

## TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ .....</b>	<b>ii</b>
<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>iii</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES.....</b>	<b>iv</b>
<b>LISTE DES SYMBOLES.....</b>	<b>vii</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>x</b>
<b>LISTE DES ANNEXES.....</b>	<b>xvi</b>
<b>CHAPITRE 1 .....</b>	<b>22</b>
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE .....</b>	<b>22</b>
<b>1.1. Généralités sur les biocomposites (polymères-renforts végétaux).....</b>	<b>23</b>
<b>1.2. Procédés de fabrication des biocomposites.....</b>	<b>24</b>
<b>1.3. Transfert de chaleur dans les biocomposites.....</b>	<b>25</b>
<b>1.4. Chauffage diélectrique des matériaux par micro-ondes .....</b>	<b>27</b>
<b>1.5. Objectif de l'étude .....</b>	<b>29</b>
<b>1.6. Méthodologie .....</b>	<b>30</b>
<b>CHAPITRE 2.....</b>	<b>31</b>
<b>MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS 2D DU CHAUFFAGE PAR MICRO-ONDES... 31</b>	
<b>2.1. Formulation mathématique du chauffage diélectrique .....</b>	<b>31</b>

<b>2.2.</b>	<b>Approximation spatiale.....</b>	<b>32</b>
<b>2.3.</b>	<b>Assemblage .....</b>	<b>34</b>
<b>2.4.</b>	<b>Schéma d'intégration temporelle.....</b>	<b>35</b>
<b>2.5.</b>	<b>Validation analytique-numérique : chauffage par conduction.....</b>	<b>37</b>
<b>2.6.</b>	<b>Validation analytique-numérique : chauffage par radiation.....</b>	<b>39</b>
	<b>CHAPITRE 3.....</b>	<b>42</b>
	<b>EXPRESSIONSMATHÉMATIQUESDE L'ÉNERGIE DISSIPÉE DANS LES MEMBRANES</b>	
	<b>DIÉLECTRIQUES .....</b>	<b>42</b>
<b>3.1.</b>	<b>Résolution des équations de Maxwell.....</b>	<b>43</b>
<b>3.2.</b>	<b>Énergie dissipée et théorème de Poynting.....</b>	<b>46</b>
<b>3.2.1.</b>	<b><i>La loi de Lambert</i> .....</b>	<b>47</b>
<b>3.2.2.</b>	<b><i>Équation de Maxwell</i> .....</b>	<b>48</b>
<b>3.3.</b>	<b>Modèles mathