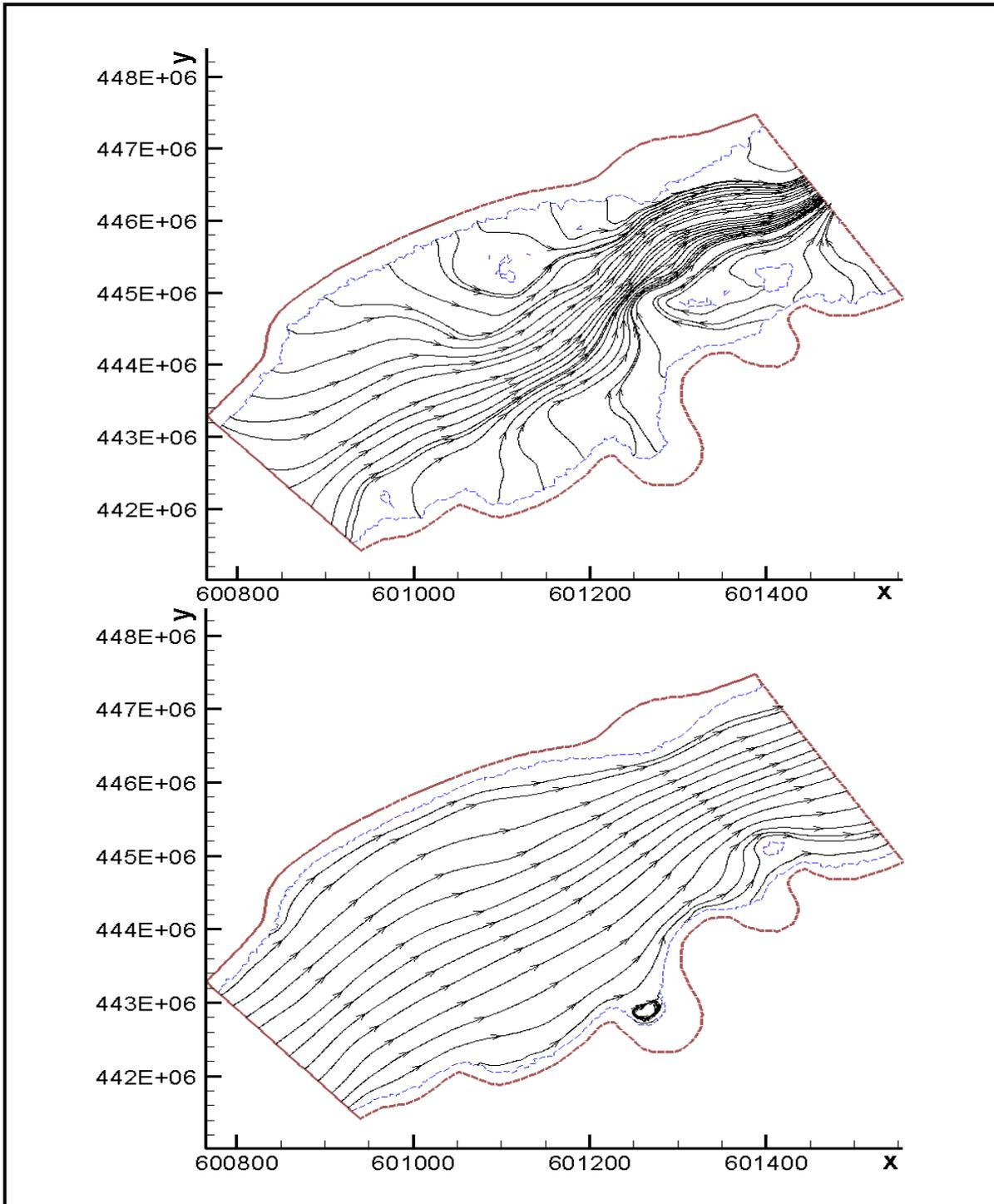


Figure 3.22 Rivière des Prairies

Lignes de courant lors des bancs couvrants et découvrants aux instants $t=1200$ s et $t=2700$ s

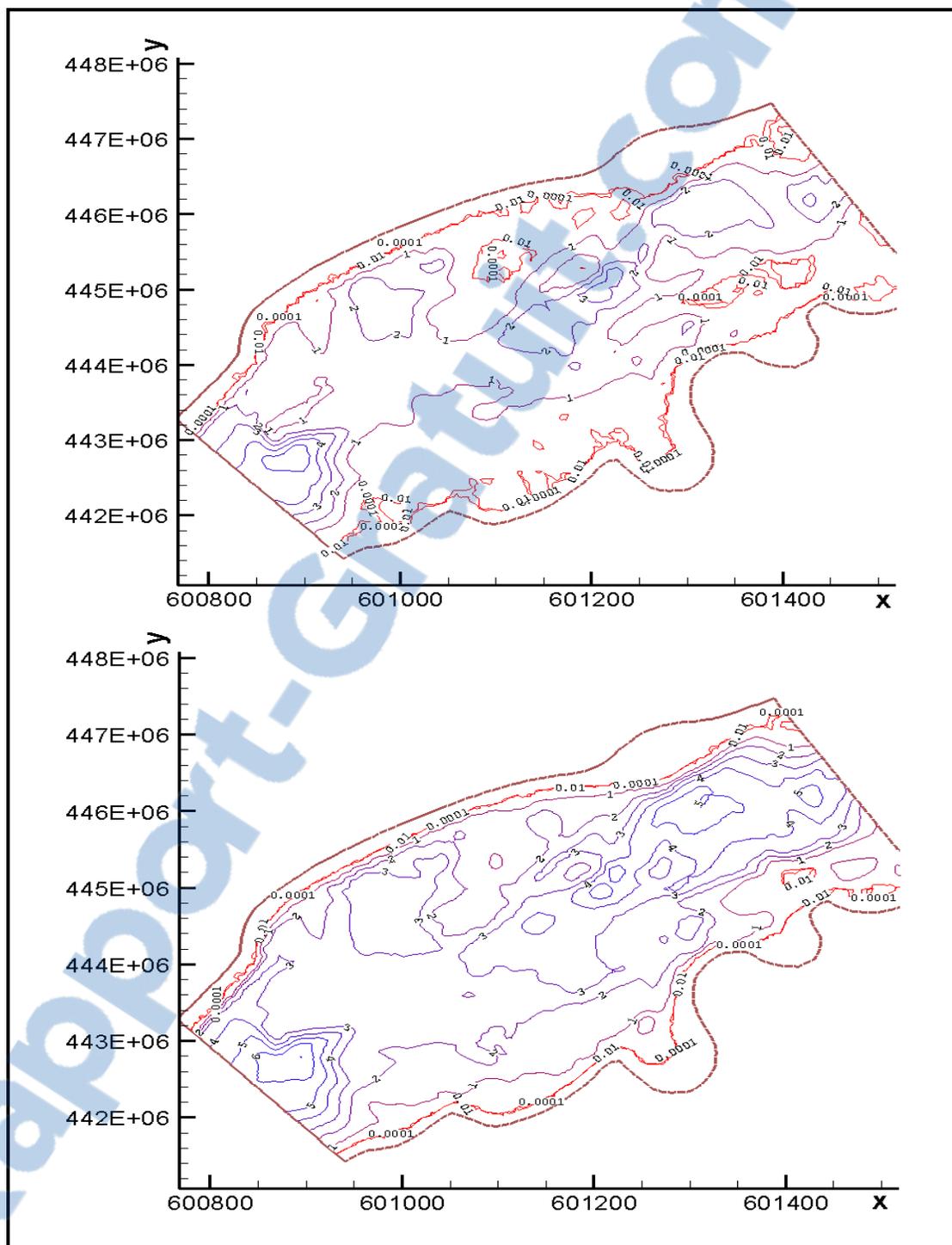


Figure 3.23 Rivière des Prairies
Lignes de contour des hauteurs lors des bancs couvrants et découvrants
aux instants $t=1200$ s et $t=2700$ s

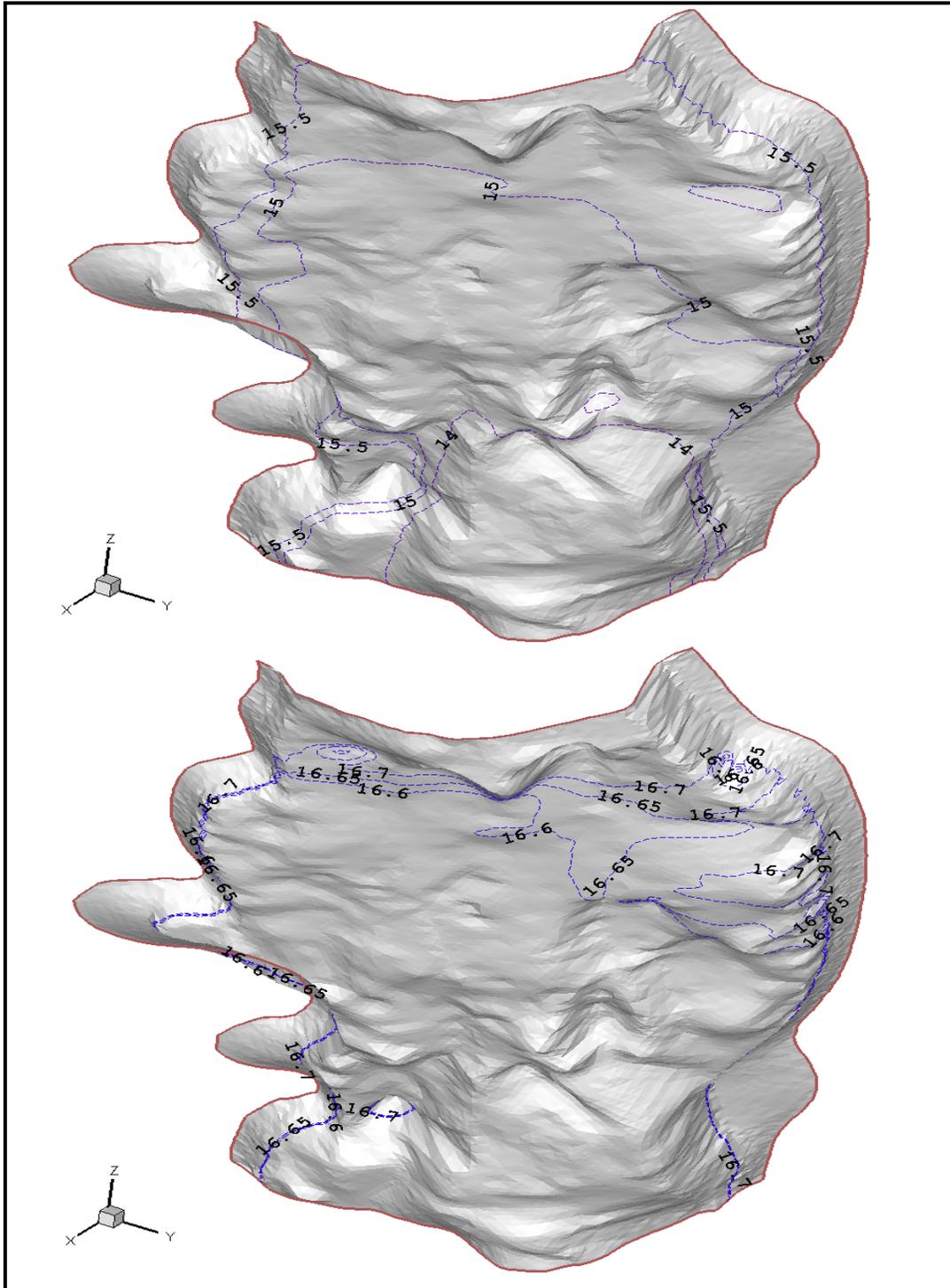


Figure 3.24 Rivière des Prairies
Lignes de contour des niveaux lors des bancs couvrants et découvrants
aux instants $t=1200$ s et $t=2700$ s

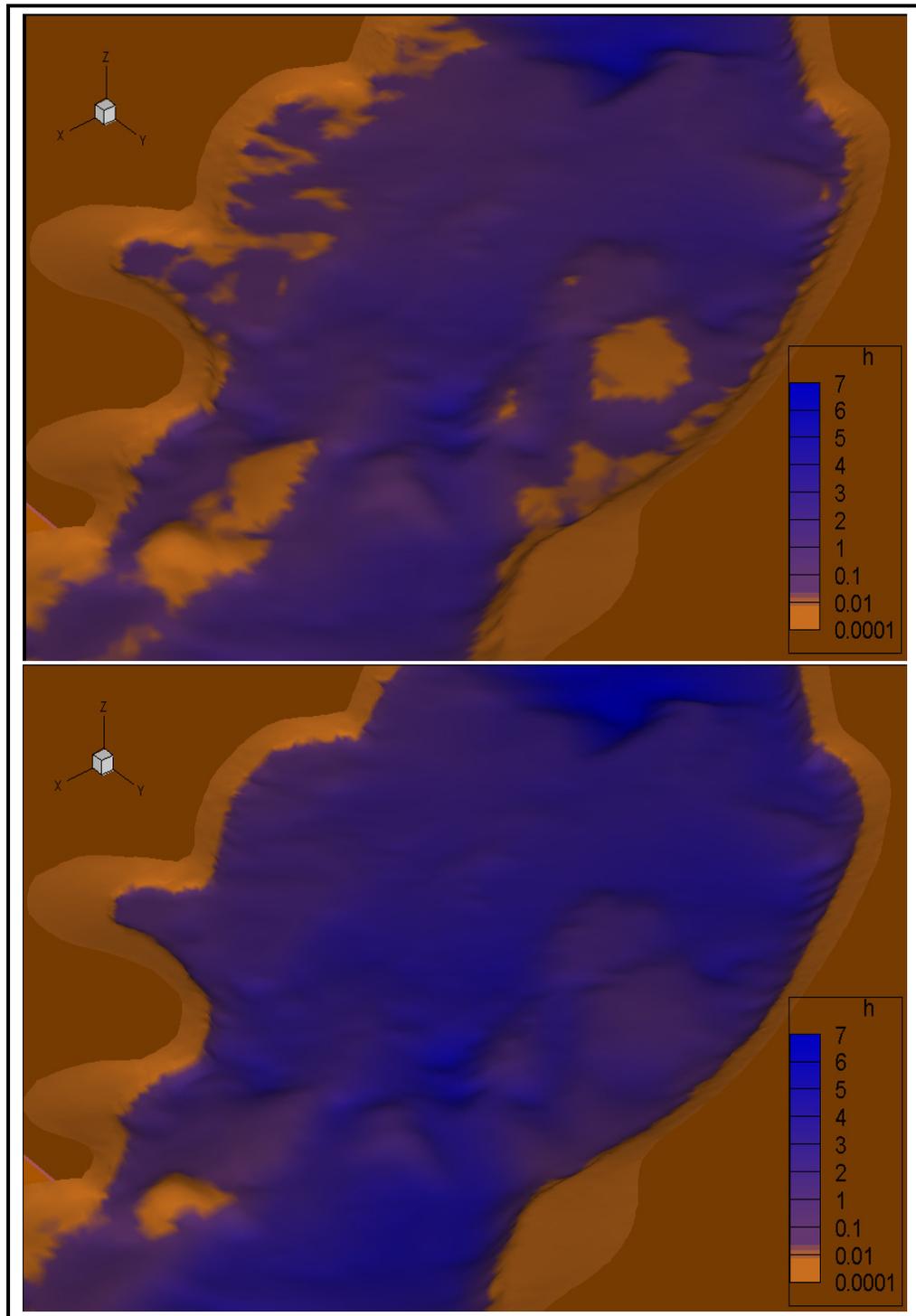


Figure 3.25 Rivière des Prairies
Vue 3-D des bancs couvrants-découvrants après 1200 s et 2700 s

3.6 Conclusion

Le modèle numérique de traitement des bancs couvrants et découvrants proposé a été implémenté dans le code de calcul CUTEFLOW développé en langage FORTRAN 90 au sein du groupe de recherche sur les applications numériques en ingénierie et technologie (GRANIT). Les tests numériques effectués ont montré des résultats satisfaisants relativement à quelques travaux antérieurs dont ceux de Brufau et al. (2002), Heniche et al. (2000), Castro et al. (2006; 2008). Le modèle a pu être appliqué au cas réel de la rivière des Prairies présentant une bathymétrie complexe. Ce dernier test est évidemment fictif, mais a été réalisé à dessein : l'objectif était d'évaluer la robustesse du modèle à travers la simulation d'un écoulement extrême sur une bathymétrie réelle. De par le caractère assez réaliste des résultats obtenus, le modèle numérique proposé dans ce travail s'est montré capable de simuler des cas d'écoulements complexes. Répondant aux perspectives des travaux de Loukili et Soulaïmani (2007), le modèle s'est révélé robuste pour le schéma de Lax utilisé, simulant adéquatement le cas extrême d'un débit fluctuant.

Le travail réalisé à ce premier niveau a fait l'objet de la publication dans la revue scientifique 'Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering' d'un article intitulé : Zokagoo, Jean-Marie, et Azzeddine Soulaïmani. 2010. « Modeling of wetting-drying transitions in free surface flows over complex topographies ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, p. 2281-2304. doi:10.1016/j.cma.2010.03.023.

CHAPITRE 4

RÉDUCTION DU MODÈLE : PROBLÉMATIQUE ET ÉTAT DE L'ART

4.1 Introduction

Le design en ingénierie se rapporte à la spécification des objectifs et à la satisfaction des contraintes relatives à un problème donné. Avec les avancées du domaine informatique (grande capacité de mémoire, processeurs assurant le parallélisme des exécutions), les exigences rencontrées par les ingénieurs en termes de précision, de fiabilité et de rapidité d'exécution sont de plus en plus importantes. La capacité de prédire le comportement des systèmes solides ou fluides ou leur interaction requiert des ressources informatiques puissantes pouvant assurer la résolution des équations aux dérivées partielles gouvernant de tels problèmes. En effet, cette démarche conduit généralement à des systèmes de très grande taille pour des domaines complexes.

Certaines approches, notamment celles basées sur la résolution de systèmes linéaires connaissent un succès notable par le développement de méthodes sophistiquées de résolution numérique. C'est le cas des méthodes de décomposition du domaine avec l'utilisation des solvers "*multigrid*", et des calculs parallélisés. On note aussi des avancées dans l'utilisation des méthodes de Krylov pré-conditionnées en mécanique des structures et des méthodes de Newton-Krylov en dynamiques des fluides assurant une réduction significative du temps de calcul.

Cependant, la prédiction des écoulements de fluides en régime non permanent, basée sur la résolution des équations non linéaires de Navier-Stokes nécessite des efforts supplémentaires lorsque certains objectifs spécifiques de fiabilité et rapidité d'exécution sont à considérer. En effet, les paramètres d'entrée (débit, niveaux d'eau, bathymétrie, coefficient de frottement, etc.) utilisés pour la simulation d'un écoulement ne sont pas connus avec la certitude escomptée du fait de leur variabilité naturelle. La prise en compte des incertitudes nécessite une analyse de fiabilité à travers des calculs de sensibilité mesurant le degré d'influence des

paramètres d'entrée. Il en résulte des calculs répétitifs pouvant être assez coûteux en temps de simulation. D'autre part, en situation d'urgence, ou dans le domaine du contrôle actif où la simulation en temps quasi-réel est nécessaire, l'utilisation d'un modèle numérique de haute précision n'est d'aucune praticité (Dibike, Solomatine et Abbott, 1999; Liberge et Hamdouni, 2010; Ravindran, 2000b), d'où l'émergence des techniques de réduction.

La réduction du modèle s'avère être une approche efficace assurant la possibilité de réduire le fardeau numérique en conservant les propriétés physiques prédominantes du système étudié (Ata, 2008). L'utilisation la plus simple et la plus courante actuelle des modèles réduits vise à augmenter le nombre de résultats provenant d'un code de simulation coûteux, utilisé pour une gamme de paramètres d'entrée dictée par une certaine stratégie de conception. Une fois construit, le modèle réduit doit être de plusieurs ordres de grandeur plus rapide que le code primaire. Il doit être également utile et précis, pour la prédiction des problèmes définis par des paramètres d'entrée différents de ceux ayant servi à sa conception (Forrester, Sóbester et Keane, 2008). Les principales attentes d'un modèle réduit sont les suivantes :

- (i) Une réduction significative du temps de prédiction relativement au modèle de référence (modèle numérique de haute précision : *full-order model*, *high fidelity model*).
- (ii) Des résultats exploitables assez proches de ceux du modèle de référence.
- (iii) La possibilité d'exploitation du modèle réduit par application à de nouveaux scénarios.
- (iv) L'autonomie à travers la minimisation de l'intervention de l'utilisateur.

Ce chapitre donne un aperçu général des méthodes proposées dans la littérature. Plusieurs techniques de réduction ont été proposées et utilisent soit une approche non intrusive, soit une approche intrusive.

4.2 Méthodes non intrusives de réduction ou concept de la boîte noire

L'utilisation des modèles de calculs de haute précision (high-fidelity) reste problématique dans le domaine du design en ingénierie, du fait du coût élevé des simulations avec l'application des algorithmes d'optimisation ou d'analyse des incertitudes. Par ailleurs, l'obligation d'utilisation de codes commerciaux en l'absence de codes "maison" a rendu nécessaire le développement de modèles d'approximation pour l'analyse. Ainsi, un gain en coût de calculs peut être obtenu par couplage des modèles d'optimisation avec le modèle d'approximation en lieu et place du modèle original. Cette approche est dite non intrusive car aucune modification n'est apportée au code original. Ce dernier est sollicité comme une "boîte noire", soit sans considération de la structure interne du système, pour la simulation d'un nombre réduit de scénarios différents, définis par des paramètres d'entrée présélectionnés.

Les solutions obtenues génèrent un plan d'expérience relatif aux paramètres d'entrée et de sortie. Le modèle approximatif ou *meta-modèle* est construit par apprentissage à travers le plan d'expérience obtenu. Des techniques d'interpolation ou de régression peuvent être utilisées pour la construction du *meta-modèle*.



4.2.1 Les surfaces de réponse

L'origine des surfaces de réponse date selon Keane et Nair (2005) du début du XX^e siècle avec le besoin pour des scientifiques du domaine de la biologie et de l'agriculture de développer de nouveaux outils pour la modélisation des données expérimentales. Ces travaux utilisaient des techniques de régression pour des données indépendantes et des modèles d'approximation linéaires ou quadratiques lorsque la génération des données était coûteuse.

En analyse de fiabilité, le principe des surfaces de réponse est d'approcher la fonction d'état limite implicite $G(\bar{X})$ estimée ponctuellement par un code éléments finis ou volumes finis ou des données expérimentales, par une fonction équivalente $\hat{G}(\bar{X})$ en terme de réponse

explicite et simple à manipuler. Une telle fonction utilisée en remplacement du modèle explicite permet un gain appréciable en temps de calculs. La fonction peut être construite à l'aide de méthodes de régression et à l'aide de polynômes linéaires ou de second degré.

La surface de réponse est construite à partir d'un plan d'expérience défini dans un espace standardisé. Les coordonnées des points du plan d'expérience définissent les données des calculs du modèle déterministe original. Le nombre de points expérimentaux du plan d'expérience est choisi de sorte à avoir autant d'équations que d'inconnues pour la détermination des coefficients du polynôme définissant la fonction équivalente. Ces coefficients peuvent être ajustés par la méthode des moindres carrés. La qualité de la surface de réponse réside essentiellement dans le choix de la forme de la surface de réponse et des points du plan d'expérience qui doivent permettre une reproduction fidèle des résultats du modèle déterministe.

La littérature fait cas de plusieurs travaux utilisant les surfaces de réponse couplées à des méthodes stochastiques pour une analyse de fiabilité avec des applications intensives en structures (Gomes et Awruch, 2004; Nguyen et al., 2009; Wu, Yu et Zhao, 2005). Elle reste cependant moins fournie en travaux portant sur la simulation des écoulements d'eaux peu profondes au moment où nous réalisons ce projet.

4.2.2 Approximation de modèle basée sur les réseaux de neurones artificiels

Les réseaux de neurones artificiels (RNA) constituent une nouvelle approche mathématique flexible capable d'identifier des relations complexes non linéaires entre des données d'entrée et de sortie d'un système. Leur conception est réalisée par analogie au fonctionnement des cellules du système nerveux humain ou des vertébrés en général. Selon la modélisation mathématique du fonctionnement du neurone proposée par Mc Culloch et Pitts (1943), chaque cellule du système nerveux reçoit des informations représentées par un vecteur

donnée $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, effectue une somme pondérée $S = \sum_{i=1}^n w_i x_i$ et génère un résultat y à travers éventuellement une fonction de transfert f comme décrit à la figure 4.1.

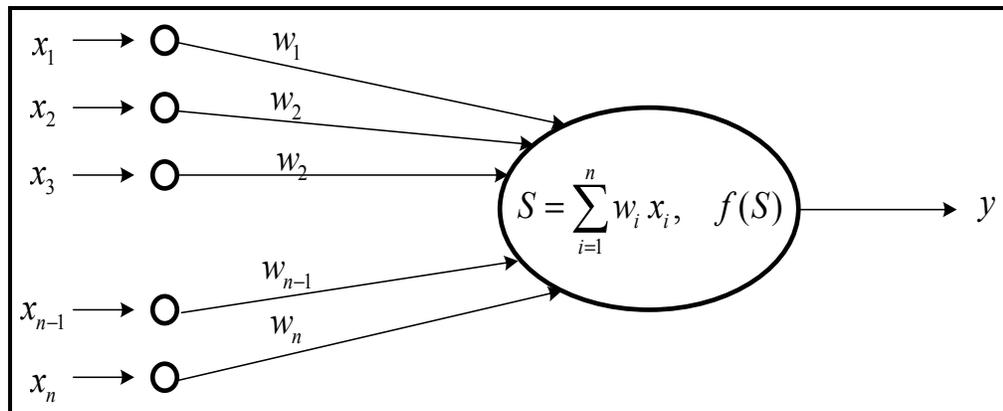


Figure 4.1 Modèle du fonctionnement d'un neurone artificiel

La définition de l'architecture et l'apprentissage constituent les phases principales de la construction d'un réseau neuronal. La définition de l'architecture consiste au choix du vecteur d'entrée (en rapport avec les résultats du modèle déterministe), en la définition : du nombre total de couches et des neurones (taille du réseau); du type d'interconnexion entre les couches et enfin des fonctions de transfert. L'apprentissage est un processus adaptatif au cours duquel les relations complexes entre les données et les résultats numériques sont assimilées et les interconnexions entre les couches sont ajustées. Lorsqu'une architecture et un algorithme d'apprentissage adéquats sont établis, le modèle réduit de RNA peut être très efficace en termes de temps de calculs et de prédictions du phénomène étudié pour des paramètres d'entrée dans l'ordre de grandeur de ceux ayant servi à la phase d'apprentissage (Dibike, Solomatine et Abbott, 1999).

Plusieurs applications sont concernées. Les domaines couverts sont entre autres : la prédiction et la prévision; l'optimisation et la planification; la reconnaissance de formes; le traitement de signal et d'image (Zeng, 2010). Les réseaux de neurones ont pu être également

utilisés en hydraulique numérique (Dibike, Solomatine et Abbott, 1999; Solomatine et Torres, 1996). Dartus et al. (1993), dans le but de montrer que cet outil est suffisamment fiable pour être utilisé dans le cadre de la gestion en temps réel des réseaux d'assainissement, ont procédé à l'étude de la propagation d'une onde de crue dans un canal. Un réseau de trois couches ayant dix neurones chacune a été utilisé. La phase d'apprentissage est réalisée avec un échantillon de 1000 valeurs d'hydrogramme. Les résultats pour 200 tests ont été ensuite validés par comparaison à ceux fournis par un modèle numérique de type Muskingum-Cunge rendant bien compte de la diffusion pour un canal à pente faible. Les résultats montrent que les réseaux de neurones donnent des résultats proches de ceux du modèle de référence. Cependant, la qualité de la réponse du réseau de neurones reste liée intrinsèquement au nombre d'exemples servant à la phase d'apprentissage. En effet dans l'étude de Dartus et al. (1993), pour un nombre réduit de 20 exemples, les résultats montrent des erreurs allant de 6% à 15% pour 20 tests. D'autre part Dibike, Solomatine et Abbott (1999) dans leur étude relative à l'application des réseaux de neurones à la gestion du système des réservoirs dans le bassin de la rivière Apure (Venezuela), montrent que le surapprentissage peut affecter les performances du modèle de réseau de neurones. Ils suggèrent à cet effet une limitation du nombre de couches neuronales cachées ou celle du nombre d'itérations durant la phase d'apprentissage.

Les limites essentielles des méthodes non-intrusives résident dans la nécessité d'utilisation d'un nombre important de données expérimentales ou numériques à l'aide du modèle explicite (coûteux) pour la construction d'un meta-modèle offrant des résultats d'une certaine précision (Forrester, Sóbester et Keane, 2008; Keane et Nair, 2005). En outre, les méthodes non-intrusives exigent généralement une certaine expertise de la part de l'utilisateur, du fait de leur grande dépendance aux choix des scénarios (échantillonnage) servant à la phase d'apprentissage et aux techniques de calibrage (Martinez, 2009).

4.3 Méthodes intrusives de réduction

Les méthodes intrusives de réduction nécessitent une compréhension plus profonde des équations gouvernant les phénomènes étudiés et des méthodes numériques utilisées pour leur résolution. Elles se basent sur l'exploitation des formes discrètes ou continues des équations gouvernantes et selon que celles-ci aboutissent à des systèmes linéaires, faiblement non-linéaires ou non-linéaires, la tâche de réduction est plus ou moins complexe.

Plusieurs méthodes efficaces ont en effet été développées pour la réduction des systèmes linéaires. L'extension des techniques de réduction aux systèmes non-linéaires reste cependant moins évidente.

Les stratégies couramment rencontrées se basent sur des approximations des systèmes non-linéaires pour l'application des méthodes de réduction du domaine du linéaire. C'est le cas avec les méthodes polynomiales. Les paragraphes suivants énumèrent quelques méthodes généralement utilisées dans la réduction des modèles numériques à travers une approche intrusive.

4.3.1 Réduction de Guyan ou méthode de condensation

La méthode de condensation ou réduction de Guyan (Guyan, 1965) consiste à réduire le nombre de degrés de liberté (ddl) pour les matrices de masse et de raideur en élément finis. Le principe de base consiste à répartir les ddl les plus significatifs en *maîtres* (m) et ceux restants en *esclaves* (s). Ainsi, pour un système de la forme :

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.1)$$

la subdivision s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

En supposant que les effets des forces d'inertie des ddl *esclaves* sont négligeables : $\mathbf{f}_s = 0$, la résolution de la partie *esclave* donne :

$$\mathbf{u}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \mathbf{u}_m \quad (4.3)$$

Le système réduit comprenant seulement les ddl *maîtres* est alors obtenu par substitution de (4.3) dans (4.2).

La réduction de Guyan est couramment proposée en mécanique des structures pour la prise en compte des incertitudes à travers une analyse stochastique (Panayirci, Pradlwarter et Schueller, 2011). Elle reste cependant inefficace pour l'étude des problèmes à basse fréquence. En outre, la méthode nécessite l'expertise de l'utilisateur et l'effectivité de la réduction en terme de gain en temps de calculs est liée au nombre de ddl *esclaves* identifiés. Enfin, selon la nature du problème étudié la condition $n_{\text{maître}} \ll n_{\text{esclave}}$ n'est pas toujours garantie.

4.3.2 Réduction par approximation polynomiale

La méthode de réduction par approximation polynomiale consiste à approcher le système étudié à travers la troncature des séries de Taylor relatives à la fonction de transfert du système. Elle possède l'avantage d'être applicable à des systèmes non-linéaires. Considérons la forme générale d'un système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.4)$$

où \mathbf{f} est une fonction vectorielle non-linéaire. Par application d'un développement en séries de Taylor autour de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, il vient :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \mathbf{W}_1 \mathbf{x} + \mathbf{W}_2 (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) + \mathbf{W}_3 (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) + \dots + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.5)$$

avec \otimes désignant le produit de Kronecker et $\mathbf{W}_k \in \mathbb{R}^{n \times n^k}$, un tenseur d'ordre k tenant compte des contributions d'ordre supérieur. Ainsi, une méthode de linéarisation du système consistera donc en la troncature de la série à l'ordre $k=1$ et une méthode quadratique correspondra à une troncature à l'ordre $k=2$. La littérature fait également cas de l'approximation de Padé comme un choix naturel d'approximation du développement en série de Taylor d'une fonction vectorielle donnée (Baker et Graves-Morris, 1996; Zhaojun, 2002).

La réduction par approximation polynomiale peut être efficace en terme de gain en temps de calculs mais les principales limites de cette méthode résident dans la garantie de la stabilité. En outre, l'utilisateur pourrait éprouver des difficultés d'application à un système de grande taille ou à un système à entrée et sortie multiples (Martinez, 2009).

4.3.3 Méthode de réduction par décomposition en valeurs singulières (SVD)

La décomposition en valeur singulières (SVD) d'une matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ correspond à sa factorisation selon la relation $\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^*$, où $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ sont des vecteurs unitaires et \mathbf{V}^* est la matrice adjointe à \mathbf{V} . La matrice \mathbf{M} peut alors s'écrire :

$$\mathbf{M} = \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* + \dots + \sigma_n u_n v_n^* \quad (4.6)$$

où u_i et v_j sont les colonnes de vecteurs \mathbf{U} et \mathbf{V} . Les valeurs singulières sont rangées dans l'ordre décroissant tel que $\Sigma_{ii} = \sigma_i > \sigma_{i+1} = \Sigma_{i+1,i+1}$.

Il est possible alors de définir une approximation optimale dans la norme L^2 telle que pour une matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ donnée, il soit possible de trouver une matrice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ de rang inférieur à celui de \mathbf{M} et minimisant l'erreur $\mathbf{E} = \mathbf{M} - \mathbf{X}$. La solution $\hat{\mathbf{X}}$ au problème ainsi défini par la troncature de la décomposition de \mathbf{M} s'écrit (Antoulas, 2005) :

$$\hat{\mathbf{X}} = \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* + \dots + \sigma_K u_K v_K^*, \quad (K < N) \quad (4.7)$$

Cette technique s'est avérée assez efficace dans plusieurs domaines et a inspiré de nombreuses méthodes de réduction de modèle. Antoulas (2005) fait cas de la méthode de troncature équilibrée (*balanced truncature*) et de l'approximation de Hankel pour les systèmes linéaires. Cependant, la technique POD (proper orthogonal decomposition) reste l'outil le plus couramment utilisé dans le cadre de la réduction de modèle par décomposition en valeurs singulières. Cette technique sera présentée avec plus de détails ultérieurement.

4.3.4 Réduction par projection sur des sous-espaces ou projection de Galerkin

La réduction de modèle par projection sur un sous-espace consiste à projeter le système original considéré sur un sous-espace de dimension finie réduite, engendré par des modes considérés prédominants, le tout en conservant la dynamique du problème étudié.

$$\begin{cases} \mathbf{E} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.8)$$

Avec $\mathbf{E}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{P \times N}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ la variable d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^M$ la donnée d'entrée et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^P$ la donnée de sortie. On considèrera, pour simplifier les notations, un problème à une entrée et une sortie, soit $M = P = 1$.

Pour une base appropriée $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times K}$ permettant l'approximation $\mathbf{x} \simeq \mathbf{Vz}$ du vecteur variable d'état du système original, avec $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^K$ le vecteur variable d'état du système projeté, les relations (4.8) peuvent se réécrire :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{V} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{y}} \simeq \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{z} \end{cases} \quad (4.9)$$

où $\tilde{\mathbf{y}}$ est une approximation de \mathbf{y} . La réduction du modèle s'achève alors par l'application de la projection de Galerkin :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{E}} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{z} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{C}} \mathbf{z} \end{cases} \quad (4.10)$$

Avec $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{V}^T \mathbf{E} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{K \times K}$, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{K \times K}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^T \mathbf{B} \in \mathbb{R}^K$ et $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{1 \times K}$. Le système ainsi obtenu est d'ordre K , inférieur à n et peut être assez efficace, si les bases de projection sont choisies telles que la dynamique du problème étudié est conservée avec $K \ll N$.

La constitution des bases de projection demeure donc le socle de la méthode de réduction par projection de Galerkin. En cela, l'exploitation de la théorie des sous-espaces de Krylov a permis d'aboutir à des résultats plutôt intéressants pour des systèmes linéaires (Phillips, 2000). Par définition, un sous-espace de Krylov $K_r(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ généré par une matrice \mathbf{A} et un vecteur \mathbf{b} d'ordre M est un espace engendré par une série de vecteurs $\{\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{M-1}\mathbf{b}\}$. Deux méthodes sont couramment utilisées dans la littérature : La procédure de Lanczos (Lanczos, 1950) et celle de d'Arnoldi (Arnoldi, 1951). Cependant, les

méthodes à base de projection sur les sous-espaces de Krylov sont limitées à la résolution de grands systèmes linéaires et leur succès réside dans un choix adéquat du sous-espace de Krylov. D'autre part, elles peuvent rencontrer des problèmes de stabilité. (Antoulas, 2005).

Deux autres méthodes de construction de bases de projection couramment utilisées sont les techniques CVT (Centroidal Voronoi Tessellation) et POD (Proper Orthogonal Decomposition). Nous y consacrons les sous-sections suivantes.

4.3.5 Réduction par projection sur une base réduite-CVT

La technique CVT est une méthode de réduction exploitée dans plusieurs domaines dont le traitement d'images, la biologie, l'astrophysique et la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Initialement, le concept de la CVT était traduit (Du, Gunzburger et Ju, 2010) comme un modèle de distribution optimale de points et de partitions (*tessellation*) spatiales de régions (ou de volumes) dans \mathbb{R}^N ou à l'intérieur d'un ensemble discret de données. Qiang et Gunzburger (2002) ont pu étendre l'utilisation de la CVT à la génération d'un maillage optimisé pour la minimisation des coûts de calculs dans la résolution des problèmes complexes.

La base de projection utilisée dans le processus de réduction à travers la CVT est constituée de vecteurs $\{\mathbf{z}_k\}_{k=1}^K$ dits *générateurs* du diagramme (*tessellation*) $\{\mathbf{V}_k\}_{k=1}^K$ de Voronoi définis comme suit :

$$\mathbf{V}_k = \{\mathbf{w} \in \Omega : \|\mathbf{w} - \mathbf{z}_k\| \leq \|\mathbf{w} - \mathbf{z}_i\|, \forall i = 1, \dots, K ; k \neq i\} \quad (4.11)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la distance Euclidienne dans \mathbb{R}^N

Par définition, une *tessellation* d'un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^N$ (figure 4.2) est une partition $\{\mathbf{V}_k\}_{k=1}^K$ de \mathbf{W} telle que $\mathbf{V}_k \subset \Omega$ pour $k = 1, \dots, K$, vérifiant $\mathbf{V}_k \cap \mathbf{V}_i = \emptyset$ pour $k \neq i$ et $\bigcup_{k=1}^K \overline{\mathbf{V}_k} = \overline{\Omega}$. La *tessellation* de Voronoi $\{(\mathbf{z}_k, \mathbf{V}_k)\}_{k=1}^K$ de Ω est dite centroïdale (CVT) si et seulement si les points générateurs $\{\mathbf{z}_k\}_{k=1}^K$ sont également les centroïdes des régions $\{\mathbf{V}_k\}_{k=1}^K$. Plusieurs algorithmes de construction d'une CVT existent et le plus usité est celui de Lloyd (Du, Faber et Gunzburger, 1999). Le lecteur intéressé à plus de détails se rapportera à (Okabe, 2000) et (Burkardt, Gunzburger et Lee, 2006).

Un choix judicieux de Ω serait un ensemble discret de solutions, soit une matrice de snapshots $\Omega = \{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^N \in \mathbb{R}^{N_e}$, $N < N_e$ obtenue du code éléments finis ou volumes finis où N_e désigne le nombre de cellules du maillage. Une fois les vecteurs de base CVT $\{\mathbf{z}_k\}_{k=1}^K$ obtenus, chaque variable $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ peut être approximée par la relation :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k(t) \mathbf{z}_k \quad (4.12)$$

Le modèle réduit dont les inconnues sont les fonctions de coefficients $\{\alpha(t)_k\}_{k=1}^K$ est finalement obtenu par substitution dans les équations de Navier Stokes discrétisées et par application du principe de Galerkin forçant le résidu à l'orthogonalité à chacune des fonctions de base. Cette technique a été l'objet d'étude de Burkardt et al. (2006) en mécanique des fluides. L'application au *T-cell problem* correspondant à un écoulement incompressible, visqueux dans un domaine en forme de T soumis à un débit d'entrée variant, montre des résultats encourageants. Les écarts entre les résultats du modèle réduit CVT et ceux fournis par le modèle éléments finis restent faibles. Le gain en temps de calculs est très appréciable. Le modèle réduit permet 2553 et 28673 simulations pour 12 et 6 bases CVT respectivement dans un même temps qu'une simulation unique avec le modèle explicite.

Ces résultats bien qu'intéressants, ne peuvent être généralisés à des problèmes plus complexes et la littérature au moment où nous réalisons cette étude n'est pas très riche en travaux portant sur la réduction de modèles de simulation d'écoulements de fluides. La technique CVT peut être combinée à d'autres méthodes comme la POD (Proper Orthogonal Decomposition). Dans ce cas, l'idée est de construire un modèle hybride dit CVOD (centroidal voronoi orthogonal decomposition) dans lequel, la matrice des snapshots est divisée en un nombre fini de clusters avec une base POD définie pour chaque cluster (Du et Gunzburger, 2003).

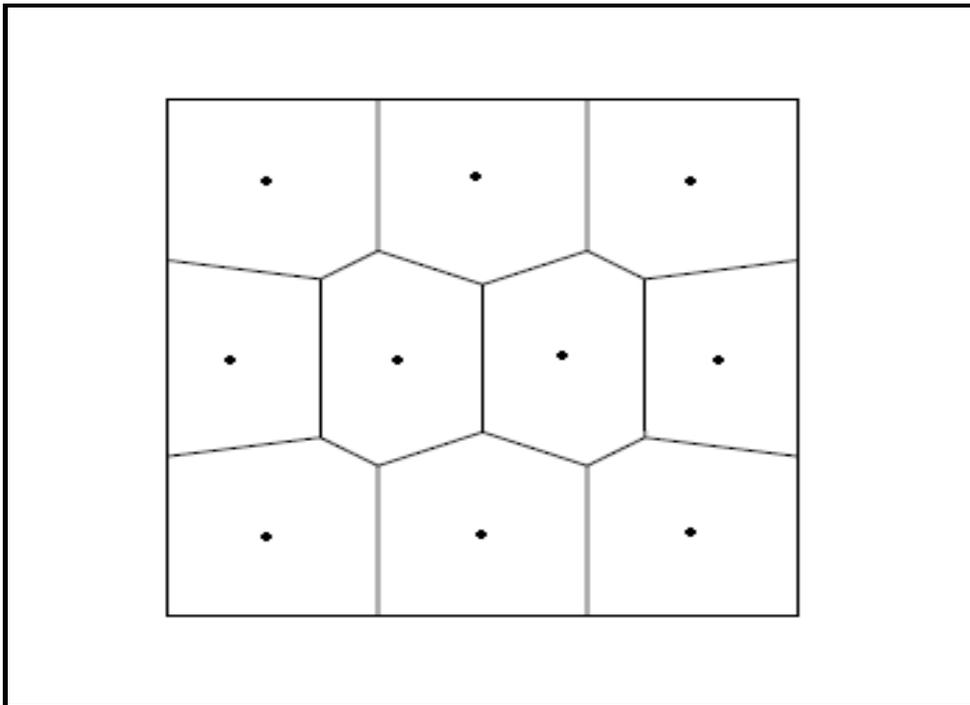


Figure 4.2 Exemple d'une tessellation d'un carré pour une densité uniforme
Tirée de Du Q. et al., (2010, p. 121)

4.3.6 Réduction de modèle par projection sur la base réduite-POD

La technique POD (Proper Orthogonal Decomposition) connue encore sous l'appellation 'réduction de Karhunen-Loève' (Karhunen, 1946; Loeve, 1946) reste la plus utilisée dans la réduction des systèmes complexes (Burkardt, Gunzburger et Hyung-Chun, 2006). Elle est considérée comme une puissante technique de réduction de modèle permettant d'extraire les informations caractéristiques des données relatives à des systèmes complexes à partir d'une procédure d'orthogonalisation. La réduction de modèle par la POD est équivalente à la combinaison des procédés de réduction par décomposition en valeurs singulières et par projection de Galerkin.

La technique POD débute par la constitution d'une matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ de snapshots à l'instar de la CVT :

$$\mathbf{M} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_M] \quad (4.13)$$

La matrice \mathbf{M} est ensuite décomposée en valeurs singulières comme indiqué à la section (4.3.3) $\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^*$. La base réduite POD de dimension K ($K \leq N$) peut être donnée par l'ensemble de vecteurs $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k=1}^K$ constitué par les K premiers vecteurs-gauche de la décomposition en valeurs singulières (Burkardt, Gunzburger et Lee, 2006) :

$$\mathbf{U} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_K] \quad (4.14)$$

La base POD ainsi obtenue, possède des propriétés très intéressantes justifiant sa popularité dans la construction d'un modèle d'ordre réduit (ROM) :

- (i) La base réduite POD possède la propriété d'orthonormalité : $\langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j \rangle = \delta_{ij}$
- (ii) La base réduite POD est optimale. En d'autres termes, de toutes les combinaisons linéaires, la base réduite POD est la meilleure en ce sens qu'elle capture le maximum

d'énergie cinétique moyenne. En effet, soit E la somme des carrés des erreurs entre chaque vecteur-snapshot \mathbf{w}_n et sa projection $\Pi_s \mathbf{w}_n$ sur le sous-espace engendré par la base $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$:

$$E(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_K) = \sum_{n=1}^N |\mathbf{w}_n - \Pi_s \mathbf{w}_n|^2 \quad (4.15)$$

Selon (Burkardt, Gunzburger et Lee, 2006), la base $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k=1}^K$ minimise E sur toute base orthonormale possible de dimension K dans \mathbb{R}^M .

(iii) Les valeurs singulières $\{\sigma_1, \dots, \sigma_K\}$ relatives aux vecteurs de la base POD ont un caractère dégénératif $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_K$. D'autre part, on montre que (Ravindran, 2000a)

:

$$E(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_K) = \sum_{n=K+1}^{\tilde{N}} \sigma_n^2 \quad (4.16)$$

où \tilde{N} est le rang de la matrice \mathbf{M} . Ainsi, les valeurs singulières peuvent servir de moyen de détermination de la dimension de la base optimale K . En effet pour $E(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_K) \leq \delta$, ($\delta < 1$), K peut être choisi tel que la condition suivante soit satisfaite (Burkardt, Gunzburger et Lee, 2006) :

$$\sum_{n=1}^K \sigma_n^2 \geq (1 - \delta) \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \sigma_n^2 \quad (4.17)$$

En général, on a $K \ll \tilde{N}$ et chaque variable définissant la matrice des snapshots peut être approximée selon la relation :

$$\mathbf{w}(t, \mathbf{x}) \simeq \sum_{k=1}^K \alpha_k(t) \boldsymbol{\varphi}_k \quad (4.18)$$

Ensuite, en utilisant l'orthonormalité des bases POD à travers la projection de Galerkin décrite à la section (4.3.4), on aboutit à un système réduit d'ordre K d'inconnues $\{\alpha_k\}_{k=1}^K$ pouvant être résolu beaucoup plus rapidement que le système original.

La technique POD a été introduite en mécanique des fluides par Lumley (1967) pour l'extraction des structures cohérentes d'un écoulement turbulent. Depuis, plusieurs études se sont appropriées la technique POD avec beaucoup de succès (Allery, Beghein et Hamdouni, 2005; Sirovich, Ball et Keefe, 1990). La POD s'est avérée un outil très utile dans le contrôle actif ou rétroactif et dans l'optimisation des systèmes d'écoulements (Cardoso, Durlofsky et Sarma, 2009; Galbally, 2008; Kasnakoglu, 2007; Ravindran, 2000a; 2000b). En interaction fluide-structure (IFS), précisément en aéroélasticité, la POD a été utilisée pour la modélisation de la configuration complète d'un avion de guerre de type F-16 par (Danowsky et al., 2009; Lieu, Farhat et Lesoinne, 2006). D'autre part, Feng et Soulaïmani (2007), ont appliqué la méthodologie classique de la POD à l'étude des oscillations d'une aile flexible soumise à un écoulement transsonique. On note également toujours en IFS des travaux portant sur la réduction d'un modèle de simulation de fluide autour d'un cylindre statique (Akhtar, Nayfeh et Ribbens, 2009; Sirisup et al., 2005) ou oscillant (Liberge, Benaouicha et Hamdouni, 2008; Liberge et Hamdouni, 2010). Cependant, le gain en temps de calculs reste très faible (une accélération de facteur 4 pour Lieu et al. (2006)).

L'utilisation de la POD a été récemment étendue à la simulation d'écoulements complexes réels à grande échelle (de l'ordre de 10^6 à 10^{10} degrés de liberté) tels que les écoulements océaniques. Yanhua et al. (2006) ont en effet initié la réduction à travers la POD d'un modèle de simulation des courants océaniques du Pacifique. Ils ont été ensuite suivis par Fang et al. (2009) et Zhendong et al. (2007). Ces travaux montrent que la technique POD est très appropriée en océanographie, car assurant la simplification des calculs numériques et réduisant le temps CPU et l'espace mémoire requis. Aucune précision n'est faite cependant sur l'ordre de grandeur du gain en temps de calculs relativement au modèle numérique original. Dans des études plus récentes, Esfahanian et Ashrafi (2009) ont proposé un modèle

réduit de simulation des équations d'eaux peu profondes dit "equation-free Galerkin-free POD/ROM". Le modèle est appliqué à des domaines simples mais avec des conditions initiales complexes. L'étude montre que la réduction du temps CPU (incluant pour le modèle réduit la construction des bases POD) est d'environ 13 à 30 % selon le type d'écoulement simulé. Les auteurs notent que l'utilisation de la technique POD offre une meilleure précision des résultats, relativement à l'utilisation d'un maillage grossier.

La popularité de la technique POD s'explique par les avantages assez intéressants qu'elle présente. Elle peut en effet s'appliquer à des données expérimentales comme à des données issues d'un modèle numérique à travers l'utilisation de *snapshots*. De plus, la constitution des snapshots n'est pas astreinte à suivre une direction particulière (Martinez, 2009). Cependant, elle nécessite la connaissance de la solution finale du système, laquelle n'est pas toujours disponible ou facile à générer.

4.3.7 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons relevé la nécessité de la construction d'un modèle réduit pour le design en ingénierie et la prédiction des écoulements de fluide. Plusieurs techniques sont proposées dans la littérature et ont pu être répertoriées en deux catégories. Les méthodes non-intrusives pour lesquelles aucune modification n'est apportée au modèle de base et les méthodes intrusives réduisant les systèmes d'équations gouvernant la physique du problème étudié.

L'efficacité d'un modèle réduit est étroitement liée à la rapidité escomptée et à la précision tolérée. Les méthodes de réduction les plus efficaces semblent être celles basées sur la projection sur des sous-espaces ou projection de Galerkin. En effet, cette technique a l'avantage d'être applicable aux systèmes non-linéaires complexes avec un temps d'apprentissage, pour la construction de la base, moins coûteux en CPU.

La technique POD reste la plus populaire des techniques de réduction. Elle peut utiliser des données expérimentales comme des données numériques (snapshots). En outre, le modèle réduit une fois construit à travers la POD ne nécessite pas une grande expérience de la part de l'utilisateur. Seulement, à l'instar des autres méthodes, son efficacité diminue considérablement lorsqu'elle est appliquée à des problèmes fortement non-linéaires.

CHAPITRE 5

RÉDUCTION DU MODÈLE DE SIMULATION DES ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE

5.1 Introduction

Ce chapitre porte sur le développement d'un modèle d'ordre réduit (ROM) de simulation des écoulements à surface libre. Le ROM est construit à partir de la réduction des équations discrétisées du modèle numérique aux volumes finis proposé au chapitre 2 (modèle-1). L'application directe de la technique POD aux équations de Saint-Venant discrétisées à notre connaissance n'a pas encore été réalisée. Les équations de Saint-Venant sont fortement non-linéaires si bien que leur réduction a été toujours éludée à travers l'utilisation d'équations transformées allégeant la difficulté de la présence des composantes non-scalaires du vecteur vitesse (Esfahanian et Ashrafi, 2009).

La théorie de la méthode POD est présentée. La réduction du modèle numérique aux volumes finis est ensuite détaillée. Des approximations des termes fortement non-linéaires sont proposées afin d'assurer la célérité des calculs mais aussi l'obtention de résultats assez proches de ceux du modèle aux volumes finis.

5.2 Méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres ou POD

5.2.1 Formulation théorique de la méthode POD

La méthode POD consiste à trouver une fonction ψ dans l'espace de Hilbert H permettant la représentation optimale d'un champ donné $u(x,t)$ défini dans un domaine borné Ω à travers la résolution du problème de maximisation suivant :

$$\max_{\psi \in H} \frac{\langle |u, \psi|^2 \rangle}{(\psi, \psi)} = \frac{\langle |u, \varphi|^2 \rangle}{(\varphi, \varphi)} \quad (5.1)$$

où $\langle \bullet \rangle$ désigne l'opérateur de moyenne, (\bullet, \bullet) est le produit scalaire dans H et $\|\bullet\|_H^2$ est la norme associée.

Si l'espace de Hilbert considéré est $H = L^2(\Omega)$, alors le problème de maximisation (5.1) conduit à la résolution du problème aux valeurs propres suivant (Holmes et al., 1997) :

$$\int_{\Omega} R(x, x') \varphi(x') dx' = \lambda \varphi(x) \quad (5.2)$$

où R est un tenseur de corrélation spatiale symétrique défini positif. Il existe alors un ensemble de valeurs propres $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ positives décroissantes, ainsi qu'un nombre de modes propres orthonormaux $(\varphi_i)_{i \geq 1}$ constituant la base POD tels que le champ $u(x, t)$ puisse s'écrire :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \varphi_i(x) \quad (5.3)$$

les fonctions temporelles a_i étant les coordonnées modales.

5.2.2 La base réduite POD

Introduite par Sirovich (1987), la technique des *snapshots* est un moyen efficace d'extraction d'une base POD de dimension finie. La technique des snapshots consiste à évaluer la solution numérique à différents instants afin d'obtenir la matrice :

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_{N_s}] \quad (5.4)$$

N_s est le nombre total de solutions calculées et \mathbf{w}_k désigne les vecteurs-snapshots formant les colonnes de la matrice \mathbf{W} de dimension $N_e \times N_s$.

La base réduite POD est alors extraite à travers la décomposition en valeurs singulières de la matrice \mathbf{W} . Comme indiqué par Burkardt, Gunzburger et Lee (2006), la base POD réduite \mathbf{B} peut être définie par les N_b premiers vecteurs $\mathbf{B} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\varphi}_{N_b}]$ vérifiant :

$$\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

où $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\tilde{N}})$ et \tilde{N} est le rang de \mathbf{W} .

Puisque $\mathbf{W} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\varphi}_k = \sigma_k^2 \boldsymbol{\varphi}_k$, pour $(k = 1, \dots, \tilde{N})$, la dimension N_b de la base peut être choisie telle que :

$$\frac{\sum_{k=1}^{N_b} \sigma_k^2}{\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \sigma_k^2} \geq 1 - \varepsilon, \quad (\text{avec } \varepsilon \ll 1) \quad (5.6)$$

La base réduite POD est naturellement orthogonale et peut être normalisée :

$$(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.7)$$

5.2.3 Principe de la réduction du modèle

On considère une solution $\mathbf{u}(x,t)$ d'un système non linéaire de N_e équations différentielles :

$$\frac{d(\mathbf{u}(x,t))}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u}(x,t),t) \quad (5.8)$$

Alors la fonction $\mathbf{u}(x,t)$ peut être approximée à l'aide de la base POD selon la relation :

$$\mathbf{u}^{POD}(x,t) = \sum_{i=1}^{N_b} a_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i(x) \quad (5.9)$$

En multipliant (5.8) par les modes $\boldsymbol{\varphi}_p$ (projection de Galerkin), on obtient un système non-linéaire de N_b équations différentielles des coordonnées modales :

$$\frac{d(a_p(x,t))}{dt} = \sum_{i=1}^{N_b} \boldsymbol{\varphi}_p \mathbf{f}(\mathbf{u}^{POD}(x,t),t) = \mathbf{r}_p(\mathbf{u}^{POD}(x,t),t) \quad (5.10)$$

Le système ainsi obtenu constitue le modèle réduit (POD/ROM) du modèle explicite (5.8). Le système (5.10) peut être très efficace en terme de gain en temps de calculs, si N_b est très petit ($N_b \ll N_e$) et si le terme non linéaire $\mathbf{r}_p(\mathbf{u}^{POD}(x,t),t)$ peut être calculé assez rapidement. La précision sera évidemment liée à la base \mathbf{B} et aux approximations ayant servi à développer $\mathbf{r}_p(\mathbf{u}^{POD}(x,t),t)$.

5.3 Réduction du schéma aux volumes finis

Étant donnée une matrice de snapshots pour chacune des variables du schéma aux volumes finis, la base POD $\mathbf{B}^q = [\boldsymbol{\varphi}_1^q \ \boldsymbol{\varphi}_2^q \ \cdots \ \boldsymbol{\varphi}_{N_b^q}^q]$ est obtenue comme décrit à la section (5.2.2). Les variables peuvent être exprimées selon la relation :

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^{N_b^q} a_k^q(t) \boldsymbol{\varphi}_k^q \quad (5.11)$$

Où \mathbf{q} désigne le vecteur de degré de liberté correspondant aux variables η , h , hu , hv , u ou v . L'exposant ' q ' porté par le mode POD $\boldsymbol{\varphi}_k^q$ et le coefficient a_k^q indique leur correspondance à la fonction $\mathbf{q}(t)$. Les coefficients $a_k^q(t)$, $1 \leq k \leq N_b^q$ représentent les inconnues du modèle réduit et les vecteurs $\boldsymbol{\varphi}_k^q$ impliquent une dépendance spatiale. La i -ème composante du vecteur $\boldsymbol{\varphi}_k^q$ sera notée φ_{ik}^q indiquant ainsi la contribution de la cellule K_i .

Des valeurs différentes de N_b^q pour chacune des variables dépendantes peuvent être considérées tant que la condition (5.6) est vérifiée. Cependant, dans un souci d'allègement des notations, nous utiliserons $N_b^q = N_b$. Les sections suivantes présentent la réduction du schéma aux volumes finis à travers la projection de Galerkin.

5.3.1 Réduction de l'équation de continuité

L'équation de continuité discrétisée selon le schéma (2.6) s'écrit :

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} \{n_{ij}^x(hu)_{ij} + n_{ij}^y(hv)_{ij} - \lambda_{ij} \eta_{j-i}\}^n, \quad i = 1, \dots, N_e \quad (5.12)$$

avec $(hu)_{ij} = \frac{1}{2}((hu)_i + (hu)_j)$, $(hv)_{ij} = \frac{1}{2}((hv)_i + (hv)_j)$ et $\eta_{j-i} = \frac{1}{2}(\eta_j - \eta_i)$. λ_{ij} est la vitesse d'onde.

En utilisant la relation (5.11), il vient :

$$\sum_{k=1}^{N_b} a_{k,\eta}^{n+1} \varphi_{ik}^\eta = \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,\eta}^n \varphi_{ik}^\eta - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} \left\{ n_{ij}^x \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hu}^n \varphi_{ikj}^{hu} + n_{ij}^y \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hv}^n \varphi_{ikj}^{hv} - \sum_{k=1}^{N_b} \lambda_{ij}^n a_{k,\eta}^n \varphi_{j-ik}^\eta \right\} \quad (5.13)$$

où $\varphi_{ikj}^{hu} = \frac{1}{2}(\varphi_{ik}^{hu} + \varphi_{jk}^{hu})$, $\varphi_{ikj}^{hv} = \frac{1}{2}(\varphi_{ik}^{hv} + \varphi_{jk}^{hv})$ et $\varphi_{j-ik}^\eta = \frac{1}{2}(\varphi_{jk}^\eta - \varphi_{ik}^\eta)$.

En permutant les sommations sur les interfaces avec celles sur les bases modales, l'équation précédente devient :

$$\sum_{k=1}^{N_b} a_{k,\eta}^{n+1} \varphi_{ik}^\eta = \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,\eta}^n \varphi_{ik}^\eta - \frac{\Delta t}{|K_i|} \left\{ \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hu}^n \left(\sum_{j=1}^3 L_{ij} n_{ij}^x \varphi_{ikj}^{hu} \right) + \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hv}^n \left(\sum_{j=1}^3 L_{ij} n_{ij}^y \varphi_{ikj}^{hv} \right) - \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,\eta}^n \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_{ij}^n L_{ij} \varphi_{j-ik}^\eta \right) \right\}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_e \quad (5.14)$$

La projection de Galerkin peut être alors appliquée par la multiplication du système (5.14) par chacun des vecteurs φ_p^η . De la propriété orthonormale des bases modales POD :

$$\sum_{i=1}^{N_e} \varphi_{ik}^q \varphi_{ip}^\eta = \delta_{kp}, \quad p = 1, \dots, N_b^\eta \quad (5.15)$$

il résulte :

$$a_{p,\eta}^{n+1} = a_{p,\eta}^n - \Delta t \left\{ \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hu}^n \left(\sum_{i=1}^{N_e} \frac{\varphi_{ip}^\eta}{|K_i|} \left(\sum_{j=1}^3 L_{ij} n_{ij}^x \varphi_{ikj}^{hu} \right) \right) + \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hv}^n \left(\sum_{i=1}^{N_e} \frac{\varphi_{ip}^\eta}{|K_i|} \left(\sum_{j=1}^3 L_{ij} n_{ij}^y \varphi_{ikj}^{hv} \right) \right) - \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,\eta}^n \left(\sum_{i=1}^{N_e} \frac{\varphi_{ip}^\eta}{|K_i|} \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_{ij}^n L_{ij} \varphi_{j-ik}^\eta \right) \right) \right\}, \quad p = 1, \dots, N_b \quad (5.16)$$

Nous pouvons dès lors définir des matrices \mathbf{M}_{hu}^1 et \mathbf{M}_{hv}^1 où l'exposant '1' réfère à la première équation du système (2.6) (équation de continuité) et les indices 'hu' et 'hv' traduisent l'expression des matrices selon les bases modales φ_k^{hu} et φ_k^{hv} respectivement. Les coefficients des matrices \mathbf{M}_{hu}^1 et \mathbf{M}_{hv}^1 sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{hu}^1(p, k) = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\varphi_{ip}^\eta}{|K_i|} \left(\sum_{j=1}^3 L_{ij} n_{ij}^x \varphi_{ikj}^{hu} \right), \\ \mathbf{M}_{hv}^1(p, k) = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\varphi_{ip}^\eta}{|K_i|} \left(\sum_{j=1}^3 L_{ij} n_{ij}^y \varphi_{ikj}^{hv} \right) \end{cases} \quad (5.17)$$

De même, nous définissons la matrice $\mathbf{D}_{\Delta\eta}^{1,n}$ relative au terme de stabilisation du flux (2.19) :

$$\mathbf{D}_{\Delta\eta}^{1,n}(p, k) = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\varphi_{ip}^\eta}{|K_i|} \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_{ij}^n L_{ij} \varphi_{j-ik}^\eta \right) \quad (5.18)$$

L'exposant 'n' indique ici que contrairement aux matrices \mathbf{M}_{hu}^1 et \mathbf{M}_{hv}^1 , la matrice $\mathbf{D}_{\Delta\eta}^{1,n}$ varie dans le temps puisqu'elle dépend de la vitesse d'onde calculée à chacune des interfaces Γ_{ij} des cellules triangulaires K_i et K_j . L'équation de continuité se réduit alors selon l'expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_\eta^{n+1} = \mathbf{A}_\eta^n - \Delta t \left(\mathbf{M}_{hu}^1 \mathbf{A}_{hu}^n + \mathbf{M}_{hv}^1 \mathbf{A}_{hv}^n - \mathbf{D}_{\Delta\eta}^{1,n} \mathbf{A}_\eta^n \right) \\ \text{avec} \\ \mathbf{A}_\eta = \left[a_{1,\eta}, \dots, a_{N_b,\eta} \right]^T, \\ \mathbf{A}_{hu} = \left[a_{1,hu}, \dots, a_{N_b,hu} \right]^T \text{ and} \\ \mathbf{A}_{hv} = \left[a_{1,hv}, \dots, a_{N_b,hv} \right]^T \end{array} \right. \quad (5.19)$$

Les matrices \mathbf{M}_{hu}^1 et \mathbf{M}_{hv}^1 sont calculées une seule fois en *phase de prétraitement*. En effet, elles dépendent uniquement des bases modales invariantes. Cependant, la matrice $\mathbf{D}_{\Delta\eta}^{1,n}$ reste problématique en ce sens qu'elle doit être calculée en *phase de traitement* du fait de la nécessité d'évaluation du terme λ_{ij}^n dans (5.18) dans le temps.

Le terme λ_{ij}^n s'exprime en fonction de la racine carrée de la hauteur d'eau (2.24-2.25) et ne peut donc s'écrire sous une forme polynomiale dont les coefficients seraient les inconnues du modèle réduit \mathbf{A}_η , \mathbf{A}_{hu} et \mathbf{A}_{hv} . Par ailleurs, calculer λ_{ij}^n explicitement sur chaque cellule engage un nombre de calculs de l'ordre du nombre total d'interfaces et un temps de calculs conséquent. Le gain en temps de calculs pourrait donc être sérieusement affecté en utilisant l'expression réduite de l'équation de continuité telle que donnée par la relation (5.19). Nous proposons par conséquent une approximation λ_i^{pod} de la vitesse d'onde indépendante du temps pour chaque cellule de sorte à obtenir une matrice constante. A travers plusieurs tests numériques, nous avons constaté qu'une valeur de λ_i^{pod} satisfaisant aux conditions :

$$\bar{\lambda}_i = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} \lambda_i^n \leq \lambda_i^{pod} \leq \max_{n=1, \dots, N_s} (\lambda_i^n) = \lambda_{i, \max} \quad (5.20)$$

où $\lambda_i^n = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij}^n$, assure un modèle stable et des résultats d'une précision acceptable. Nous

définissons alors en remplacement de $\mathbf{D}_{\Delta\eta}^{1,n}$, la matrice constante suivante :

$$\mathbf{M}_{\Delta\eta}^1(p, k) = \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i^{pod} \frac{\phi_{ip}^n}{|K_i|} \left(\sum_{j=1}^3 L_{ij} \phi_{j-ik}^n \right) \quad (5.21)$$

L'équation (5.19) s'écrit alors :

$$\mathbf{A}_\eta^{n+1} = \mathbf{A}_\eta^n - \Delta t \left(\mathbf{M}_{hu}^1 \mathbf{A}_{hu}^n + \mathbf{M}_{hv}^1 \mathbf{A}_{hv}^n - \mathbf{M}_{\Delta\eta}^1 \mathbf{A}_\eta^n \right) \quad (5.22)$$

Pour l'ensemble des tests numériques présentés dans cette partie du travail, nous utilisons :

$$\lambda_i^{pod} = \bar{\lambda}_i = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} \lambda_i^n \quad (5.23)$$

D'autres formulations pourraient être proposées, l'objectif essentiel étant d'obtenir un modèle stable, raisonnablement précis et assurant une accélération appréciable des calculs.

5.3.2 Réduction des équations de la quantité de mouvement

Les équations discrétisées de la quantité de mouvement après développement et simplification s'écrivent :

$$(hu)_i^{n+1} = (hu)_i^n - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} \left(n_{ij}^x u_{ij}^n (hu)_{ij}^n + n_{ij}^y v_{ij}^n (hu)_{ij}^n + n_{ij}^x g h_i^n \eta_{ij}^n - \lambda_{ij} (hu)_{j-i}^n \right) \quad (5.24)$$

$$(hv)_i^{n+1} = (hv)_i^n - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} \left(n_{ij}^x u_{ij}^n (hv)_{ij}^n + n_{ij}^y v_{ij}^n (hv)_{ij}^n + n_{ij}^y g h_i^n \eta_{ij}^n - \lambda_{ij} (hv)_{j-i}^n \right) \quad (5.25)$$

Les termes sources ont été omis afin d'alléger la présentation des équations. Leur réduction sera présentée à la section suivante. Ces équations sont plus complexes du fait des termes non linéaires $u_{ij}^n (h u)_{ij}^n$, $v_{ij}^n (h v)_{ij}^n$, $u_{ij}^n (h v)_{ij}^n$, $v_{ij}^n (h u)_{ij}^n$ et $g h_i^n \eta_{ij}^n$. Leur traitement nécessite la considération des variables dépendantes u , v , et h ainsi que les bases associées. En utilisant la relation (5.11), et l'approximation de la vitesse d'onde λ_i^{pod} , l'équation (5.24) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hu}^{n+1} \varphi_{ik}^{hu} &= \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hu}^n \varphi_{ik}^{hu} \\ &- \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} \left(n_{ij}^x \left(\sum_{k=1}^{N_b} a_{k,u}^n \varphi_{ikj}^u \right) \left(\sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hu}^n \varphi_{ikj}^{hu} \right) + n_{ij}^y \left(\sum_{k=1}^{N_b} a_{k,v}^n \varphi_{ikj}^v \right) \left(\sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hu}^n \varphi_{ikj}^{hu} \right) \right. \\ &\left. + g n_{ij}^x \left(\sum_{k=1}^{N_b} a_{k,h}^n \varphi_{ik}^h \right) \left(\sum_{k=1}^{N_b} a_{k,\eta}^n \varphi_{ikj}^\eta \right) - \lambda_i^{pod} \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,\eta}^n \varphi_{j-ik}^\eta \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Ensuite par projection de Galerkin en utilisant la base modale φ_p^{hu} , l'équation réduite s'écrit :

$$\begin{aligned} a_{p,hu}^{n+1} &= a_{p,hu}^n - \Delta t \left(\sum_{m=1, k=1}^{N_b} a_{m,u}^n \mathbf{M}_{uhu}^2(m, p, k) a_{k,hu}^n + \sum_{m=1, k=1}^{N_b} a_{m,v}^n \mathbf{M}_{vhu}^2(m, p, k) a_{k,hu}^n \right. \\ &\left. + \sum_{m=1, k=1}^{N_b} a_{m,h}^n \mathbf{M}_{h\eta}^2(m, p, k) a_{k,\eta}^n - \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hu}^n \mathbf{M}_{\Delta hu}^2(p, k) \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

ou encore

$$\mathbf{A}_{hu}^{n+1} = \mathbf{A}_{hu}^n - \Delta t \left((\mathbf{A}_u^n)^T \mathbf{M}_{uhu}^2 \mathbf{A}_{hu}^n + (\mathbf{A}_v^n)^T \mathbf{M}_{vhu}^2 \mathbf{A}_{hu}^n + (\mathbf{A}_h^n)^T \mathbf{M}_{h\eta}^2 \mathbf{A}_\eta^n - \mathbf{M}_{\Delta hu}^2 \mathbf{A}_{hu}^n \right) \quad (5.28)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_{uhu}^2(m, p, k) = \sum_{i=1}^{Ne} \frac{\varphi_{ip}^{hu}}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} n_{ij}^x \varphi_{imj}^u \varphi_{ikj}^{hu} \\ \mathbf{M}_{vhu}^2(m, p, k) = \sum_{i=1}^{Ne} \frac{\varphi_{ip}^{hu}}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} n_{ij}^y \varphi_{imj}^v \varphi_{ikj}^{hu} \\ \mathbf{M}_{h\eta}^2(m, p, k) = \sum_{i=1}^{Ne} g \frac{\varphi_{ip}^{hu}}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} n_{ij}^x \varphi_{im}^h \varphi_{ikj}^\eta \\ \mathbf{M}_{\Delta hu}^2(p, k) = \sum_{i=1}^{Ne} \lambda_i^{pod} \frac{\varphi_{ip}^{hu}}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} \varphi_{j-ik}^{hu} \\ \varphi_{ikj}^{hu} = \frac{1}{2} (\varphi_{ik}^{hu} + \varphi_{jk}^{hu}), \quad \varphi_{j-ik}^{hu} = \frac{1}{2} (\varphi_{jk}^{hu} - \varphi_{ik}^{hu}), \quad p = 1, \dots, N_b \end{array} \right. \quad (5.29)$$

De même, la seconde équation (5.25) se réduit sous la forme :

$$\mathbf{A}_{hv}^{n+1} = \mathbf{A}_{hv}^n - \Delta t \left((\mathbf{A}_u^n)^T \mathbf{M}_{uhv}^3 \mathbf{A}_{hv}^n + (\mathbf{A}_v^n)^T \mathbf{M}_{vhu}^3 \mathbf{A}_{hv}^n + (\mathbf{A}_h^n)^T \mathbf{M}_{h\eta}^3 \mathbf{A}_{hv}^n - \mathbf{M}_{\Delta hv}^3 \mathbf{A}_{hv}^n \right) \quad (5.30)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_{uhv}^3(m, p, k) = \sum_{i=1}^{Ne} \frac{\varphi_{ip}^{hv}}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} n_{ij}^x \varphi_{imj}^u \varphi_{ikj}^{hv} \\ \mathbf{M}_{vhu}^3(m, p, k) = \sum_{i=1}^{Ne} \frac{\varphi_{ip}^{hv}}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} n_{ij}^y \varphi_{imj}^v \varphi_{ikj}^{hv} \\ \mathbf{M}_{h\eta}^3(m, p, k) = \sum_{i=1}^{Ne} g \frac{\varphi_{ip}^{hv}}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} n_{ij}^y \varphi_{im}^h \varphi_{ikj}^\eta \\ \mathbf{M}_{\Delta hv}^3(p, k) = \sum_{i=1}^{Ne} \lambda_i^{pod} \frac{\varphi_{ip}^{hv}}{|K_i|} \sum_{j=1}^3 L_{ij} \varphi_{j-ik}^{hv} \end{array} \right. \quad (5.31)$$

Les exposants '2' et '3' portés par les matrices \mathbf{M} indiquent leur rapport avec les deuxième et troisième équations du système (2.6) respectivement.

Les variables ROM a_η , a_{hu} et a_{hv} sont mises à jour selon les relations (5.22), (5.28) et (5.30).

Il reste cependant à calculer les variables additionnelles a_h , a_u et a_v .

Calcul de la variable ROM a_h

Puisque $h_i = \eta_i - z_i$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{N_b} a_{k,h}^n \phi_{ik}^h = \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,\eta}^n \phi_{ik}^\eta - z_i \quad (5.32)$$

La multiplication de (5.32) par ϕ_p^h donne :

$$a_{p,h}^n = \sum_{i=1}^{N_e} \phi_{ip}^h \left(\sum_{k=1}^{N_b} a_{k,\eta}^n \phi_{ik}^\eta - z_i \right) = \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,\eta}^n \left(\sum_{i=1}^{N_e} \phi_{ik}^\eta \phi_{ip}^h \right) - \sum_{i=1}^{N_e} z_i \phi_{ip}^h \quad (5.33)$$

Posant $\mathbf{M}_h^0(p, k) = \sum_{i=1}^{N_e} \phi_{ik}^\eta \phi_{ip}^h$ et $\mathbf{M}_{hz}^0(p) = \sum_{i=1}^{N_e} z_i \phi_{ip}^h$, on obtient :

$$a_{p,h}^n = \sum_{k=1}^{N_b} \mathbf{M}_h^0(p, k) a_{k,\eta}^n - \mathbf{M}_{hz}^0(p) \quad (5.34)$$

Calcul des variables ROM a_u et a_v

La vitesse moyenne en une cellule inondée $h_i^{pod} > \varepsilon$ peut être calculée selon la relation

$$u_i = \frac{(hu)_i}{h_i} \quad (5.35)$$

Afin d'obtenir un modèle assurant une accélération appréciable des calculs, l'approximation suivante a été considérée :

$$\sum_{k=1}^{N_b} a_{k,u}^n \varphi_{ik}^u = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{1}{h_i} a_{k,hu}^n \varphi_{ik}^{hu} = \frac{1}{h_i^{pod}} \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hu}^n \varphi_{ik}^{hu} \quad (5.36)$$

h_i^{pod} est une approximation de la hauteur d'eau h_i dans chaque cellule, calculée comme étant la hauteur d'eau moyenne relative aux *snapshots* :

$$h_i^{pod} = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} h_i^n \quad (5.37)$$

La projection de Galerkin appliquée à (5.36) donne

$$a_{p,u}^n = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{1}{h_i^{pod}} \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hu}^n \varphi_{ik}^{hu} \varphi_{ip}^u \quad (5.38)$$

Ayant évalué la variable $a_{p,hu}^n$ à partir de (5.29), $a_{p,u}^n$ est calculé selon la relation :

$$a_{p,u}^n = \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hu}^n \mathbf{M}_u^0(p, k), \quad p = 1, \dots, N_b \quad (5.39)$$

avec

$$\mathbf{M}_u^0(p, k) = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{1}{h_i^{pod}} \varphi_{ip}^u \varphi_{ik}^{hu} \quad (5.40)$$

A travers une analyse similaire :

$$a_{p,v}^n = \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hv}^n \mathbf{M}_v^0(p, k), \quad p = 1, \dots, N_b^v \quad (5.41)$$

avec

$$\mathbf{M}_v^0(p, k) = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{1}{h_i^{pod}} \varphi_{ip}^v \varphi_{ik}^{hv} \quad (5.42)$$

5.3.3 Réduction du terme source de friction

Le terme source de friction est également réduit à travers la projection de Galerkin. Selon son expression donnée par la relation (2.14) suivante :

$$\mathbf{S}(\mathbf{V}) = \left[0, \quad -g \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}}, \quad -g \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \right]^T$$

ce terme à l'instar de la vitesse d'onde λ_{ij}^n présente quelques difficultés de réduction. En effet, la norme de la vitesse $\sqrt{(u^2 + v^2)}$ compromet une écriture sous une forme polynomiale dont les coefficients seraient les inconnues du modèle réduit \mathbf{A}_h , \mathbf{A}_u et \mathbf{A}_v . Pour contourner cette difficulté, nous avons donc considéré la valeur moyenne sur l'ensemble des snapshots :

$$\|\mathbf{u}\|_i^{pod} = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} \left(\sqrt{(u_i^2 + v_i^2)} \right)_i^n \quad (5.43)$$

Ainsi, en utilisant le procédé de réduction appliqué aux sections (5.3.1) et (5.3.2), u et v sont remplacés par leur approximation selon (5.11) :

$$\left(\tilde{\mathbf{S}}_i \right)^n = \left[0, \quad -n^2 g \frac{\|\mathbf{u}\|_i^{pod}}{(h_i^{pod})^{1/3}} \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,u}^n \varphi_{ik}^u, \quad -n^2 g \frac{\|\mathbf{u}\|_i^{pod}}{(h_i^{pod})^{1/3}} \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,v}^n \varphi_{ik}^v \right]^T \quad (5.44)$$

et suite à la multiplication des équations (5.24) et (5.25) par $\boldsymbol{\varphi}_p^{hu}$ et $\boldsymbol{\varphi}_p^{hv}$ respectivement, il vient :

$$\mathbf{S}^{pod}(p, k) = \left[0, \sum_{i=1}^{N_e} \boldsymbol{\varphi}_{ip}^{hu} \left(-n^2 g \frac{\|\mathbf{u}\|_i^{pod}}{(h_i^{pod})^{1/3}} \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,u}^n \boldsymbol{\varphi}_{ik}^u \right), \sum_{i=1}^{N_e} \boldsymbol{\varphi}_{ip}^{hv} \left(-n^2 g \frac{\|\mathbf{u}\|_i^{pod}}{(h_i^{pod})^{1/3}} \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,v}^n \boldsymbol{\varphi}_{ik}^v \right) \right]^T \quad (5.45)$$

Par permutation des sommations :

$$\mathbf{S}^{pod}(p, k) = \left[0, \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,u}^n \left(-n^2 g \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\|\mathbf{u}\|_i^{pod}}{(h_i^{pod})^{1/3}} \boldsymbol{\varphi}_{ip}^{hu} \boldsymbol{\varphi}_{ik}^u \right), \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,v}^n \left(-n^2 g \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\|\mathbf{u}\|_i^{pod}}{(h_i^{pod})^{1/3}} \boldsymbol{\varphi}_{ip}^{hv} \boldsymbol{\varphi}_{ik}^v \right) \right]^T \quad (5.46)$$

Les matrices constantes indépendantes suivantes peuvent être alors construites *en phase de prétraitement* :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{Friction}^2(p, k) &= \left(-n^2 g \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\|\mathbf{u}\|_i^{pod}}{(h_i^{pod})^{1/3}} \boldsymbol{\varphi}_{ip}^{hu} \boldsymbol{\varphi}_{ik}^u \right) \\ \mathbf{M}_{Friction}^3(p, k) &= \left(-n^2 g \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\|\mathbf{u}\|_i^{pod}}{(h_i^{pod})^{1/3}} \boldsymbol{\varphi}_{ip}^{hv} \boldsymbol{\varphi}_{ik}^v \right) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Les équations (4.29) et (4.30) tenant compte des termes de frictions s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{hu}^{n+1} &= \mathbf{A}_{hu}^n - \Delta t \left((\mathbf{A}_u^n)^T \mathbf{M}_{uhu}^2 \mathbf{A}_{hu}^n + (\mathbf{A}_v^n)^T \mathbf{M}_{vhu}^2 \mathbf{A}_{hu}^n + (\mathbf{A}_h^n)^T \mathbf{M}_{h\eta}^2 \mathbf{A}_{\eta}^n \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{M}_{\Delta hu}^2 \mathbf{A}_{hu}^n - \mathbf{M}_{Friction}^2 \mathbf{A}_{hu}^n \right) \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{hv}^{n+1} &= \mathbf{A}_{hv}^n - \Delta t \left((\mathbf{A}_u^n)^T \mathbf{M}_{uhv}^3 \mathbf{A}_{hv}^n + (\mathbf{A}_v^n)^T \mathbf{M}_{vhv}^3 \mathbf{A}_{hv}^n + (\mathbf{A}_h^n)^T \mathbf{M}_{h\eta}^3 \mathbf{A}_{\eta}^n \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{M}_{\Delta hv}^3 \mathbf{A}_{hv}^n - \mathbf{M}_{Friction}^3 \mathbf{A}_{hv}^n \right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

5.3.4 Traitement des cellules sèches

Les traitements spécifiques effectués aux interfaces H/S dans le schéma aux volumes finis ne peuvent être reconduits dans le ROM car les matrices constantes indépendantes \mathbf{M} sont calculées une seule fois *en phase de prétraitement*. Des corrections sont cependant apportées durant la construction des matrices \mathbf{M} lorsqu'une cellule sèche $h_i^{pod} \leq \varepsilon \approx 10^{-3}$ est identifiée. En annulant la vitesse à l'intérieur d'une telle cellule ($u_i = v_i = 0$), nous imposons $\varphi_{ip}^u \varphi_{ik}^{hu} = \varphi_{ip}^v \varphi_{ik}^{hv} = 0$ en (5.40) et (5.42). Pour une cellule sèche qui pourrait être inondée, un traitement plus élaboré a été proposé pour le calcul des flux du schéma aux volumes finis (2.6). Cependant, ces calculs s'effectuant à chaque pas temps ne sauraient être appliqués au modèle réduit au risque d'affecter sérieusement le temps de calculs et partant, l'efficacité du ROM.

5.3.5 Conditions aux limites pour le modèle réduit

Les flux aux interfaces coïncidant avec les frontières externes du domaine sont également projetés sur les bases POD. Les flux sont calculés dans le modèle VF selon la nature de la frontière. Une cellule fictive $K_{j,\partial\Omega}$ partageant l'interface correspondant à la frontière avec la cellule $K_{i,\partial\Omega}$ est considérée. Des modifications sont apportées aux variables indépendantes dans chacune des cellules pour le calcul du flux.

Les termes de frontière dans le modèle réduit sont des vecteurs supplémentaires représentant des sollicitations extérieures. Ils sont obtenus de la projection sur les bases modales des termes de frontière du schéma aux volumes finis. Un problème se pose néanmoins lorsque la condition de frontière est fonction du temps, car ne pouvant alors être représentée par des matrices constantes. C'est le cas lors de l'imposition d'un débit ou d'une condition de marée à une des frontières du domaine.

Vu que le nombre de cellules aux frontières d'entrée et de sortie du domaine est généralement faible, nous nous sommes proposés de :

- Calculer le flux à la frontière selon le modèle VF, suite aux calculs des variables η , hu , et hv à partir des coordonnées modales \mathbf{A}_η^n , \mathbf{A}_{hu}^n et \mathbf{A}_{hv}^n en utilisant la relation réciproque à (5.11).
- Réduire le terme de flux de dimension, le nombre de cellules à la frontière considérée par projection de Galerkin à l'aide des modes ϕ_k^η , ϕ_k^{hu} et ϕ_k^{hv} .

Les paragraphes suivants donnent les détails de la procédure selon la nature de la frontière.

Frontière solide et condition d'imperméabilité

A une frontière solide, la condition de non-glissement est imposée. Cette condition étant fixe dans le temps, elle peut être implémentée directement lors de la construction des matrices constantes indépendantes \mathbf{M} . Il suffit pour cela à l'instar du calcul du flux de mur dans le modèle explicite :

$$\mathbf{F}_{i,mur}^{FV} = L_i \begin{bmatrix} 0 \\ n_i^x g h_i \eta_i \\ n_i^y g h_i \eta_i \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

d'imposer les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \phi_{imj}^u = 0 \\ \phi_{imj}^v = 0 \\ L_{ij} n_{ij}^{x,y} \phi_{imj}^h \phi_{ikj}^\eta = L_i n_i^{x,y} \phi_{im}^h \phi_{ik}^\eta \end{cases} \quad (5.51)$$

L_i est la longueur de l'interface coïncidant avec la frontière. Les seuls termes non nuls sont alors les composantes correspondantes des matrices $\mathbf{M}_{h\eta}^2$ et $\mathbf{M}_{h\eta}^3$ définies en (5.29) et (5.31) respectivement.

Entrée ou sortie avec débit

La condition de débit pose le problème de la condition aux limites dépendante du temps.

Comme indiqué plus haut, le flux est calculé selon le modèle explicite :

$$\mathbf{F}_{i,débit}^{FV} = L_i \begin{bmatrix} -\bar{Q}_i \\ n_i^x \left(\frac{\bar{Q}_i^2}{h_i} + g h_i \eta_i \right) \\ n_i^y \left(\frac{\bar{Q}_i^2}{h_i} + g h_i \eta_i \right) \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

\bar{Q}_i est le débit unitaire (par unité de longueur de la frontière). Les variables h_i et η_i sont calculées à chaque pas de temps et pour chaque cellule à la frontière selon les relations :

$$\begin{cases} \eta_i^n = \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,\eta}^n \varphi_{ik}^n \\ h_i^n = \eta_i^n - z_i \end{cases} \quad (5.53)$$

Le vecteur de flux $\mathbf{F}_{i,débit}^{FV}$ est alors multiplié par les modes $\boldsymbol{\varphi}_k^\eta$, $\boldsymbol{\varphi}_k^{hu}$ et $\boldsymbol{\varphi}_k^{hv}$ afin d'obtenir des vecteurs POD/ROM de sollicitation extérieure relative au débit, à ajouter au système (5.22), (5.48) et (5.49) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{débit}^{1,ROM}(k) &= \sum_{i=1}^{N_e^{CL}} -\varphi_{ik}^\eta \frac{L_i}{|K_i|} \bar{Q}_i \\ \mathbf{F}_{débit}^{2,ROM}(k) &= \sum_{i=1}^{N_e^{CL}} \varphi_{ik}^{hu} \frac{L_i}{|K_i|} n_i^x \left(\frac{\bar{Q}_i^2}{h_i} + g h_i \eta_i \right) \\ \mathbf{F}_{débit}^{3,ROM}(k) &= \sum_{i=1}^{N_e^{CL}} \varphi_{ik}^{hv} \frac{L_i}{|K_i|} n_i^y \left(\frac{\bar{Q}_i^2}{h_i} + g h_i \eta_i \right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

N_e^{CL} désigne le nombre de cellules à la frontière considérée.

Les exposants '1', '2' et '3' traduisent que les vecteurs correspondants sont ajoutés aux équations (5.22), (5.48) et (5.49) respectivement, lorsqu'une frontière est soumise à une condition de débit.

Entrée ou sortie transmissive

Les frontières transmissives laissent passer le courant. Il est cependant parfois nécessaire d'imposer un niveau d'eau pour la fermeture du problème. Dans ce cas, la démarche est identique à la précédente. Le flux est d'abord calculé à partir du modèle explicite VF:

$$\mathbf{F}_{i,trans}^{FV} = L_i \begin{bmatrix} n_i^x (hu)_i + n_i^y (hv)_i \\ n_i^x u_i (hu)_i + n_i^y v_i (hu)_i + n_i^x g h_i \eta_i \\ n_i^x u_i (hv)_i + n_i^y v_i (hv)_i + n_i^y g h_i \eta_i \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Les variables $(hu)_i$ et $(hv)_i$ sont calculées à chaque pas de temps et pour chacune des cellules à la frontière, selon les relations :

$$\begin{cases} (hu)_i^n = \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hu}^n \varphi_{ik}^{hu} \\ (hv)_i^n = \sum_{k=1}^{N_b} a_{k,hv}^n \varphi_{ik}^{hv} \end{cases} \quad (5.56)$$

Par projection de Galerkin à l'aide des modes φ_k^η , φ_k^{hu} et φ_k^{hv} , on obtient les vecteurs POD/ROM suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{trans}^{1,ROM}(k) &= \sum_{i=1}^{N_e^{CL}} \varphi_{ik}^\eta \frac{L_i}{|K_i|} (n_i^x (hu)_i + n_i^y (hv)_i) \\ \mathbf{F}_{trans}^{2,ROM}(k) &= \sum_{i=1}^{N_e^{CL}} \varphi_{ik}^{hu} \frac{L_i}{|K_i|} (n_i^x u_i (hu)_i + n_i^y v_i (hu)_i + n_i^x g h_i \eta_i) \\ \mathbf{F}_{trans}^{3,ROM}(k) &= \sum_{i=1}^{N_e^{CL}} \varphi_{ik}^{hv} \frac{L_i}{|K_i|} (n_i^x u_i (hv)_i + n_i^y v_i (hv)_i + n_i^y g h_i \eta_i) \end{aligned} \quad (5.57)$$

De même, les vecteurs $\mathbf{F}_{trans}^{1,ROM}$, $\mathbf{F}_{trans}^{2,ROM}$ et $\mathbf{F}_{trans}^{2,ROM}$ ainsi obtenus seront ajoutés aux équations (5.22), (5.48) et (5.49) respectivement, lorsqu'une frontière est soumise à une condition de flux transmissif.

5.3.6 Propriété de conservation (C-property)

La conservation de la solution du fluide au repos décrite par (2.34) est vérifiée par le modèle réduit (5.22), (5.48) et (5.49) pour un domaine totalement inondé. Cependant en présence de zones sèches à l'intérieur du domaine, la C-property n'est pas assurée. En effet, les calculs particuliers aux interfaces H/S, identiques à ceux du schéma aux volumes finis, ne peuvent être appliqués au modèle réduit en *phase de traitement* pour les raisons d'accélération des calculs. Cependant les courants générés restent de faible amplitude comme le montreront les tests numériques.

5.3.7 Extraction des bases POD

Après simulation du problème considéré, chacune des matrices de snapshots relatives aux différentes variables stockées est décomposée en valeurs singulières. Cette opération peut être onéreuse en CPU lorsque la matrice de snapshot $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_{N_s}]$ est de très grande taille. C'est le cas lorsqu'un domaine de calculs assez large est considéré ou lorsqu'un maillage très fin est utilisé. Il en résulte une matrice de snapshot de dimension $N_e \times N_s$ avec $N_e \gg N_s$. Pour palier cet handicap, nous utilisons la procédure de décomposition dite '*economy size decomposition*' dans laquelle seulement les $N_b \ll N_s$ premiers modes et valeurs propres sont extraits (Chan, 1982). Cette technique permet d'éviter une saturation de mémoire et aboutit à un gain très appréciable en temps CPU, pour la phase d'extraction des bases modales POD.

5.3.8 Algorithme détaillé du modèle réduit

Le modèle réduit fonctionne selon les étapes suivantes :

1. Le problème considéré est simulé à l'aide du modèle volumes finis sur une période $[0, T_s]$ et les snapshots sont stockés pour chacune des variables η, hu, hv, h, u et v .
2. Les bases POD sont extraites à partir des matrices de snapshots et les matrices constantes et indépendantes \mathbf{M} sont calculées.
3. Les valeurs initiales des vecteurs de coordonnées modales $\mathbf{A}_\eta^0, \mathbf{A}_{hu}^0$ et \mathbf{A}_{hv}^0 sont calculées à partir de la solution initiale du modèle explicite selon les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_\eta^0 = \sum_{i=1}^{Ne} \eta_i^0 \boldsymbol{\varphi}_i^\eta \\ \mathbf{A}_{hu}^0 = \sum_{i=1}^{Ne} (hu)_i^0 \boldsymbol{\varphi}_i^{hu} \\ \mathbf{A}_{hv}^0 = \sum_{i=1}^{Ne} (hv)_i^0 \boldsymbol{\varphi}_i^{hv} \end{array} \right. \quad (5.58)$$

4. Les coordonnées modales \mathbf{A} sont calculées selon le système d'équations définissant le modèle réduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_h^n = \mathbf{M}_h^0 \mathbf{A}_\eta^n - \mathbf{M}_{hz}^0 \\ \mathbf{A}_u^n = \mathbf{M}_u^0 \mathbf{A}_{hu}^n \\ \mathbf{A}_v^n = \mathbf{M}_v^0 \mathbf{A}_{hv}^n \\ \mathbf{A}_\eta^{n+1} = \mathbf{A}_\eta^n - \Delta t \left(\mathbf{M}_{hu}^1 \mathbf{A}_{hu}^n + \mathbf{M}_{hv}^1 \mathbf{A}_{hv}^n - \mathbf{M}_{\Delta\eta}^1 \mathbf{A}_\eta^n \right) \\ \mathbf{A}_{hu}^{n+1} = \mathbf{A}_{hu}^n - \Delta t \left((\mathbf{A}_u^n)^T \mathbf{M}_{uhu}^2 \mathbf{A}_{hu}^n + (\mathbf{A}_v^n)^T \mathbf{M}_{vhu}^2 \mathbf{A}_{hu}^n + (\mathbf{A}_h^n)^T \mathbf{M}_{h\eta}^2 \mathbf{A}_\eta^n \right. \\ \quad \left. - \mathbf{M}_{\Delta hu}^2 \mathbf{A}_{hu}^n - \mathbf{M}_{Friction}^2 \mathbf{A}_{hu}^n \right) \\ \mathbf{A}_{hv}^{n+1} = \mathbf{A}_{hv}^n - \Delta t \left((\mathbf{A}_u^n)^T \mathbf{M}_{uhv}^3 \mathbf{A}_{hv}^n + (\mathbf{A}_v^n)^T \mathbf{M}_{vhv}^3 \mathbf{A}_{hv}^n + (\mathbf{A}_h^n)^T \mathbf{M}_{h\eta}^3 \mathbf{A}_\eta^n \right. \\ \quad \left. - \mathbf{M}_{\Delta hv}^3 \mathbf{A}_{hv}^n - \mathbf{M}_{Friction}^3 \mathbf{A}_{hv}^n \right) \end{array} \right. \quad (5.59)$$

5. Finalement, la solution à un instant désiré $t \in [0, T_s]$ est reconstruite :

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^{N_b^q} a_k^q(t) \boldsymbol{\varphi}_k^q ; \quad q = \eta, hu \text{ ou } hv \quad (5.60)$$

Le nombre total d'opérations requises pour le modèle réduit (4.45) est de l'ordre de $N_b^\eta + N_b^{hu} + N_b^{hv} + N_b^h + N_b^u + N_b^v$ alors qu'avec le modèle explicite (2.18), le nombre total d'opérations est de l'ordre de $3 \times N_e$. Nous réalisons ainsi une importante réduction du temps CPU si $N_b^q \ll N_e$.

5.4 Conclusion

Un modèle d'ordre réduit (ROM) pour la prédiction des écoulements à surface libre a été proposé. Ce modèle est basé essentiellement sur la réduction du schéma aux volumes finis à travers la projection de Galerkin des équations discrétisées sur des bases obtenues par la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) des matrices des snapshots.

Des approximations des termes non linéaires relatifs au flux de convection et de la vitesse d'onde ont été proposées pour la réalisation d'un modèle réduit effectif. En d'autres termes, un modèle pour lequel, le coût des calculs en *phase de traitement* dépend de la dimension de la base de réduction et non de la dimension du problème discrétisé (Galbally, 2008). Ce procédé a abouti à la définition de matrices constantes indépendantes calculées en *phase de prétraitement*, assurant ainsi un gain considérable en temps de calculs. Les résultats à obtenir du modèle réduit seront des approximations des résultats fournis par le modèle aux volumes finis. La précision des résultats des applications numériques justifiera le bien-fondé de la démarche proposée. Le modèle numérique d'ordre réduit détaillé dans ce chapitre a été intégralement traduit en FORTRAN 90 et ajouté comme un module supplémentaire au code CUTEFLOW. L'utilisateur a ainsi la latitude de basculer aisément en mode VF ou en mode POD/ROM par simple sélection du mode souhaité.

CHAPITRE 6

VALIDATION DU MODÈLE RÉDUIT POD/ROM

6.1 Introduction

Le modèle d'ordre réduit proposé est évalué à travers ce chapitre. A cet effet, trois tests numériques sont considérés. Le premier est un test de rupture de barrage sur lit sec. Le second test simule des oscillations d'eau dans un bassin parabolique et le dernier porte sur une rupture de barrage dans l'estacade de Bordeaux. Chaque test est simulé à l'aide du modèle volumes finis durant une période donnée au cours de laquelle des solutions ou snapshots sont stockées à différents instants. Les matrices de snapshots ainsi obtenues sont décomposées en valeurs singulières et les bases orthonormées sont extraites pour la construction des matrices constantes indépendantes (Figure 6.1).

La validation du modèle réduit consiste ici à reproduire la solution du modèle volumes finis (*phase de reproduction*) pour chaque problème considéré. Il s'agira aussi et surtout d'évaluer le gain en temps de calculs dont dépend l'effectivité de la réduction du modèle. La figure 6.2 présente l'algorithme des simulations comparées d'un problème considéré entre le modèle VF et le modèle réduit POD/ROM. Pour l'évaluation du gain en temps de calculs, les temps CPU pour les phases principales désignées dans l'algorithme par *Modèle FV* et *POD/ROM* sont comparés. Enfin, les solutions fournies par les deux modèles sont comparées quantitativement à travers le calcul des erreurs relatives selon la norme L^2 :

$$E_{L^2}(q) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_e} (q_{k, \text{POD/ROM}} - q_{k, \text{full FV}})^2}{\sum_{k=1}^{N_e} (q_{k, \text{full FV}})^2}} \quad (6.1)$$

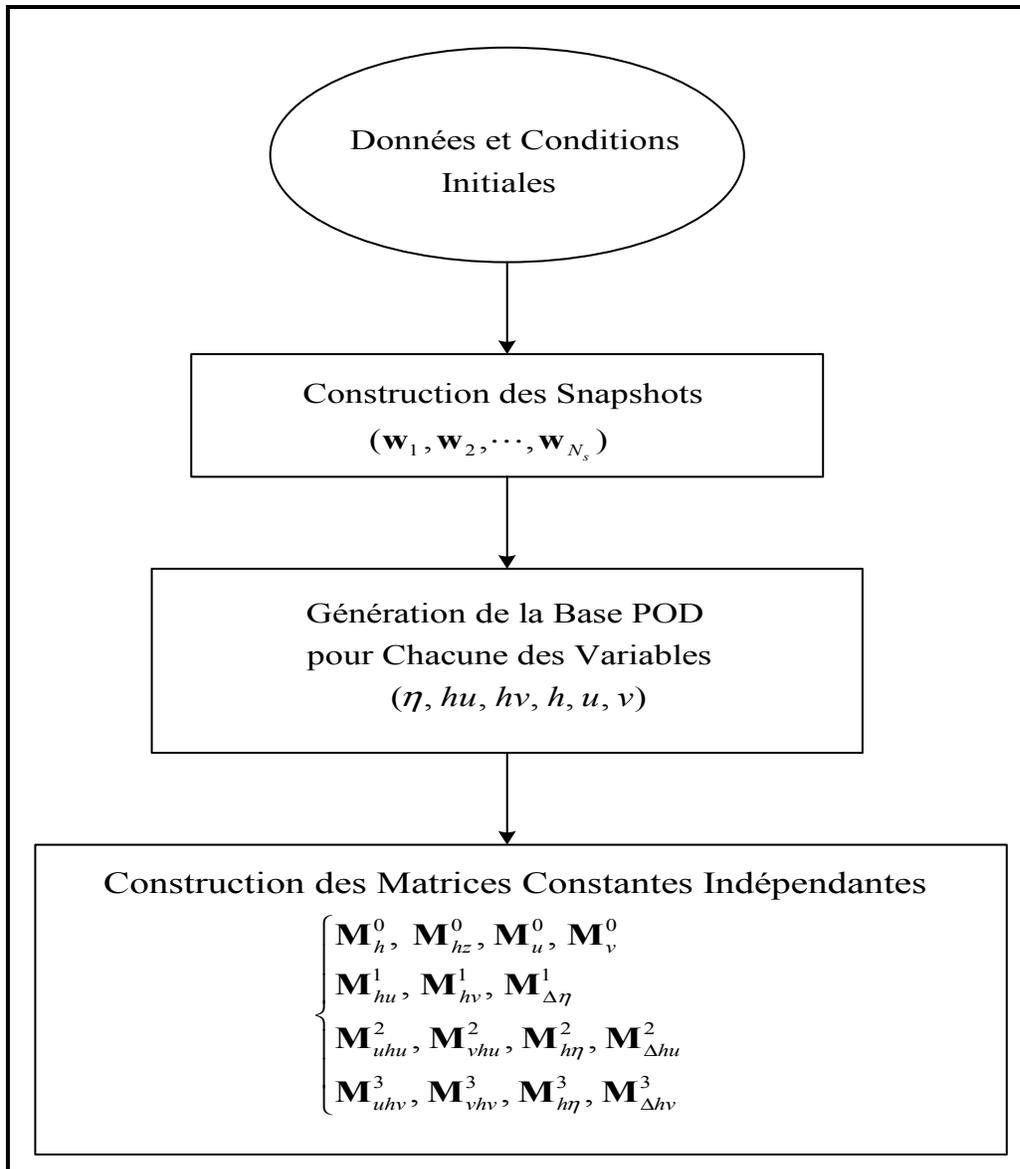


Figure 6.1 Phase de prétraitement
Procédure de construction des matrices constantes indépendantes
du modèle réduit POD/ROM

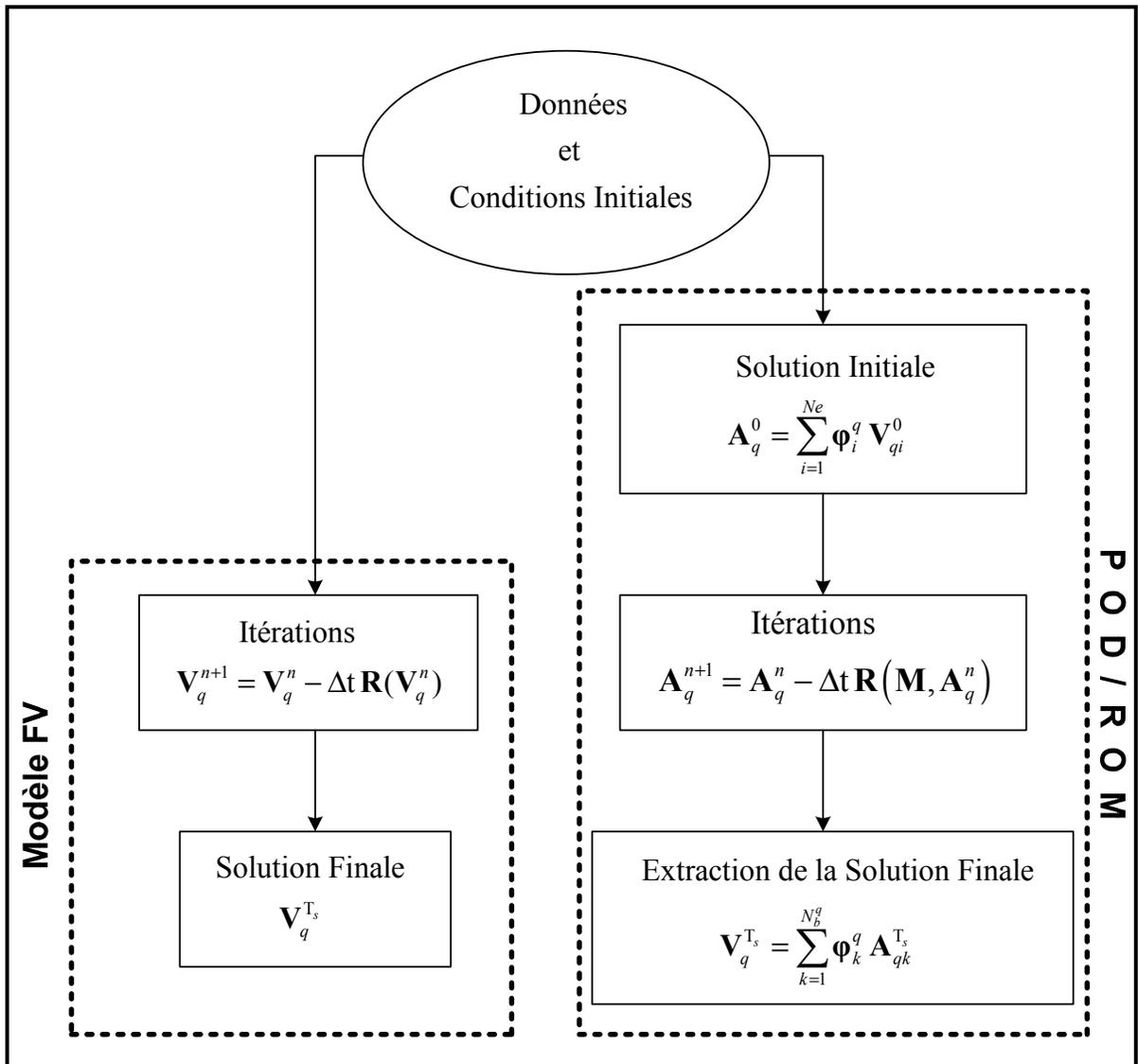


Figure 6.2 Phase de traitement
Procédure de la simulation comparée d'un problème donné
entre les modèles VF et POD/ROM

6.2 Écoulement de rupture de barrage avec lit aval sec

Ce test de rupture de barrage avec lit aval sec simulé à la section (3.1.2) est repris pour la validation du modèle d'ordre réduit. À l'instant initial le niveau d'eau en amont du barrage est de $h_1 = 10$ m. L'écoulement est simulé dans un premier temps avec le modèle VF durant $T_s = 2,5$ s au cours desquels $N_{snapshot} = 25$ snapshots sont enregistrés pour l'extraction des bases modales. Pour ce problème quasiment unidimensionnel, la figure 6.3 montre la dégénérescence rapide des valeurs propres relatives aux variables η et hu . Une base de dimension réduite formée des 5 premiers modes capturant 98% et 91% d'énergie pour les variables η et hu respectivement est considérée pour les simulations avec le modèle POD/ROM (Tableau 6.1).

Tableau 6.1 Rupture de barrage sur lit aval sec
Paramètres de construction du POD/ROM

| T_s (s) | h_1 (m) | $N_{snapshot}$ | N_b^η | N_b^{hu} |
|-----------|-----------|----------------|------------|------------|
| 2.5 | 10 | 25 | 5 | 5 |

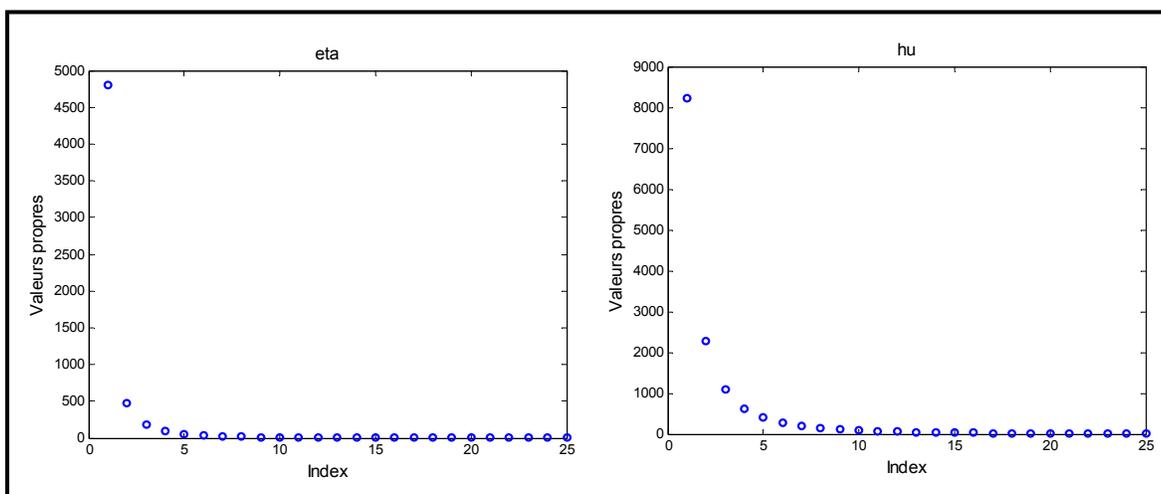


Figure 6.3 Rupture de barrage sur lit aval sec
Diagramme spectral relatif aux variables η et hu

La figure 6.4 montre les caractéristiques des huit premiers modes pour chacune des variables le long de l'axe central du canal. On observe des oscillations à hautes fréquences autour de la position initiale du barrage à partir du sixième mode. Le choix des cinq premiers modes est ainsi justifié. La simulation du problème pour les données et conditions initiales identiques (phase de reproduction) donne des résultats assez proches de ceux fournis par le modèle VF. La figure 6.5 présente la surface libre et la vitesse prédites à $T_s = 2,5$ s par le modèle d'ordre réduit, le long de l'axe central du canal.

Les résultats sont comparés aux solutions du modèle VF et aux solutions analytiques. La prédiction de la vitesse par le modèle réduit présente des oscillations et s'annule bien avant d'atteindre la valeur maximale. Ces instabilités sont dues à l'approximation du terme de stabilisation du flux dans l'approche POD et au fait que les interfaces humide/sec ne peuvent être calculées en phase de traitement pour le besoin de gain en temps de calcul. La prédiction de la surface libre est beaucoup plus satisfaisante et l'erreur relative selon la norme L^2 vérifie $E_{L^2}(\eta, x, t) < 8 \times 10^{-2}$ (Figure 6.6). L'évaluation du gain en temps de calculs montre que la simulation du problème à partir du modèle réduit est environ 800 fois plus rapide qu'avec le modèle VF. Le tableau 6.2 compare les temps CPU pour différents pas de temps et montre une accélération appréciable des calculs à travers l'utilisation de modèle POD/ROM.

Tableau 6.2 Rupture de barrage sur lit aval sec
Comparaison du temps CPU entre le modèle VF et le POD/ROM pour $T_s = 2,5$ s

| | FV($cfl = 0,9$) | POD($\Delta t = 0,1$) | FV($\Delta t = 0,001$) | POD($\Delta t = 0,001$) |
|---------------|-------------------|-------------------------|--------------------------|---------------------------|
| Temps CPU (s) | 56,96 | $7,08 \times 10^{-2}$ | 88,11 | $9,36 \times 10^{-2}$ |

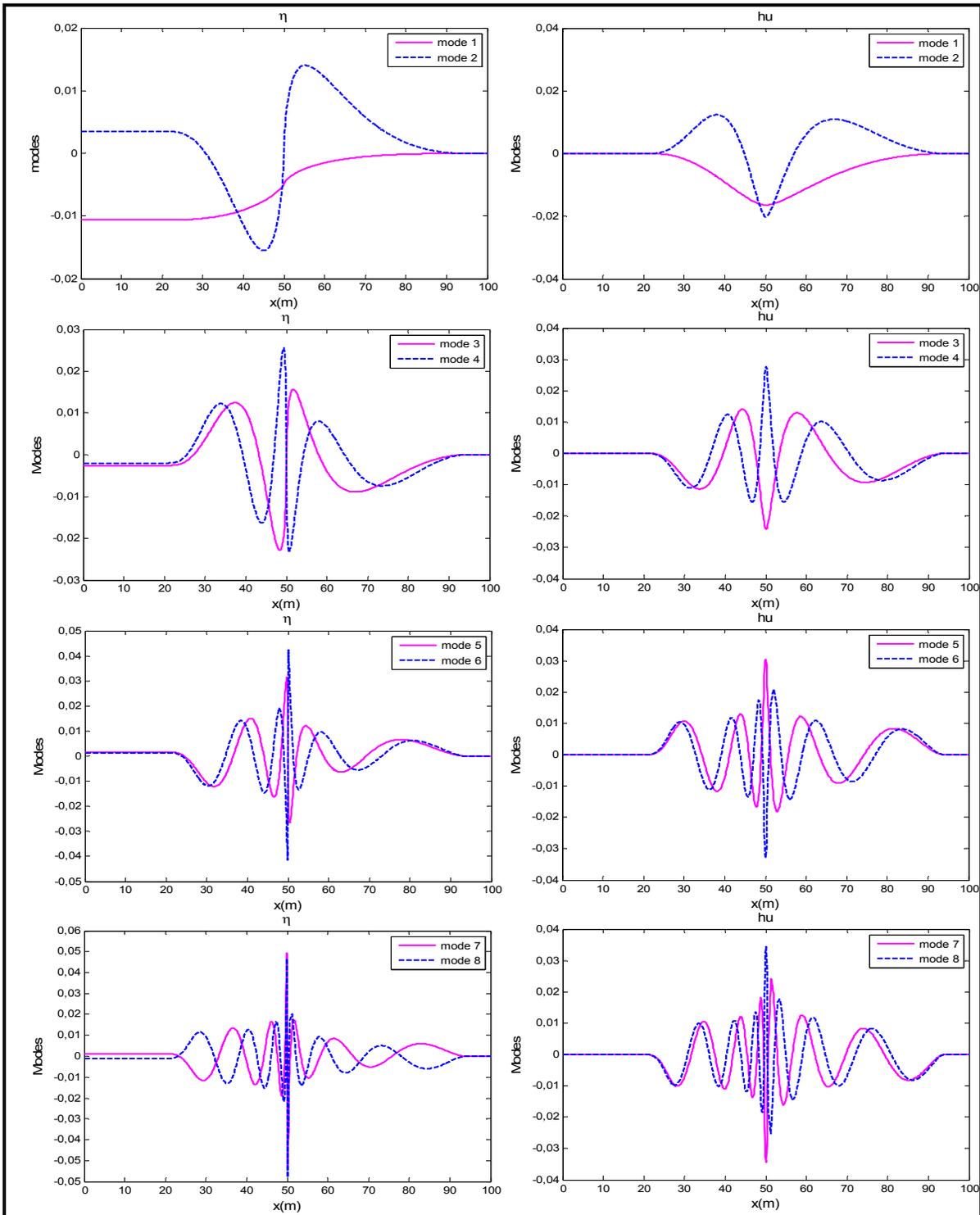


Figure 6.4 Rupture de barrage sur lit aval sec
Description des huit premiers modes relatifs aux variables η et hu
le long de l'axe central du canal

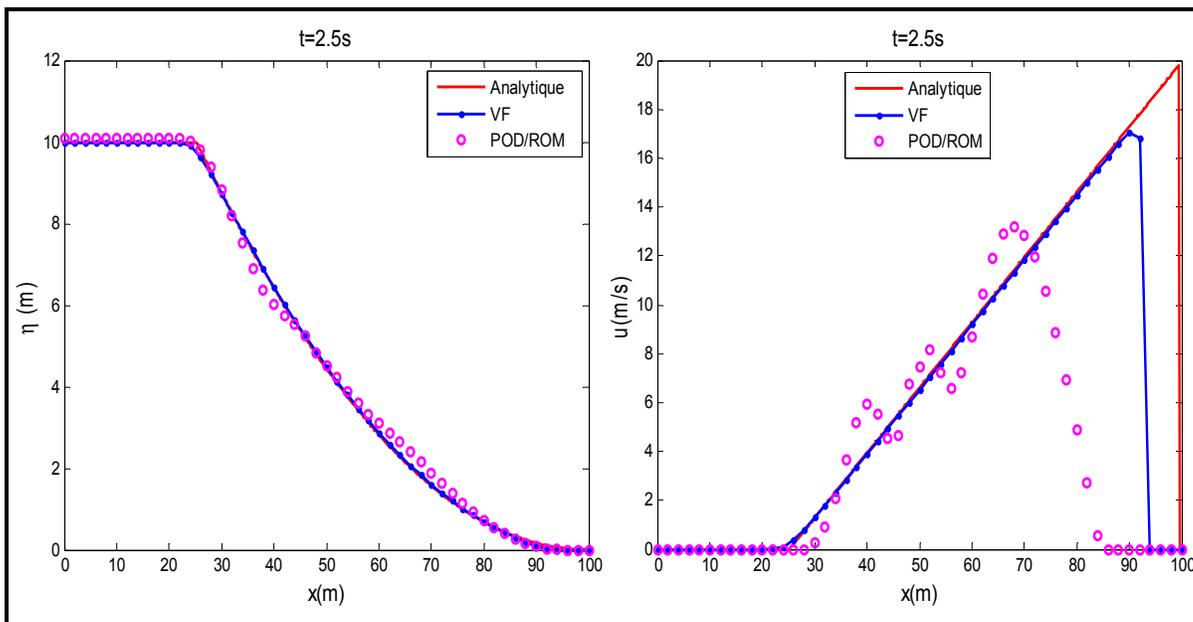


Figure 6.5 Rupture de barrage dans un canal avec lit aval sec
Prédictions comparées de la surface libre et de la vitesse entre le modèle volumes finis et le modèle POD/ROM avec la solution analytique

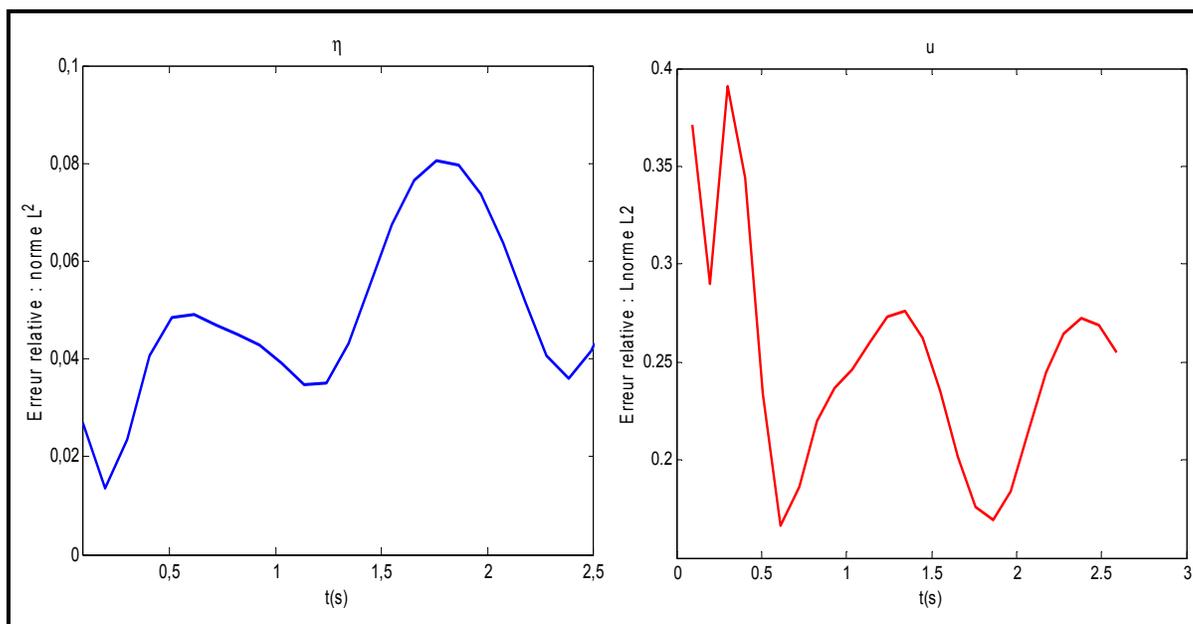


Figure 6.6 Rupture de barrage dans un canal avec lit aval sec
Évolution temporelle de l'erreur sur les prédictions de la surface libre et de la vitesse selon la norme L^2 par le modèle POD/ROM relativement au modèle VF

6.3 Oscillations libres dans un bassin parabolique

Ce test simule l'oscillation de la surface libre d'un volume d'eau donné dans un bassin parabolique. Le mouvement oscillatoire est périodique, de faible amplitude sans dissipation d'énergie et la friction est négligée. La bathymétrie est définie par le paraboloïde de révolution :

$$b(x, y) = h_0 \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} - 1 \right) \quad (6.2)$$

où h_0 et a sont définis comme indiqué à la figure 6.7.

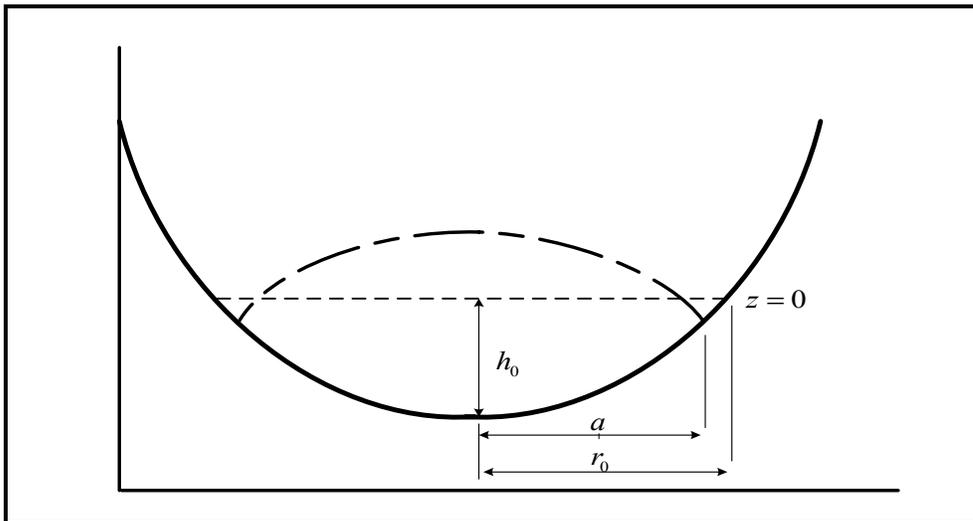


Figure 6.7 Bassin parabolique
Description schématique du problème

La solution analytique à ce problème proposée par Thacker (1981) s'écrit :

$$\eta(x, y, t) = \max \left[b(x, y), h_0 \left(\frac{\sqrt{1-A^2}}{1-A \cos(\omega t)} - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \left(\frac{1-A^2}{(1-A \cos(\omega t))^2} - 1 \right) - 1 \right) \right] \quad (6.3)$$

avec $\omega = \sqrt{8gh_0}/a$ et $A = (a^4 - r_0^4)/(a^4 + r_0^4)$ où r_0 est la distance radiale du centre au point du paraboloïde de cote $z=0$ (figure 6.7). Les simulations numériques ont été effectuées avec les valeurs suivantes des paramètres $h_0 = 0,1$ m, $a = 1$ et $r_0 = 0,8$ m identiques à celles utilisées par Song et al. (2010). Le domaine considéré est de dimension $[-2 \text{ m}, 2 \text{ m}] \times [-2 \text{ m}, 2 \text{ m}]$ discrétisé avec 39200 cellules triangulaires et le problème est simulé sur une période de $T_s = 2\pi / \omega = 2,2$ s.

Pour ce problème à bathymétrie variable, une analyse de convergence a montré la sensibilité des bases POD au nombre de snapshots retenu. La convergence est atteinte pour les 4 premiers modes pour 440 snapshots (soit un snapshot chaque 0,005 s) (Figure 6.8). Les solutions obtenues pour les nombres $N_b = 2$, $N_b = 4$ et $N_b = 5$ de modes significatifs à différents instants sont comparées à celles données par le modèle VF et les solutions analytiques (Figure 6.9). La convergence est atteinte pour 4 modes significatifs. Le temps CPU requis pour la simulation du problème sur $T_s = 2,22$ s par le modèle réduit est environ 870 fois inférieur à celui requis par le modèle VF comme l'indique le tableau 6.3. Des oscillations sont observables pour les prédictions de la surface libre obtenues du ROM à $t = T/2$ et $t = T/3$ mais ces dernières s'estompent dans le temps comme le montre la solution au bout de la période à la figure 6.9. Les figures 6.10 et 6.11 montrent les champs de vitesses et les lignes de contours relatives à la hauteur d'eau dans le bassin aux instants $t = T/6$ et $t = T/2$. À la demi-période, on note un retard sur la prédiction de la propagation de l'onde vers le centre du bol par le ROM relativement au modèle VF (Figure 6.10).

Ces difficultés numériques peuvent encore une fois être justifiées par les approximations des termes non linéaires utilisées pour l'obtention du modèle d'ordre réduit effectif. L'accent est mis sur l'accélération des calculs et l'obtention de résultats acceptables relativement au modèle volumes finis. En effet, l'erreur relative à la solution exacte reste faible avec $E_{L^2}(\eta, x, t) < 1,4 \times 10^{-2}$ comme le montre la figure 6.12.

Tableau 6.3 Bassin parabolique
 Temps CPU comparés entre les modèles VF et POD/ROM pour $T_s = 2,22$ s

| | FV ($cfl = 0,4$) | POD ($\Delta t = 0,01$) | FV ($\Delta t = 0,001$) | POD ($\Delta t = 0,001$) |
|---------------|--------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| Temps CPU (s) | 44,41 | 0,11 | 139,79 | 0,16 |

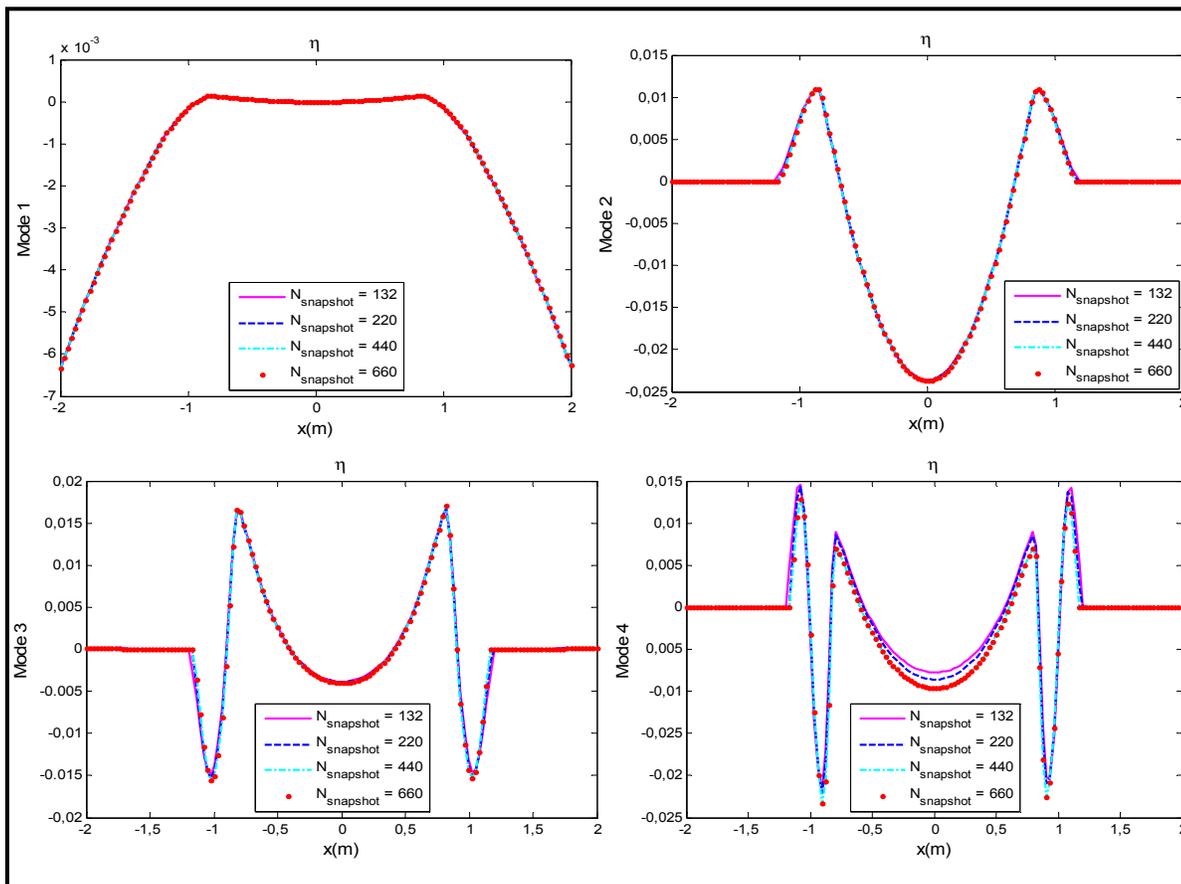


Figure 6.8 Bassin parabolique
 Convergence des modes relativement au nombre de snapshots

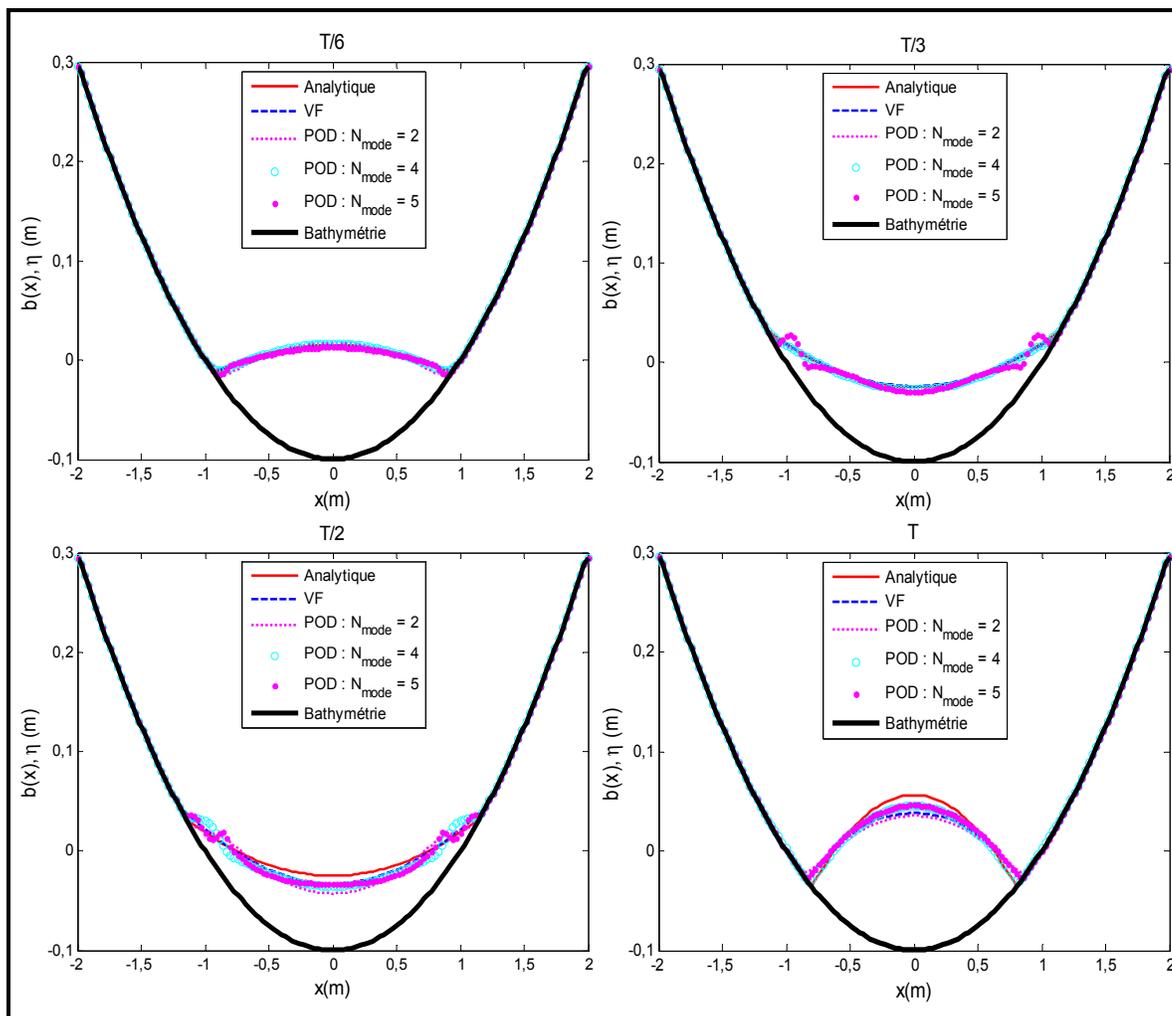


Figure 6.9 Bassin parabolique
Convergence de la solution avec le nombre de modes significatifs

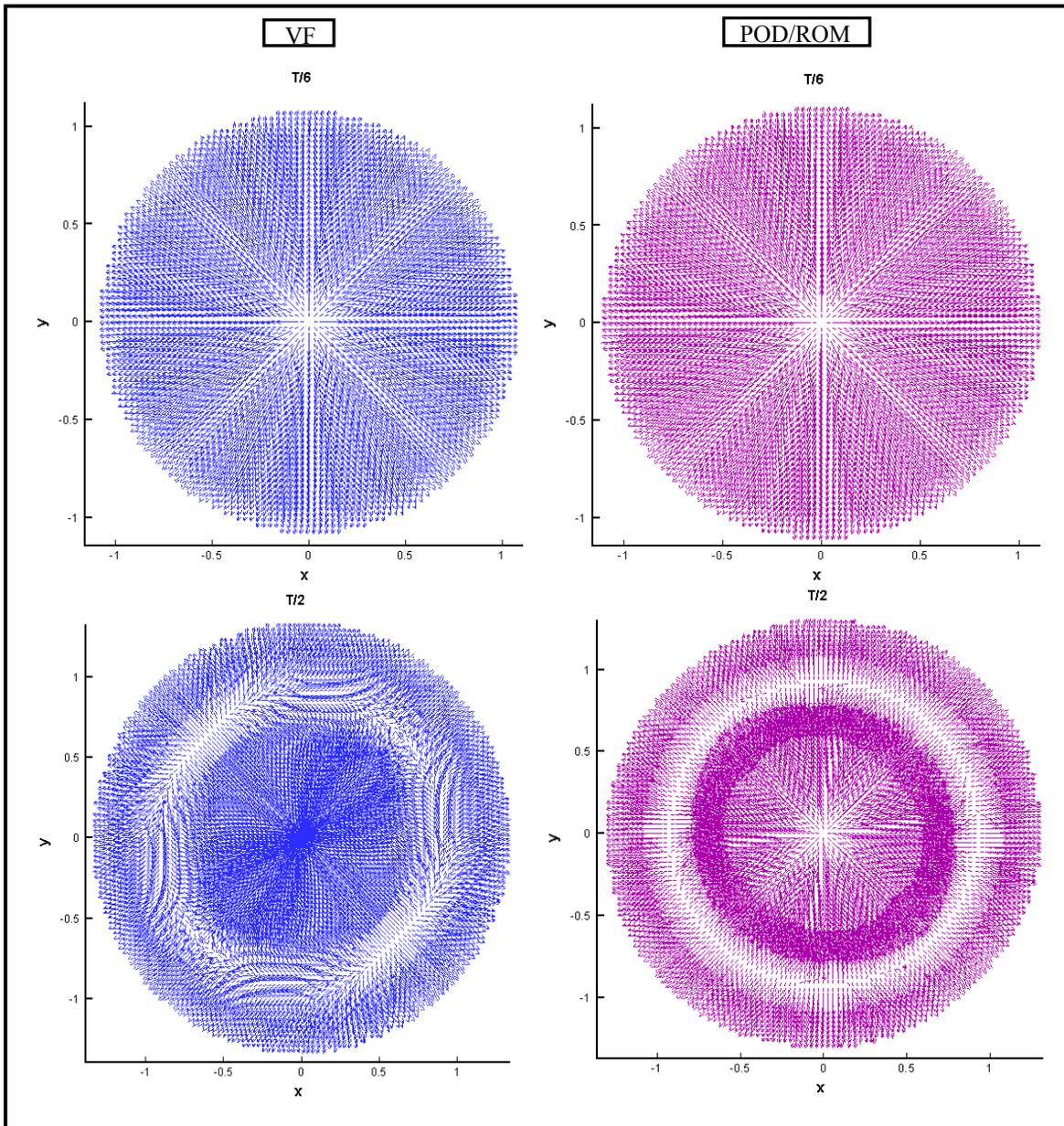


Figure 6.10 Bassin parabolique
Champs de vitesses comparés aux instants $t = T/6$ et $t = T/2$
entre les modèles VF et POD/ROM

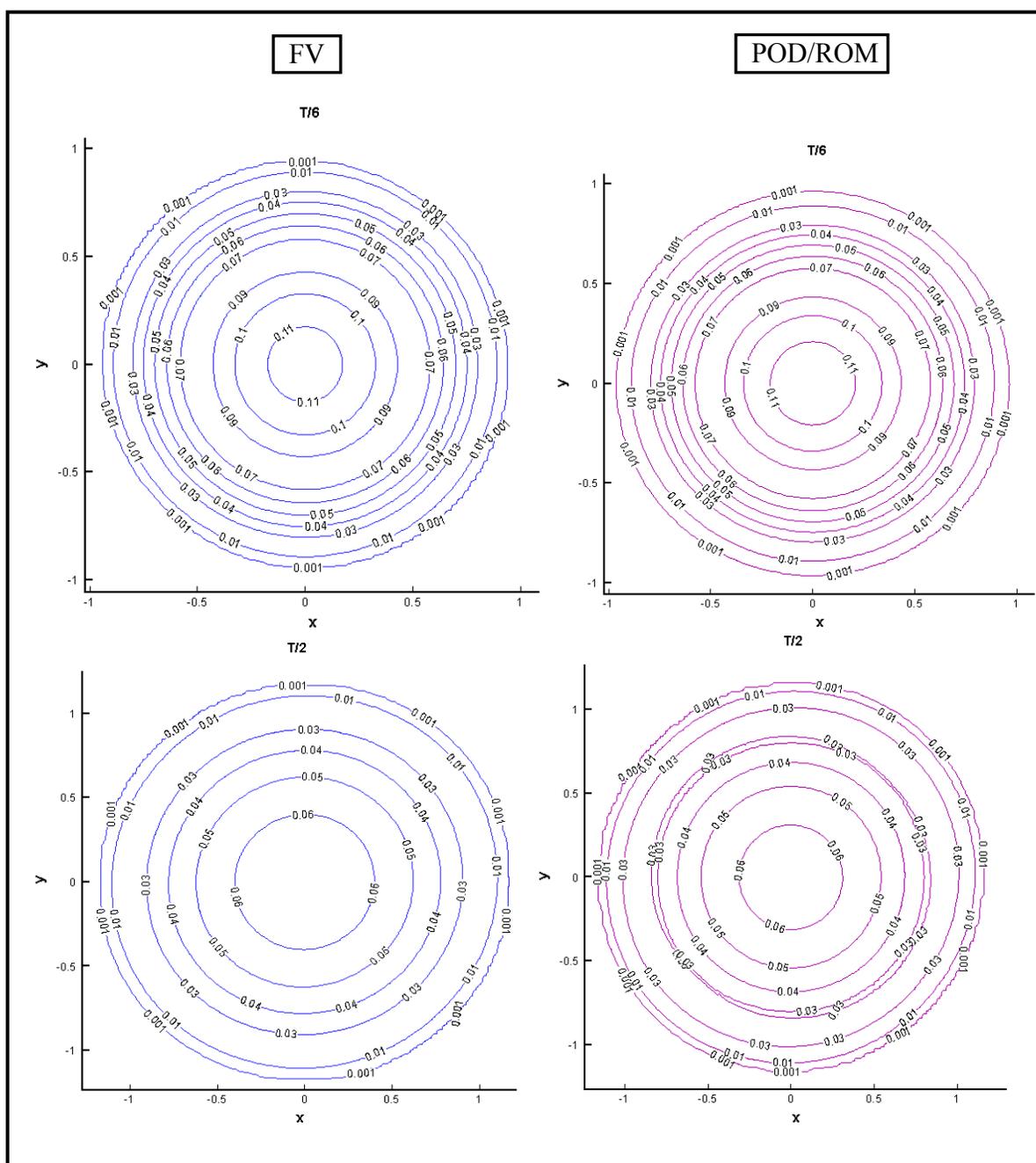


Figure 6.11 Bassin parabolique
Lignes de contours relatifs à la hauteur d'eau comparées aux instants $t = T/6$ et $t = T/2$
entre les modèles VF et POD/ROM

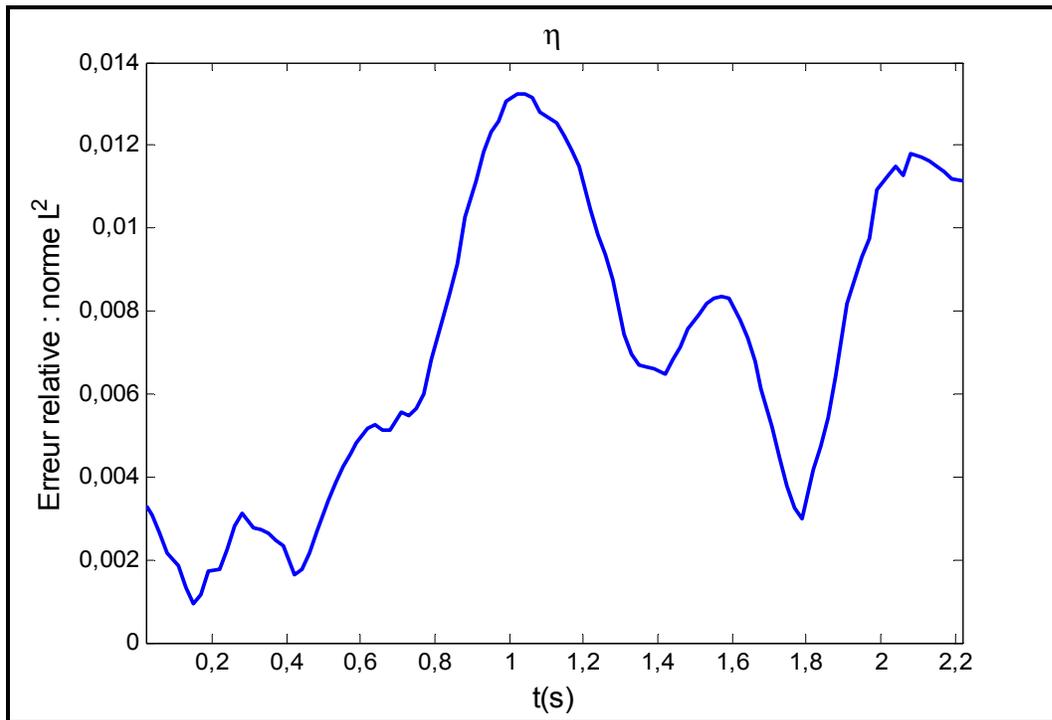


Figure 6.12 Bassin parabolique
Évolution temporelle de l'erreur sur la prédiction de la surface libre selon
la norme L^2 par le modèle POD/ROM relativement au modèle VF

6.4 Rupture de barrage dans l'estacade de Bordeaux (Laval)

Le modèle réduit est enfin appliqué à l'estacade de Bordeaux décrit au chapitre 3. Le domaine couvre approximativement $720 \times 400 \text{ m}^2$ discrétisé avec 25976 éléments triangulaires et 13217 nœuds. Les détails du maillage et de la géométrie ont été présentés à la section 3.4.1 (voir également l'Annexe III, pp. 180).

La satisfaction de la C-property a été évaluée dans un premier temps. Pour ce faire, nous avons considéré un domaine entièrement inondé en fixant la surface libre à $\eta_0 = 24 \text{ m}$, puis un domaine avec des zones sèches en imposant $\eta_0 = 14 \text{ m}$ (Figure 6.13). Dans le premier cas, la C-property est parfaitement satisfaite avec aucune génération de vitesse après 50 s. Cependant, en présence de zones sèches (cas $\eta_0 = 14 \text{ m}$), le modèle réduit POD éprouve quelques difficultés à conserver la solution hydrostatique. En effet, la correction de la surface libre empêchant la génération de courants fictifs ne peut être entreprise avec le modèle réduit en phase de traitement au risque d'affecter sérieusement le temps de calcul. On note une génération de vitesses résiduelles par endroits de faible intensité cependant comme le montre la figure 6.13.

Enfin une inondation due à une rupture soudaine d'un barrage fictif situé comme décrit à la figure 6.14 à l'instant $t = 0 \text{ s}$ est simulée. Initialement, les niveaux d'eau sont fixés à $\eta_1 = 26 \text{ m}$ et $\eta_2 = 22 \text{ m}$ en amont et en aval respectivement. L'inondation suite à la rupture du barrage est simulée à partir du modèle VF pour $T_s = 50 \text{ s}$ au cours desquels 1000 snapshots sont enregistrés pour la construction de matrices indépendantes définissant le modèle réduit POD. Du fait de la complexité du domaine et de la dynamique de l'écoulement, un nombre plus important de modes significatifs s'imposait, soit $N_b = 17$ obtenu suite à une analyse de convergence des modes. Il résulte cependant de l'utilisation du modèle réduit, une accélération appréciable des calculs. Comme le montre le tableau 6.4, le problème est résolu environ 61 fois plus rapidement avec le modèle réduit.

La propagation de l'onde d'inondation par les deux modèles reste assez semblable comme on peut le constater à travers la figure 6.14 présentant une vue 3D des solutions aux instants $t = 10$ s, $t = 20$ s et $t = 50$ s subséquents la rupture du barrage. La figure 6.15 présente les champs de vitesses comparés à différents instants après la rupture du barrage. Le modèle réduit génère quelques résidus de vitesse en aval avant l'arrivée du front d'onde du fait de la difficulté à respecter la C-property, mais ces vitesses restent de faibles amplitudes. Les prédictions de l'évolution de la surface libre par les deux modèles le long de l'axe de la rivière sont très proches comme le montre la figure 6.16. L'erreur relative à la solution fournie par le modèle VF vérifie $E_{L^2}(\eta, x, t) < 2,4 \times 10^{-3}$ (Figure 6.17).

Tableau 6.4 Estacade de Bordeaux
Temps CPU comparés entre les modèles VF et POD/ROM pour $T_s = 50$ s

| | FV ($\Delta t = 0,001$) | POD ($\Delta t = 0,001$) |
|---------------|---------------------------|----------------------------|
| Temps CPU (s) | 231,27 | 3,81 |

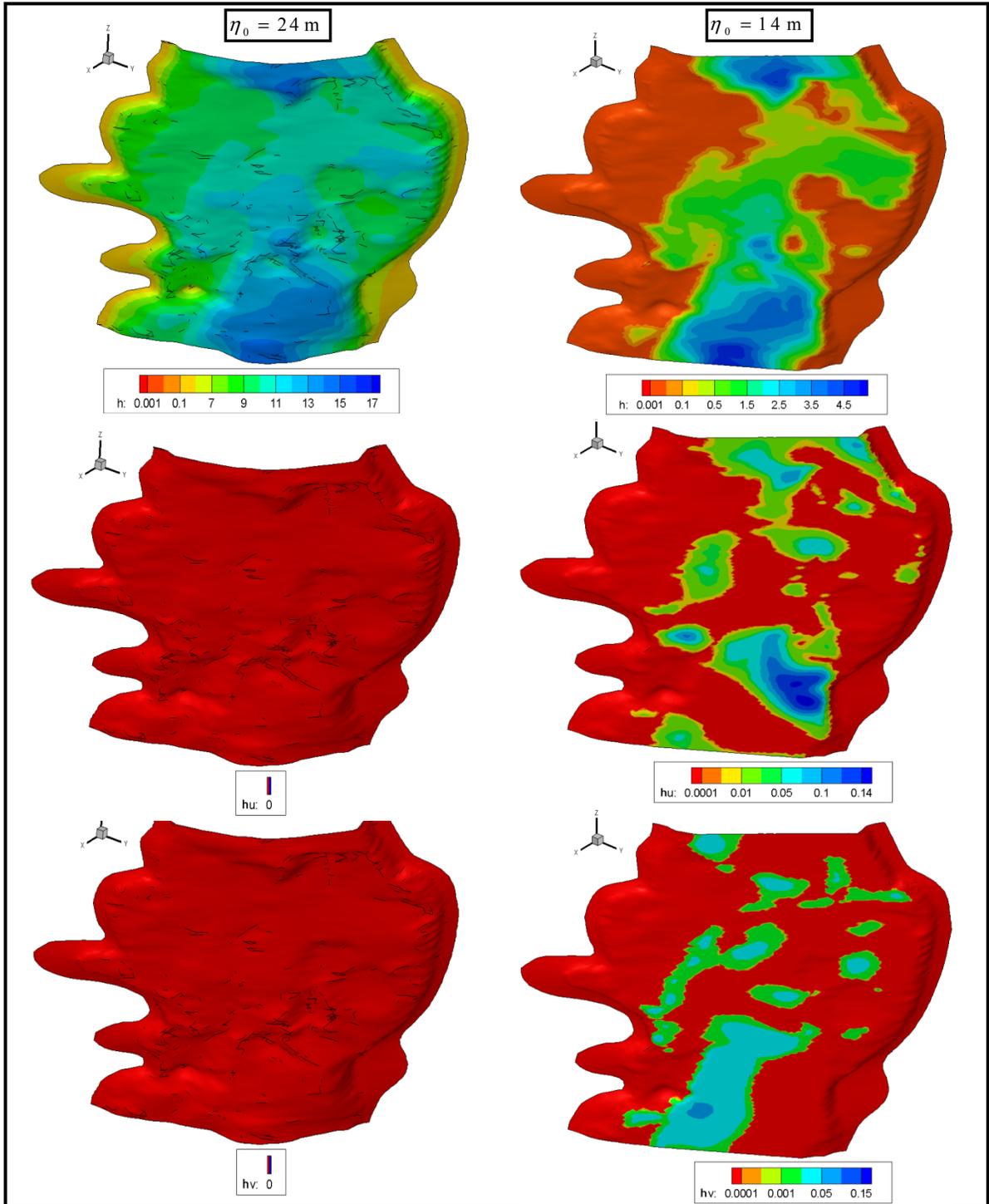


Figure 6.13 Estacade de Bordeaux
Évaluation de la vérification de la C-Property par le modèle réduit
pour les niveaux d'eau $\eta_0 = 24$ m et $\eta_0 = 14$ m

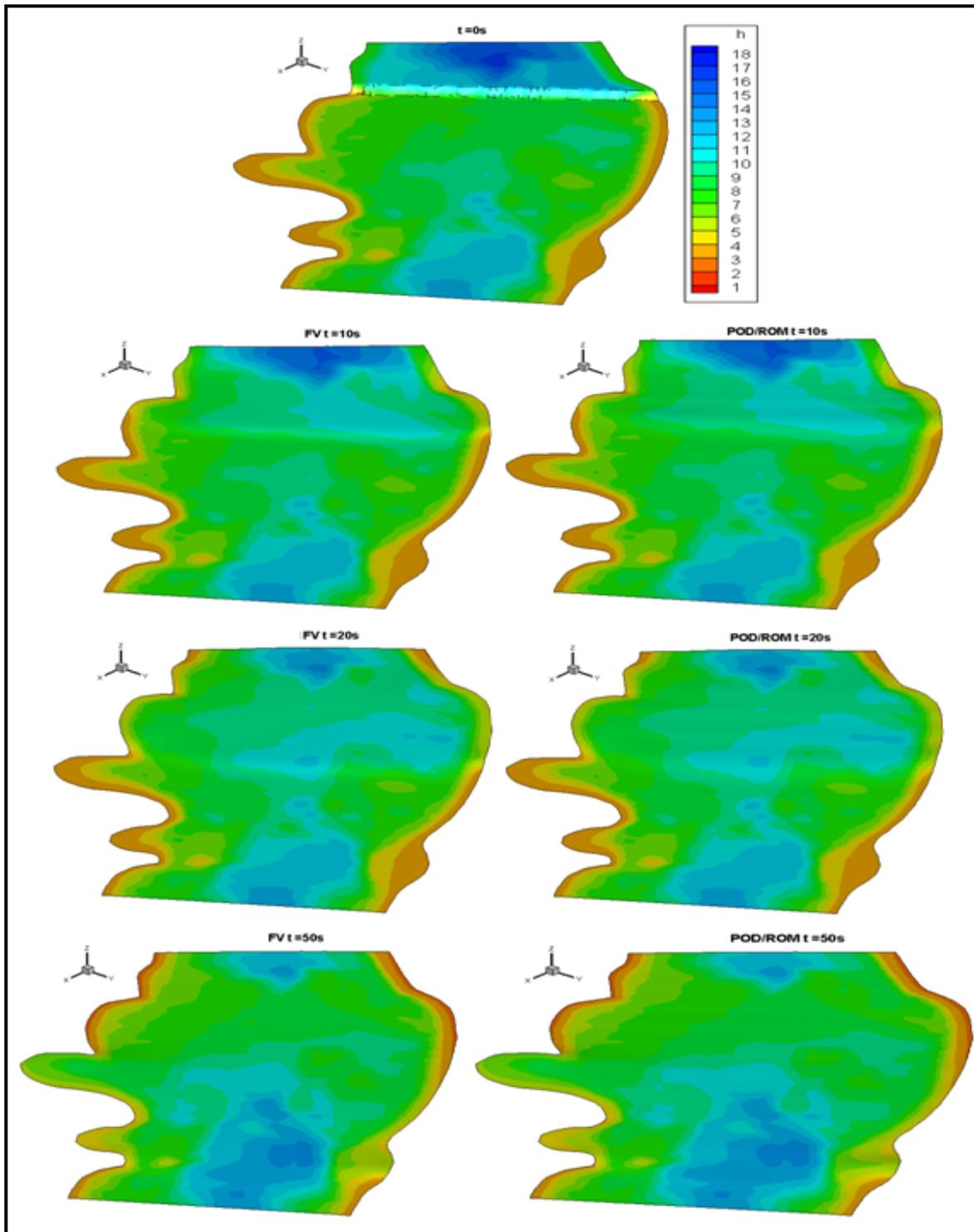


Figure 6.14 Estacade de Bordeaux
Propagations comparées de l'inondation entre les modèles VF et POD/ROM
aux instants $t = 10$ s, $t = 20$ s et $t = 50$ s

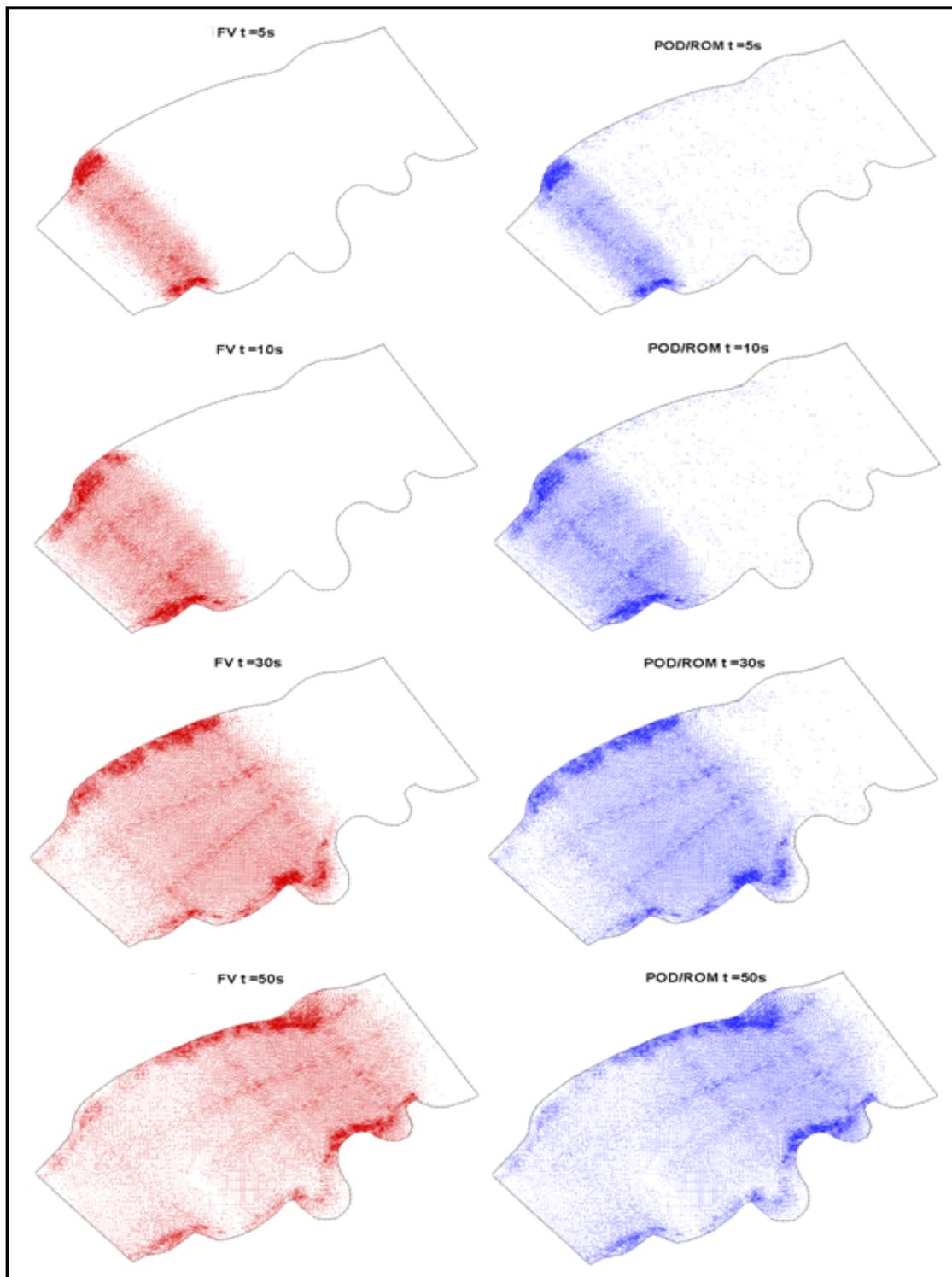


Figure 6.15 Estacade de Bordeaux
Champs de vitesses comparés entre les modèles VF et POD/ROM
aux instants $t = 5\text{ s}$, $t = 10\text{ s}$, $t = 30\text{ s}$ et $t = 50\text{ s}$

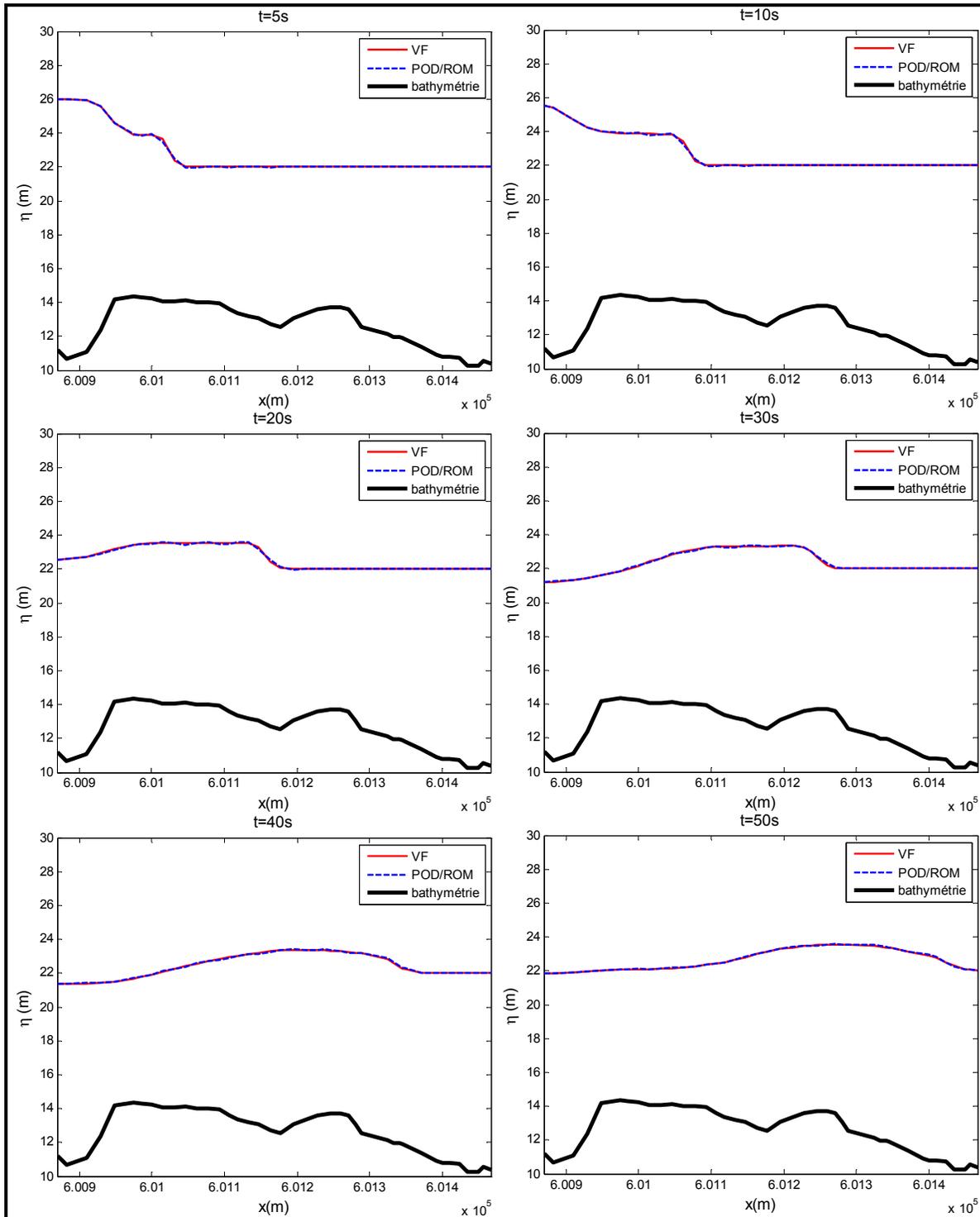


Figure 6.16 Estacade de Bordeaux
Prédictions comparées de la surface libre le long de l'axe de la rivière
à différents instants entre les modèles VF et POD/ROM

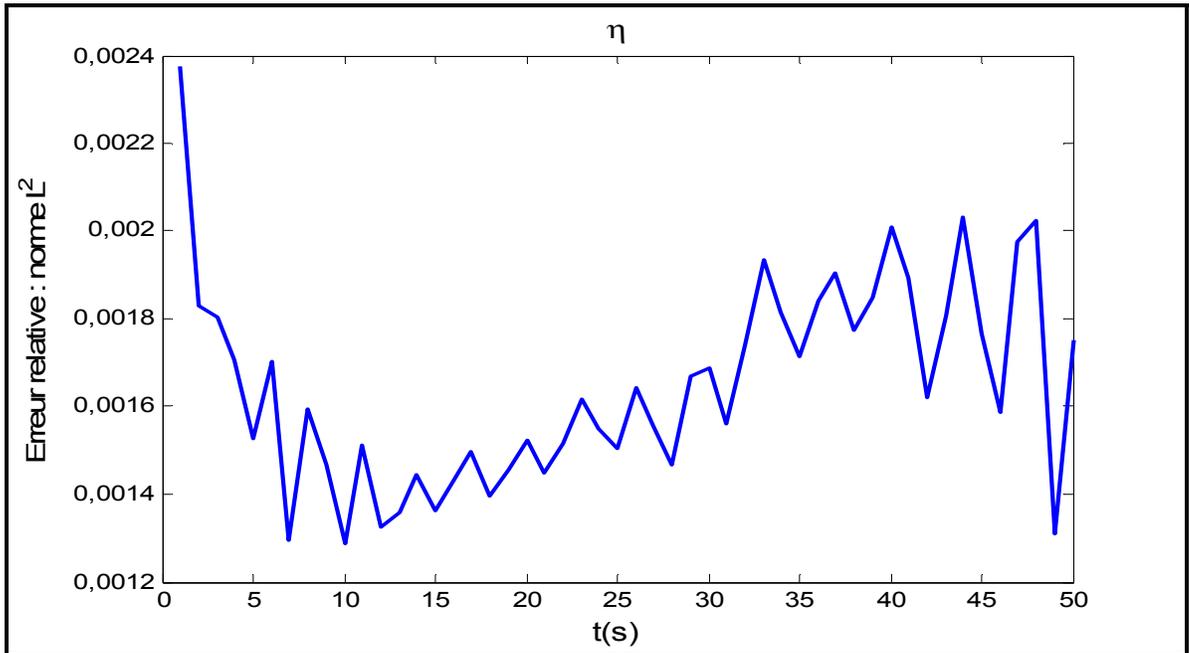


Figure 6.17 Estacade de Bordeaux
Évolution temporelle de l'erreur sur la prédiction de la surface libre selon la norme L^2
par le modèle POD/ROM relativement au modèle VF

6.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la validation du modèle réduit POD/ROM à travers la reproduction des solutions du modèle VF pour différents tests simulant des ruptures de barrages. Pour chaque test, les solutions issues du modèle réduit ont été comparées à celles fournies par le modèle aux volumes finis et à des solutions analytiques pour les deux premiers tests. Nous notons que le POD/ROM peut être utilisé avec un pas de temps plus important que celui imposé par le modèle VF. Il ressort généralement des simulations, que le modèle réduit reproduit raisonnablement les solutions du modèle explicite VF. Nous enregistrons quelques perturbations dans la prédiction de la vitesse notamment en présence de zones sèches du fait de l'impossibilité du traitement 'on-line' de chaque interface humide/sec. Cependant l'accélération appréciable des calculs et les prédictions assez proches de celles du modèle VF satisfont aux attentes du modèle réduit proposé.

CHAPITRE 7

EXPLOITATION DU POD/ROM : ANALYSE DE LA SENSIBILITÉ AUX VARIATIONS DES PARAMÈTRES PHYSIQUES ET CONDITIONS INITIALES

7.1 Introduction

Le modèle réduit précédemment obtenu s'est avéré satisfaisant dans la *phase de reproduction*. Cependant la reconstitution par un modèle réduit d'un problème donné à partir duquel ce dernier a été construit n'est pas d'un grand intérêt. Le temps de calcul consacré à la construction d'un modèle réduit pourrait être justifié dans son application à un grand nombre de problèmes adjacents (nouveaux scénarios) obtenus par variations des conditions et paramètres initiaux ayant défini le problème de base. C'est la *phase d'exploitation* (Figure 7.1).

Dans la prédiction des écoulements à surface libre, l'incertitude sur les paramètres et conditions initiaux donne tout son sens à l'exploitation du modèle réduit. En effet, afin de tenir compte de ces incertitudes, la démarche classique est de solliciter le modèle explicite aux volumes finis ou éléments finis à plusieurs reprises. Cette démarche peut s'avérer assez onéreuse pour des écoulements réels. Nous nous proposons alors d'évaluer la mesure dans laquelle le modèle d'ordre réduit proposé dans cette étude pourrait être utile à la prise en compte des incertitudes dans la simulation d'un problème d'écoulement à surface libre. Pour ce faire, nous procédons à une analyse de la sensibilité à la variation des conditions initiales et des paramètres physiques du modèle POD/ROM selon les étapes suivantes :

- (i) Considération d'un problème défini par des paramètres physiques et conditions initiales donnés et simulation dans un premier temps à l'aide du modèle VF.
- (ii) Stockage des matrices de snapshots durant la simulation, et construction des bases modales et matrices constantes indépendantes.

- (iii) Définition de nouveaux problèmes (scénarios) par variation des paramètres physiques et conditions initiales: hauteurs d'eau, débit, coefficient de friction.
- (iv) Simulation de chaque nouveau problème à l'aide du modèle réduit sans adaptation des bases POD précédemment obtenues.
- (v) Comparaison avec les solutions du modèle aux volumes finis.

Les résultats de cette analyse pourront en définitive permettre de concevoir le modèle réduit proposé comme un outil utile à l'optimisation ou à l'analyse de fiabilité.

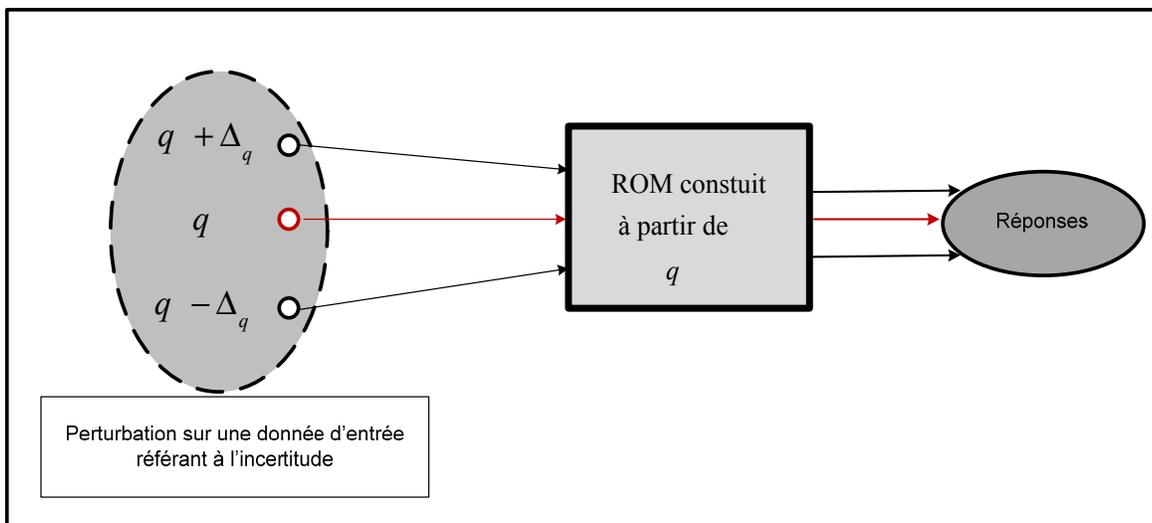


Figure 7.1 Phase d'exploitation du ROM
Analyse de nouveaux scénarios obtenus par variations des conditions
et paramètres initiaux ayant défini le problème de base.

7.2 Rupture de barrage dans un canal avec lit aval sec : Exploitation du POD

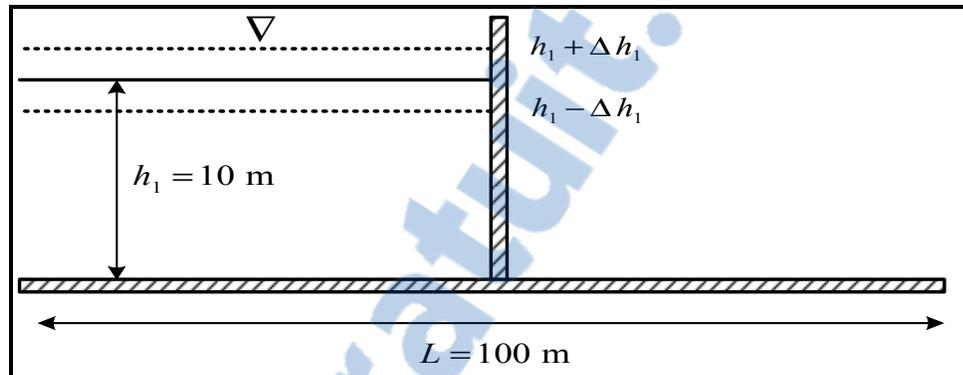


Figure 7.2 Rupture de barrage sur lit aval sec
Définition de nouveaux scénarios pour l'analyse de sensibilité de POD

Dans cette section, nous considérons le problème de rupture de barrage avec lit aval sec proposé à la section 6.2. Le modèle réduit a été construit pour la donnée initiale $h_1 = 10 \text{ m}$ relative au niveau d'eau initial en amont du barrage. Le problème correspondant est désigné ici par "Test 0". Considérant quelques perturbations autour de h_1 décrite à la figure 7.2, huit différents scénarios sont définis (Tableau 7.1). La figure 7.3 présente les prédictions comparées de la surface libre après 2,5 s. Le modèle réduit reproduit avec satisfaction les solutions du modèle VF pour des variations inférieures à $\pm 10\%$ de h_1 . Des écarts substantiels sont observés pour $h_1 = 8 \text{ m}$ et $h_1 = 12 \text{ m}$ correspondant à 20% de variations autour de h_1 . La simulation par le modèle réduit des cas de variations extrêmes $h_1 = 5 \text{ m}$ et $h_1 = 15 \text{ m}$, résultant de $\pm 50\%$ de variations autour de h_1 , conduit à des écarts plus importants. Le calcul des erreurs relatives sur la prédiction de la surface libre selon la norme L^2 sur le domaine spatio-temporel montre une accumulation plus importante d'erreurs pour

les cas extrêmes (Figure 7.4). Cependant pour l'ensemble des tests, les erreurs vérifient $E_{L^2}(\eta, x, t) < 8 \times 10^{-2}$.

Les détériorations des solutions issues du modèle POD/ROM pour les cas de variations extrêmes sont causées en partie par les approximations utilisées pour la construction du modèle réduit. Elles sont aussi et essentiellement dues à l'inaptitude des bases POD à reproduire la dynamique des nouveaux problèmes considérés. Cette assertion peut être prouvée simplement en considérant un modèle que nous désignerons par "Pseudo-POD/ROM". Ce dernier est construit par projection de Galerkin de chacune des équations du schéma aux volumes finis (2.6) en conservant en l'état, les flux et le terme source de friction :

$$\frac{\mathbf{A}_q^{n+1} - \mathbf{A}_q^n}{\Delta t} = \mathbf{RHS}^{\text{FV}}(\mathbf{U}_{K_i}^n) \quad , q = \eta, hu \text{ ou } hv, \text{ et } K_i \in \Omega \quad (7.1)$$

\mathbf{RHS}^{FV} désigne le membre de droite de l'équation (2.6) dans lequel aucune approximation des flux et du terme source n'est effectuée. Le modèle Pseudo-POD/ROM n'aboutit évidemment pas à une accélération des calculs puisque les flux sont calculés à l'aide du modèle VF à travers chacune des interfaces des cellules. Il a pour seul objet de mettre en évidence l'aptitude des bases POD à reproduire efficacement un écoulement considéré. Aussi, considérons-nous le scénario $h_1 = 15$ m dont la simulation présente (Figure 7.5) des écarts, certes moins amplifiés pour ce problème, mais qui rendent compte de l'inefficacité des bases POD. Nous pouvons en conclure que les informations stockées dans les bases ne sont plus représentatives de la dynamique des nouveaux problèmes considérés pour des variations extrêmes de la hauteur d'eau initiale.

Tableau 7.1 Rupture de barrage dans un canal

Valeurs de la hauteur d'eau en amont du barrage définissant chaque nouveau scénario

| | Test 0 | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Test 6 | Test 7 | Test 8 |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| h_1 (m) | 10 | 9,5 | 10,5 | 9 | 11 | 8 | 12 | 5 | 15 |

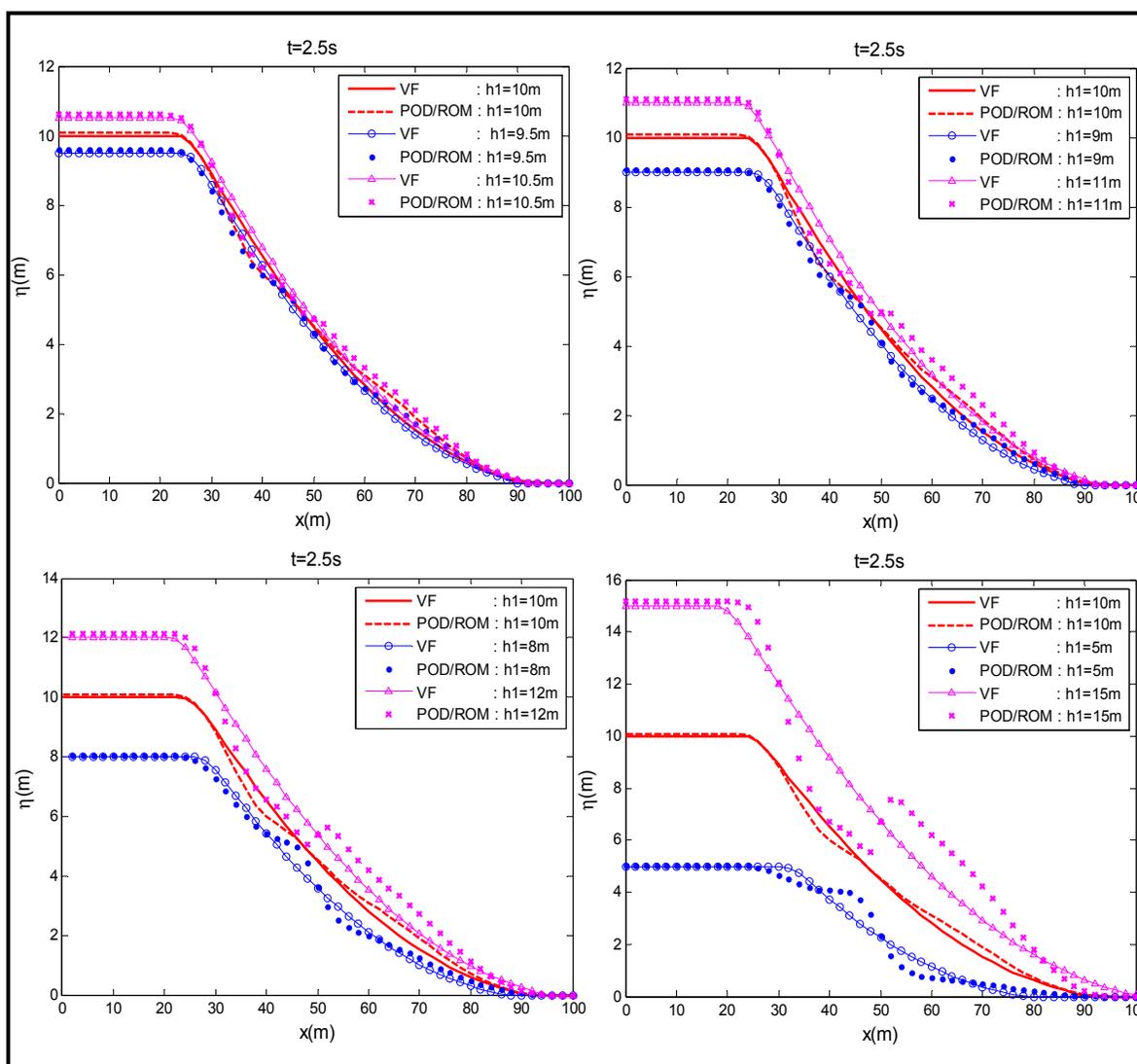


Figure 7.3 Rupture de barrage dans un canal

Analyse de sensibilité du POD/ROM pour huit nouveaux scénarios

Prédictions comparées de la surface libre entre les modèles VF et POD/ROM

Rapport-gratuit.com

LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES



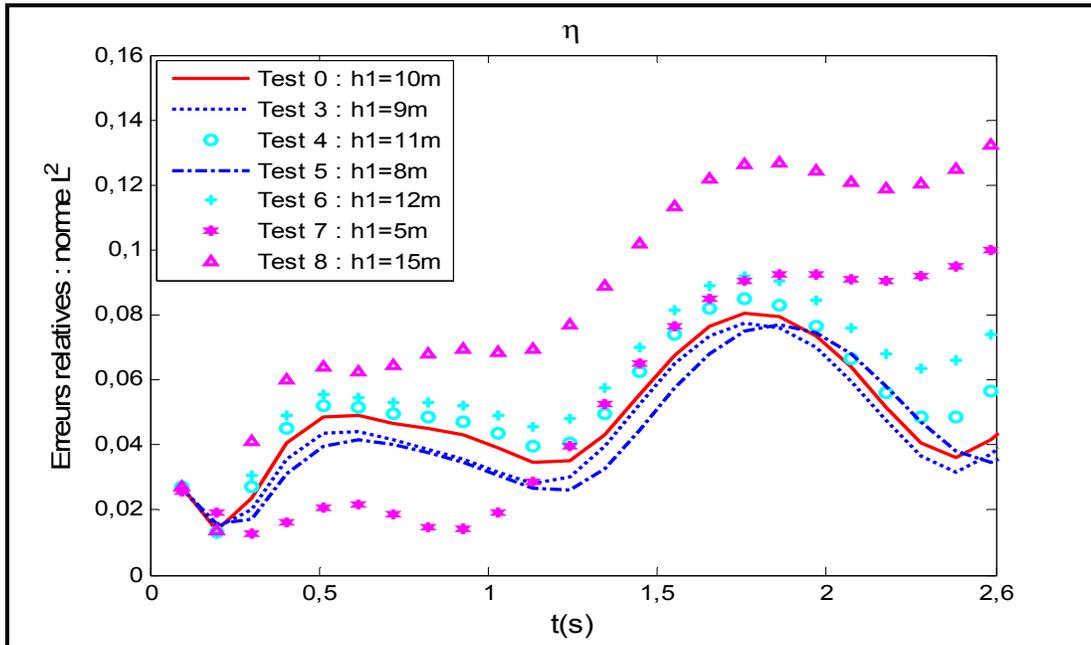


Figure 7.4 Rupture de barrage dans un canal
 Analyse de sensibilité du POD/ROM pour huit nouveaux scénarios
 Évolution temporelle de l'erreur sur la prédiction de la surface libre
 selon la norme L^2 par le modèle POD/ROM relativement au modèle VF

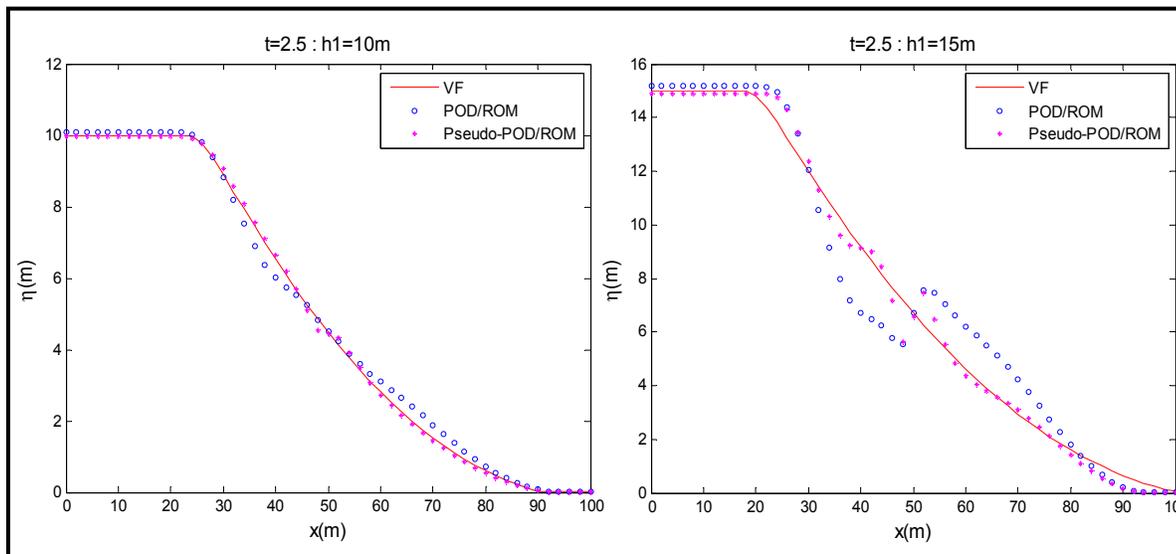


Figure 7.5 Rupture de barrage sur lit aval sec
 Mise en évidence des limites des bases POD face à une variation extrême
 de la hauteur d'eau initiale, cas du test 8

7.3 Estacade de Bordeaux : Exploitation du POD/ROM

7.3.1 Rupture de barrage : Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation de la hauteur d'eau initiale

Le modèle réduit construit pour le problème de rupture de barrage avec lit aval sec proposé à la section 6.4 est également appliqué à de nouveaux scénarios. Rappelons que le test initial (Test 0) est défini par imposition des niveaux d'eau $\eta_1 = 26$ m et $\eta_2 = 22$ m en amont et en aval du barrage respectivement. Par perturbations autour de ces valeurs, six nouveaux problèmes sont considérés comme décrits à la figure 7.6 et le tableau 7.2. Les figures 7.7-7.9 présentent les prédictions comparées de la surface libre à différents instants le long de l'axe de la rivière. Les résultats sont globalement assez proches de ceux fournis par le code VF mais des écarts sont observables. Les Test 5 et Test 6 (Figure 7.9) sont en effet des cas d'extrêmes variations car la dénivellation $\Delta\eta = \eta_1 - \eta_2$ entre l'amont et l'aval a plus que doublé relativement au test initial. La figure 7.10 montre que pour l'ensemble des scénarios, l'erreur relative vérifie cependant $E_{L^2}(\eta, x, t) < 7 \times 10^{-2}$. L'application du Pseudo-POD/ROM aux Test 5 et Test 6 montre les mêmes écarts observés avec le modèle réduit POD mettant ainsi en cause l'inefficacité des bases (Figure 7.11).

Tableau 7.2 Estacade de Bordeaux
Analyse de sensibilité, valeurs de la hauteur d'eau en amont (h_1) et en aval (h_2)
du barrage définissant chaque nouveau scénario

| | Test 0 | Test 1 | Test 2 | Test 3 | Test 4 | Test 5 | Test 6 |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| η_1 (m) | 26 | 24 | 22 | 28 | 30 | 28 | 30 |
| η_2 (m) | 22 | 20 | 18 | 24 | 26 | 20 | 18 |

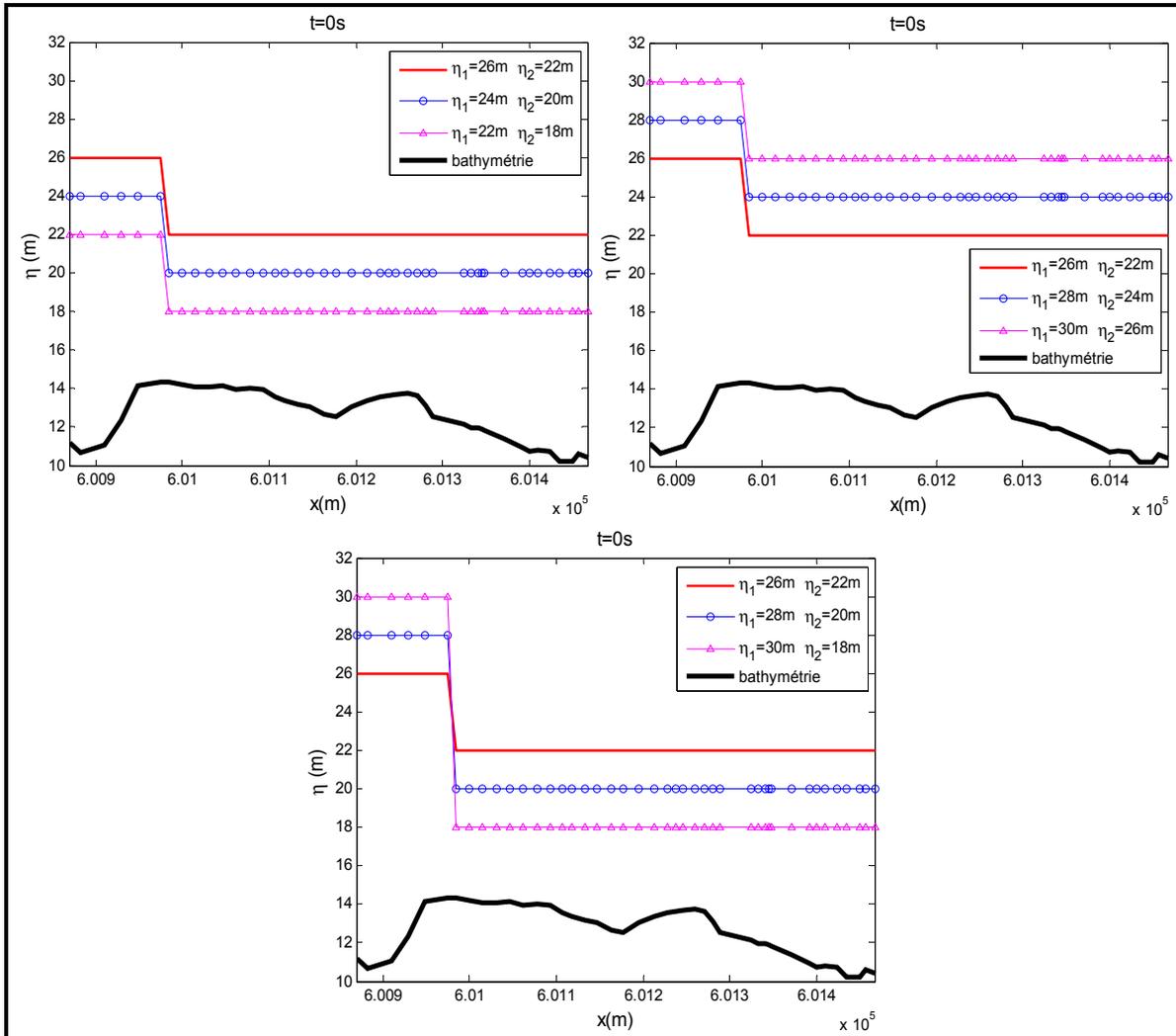


Figure 7.6 Estacade de Bordeaux
Analyse de sensibilité, conditions initiales relatives aux niveaux d'eau définissant
chaque nouveau scénario

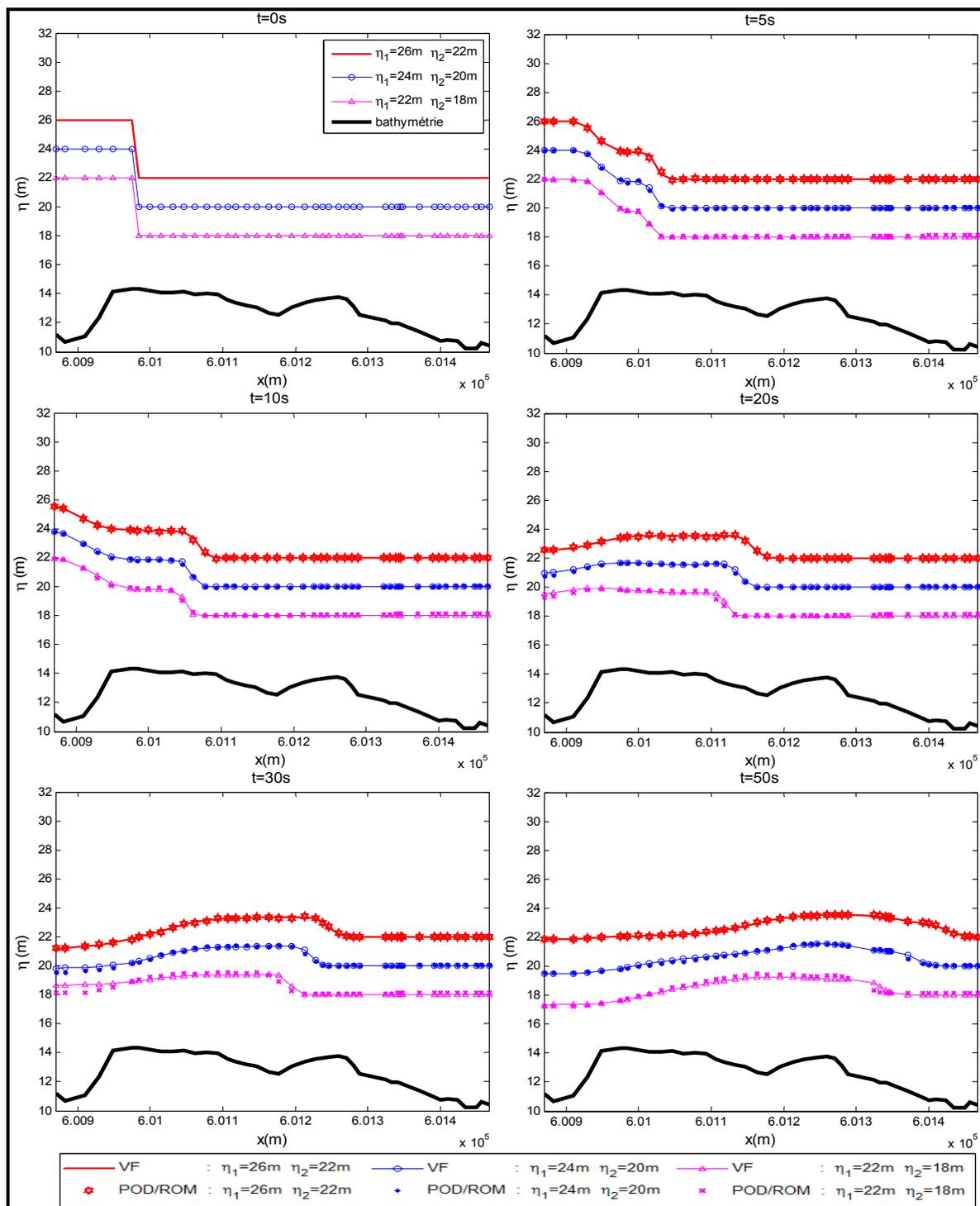


Figure 7.7 Estacade de Bordeaux

Analyse de sensibilité, hauteurs d'eau comparées des scénarios ($\eta_1 = 24$, $\eta_2 = 20$ m) et ($\eta_1 = 22$ m, $\eta_2 = 18$ m) à différents instants entre les modèles VF et POD/ROM

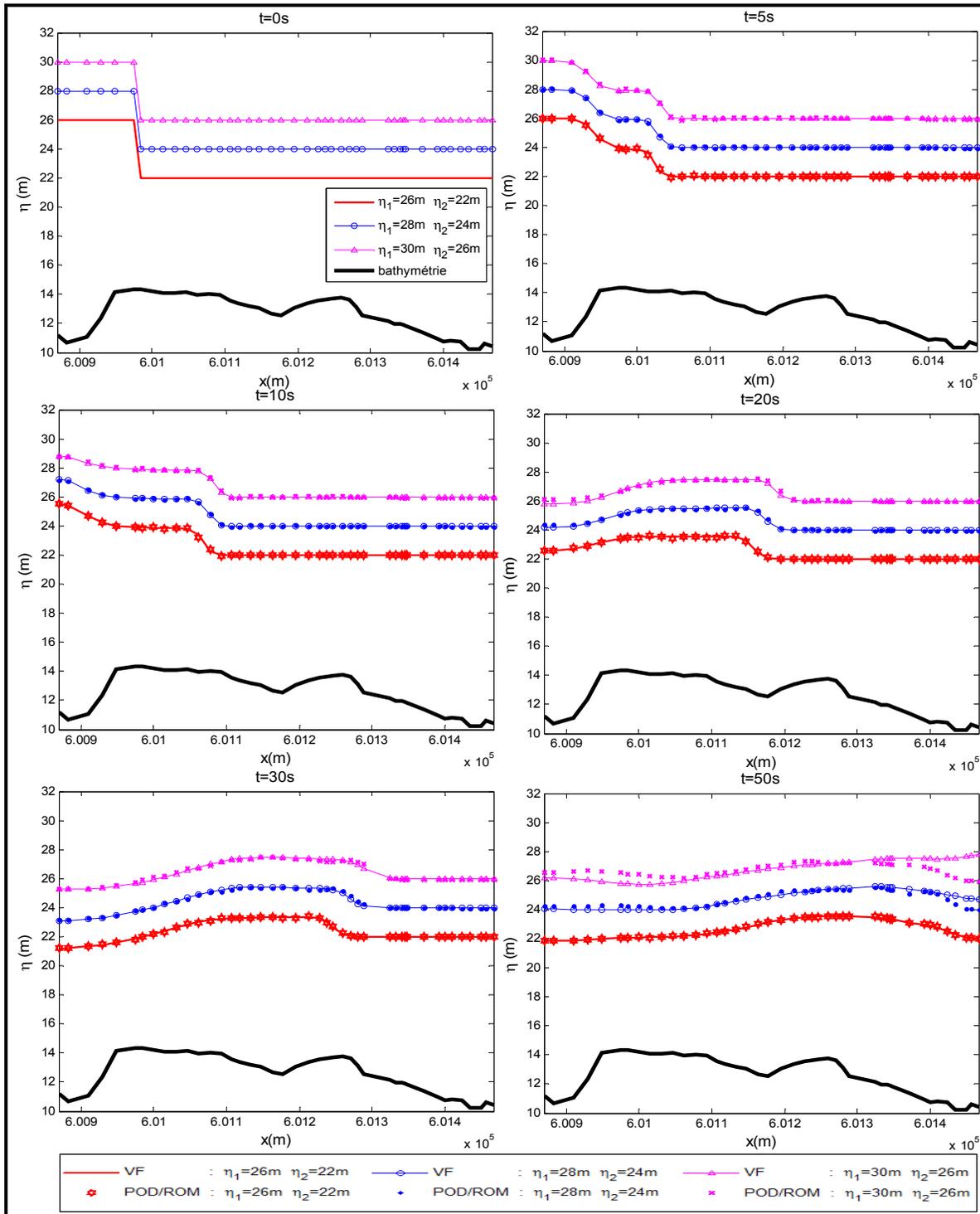


Figure 7.8 Estacade de Bordeaux

Analyse de sensibilité, hauteurs d'eau comparées des scénarios ($\eta_1 = 28$ m, $\eta_2 = 24$ m) et ($\eta_1 = 30$ m, $\eta_2 = 26$ m) à différents instants entre les modèles VF et POD/ROM

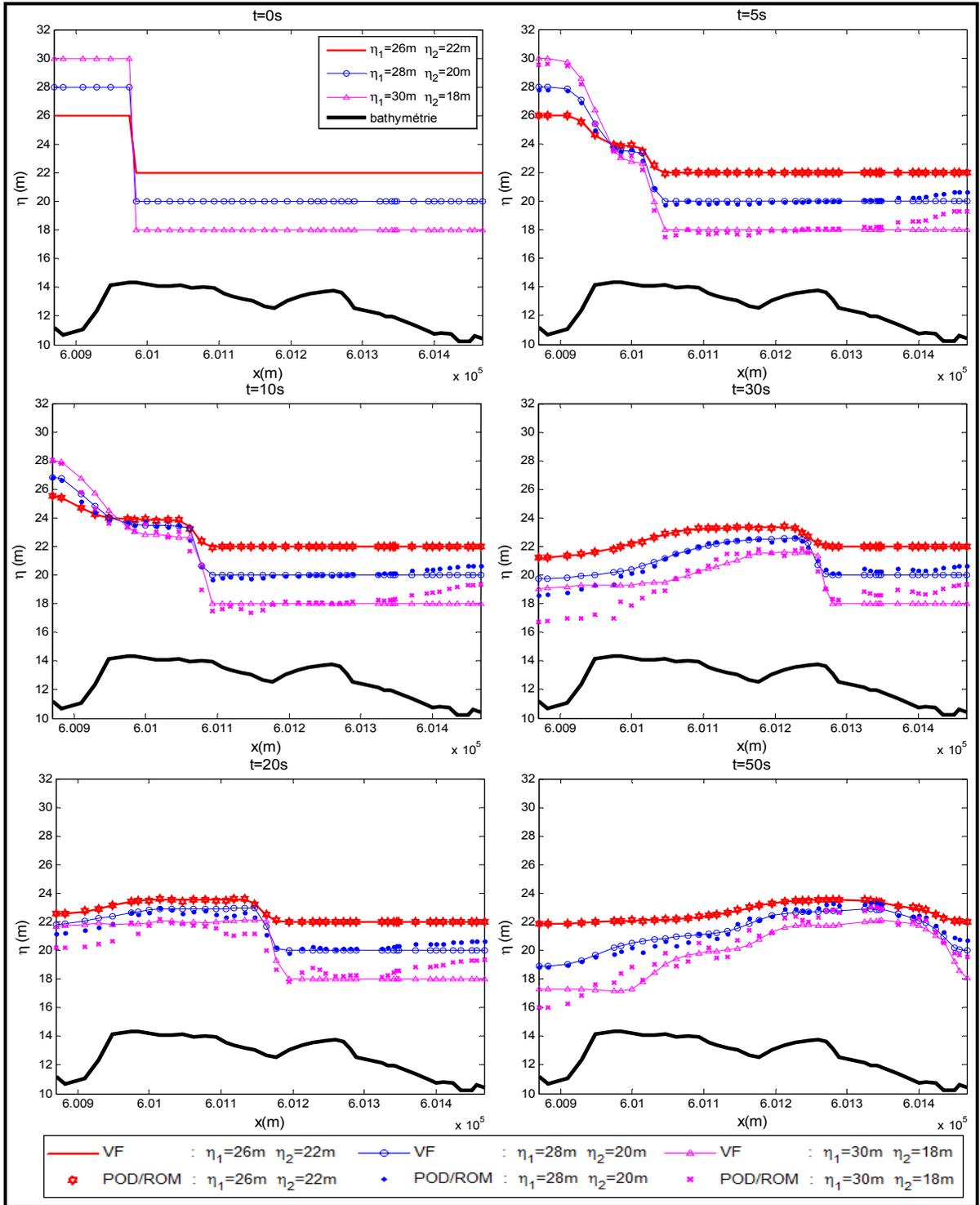


Figure 7.9 Estacade de Bordeaux
 Analyse de sensibilité, hauteurs d'eau comparées des scénarios ($\eta_1 = 28 m, \eta_2 = 20 m$) et ($\eta_1 = 30 m, \eta_2 = 18 m$) entre les modèles VF et POD-ROM

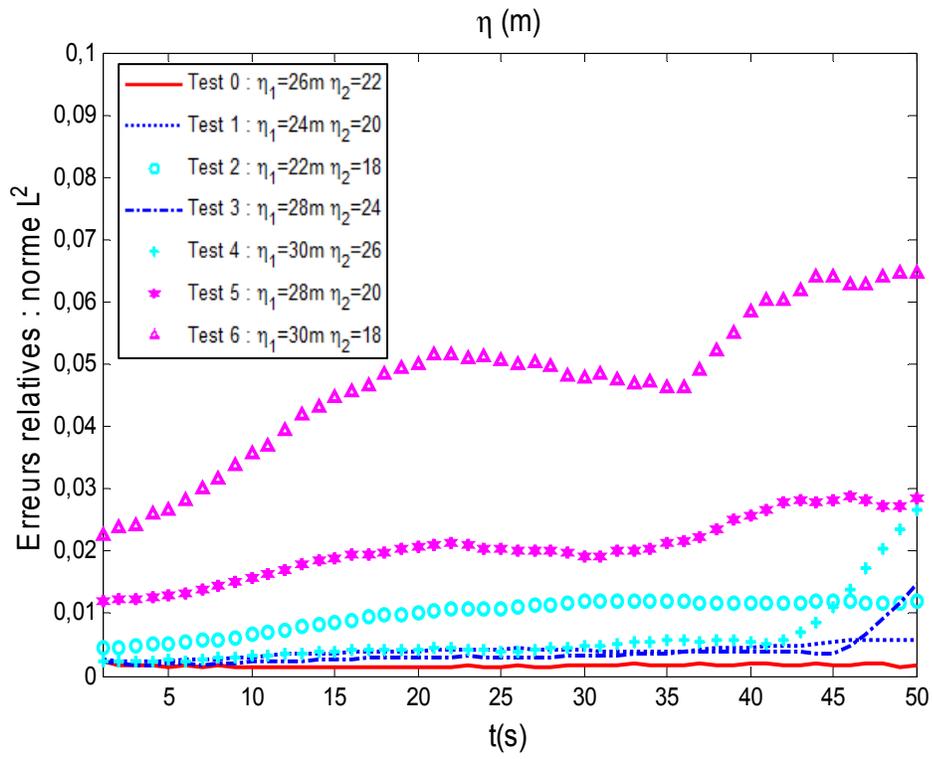


Figure 7.10 Estacade de Bordeaux

Analyse de sensibilité, évolution temporelle de l'erreur sur la prédiction de la surface libre selon la norme L^2 par le modèle POD/ROM relativement au modèle VF pour six différents scénarios

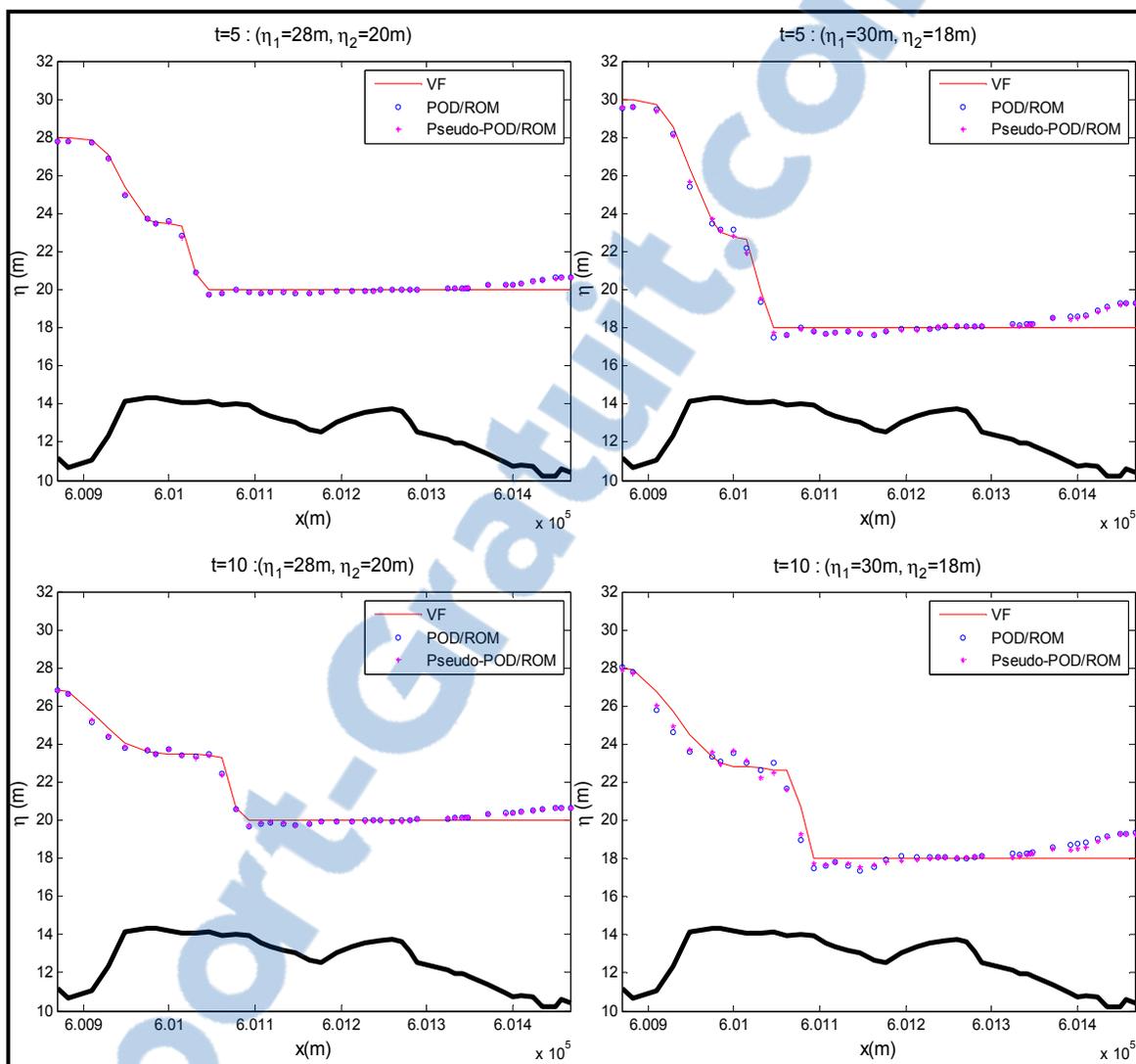


Figure 7.11 Estacade de Bordeaux
 Analyse de sensibilité, mise en évidence des limites des bases POD
 face à une variation extrême des hauteurs d'eau initiales

7.3.2 Rupture de barrage : Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du coefficient de Manning

Le coefficient de friction de Manning est un paramètre non négligeable régissant un écoulement. Cependant la variabilité naturelle des terrains rend quasi-impossible sa détermination avec grande précision. Il importe alors de tenir compte de l'incertitude inhérente à la détermination d'un coefficient de friction donné, dans la prédiction d'un écoulement considéré.

Dans cette sous-section, nous évaluons la capacité du modèle réduit proposé à reproduire la dynamique d'un écoulement suite à une perturbation sur le coefficient de friction de Manning. Pour ce faire, nous considérons une rupture de barrage dans la portion de la rivière des Prairies avec les conditions initiales $\eta_1 = 20$ m, $\eta_2 = 16$ m pour les niveaux d'eau en amont et en aval du barrage respectivement et un coefficient de friction initialement fixé à $n = 0,03 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$. Le problème est simulé à partir du modèle VF sur $T_s = 60$ s durant lesquels 1200 snapshots sont stockés. $N_b = 10$ modes significatifs sont extraits de la décomposition en valeurs singulières des matrices des snapshots pour la construction des matrices du ROM.

Le modèle réduit ainsi obtenu est appliqué à des scénarios définis par des variations du coefficient de Manning fixé à $n = 0,01 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ et $n = 0,05 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$. Ces variations importantes sont considérées du fait de la prédominance de l'inertie sur le frottement dans ce type d'écoulement. Chaque nouveau scénario est simulé environ 964 fois plus rapidement relativement au modèle VF. Les figures 7.12 et 7.13 montrent les contours comparés de la hauteur d'eau dans la rivière selon l'influence du coefficient de friction aux instants $t = 30$ s et $t = 60$ s respectivement. La figure 7.14 présente les prédictions comparées de la surface libre selon l'axe central de la rivière. Les résultats restent dans l'ensemble satisfaisants malgré les variations assez importantes imposées au coefficient de friction. Les erreurs relatives aux prédictions du modèle VF restent faibles avec $E_{L^2}(\eta, x, t) < 1.8 \cdot 10^{-2}$ (Figure 7.15).

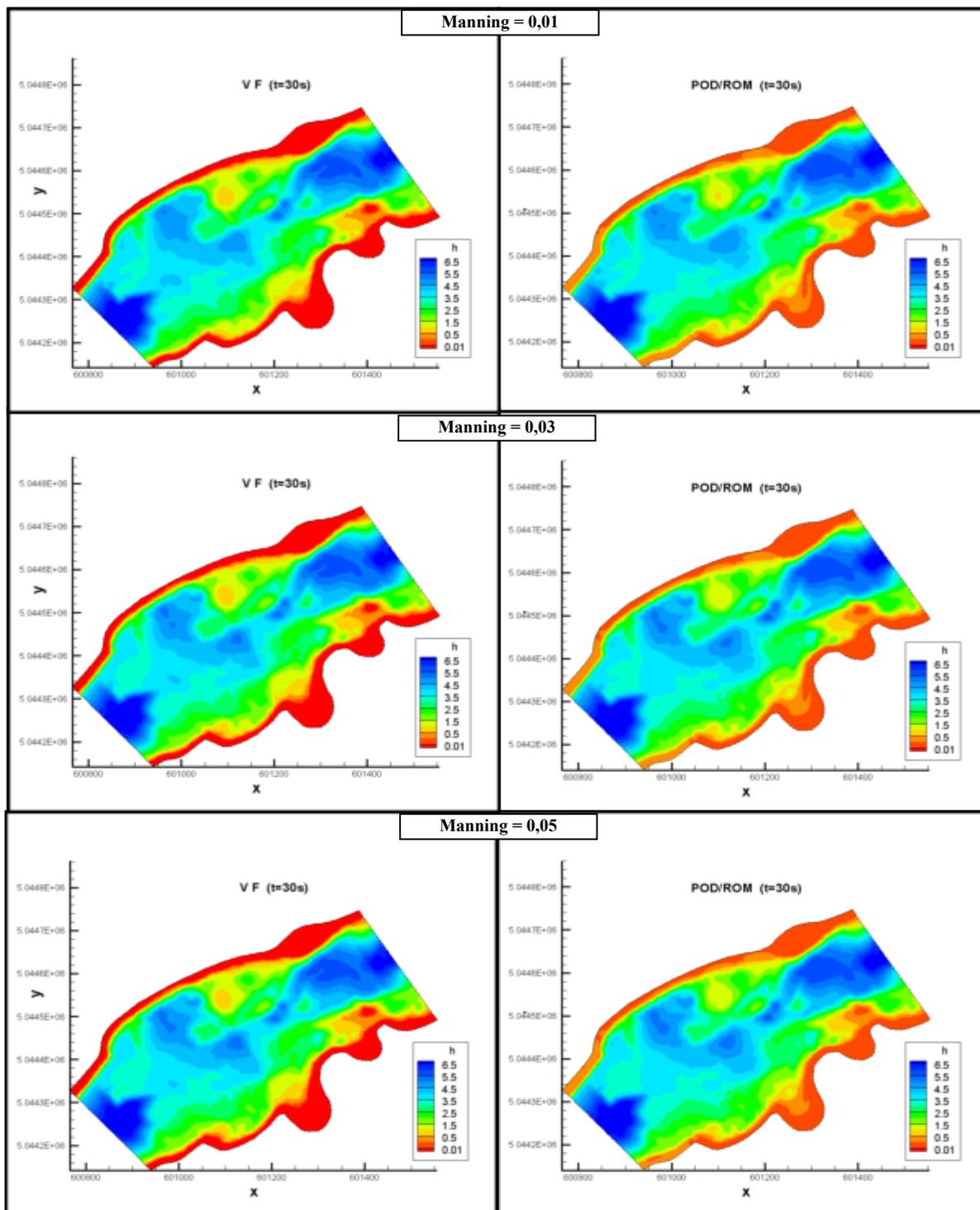


Figure 7.12 Estacade de Bordeaux
 Analyse de sensibilité, variation du coefficient de friction
 Contours comparés de la hauteur d'eau à l'instant $t = 30$ s

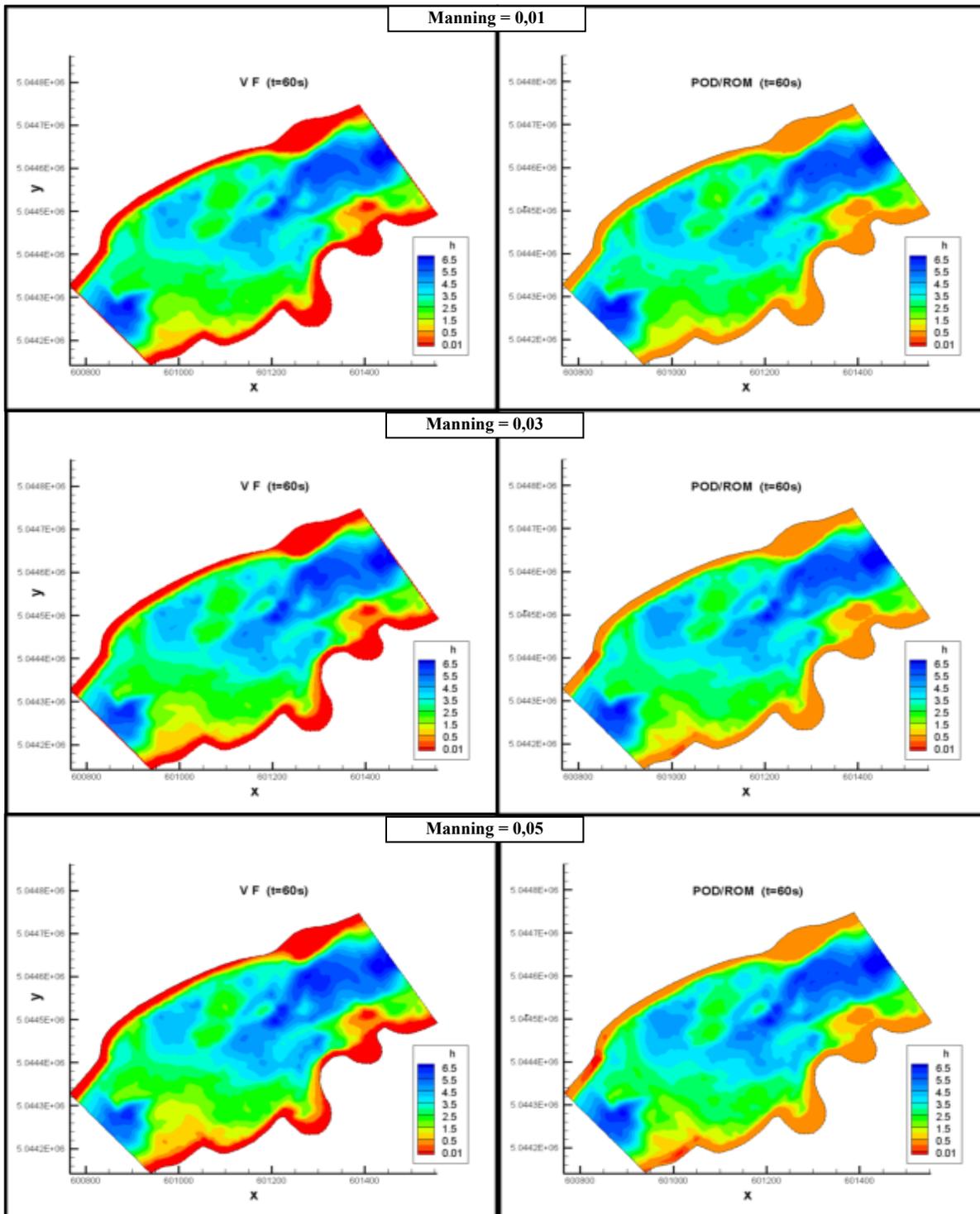


Figure 7.13 Estacade de Bordeaux
Analyse de sensibilité, variation du coefficient de friction
Contours comparés de la hauteur d'eau à l'instant $t = 60$ s

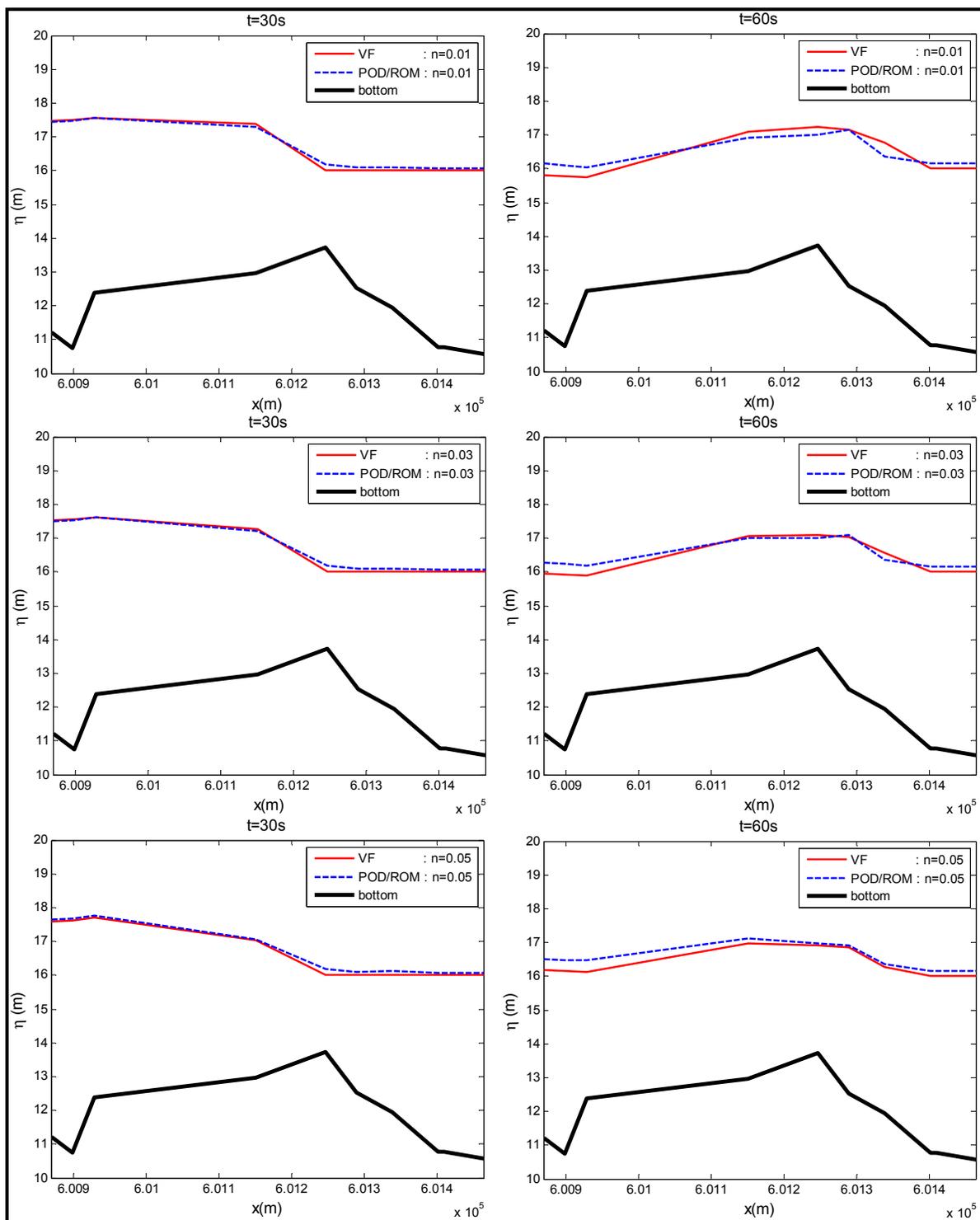


Figure 7.14 Estacade de Bordeaux
 Analyse de sensibilité, variation du coefficient de friction
 Niveaux d'eau comparés le long de l'axe de la rivière à $t = 30s$ et $t = 60s$

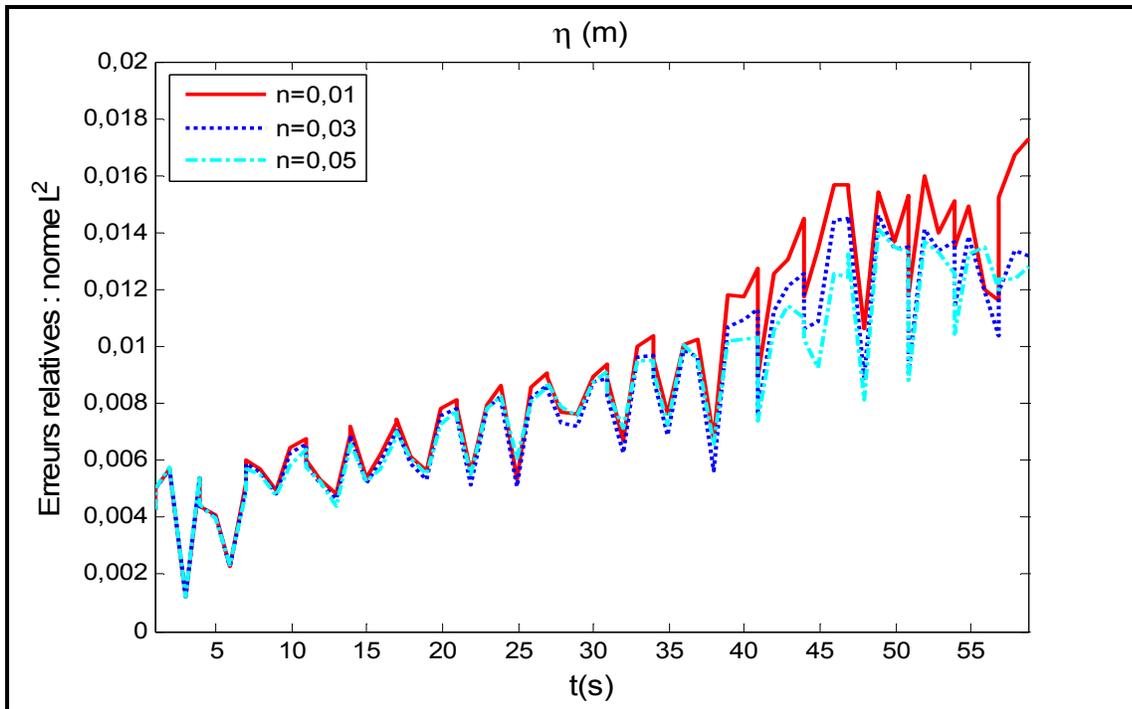


Figure 7.15 Estacade de Bordeaux
Analyse de la sensibilité de la base POD, évolution temporelle de l'erreur sur la prédiction de la surface libre selon la norme L^2 pour des scénarios de variation du coefficient de friction de Manning

7.3.3 Simulation d'une crue : Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit

Le débit est également une donnée difficile à saisir avec grande précision. Le modèle POD/ROM est donc appliqué ici à des scénarios de perturbation sur une valeur $Q = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$ initialement donnée à un débit d'eau occasionnant l'inondation de la rivière des Prairies. La surface libre est fixée à $\eta = 16 \text{ m}$ partout dans le domaine. Le problème est simulé sur $T_s = 90 \text{ s}$ et 1300 snapshots sont enregistrés. Le modèle réduit est construit à partir de $N_b = 17$ modes significatifs favorisant une accélération de l'ordre de 350 relativement au modèle VF.

Deux scénarios sont considérés avec des débits fixés à $Q = 1250 \text{ m}^3/\text{s}$ et $Q = 1500 \text{ m}^3/\text{s}$. Les figures 7.16 à 7.18 présentent une vue 3D des prédictions comparées de la progression de l'inondation dans la vallée avec l'influence de l'ordre de grandeur du débit, entre le ROM et le modèle VF. Les figures 7.19 et 7.20 montrent les prédictions comparées de la surface libres à différents instants selon le débit le long de l'axe de la rivière. Les résultats restent également satisfaisants et les erreurs relatives vérifient $E_{L^2}(\eta, x, t) < 2 \cdot 10^{-2}$ (Figure 7.21).

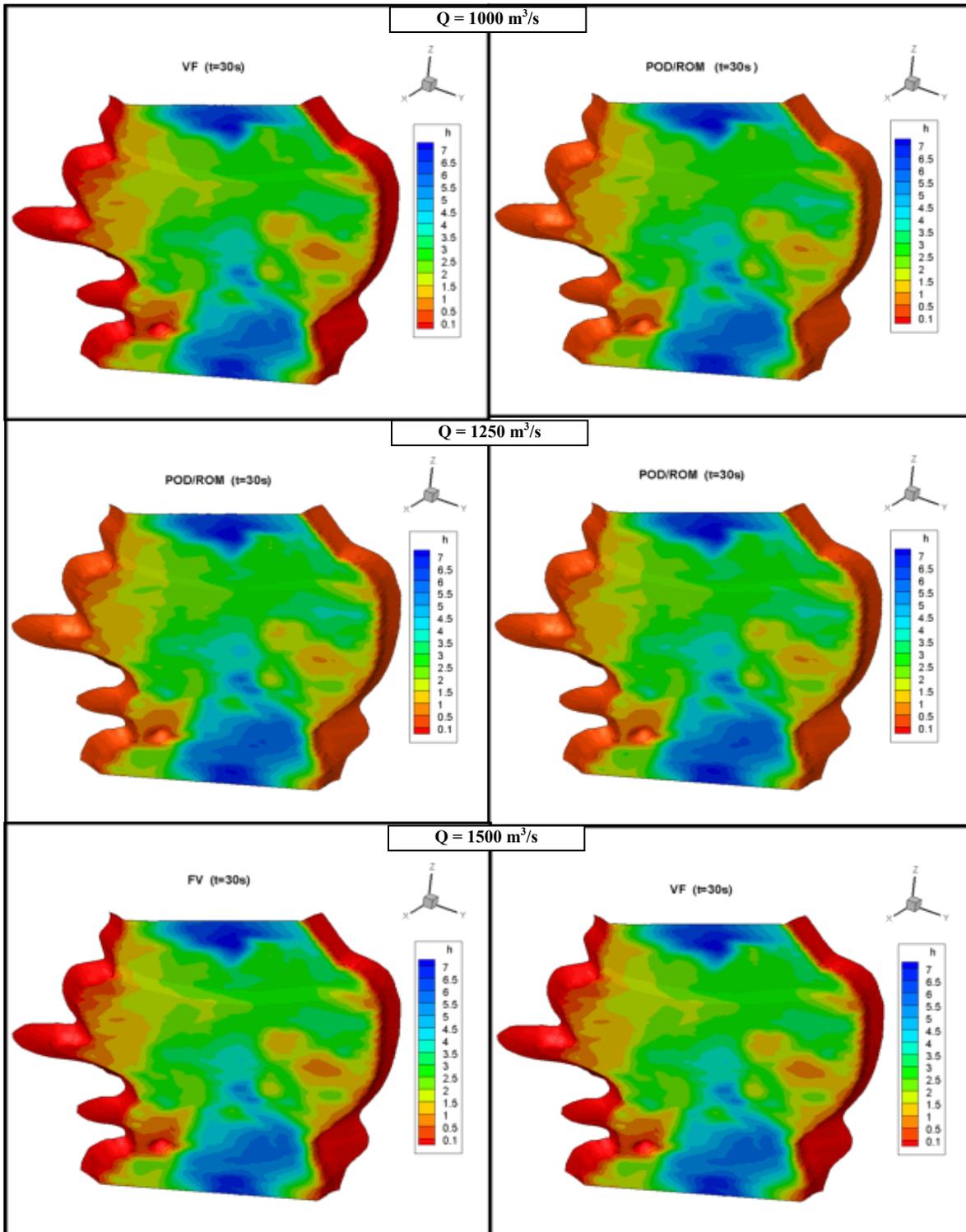


Figure 7.16 Estacade de Bordeaux
Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit
Contours de la hauteur d'eau comparés à l'instant $t = 30$ s

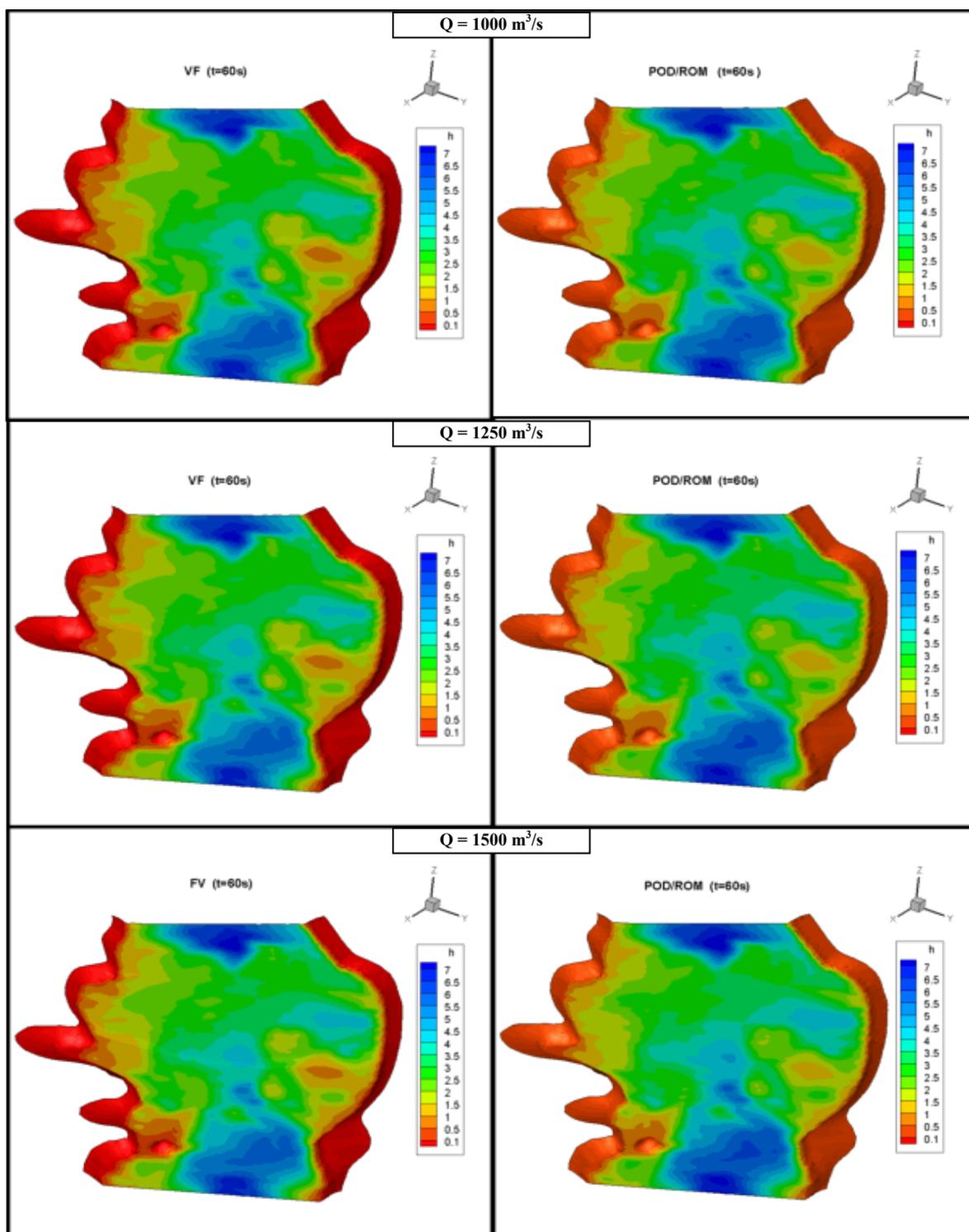


Figure 7.17 Estacade de Bordeaux
Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit
Contours de la hauteur d'eau comparés à l'instant $t = 60 \text{ s}$

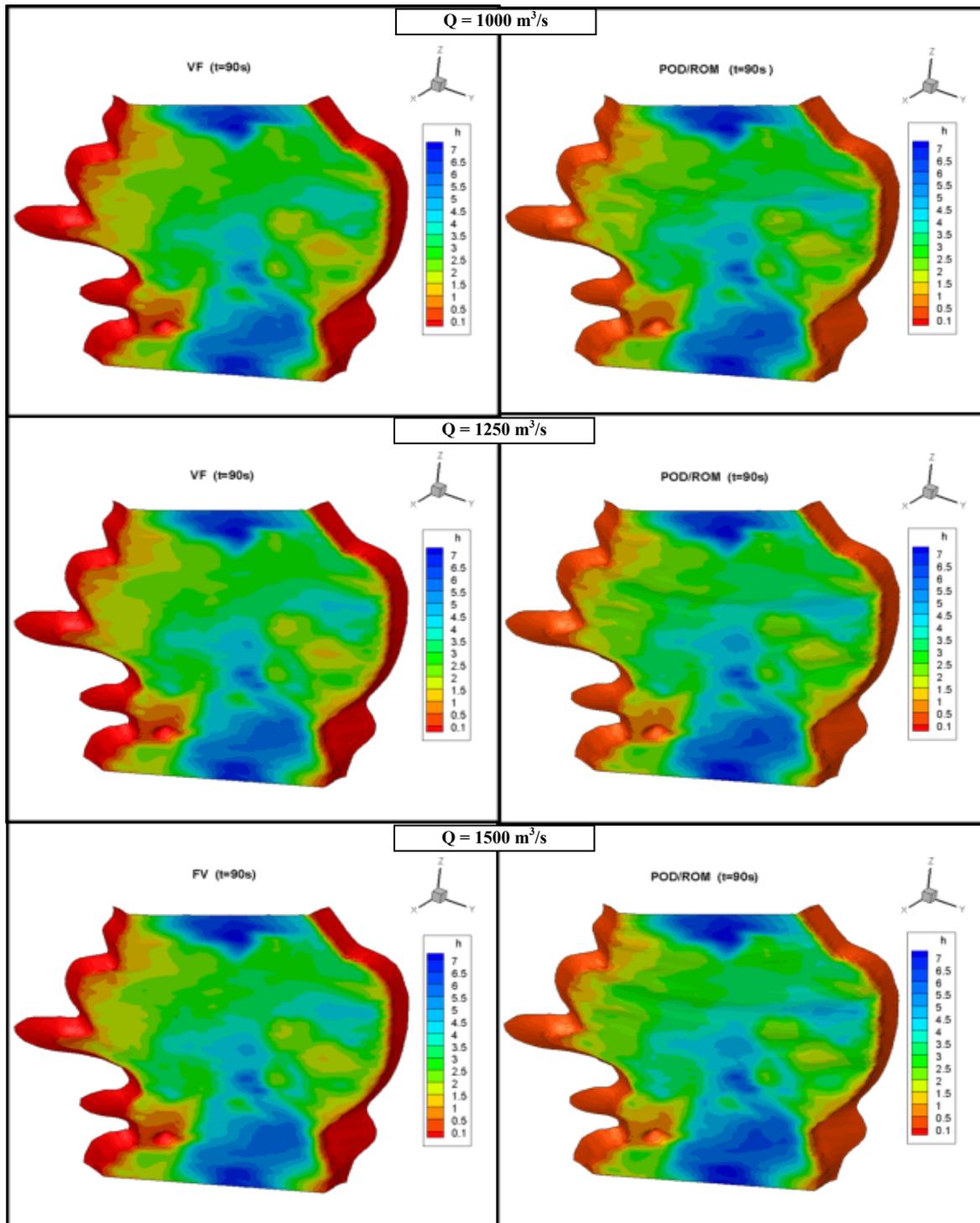


Figure 7.18 Estacade de Bordeaux
Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit
Contours de la hauteur d'eau comparés à l'instant $t = 90 \text{ s}$

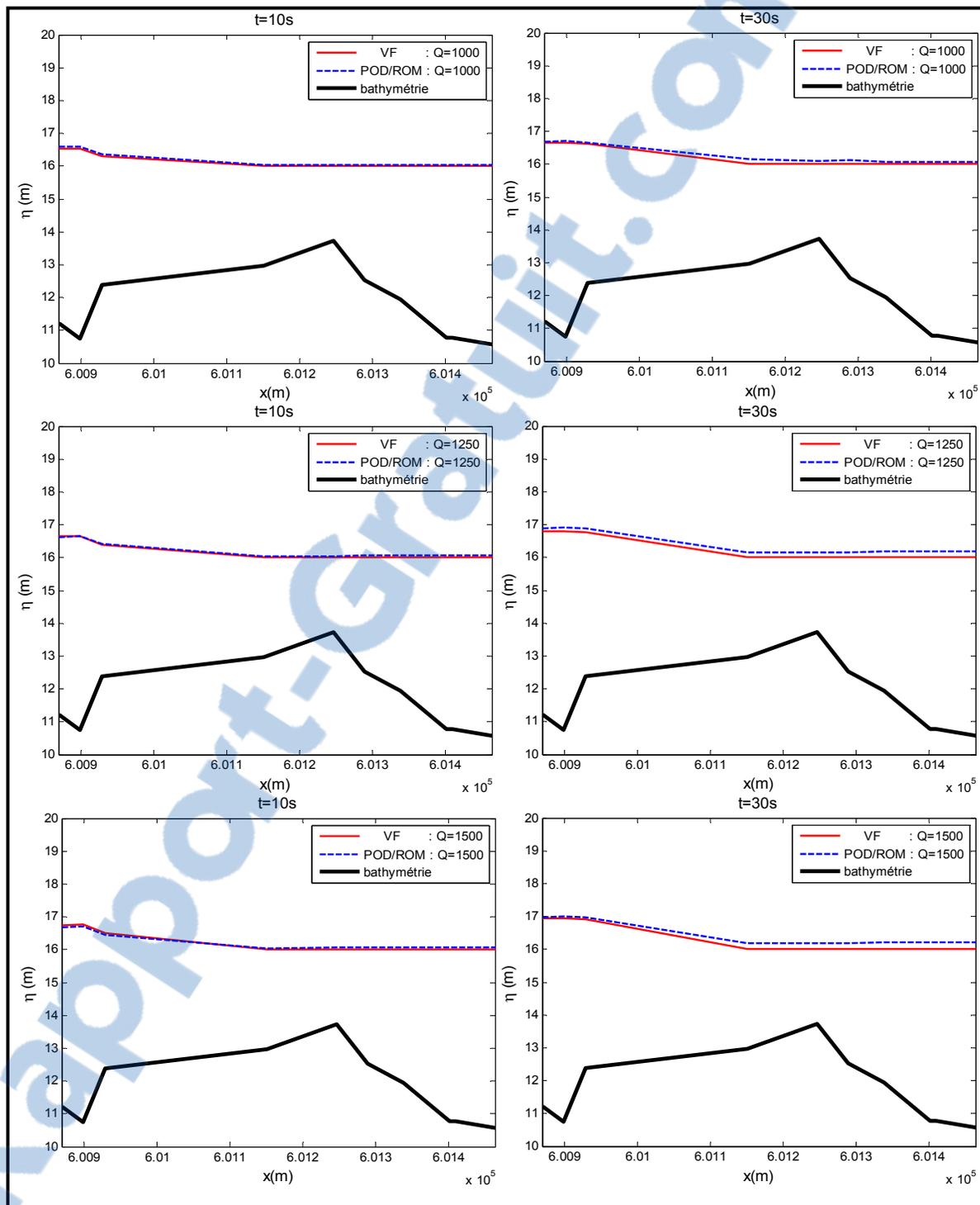


Figure 7.19 Estacade de Bordeaux
 Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit
 Niveaux d'eau comparés le long de l'axe de la rivière à $t = 10$ s et $t = 30$ s

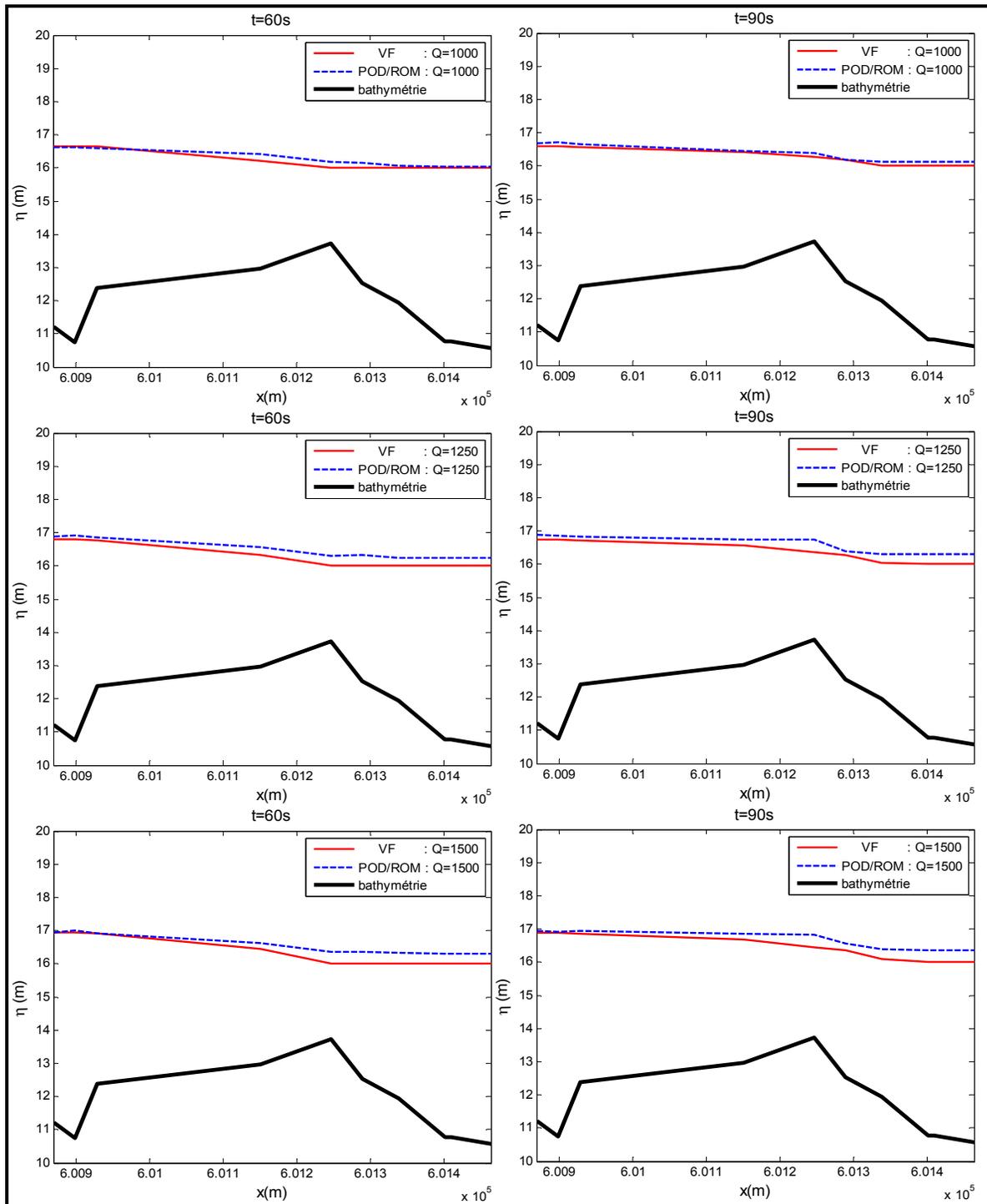


Figure 7.20 Estacade de Bordeaux
 Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit
 Niveaux d'eau comparés le long de l'axe de la rivière à $t = 60$ s et $t = 90$ s

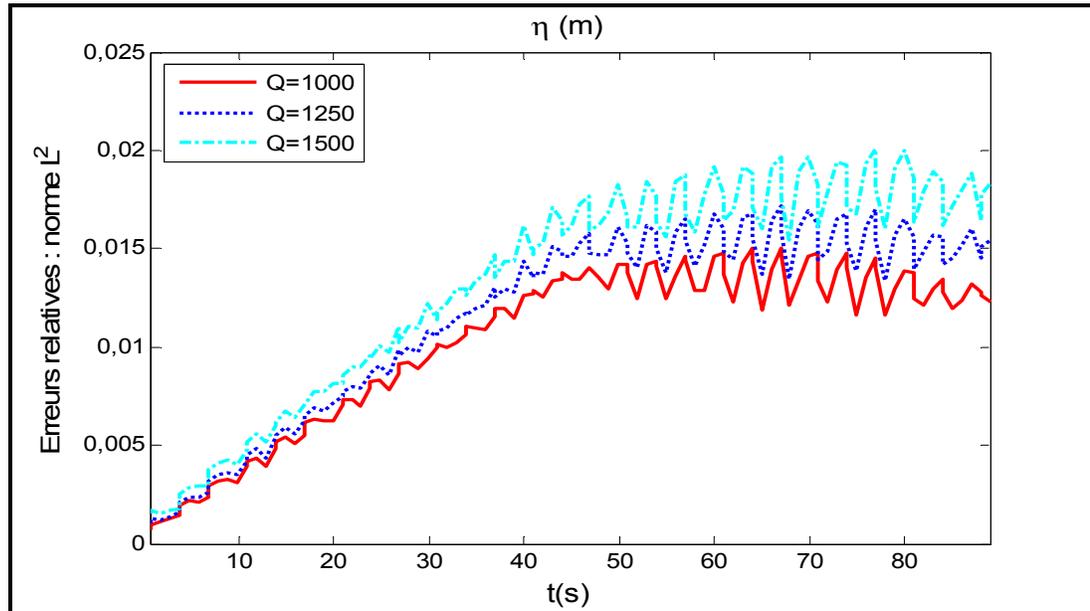


Figure 7.21 Estacade de Bordeaux
 Analyse de la sensibilité du POD/ROM à la variation du débit
 Évolution temporelle de l'erreur sur la prédiction de la surface libre
 selon la norme L^2 pour des scénarios de variation du débit

7.4 Conclusion

L'exploitation du modèle réduit POD/ROM à travers ce chapitre a montré que la POD peut être un outil essentiel dans une analyse de sensibilité pour des variations raisonnables des conditions initiales et des paramètres physiques régissant les écoulements. Les résultats obtenus du modèle réduit proposé sont globalement assez proches de ceux issus du modèle aux volumes finis, avec une accélération appréciable dans les calculs.

Pour des variations plus importantes, soient d'environ 50% dans le cas de la variation de la hauteur d'eau, les bases obtenues à partir du problème de référence (Test 0) ne sont plus efficaces. Les informations stockées dans ces bases sont dépassées par la dynamique des nouveaux problèmes considérés. La solution à ce handicap résiderait dans la construction d'un modèle adaptatif prenant en compte la mise à jour des bases POD pour des variations extrêmes des conditions initiales et paramètres physiques de référence.

CONCLUSION

Cette thèse a eu pour double objectif le développement d'un modèle numérique de simulation des écoulements à surface libre et la proposition d'un modèle d'ordre réduit associé, pour des calculs accélérés. Il s'agissait fondamentalement dans cette étude de répondre à la problématique des inondations dues aux crues, aux ruptures de barrage, voire aux tsunamis. En effet, face à la violence de plus en plus accrue des catastrophes dues aux inondations, l'hydraulicien est confronté à des défis prenant de nouvelles dimensions. La gestion des mesures préventives telles que la construction de digues de protection, de barrages écrêteurs de crues ou de canalisations d'évacuation et des cartes d'inondation nécessite une analyse de plus en plus fine. Ainsi, le code numérique développé dans cette étude se veut-il un outil aidant à faciliter l'analyse en ingénierie.

Dans la première partie de ce projet, nous avons proposé un modèle numérique simulant adéquatement les bancs couvrants et découvrants. Ces phénomènes sont en effet très présents dans les écoulements à surface libre et caractérisent particulièrement les écoulements d'inondation. La dynamique des bancs couvrants et découvrants est modélisée à travers les équations d'eaux peu profondes (Saint-Venant) dans leur forme conservative. Le caractère non-linéaire et hyperbolique des équations est approprié à la modélisation de la propagation d'ondes impliquant de forts gradients de vitesse à l'interface entre les zones sèches et humides. Les équations sont discrétisées par la technique des volumes finis selon une approche eulérienne dans leur forme de base afin d'éviter l'intégration du terme source de géométrie. L'intégration du terme source de géométrie a en effet été identifiée comme étant à la base du déficit de robustesse des schémas numériques proposés dans la littérature (Tchamen, 2006).

Le terme source de gravité est approximé localement de sorte à en obtenir une forme divergente permettant de l'inclure dans le flux d'interface. Deux propositions sont faites. La première est basée sur le modèle proposé par Tchamen (2006) à travers une approximation locale de la hauteur d'eau et aboutit à un modèle numérique dit 'linéaire'.

Dans la seconde proposition, la hauteur d'eau est substituée par la différence entre la surface libre et la bathymétrie dont l'approximation locale conduit à un schéma dit 'non-linéaire'. Le terme source est réduit finalement au terme de friction discrétisé selon un schéma semi-implicite. La résolution du système résultant de la discrétisation des équations requiert l'utilisation d'un schéma numérique robuste capable de reproduire la propagation de chocs. Les schémas de Riemann sont particulièrement adaptés à ce type de problème. Nous avons utilisé à cet effet un schéma de Lax-Friedrichs avec un terme de dissipation artificielle pour le calcul des flux aux interfaces.

La propagation des bancs couvrants et découvrants a été prise en compte à travers des traitements spécifiques aux interfaces humide/sec. Le calcul du flux est adapté selon la nature sèche ou mouillée de la cellule calculée. La correction locale de la surface libre a été appliquée afin de palier la création d'un gradient de niveau d'eau au voisinage des zones sèches, phénomène responsable de flux non-physiques et d'instabilités numériques. La correction de la surface libre à l'interface humide/sec permet de conserver la condition du fluide au repos ou la C-property. En outre, les calculs symétriques aux interfaces, assurent au modèle la conservation globale de la masse. Le modèle a été validé à travers des tests classiques numériques dont les résultats se sont avérés satisfaisants, relativement à quelques travaux antérieurs (Brufau, Vazquez-Cendon et Garcia-Navarro, 2002; Castro et al., 2006; Díaz et al., 2008; Heniche et al., 2000). La robustesse du modèle a été évaluée à travers la simulation des bancs couvrants et découvrants dans une portion de la rivière des Prairies constituant un domaine à bathymétrie réelle complexe. Des conditions aux limites extrêmes ont été imposées à cet effet. Malgré l'absence de données de comparaison, le caractère assez réaliste des résultats obtenus ont témoigné de la capacité du modèle numérique proposé à simuler des cas d'écoulements complexes.

La seconde partie de cette thèse a été consacrée à la construction d'un modèle d'ordre réduit assurant une accélération significative des simulations et des résultats assez proches de ceux fournis par le modèle explicite. L'objectif est de faciliter l'analyse de la sensibilité aux paramètres physiques régissant un écoulement considéré sans recours permanent au code

volumes finis. Les paramètres physiques (bathymétrie, débit, coefficient de résistance) régissant les écoulements réels ne peuvent être saisis avec précision du fait de leur variabilité naturelle. Dans une gestion efficace des risques d'inondation, des calculs répétitifs doivent prendre en compte les incertitudes sur ces paramètres physiques de sorte à procéder à une analyse probabiliste. Cette démarche peut être très lourde et coûteuse lorsqu'un modèle explicite avec plusieurs milliers de degrés de liberté est utilisé. Le modèle d'ordre réduit (ROM) proposé est basé essentiellement sur la réduction du schéma aux volumes finis à travers la projection de Galerkin des équations discrétisées sur des bases obtenues par la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) des matrices des *snapshots*. Des approximations des termes non linéaires relatifs au flux de convection et de la vitesse d'onde ont été effectuées pour la réalisation d'un modèle réduit effectif, soit un modèle pour lequel le coût des calculs dépend essentiellement de la dimension de la base de réduction. Le ROM a été ensuite validé à travers des tests numériques dont les résultats ont été comparés à ceux fournis par le code volumes finis.

Dans une première phase dite de reproduction, considérant un problème défini par des conditions initiales et paramètres physiques donnés, un modèle d'ordre réduit a été construit. Les résultats des modèles POD/ROM et VF pour ces conditions et paramètres identiques ont été comparés avec satisfaction. Le modèle réduit reproduit raisonnablement les solutions du modèle VF avec une accélération très appréciable des calculs. En outre le POD/ROM donne la latitude d'utiliser un pas de temps plus important que celui imposé par le modèle VF. Dans la seconde phase, à partir d'un modèle d'ordre réduit construit pour un problème donné, des perturbations ont été appliquées aux conditions initiales et paramètres physiques de base. Cette phase dite d'exploitation a eu pour objectif d'évaluer l'utilité du ROM dans une analyse de sensibilité. Les résultats obtenus du modèle réduit sont assez proches de ceux issus du modèle aux volumes finis pour des variations raisonnables (moins de 50% pour les hauteurs d'eau et débits initiaux) des conditions initiales et des paramètres physiques régissant les écoulements des problèmes étudiés.

Les différentes applications effectuées ont permis de répondre aux attentes d'un modèle réduit effectif :

- (i) La rapidité d'exécution : les simulations sont faites environ 60 à 960 fois plus rapidement avec le ROM relativement au modèle VF pour les problèmes étudiés. Le facteur d'accélération peut être encore plus important pour des problèmes simulés sur un plus grand domaine ou une plus longue période car le pas de temps peut être pris plus grand avec le ROM. Ces accélérations dans les calculs restent toutefois satisfaisantes comparées à celles rencontrées dans la littérature.
- (ii) La précision : les résultats obtenus du ROM sont assez proches de ceux du modèle VF pour des paramètres physiques identiques. Les erreurs relatives sont généralement inférieures à 0.02%.
- (iii) L'utilité : Le ROM est exploitable par application à de nouveaux scénarios pour une analyse de la sensibilité des prédictions aux paramètres physiques et aux conditions initiales. Le ROM proposé pourrait être un outil intéressant d'analyse en ingénierie par couplage avec un modèle probabiliste de type Monte Carlo.
- (iv) L'autonomie de l'utilisateur : La technique POD utilisée permet une utilisation sans grande expertise du ROM. La démarche intrusive de réduction à travers la projection de Galerkin des équations gouvernantes discrétisées sur les bases POD a abouti à un modèle d'ordre réduit quasi-autonome.

En définitive, nous pouvons affirmer que les objectifs préfixés à cette thèse ont été atteints. Un modèle numérique bidimensionnel de simulation des écoulements à surface libre prenant en compte la propagation des bancs couvrants et découvrants a été développé et un modèle d'ordre réduit pour l'accélération des calculs a été proposé. Ces outils pourront être d'une aide précieuse à l'ingénieur pour la simulation d'écoulements hypothétiques et éventuellement la définition de cartes d'inondation.

RECOMMANDATIONS

Recommandations relatives au modèle de simulation des écoulements à surface libre

La modélisation de la dynamique des crues et des inondations doit prendre en compte, au-delà du volet hydrodynamique, un volet sédimentaire et désormais un volet environnemental avec entre autres la dynamique des polluants dans les vallées et les plaines inondables. (Dewals, 2006). En effet, les inondations survenant suite aux ruptures de barrages et aux crues transportent de nombreux débris, sédiments et polluants. Il importe alors d'ajouter au modèle numérique proposé dans cette thèse un modèle turbulent et un modèle de transport de sédiments et de polluants.

Recommandations relatives au modèle d'ordre réduit (ROM)

Lors de la phase d'exploitation du modèle réduit POD/ROM, il est apparu que pour des perturbations plus importantes des conditions et paramètres initiaux, soient d'environ 50% pour les niveaux d'eau et débits, les bases obtenues pour le problème de référence n'étaient plus efficaces. Pour palier ce handicap, nous suggérons un modèle adaptatif imposant une reconstruction des bases POD lorsque pour des variations plus importantes, celles-ci ne sont plus représentatives de la dynamique des nouveaux problèmes considérés.

Recommandations relatives au couplage du ROM avec un modèle probabiliste

Pour une utilisation optimale du ROM proposé dans cette étude, un couplage peut être réalisé avec un modèle probabiliste de type Monte Carlo pour des fins d'analyse de fiabilité. Cette approche pourra être utile à la définition de probabilité de dépassement des mesures préventives contre les inondations. L'étude de la sensibilité aux paramètres initiaux en donne un aperçu. A partir d'un échantillon de problèmes définis, le modèle probabiliste pourra faire des appels séquentiels ou parallèles (idéalement) au modèle d'ordre réduit en remplacement du modèle volumes finis.

ANNEXE I

SIMPLIFICATION DE L'EXPRESSION DU FLUX D'INTERFACE PAR L'INVARIANCE ROTATIONNELLE

Les vecteurs \mathbf{G} et \mathbf{H} satisfont à la propriété de l'invariance rotationnelle :

$$\mathbf{G}(\mathbf{U})n^x + \mathbf{H}(\mathbf{U})n^y = \mathbf{T}_n^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{U}) \quad (\text{A I-1})$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A I-2})$$

et \mathbf{T}_n , la matrice de rotation d'expression :

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n^x & n^y \\ 0 & -n^y & n^x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n^x & -n^y \\ 0 & n^y & n^x \end{bmatrix} \quad (\text{A I-3})$$

En effet, en considérant le membre de gauche, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{U} = \left[h, \quad h(un^x + vn^y), \quad h(-un^y + vn^x) \right]^T \quad (\text{A I-4})$$

Posons $u_n = un^x + vn^y$ et $v_n = vn^x - un^y$, alors

$$\mathbf{G}(\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{U}) = \left[hu_n, h(u_n)^2 + \frac{1}{2}gh^2, hu_nv_n \right]^T \quad (\text{A I-5})$$

Finalement par application de l'inverse de la matrice de rotation \mathbf{T}_n^{-1} , il vient :

$$\mathbf{T}_n^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} hu_n \\ n^x \left(h(u_n)^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) - n^y hu_nv_n \\ n^y \left(h(u_n)^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) - n^x hu_nv_n \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{U})n^x + \mathbf{H}(\mathbf{U})n^y \quad (\text{A I-6})$$

ANNEXE II

CONDITION DE STABILITÉ DU SCHEMA NUMÉRIQUE

Dans le contexte de la discrétisation des équations d'eaux peu profondes par les volumes finis, l'analyse de stabilité conduit à la restriction du pas de temps par la condition de CFL :

$$CFL = \Delta t \frac{\max_{K_i}(\sqrt{gh_i} + \|\mathbf{u}_i\|)}{\min_{K_i}(d_{i-\Gamma_{ij}})} \leq 1 \quad (\text{A II-1})$$

où $d_{i-\Gamma_{ij}}$ est la distance du centre de la cellule K_i à l'interface Γ_{ij} avec la cellule K_j

Le coefficient de CFL peut être considéré comme la fraction de longueur de l'élément traversée par l'onde dans le pas de temps. Cette condition assure donc que les ondes les plus rapides ne traversent pas plus d'un élément par pas de temps.

Vu que nous considérons des maillages triangulaires dans cette étude, et pour des raisons d'économie de temps de calculs, nous utilisons comme proposé par (Loukili et Soulaïmani, 2007) l'approximation :

$$d_{i-\Gamma_{ij}} = \frac{1}{3} \Gamma_{ij} \quad (\text{A II-2})$$

ANNEXE III

MAILLAGE DE L'ESTACADE DE BORDEAUX (RIVIÈRE DES PRAIRIES)

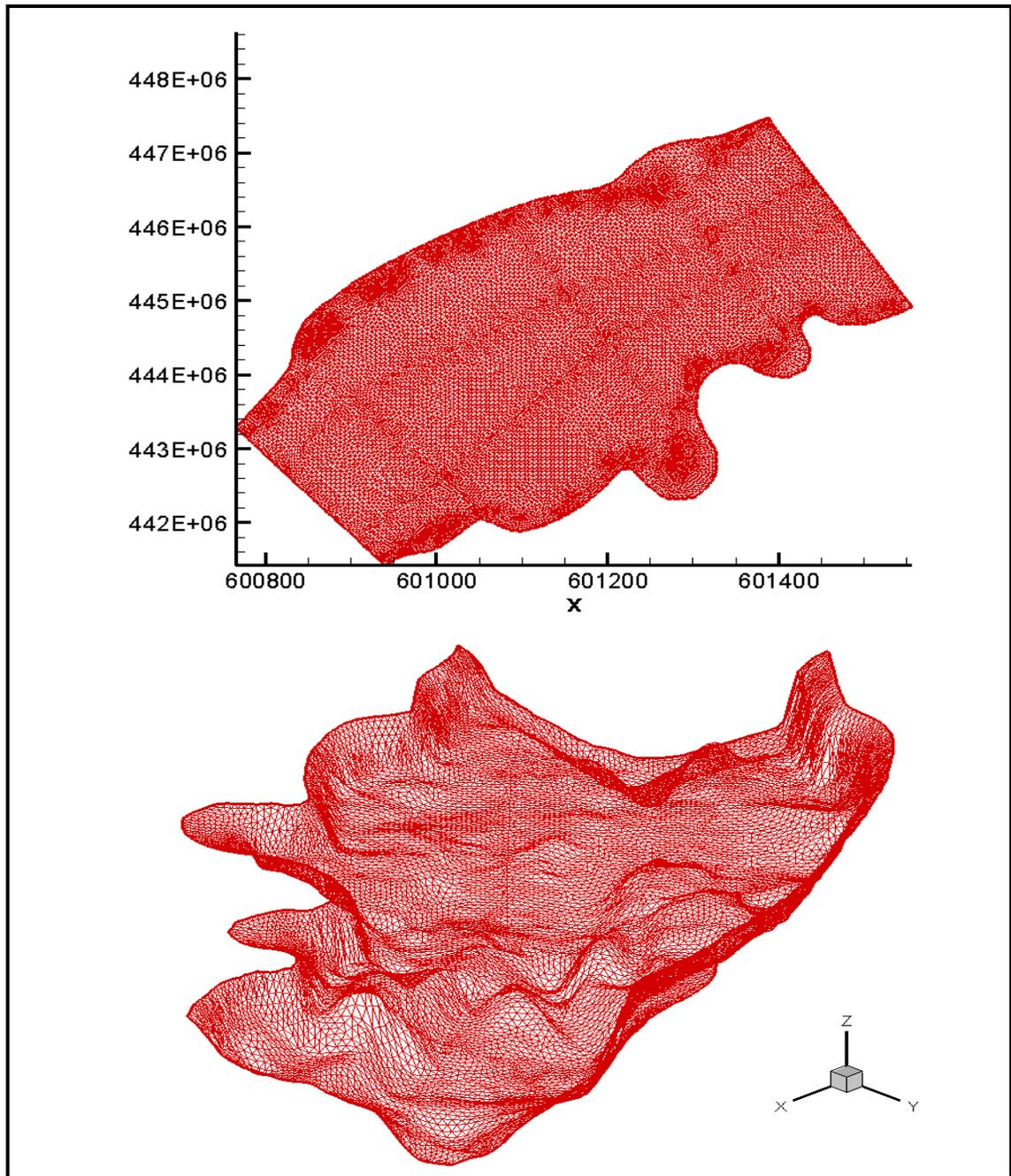


Figure A II-1 Maillages 2-D et 3-D de la portion de la rivière des Prairies

ANNEXE IV

BANCS COUVRANTS ET DÉCOUVRANTS DANS LA RIVIÈRE DES PRAIRIES

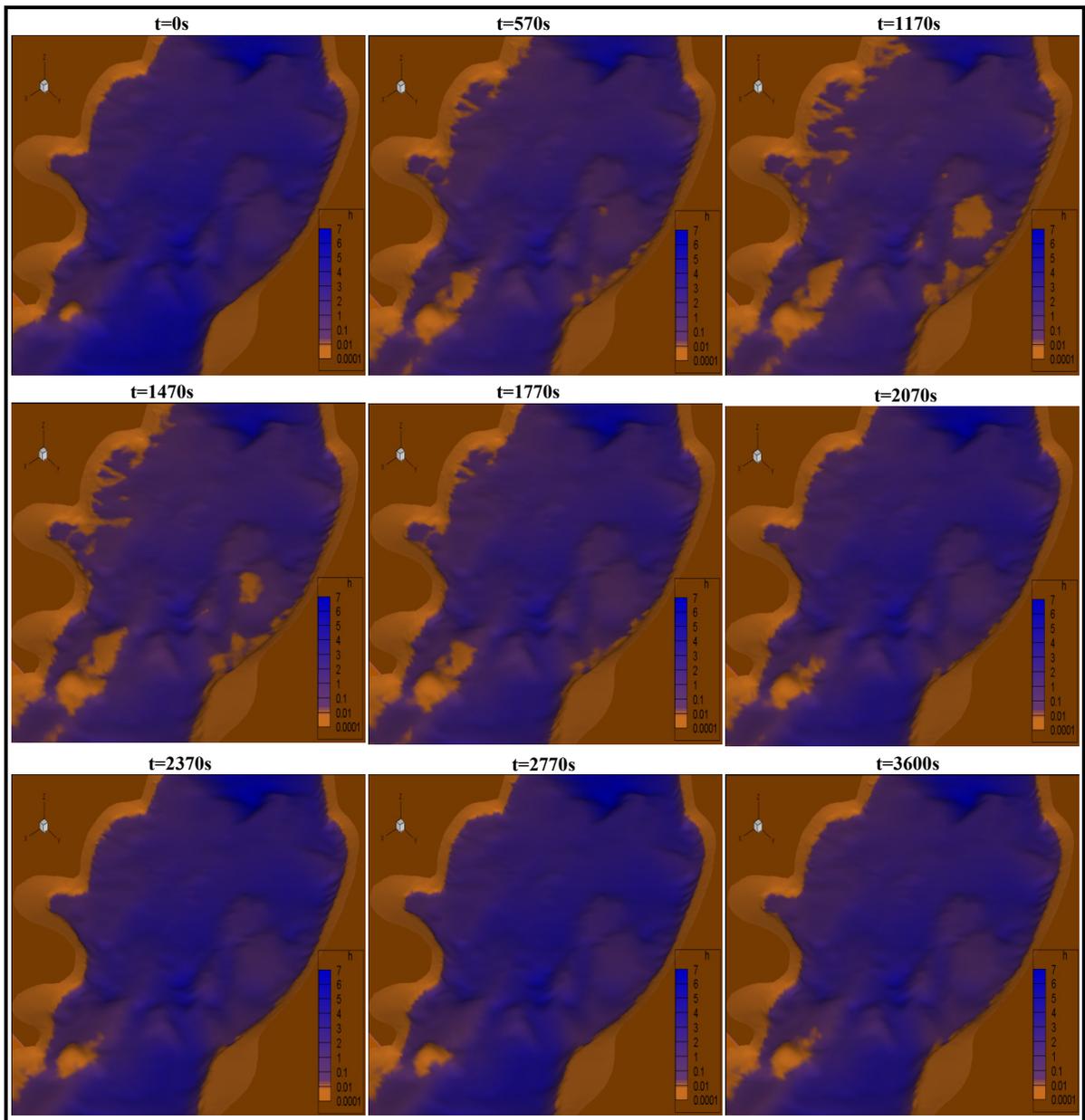


Figure A III-1 Rivière des prairies
Évolution des bancs couvrants-découvrants dans la prairie à différents instants

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Akanbi, Abiola A., et Nikolaos D. Katopodes. 1988. « Model for Flood Propagation on Initially Dry Land ». *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 114, n° 7, p. 689-706.
- Akhtar, Imran, Ali H. Nayfeh et Calvin J. Ribbens. 2009. « On the stability and extension of reduced-order galerkin models in incompressible flows : A numerical study of vortex shedding ». *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 23, p. 213-237.
- Alcrudo, F., et Soares Frazão. 1999. « Conclusions from the 1st CADAM meeting - Wallingford, UK ». *proceedings of the CADAM Meeting Wallingford*, (2-3 March), p. 35-43.
- Allery, Callery, C. Beghein et A. Hamdouni. 2005. « Applying proper orthogonal decomposition to the computation of particle dispersion in a two-dimensional ventilated cavity ». *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 10, p. 907-920.
- Antoulas, A. C. 2005. « An overview of approximation methods for large-scale dynamical systems ». *Annual Reviews in Control*, vol. 29, p. 181-190.
- Arnoldi, W.E. 1951. « The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem ». *Quart. Appl. Math*, vol. 9, n° 1, p. 17-29.
- Ata, R., A. Soulaïmani et F. Chinesta. 2007. « A Lagrangian finite volume method for the simulation of flows with moving boundaries ». *10 th Esaform Conference on Material Forming: Part A (AIP Conference Proceedings Volume 907)*, vol. 907, p. 1412-1417.
- Ata, Riadh. 2008. *Les methodes de réduction de modèles: état de l'art et applications à quelques problèmes thermomécaniques*.
- Audusse E., Bouchut F., Bristeau M.O., Klein R. et Perthame B. 2004. « A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows ». *SIAM Journal of Scientific Computing*, vol. 25, n° 6, p. 2050-2065.
- Bai, Lu-hai, et Sheng Jin. 2009. « A Conservative Coupled Flow/Transport Model with Zero Mass Error ». *Journal of Hydrodynamics*, vol. 21, n° 2, p. 166-175.
- Baker, G.A., et P.R. Graves-Morris. 1996. *Padé approximants*. Cambridge University Press.
- Balzano, A. 1998. « Evaluation of methods for numerical simulation of wetting and drying in shallow water flow models ». *Coastal Engineering*, vol. 34, n° 1-2, p. 83-107.

- Barr, D. I. H., et M. M. Das. 1980. « Numerical Simulation of Dam-Burst and Reflections, with Verification against Laboratory Data ». In *Proceedings of the Institution of Civil Engineers (London). Part 1 - Design & Construction*. Vol. 69, p. 359-373.
- Bates, P. D., et A. P. J. De Roo. 2000. « Simple raster-based model for flood inundation simulation ». *Journal of Hydrology*, vol. 236, n° 1, p. 54-77.
- Bates, P. D., M. S. Horritt, G. Aronica et K. Beven. 2004. « Bayesian updating of flood inundation likelihoods conditioned on flood extent data ». *Hydrological Processes*, vol. 18, n° 17, p. 3347-70.
- Bates, P. O., et M. S. Horritt. 2005. « Modelling wetting and drying processes in hydraulic models ». *Computational Fluid Dynamics: Applications in Environmental Hydraulics*, p. 121-146.
- Beckett, G., J. A. Mackenzie, A. Ramage et D. M. Sloan. 2002. « Computational solution of two-dimensional unsteady PDEs using moving mesh methods ». *Journal of Computational Physics*, vol. 182, n° 2, p. 478-95.
- Beffa, C., et R. J. Connell. 2001. « Two-dimensional flood plain flow. I: Model description ». *Journal of Hydrologic Engineering*, vol. 6, n° 5, p. 397-405.
- Ben Haj Ali, A. 2008. « Calcul de haute performance en aeroelasticite et en ecoulements turbulents tridimensionnels ». Thèse de doctorat, Montréal, Ecole de Technologie Supérieure (Canada), 160 p.
- Bermúdez, A., A. Dervieux, J. A. Desideri et M. E. Vázquez. 1998. « Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 155, n° 1-2, p. 49-72.
- Bermúdez, Alfredo, et M. Elena Vazquez. 1994. « Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms ». *Computers and Fluids*, vol. 23, p. 1049-1071.
- Bradford, Scott F., et Brett F. Sanders. 2002. « Finite-volume model for shallow-water flooding of arbitrary topography ». *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 128, p. 289-298.
- Brufau, P., et P. Garcia-Navarro. 2003. « ». *Journal of Computational Physics*, vol. 186, n° 2, p. 503-526.
- Brufau, P., P. Garcia-Navarro et M. E. Vazquez-Cendon. 2004. « Zero mass error using unsteady wetting-drying conditions in shallow flows over dry irregular topography ». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 45, n° 10, p. 1047-1082.

- Brufau, P., M. E. Vazquez-Cendon et P. Garcia-Navarro. 2002. « A numerical model for the flooding and drying of irregular domains ». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 39, n° 3, p. 247-275.
- Burkardt, J., M. Gunzburger et Lee Hyung-Chun. 2006. « Centroidal Voronoi tessellation-based reduced-order modeling of complex systems ». *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 28, p. 459-84.
- Burkardt, John, Max Gunzburger et Hyung-Chun Lee. 2006. « POD and CVT-based reduced-order modeling of Navier-Stokes flows ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, p. 337-355.
- Cardoso, M. A., L. J. Durlofsky et P. Sarma. 2009. « Development and application of reduced-order modeling procedures for subsurface flow simulation ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, p. 1322-50.
- Castro, M. J., A. M. Ferreiro Ferreiro, J. A. Garcia-Rodriguez, J. M. Gonzalez-Vida, J. MaciAs, C. Pares et M. Elena Vazquez-Cendon. 2005. « The numerical treatment of wet/dry fronts in shallow flows: Application to one-layer and two-layer systems ». *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 42, n° 3-4, p. 419-439.
- Castro, M. J., J. A. Garcia-Rodriguez, J. M. Gonzalez-Vida et C. Pares. 2006. « A parallel 2d finite volume scheme for solving systems of balance laws with nonconservative products: Application to shallow flows ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 19-22, p. 2788-2815.
- Chan, T.F. 1982. « An improved algorithm for computing the singular value decomposition ». *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 8, n° 1, p. 72-83.
- Chanson, H. 2006. « Analytical solutions of laminar and turbulent dam break wave ». In *Proceedings of the International Conference on Fluvial Hydraulics - River Flow*, (6-8 September). Vol. 1, p. 465-474. Lisbon, Portugal.
- Christian, C. D., et G. N. Palmer. 1997. « Deforming finite element mesh for use in moving one-dimensional boundary wave problems ». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 25, n° 4, p. 407-420.
- Danowsky, Brian P., Peter M. Thompson, Charbel Farhat, Thuan Lieu, Chuck Harris et Jason Lechniak. 2009. « A complete aeroservoelastic model: Incorporation of oscillation-reduction- control into a high-order CFD/FEM fighter aircraft model ». In *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference* (10-13 August). Chicago, IL, United states.

- Dartus, D., L. Dedecker et JM Courivaud. 1993. « Utilisation d'un réseau neuronal pour l'étude de la propagation d'une onde de crue dans un canal ». *Journal of Hydraulic Research*, vol. 31, n° 2, p. 161-169.
- Davis, S. F. 1988. « Simplified Second-Order Godunov-Type Methods ». *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 9, p. 445.
- Dewals, B.J. 2006. « Une approche unifiée pour la modélisation d'écoulements à surface libre, de leur effet érosif sur une structure et de leur interaction avec divers constituants ». PhD thesis, University of Liege.
- Díaz, MJ, T.C. Rebollo, ED Fernández-Nieto, JM Vida et C. Parés. 2008. « Well-balanced finite volume schemes for 2D non-homogeneous hyperbolic systems. Application to the dam break of Aznalcóllar ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, n° 45-48, p. 3932-3950.
- Dibike, Y.B., D. Solomatine et M.B. Abbott. 1999. « On the encapsulation of numerical-hydraulic models in artificial neural network ». *Journal of Hydraulic Research*, vol. 37, n° 2, p. 147-161.
- Du, Q., et M. Gunzburger. 2003. « Centroidal Voronoi tessellation based proper orthogonal decomposition analysis ». In *International Series of Numerical Mathematics* (July). Vol. 143, p. 137-150. Maria Trost (Austria).
- Du, Q., M. Gunzburger et L. Ju. 2010. « Advances in studies and applications of centroidal Voronoi tessellations ». *Numer. Math. Theor. Meth. Appl.*, vol. 3, n° 2, p. 119-142.
- Du, Qiang, Vance Faber et Max Gunzburger. 1999. « Centroidal Voronoi tessellations: Applications and algorithms ». *SIAM Review*, vol. 41, p. 637-676.
- Ern, A., S. Piperno et K. Djadel. 2008. « A well-balanced Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for the shallow-water equations with flooding and drying ». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 58, n° 1, p. 1-25.
- Esfahanian, V., et K. Ashrafi. 2009. « Equation-free/galerkin-free reduced-order modeling of the shallow water equations based on proper orthogonal decomposition ». *Journal of Fluids Engineering*, vol. 131, p. 071401 (13 pp.).
- Falconer, R. A., et Y. P. Chen. 1991. « An improved representation of flooding and drying and wind stress effects in a 2-dimensional tidal numerical-model ». *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2. Research and Theory*, vol. 91, p. 659-678.
- Falconer, R. A., et P. H. Owens. 1987. « Numerical Simulation of Flooding and Drying in a Depth-Averaged Tidal Flow Model ». *Proceedings of the Institution of Civil Engineers (London)*, vol. 83, n° pt 2, p. 161-180.

- Fang, F., C. C. Pain, I. M. Navon, G. J. Gorman, M. D. Piggott, P. A. Allison, P. E. Farrell et A. J. H. Goddard. 2009. « A POD reduced order unstructured mesh ocean modelling method for moderate Reynolds number flows ». *Ocean Modelling*, vol. 28, p. 127-136.
- Feng, Y. T., et D. Peric. 2000a. « Coarse mesh evolution strategies in the Galerkin multigrid method with adaptive remeshing for geometrically non-linear problems ». *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 49, p. 547-571.
- Feng, Y. T., et D. Peric. 2000b. « A time-adaptive space-time finite element method for incompressible Lagrangian flows with free surfaces: computational issues ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n° 5-7, p. 499-518.
- Feng, Y. T., et D. Peric. 2003. « A spatially adaptive linear space-time finite element solution procedure for incompressible flows with moving domains ». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 43, n° 9, p. 1099-1106.
- Feng, Zhengkun, et Azzeddine Soulaïmani. 2007. « Investigations of nonlinear aeroelasticity using a reduced order fluid model based on POD method ». In *18th AIAA Computational Fluid Dynamics, Conference American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc. (25-28 June)*. Vol. 2, p. 1265-1270. Miami, FL, United states.
- Forrester, A.I.J., A. Sóbester et A.J. Keane. 2008. *Engineering design via surrogate modelling: a practical guide*. Wiley.
- Galbally, David. 2008. « Nonlinear Model Reduction for Uncertainty Quantification in Large-scale Inverse Problems: Application to Nonlinear Convection-diffusion-reaction Equation ». PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Aeronautics and Astronautics.
- Galloüet, Thierry, Jean-Marc Hérard et Nicolas Seguin. 2003. « Some approximate godunov schemes to compute shallow-water equations with topography ». *Computers and Fluids*, vol. 32, n° 4, p. 479-513.
- Glaister, P. 1993. « Flux difference splitting for open-channel flows ». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 16, p. 629-54.
- Godunov, S.K. 1959. « A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics ». *Matematicheskii Sbornik*, vol. 89, n° 3, p. 271-306.

- Gomes, H. M., et A. M. Awruch. 2004. « Comparison of response surface and neural network with other methods for structural reliability analysis ». *Structural Safety*, vol. 26, n° 1, p. 49-67.
- Guyan, R.J. 1965. « Reduction of stiffness and mass matrices ». *AIAA Journal*, vol. 3, n° 2, p. 380.
- Heniche, M., Y. Secretan, P. Boudreau et M. Leclerc. 2000. « A two-dimensional finite element drying-wetting shallow water model for rivers and estuaries ». *Advances in Water Resources*, vol. 23, n° 4, p. 359-372.
- Hervouet, J. M. 2000. « High resolution 2-D dam-break model using parallelization ». *Hydrological Processes*, vol. 14, n° 13, p. 2211-2230.
- Holmes, P. J., J. L. Lumley, G. Berkooz, J. C. Mattingly et R. W. Wittenberg. 1997. « Low-dimensional models of coherent structures in turbulence ». *Physics Reports*, vol. 287, p. 337-84.
- Holz, K. P., et G. Nitsche. 1980. « Tidal Wave Analysis for Estuaries with Intertidal Flats ». *Finite Elements in Water Resources*, p. 5.113-5.126.
- Horritt, M. S. 2002. « Evaluating wetting and drying algorithms for finite element models of shallow water flow ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 55, n° 7, p. 835-851.
- Jha, A. K., J. Akiyama et M. Ura. 2001. « High resolution flux-difference-splitting scheme on adaptive grid for open-channel flows ». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 36, p. 35-52.
- Jiang, YW, et OWH Wai. 2005. « Drying–wetting approach for 3D finite element sigma coordinate model for estuaries with large tidal flats ». *Advances in Water Resources*, vol. 28, n° 8, p. 779-792.
- Karhunen, K. 1946. « Zur spektraltheorie stochastischer prozesse ». *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, vol. 37.
- Kasnakoglu, C. 2007. « Reduced order modeling, nonlinear analysis and control methods for flow control problems ». PhD thesis, The Ohio State University.
- Kawahara, M., et T. Umetsu. 1986. « Finite element method for moving boundary problems in river flow ». *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 6, n° 6, p. 365–386.
- Keane, A.J., et P.B. Nair. 2005. *Computational approaches for aerospace design*. Coll. « The Pursuit of Excellence ». Wiley.

- Khan, A. A. 2000. « Modeling flow over an initially dry bed ». *Journal of Hydraulic Research* vol. 38, n° 5, p. 383.
- Kramer, T., et J. Jozsa. 2007. « Solution-adaptivity in modelling complex shallow flows ». *Computers & Fluids*, vol. 36, n° 3, p. 562-77.
- Krüger, S, et P Rutschmann. 2006. « Modeling 3D supercritical flow with extended shallow-water approach ». *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 132, p. 916.
- Lanczos, C. 1950. « An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators ». *J. Res. Nat. Bur. Standards*, vol. 45, n° 4, p. 255-282.
- Leclerc, Michel, Jean-Francois Bellemare, Guy Dumas et Gouri Dhatt. 1990. « Finite element model of estuarian and river flows with moving boundaries ». *Advances in Water Resources*, vol. 13, n° 4, p. 158-168.
- Leendertse, J. J., et E. C. Gritton. 1971. « A water-quality simulation model for well mixed estuaries and coastal seas: vol. II, Computation Procedures ». *Report R-708-NYC, july 1971. p. 53.*
- Liang, Q, et AGL Borthwick. 2009. « Adaptive quadtree simulation of shallow flows with wet-dry fronts over complex topography ». *Computers and Fluids*, vol. 38, n° 2, p. 221-234.
- Liang, Qihua, Jun Zang, Alistair G. L. Borthwick et Paul H. Taylor. 2007. « Shallow flow simulation on dynamically adaptive cut cell quadtree grids ». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 53, n° 12, p. 1777-1799.
- Liao, CB, MS Wu et SJ Liang. 2007. « Numerical simulation of a dam break for an actual river terrain environment ». *Hydrological Processes*, vol. 21, n° 4.
- Liberge, E., M. Benaouicha et A. Hamdouni. 2008. « Low order dynamical system for fluid-rigid body interaction problem using POD method ». *The International Journal of Multiphysics*, vol. 2, n° 1, p. 59-81.
- Liberge, E., et A. Hamdouni. 2010. « Reduced order modelling method via proper orthogonal decomposition (POD) for flow around an oscillating cylinder ». *Journal of Fluids and Structures*, vol. 26, p. 292-311.
- Lieu, T., C. Farhat et M. Lesoinne. 2006. « Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° The Institution of Engineering and Technology, p. 5730-42.
- Loeve, M. 1946. « Fonctions aléatoires du second ordre ». *Rev. Sci*, vol. 84, n° 4, p. 195–206.

- Loukili, Youssef, et Azzeddine Soulaïmani. 2007. « Numerical tracking of shallow water waves by the unstructured finite volume WAF approximation ». *International Journal of Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, vol. 8, n° 2, p. 75-88.
- Lumley, J. L. 1967. « The structure of inhomogeneous turbulent flows ». *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, p. 166-178.
- Lynch, Daniel R., et William G. Gray. 1978. « Finite Element Simulation of Shallow Water Problems with Moving Boundaries ». *Mississippi State University, State College, Water Resources Research Institute, Mississippi Water Resources Conference Proceedings*, p. 2-23.
- Martinez, J. 2009. « Model order reduction of nonlinear dynamic systems using multiple projection bases and optimized state-space sampling ». PhD thesis, United States -- Pennsylvania, University of Pittsburgh, 204 p.
- McCulloch, W.S., et W. Pitts. 1943. « A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity ». *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 5, n° 4, p. 115-133.
- Nguyen, Xuan Son, Alain Sellier, Frederic Duprat et Gerard Pons. 2009. « Adaptive response surface method based on a double weighted regression technique ». *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 24, p. 135-143.
- Nicholas, A. P., et C. A. Mitchell. 2003. « Numerical simulation of overbank processes in topographically complex floodplain environments ». *Hydrological Processes*, vol. 17, n° 4, p. 727-746.
- Nikolos, I. K., et A. I. Delis. 2009. « An unstructured node-centered finite volume scheme for shallow water flows with wet/dry fronts over complex topography ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, n° 47-48, p. 3723-3750.
- Okabe, A. 2000. *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*. John Wiley & Sons Inc.
- Panayirci, H. M., H. J. Pradlwarter et G. I. Schueller. 2011. « Efficient stochastic structural analysis using Guyan reduction ». *Advances in Engineering Software*, vol. 42, p. 187-196.
- Petera, J., et V. Nassehi. 1996. « New two-dimensional finite element model for the shallow water equation's using a Lagrangian framework constructed along fluid particle trajectories ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, n° 24, p. 4159-4182.

- Phillips, J.R. 2000. « Projection frameworks for model reduction of weakly nonlinear systems ». In *ACM*. p. 184-189.
- Qiang, Du, et M. Gunzburger. 2002. « Grid generation and optimization based on centroidal Voronoi tessellations ». *Applied Mathematics and Computation*, vol. 133, p. 591-607.
- Ravindran, S. S. 2000a. « Reduced-order adaptive controllers for fluid flows using POD ». *Journal of Scientific Computing*, vol. 15, p. 457-78.
- Ravindran, S. S. 2000b. « A reduced-order approach for optimal control of fluids using proper orthogonal decomposition ». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 34, p. 425-48.
- Reid, R. O., et B. R. Bodine. 1968. « Numerical model for storm surges in Galveston Bay, J. Waterways Harbors Div ». *ACE*, vol. 94, p. 33-57.
- Roe, P. L. 1981. « Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes ». *Journal of Computational Physics*, vol. 135, p. 250-8.
- Rogers, B. D., A. G. L. Borthwick et P. H. Taylor. 2003. « Mathematical balancing of flux gradient and source terms prior to using Roe's approximate Riemann solver ». *Journal of Computational Physics*, vol. 192, n° 2, p. 422-51.
- Sielecki, A., et M. G. Wurtele. 1970. « The Numerical Integration of the Nonlinear Shallow-Water Equations with Sloping Boundaries ». *Journal of Computational Physics*, vol. 6, p. 219.
- Sirisup, S., G. E. Karniadakis, Xiu Dongbin et I. G. Kevrekidis. 2005. « Equation-free/Galerkin-free POD-assisted computation of incompressible flows ». *Journal of Computational Physics*, vol. 207, n° 2, p. 568-87.
- Sirovich, L. 1987. « Turbulence and the dynamics of coherent structures. I-Coherent structures. II-Symmetries and transformations. III-Dynamics and scaling ». *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 45, p. 561-571.
- Sirovich, L., K. S. Ball et L. R. Keefe. 1990. « Plane waves and structures in turbulent channel flow ». *Physics of Fluids A (Fluid Dynamics)*, vol. 2, p. 2217-26.
- Skoula, ZD, AGL Borthwick et CI Moutzouris. 2006. « Godunov-type solution of the shallow water equations on adaptive unstructured triangular grids ». *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 20, n° 9, p. 621-636.
- Sleigh, P. A., P. H. Gaskell, M. Berzins, N. G. Wright, K. Terada, T. Ito et N. Kikuchi. 1998. « An unstructured finite-volume algorithm for predicting flow in rivers and estuaries ». *Computers and Fluids*, vol. 27, n° 4, p. 479-508.

- Solomatine, DP, et LA Torres. 1996. « Neural network approximation of a hydrodynamic model in optimizing reservoir operation ». In *International Conference on Hydroinformatics*. p. 201-206.
- Song, L, J Zhou, Q Li, X Yang et Y Zhang. 2010. « An unstructured finite volume model for dam break floods with wet/dry fronts over complex topography ». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*.
- Soulaimani, A., M. Fortin, G. Dhatt et Y. Ouellet. 1991. « Finite element simulation of two- and three-dimensional free surface flows ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 86, n° 3, p. 265-96.
- Soulaimani, A., et Y. Saad. 1998. « An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for solving three-dimensional free surface flows ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 162, n° 1-4, p. 79-106.
- Soulaimani, Azzeddine. 1983. « Nouveaux aspects de l'application de la méthode des éléments finis en hydrodynamique ». Thèse de doctorat, Québec, Université de Laval.
- Spekreijse, S. P. 1988. *Multigrid Solution for Steady Euler Equations*. Coll. « CWI ». Amsterdam: Center of Mathematics and Computer Science.
- Stoker, J.J. 1957. *Water waves*, Wiley. New York.
- Tchamen, G. W., et R. A. Kahawita. 1998. « Modelling wetting and drying effects over complex topography ». *Hydrological Processes*, vol. 12, n° 8, p. 1151-1182.
- Tchamen, G. W., R. Kahawita et J-C Tessier. 1994. « On the Construction of a Numerical Model for the solution of the Shallow Water Wave Equations on a general unstructured mesh using Riemann Solvers ». *Proceedings of the Hydroinformatic conference* p. 679-686.
- Tchamen, G.W. 2006. « L'utilisation des schémas de Riemann pour la solution des équations de Saint-Venant ». Thèse de doctorat, Montreal, Ecole polytechnique de Montreal.
- Thacker, William Carlisle. 1981. « Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations ». *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 107, p. 499-508.
- Titov, V. V., et C. E. Synolakis. 1995. « Modeling of Breaking and Nonbreaking Long-Wave Evolution and Runup Using VTCS-2 ». *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 121, n° 6, p. 308-316.

- Toro, E. F. 1999. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics- A practical introduction*. Coll. « Berlin: Springer-Verlag. ».
- Toro, E. F. 2001. *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. Wiley.
- Van Leer, B. 1992. *Progress in multi-dimensional upwind differencing*. Hampton, Virginia: Institute for Computing Application in Science and Engineering NASA Langley Research Center.
- Vasiliev, O. F. 1970. « Numerical solution of the non-linear problems of unsteady flows in open channels ». In *Proceedings, Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, . Vol. 8, p. 410-421. Berkeley, California.
- Vazquez-Cendon, M. E. 1999. « Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry ». *Journal of Computational Physics*, vol. 148, p. 497-526.
- Vincent, S., J. P. Caltagirone et P. Bonneton. 2001. « Numerical modelling of bore propagation and run-up on sloping beaches using a MacCormack TVD scheme ». *Journal of Hydraulic Research/De Recherches Hydrauliques*, vol. 39, p. 41-49.
- Wu, Qing-Xi, Xiao-Zheng Yu et Kui-Zhi Zhao. 2005. « Response surface method and its application in reliability analysis of concrete-faced rockfill dam ». *Yanshilixue Yu Gongcheng Xuebao/Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, vol. 24, n° 9, p. 1506-1511.
- Yanhua, Cao, Zhu Jiang, Luo Zhendong et I. M. Navon. 2006. « Reduced-order modeling of the upper tropical Pacific ocean model using proper orthogonal decomposition ». *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 52, n° 8-9, p. 1373-86.
- Zeng, Z. 2010. *Advances in Neural Network Research and Applications*, 67. Springer Verlag.
- Zhang, W., et T. W. Cundy. 1989. « Modeling of two-dimensional overland flow ». *Water Resources Research*, vol. 25, n° 9, p. 2019-35.
- Zhang, X, W Long, H Xie, J Zhu et J Wang. 2007. « Numerical simulation of flood inundation processes by 2D shallow water equations ». *Frontiers of Architecture and Civil Engineering in China*, vol. 1, n° 1, p. 107-113.
- Zhao, D. H., H. W. Shen, G. Q. I. Tabios, J. S. Lai et W. Y. Tan. 1994. « Finite-volume two-dimensional unsteady-flow model for river basins ». *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 120, n° 7, p. 863-883.

- Zhaojun, Bai. 2002. « Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems ». In *19th Dundee Biennial Conference on Numerical Analysis* (26-29 June). Vol. 43, p. 9-44. Netherlands.
- Zhendong, Luo, Zhu Jiang, Wang Ruiwen et I. M. Navon. 2007. « Proper orthogonal decomposition approach and error estimation of mixed finite element methods for the tropical Pacific Ocean reduced gravity model ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, p. 4184-95.
- Zoppou, Christopher, et Stephen Roberts. 1999. « Catastrophic collapse of water supply reservoirs in urban areas ». *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 125, p. 686-695.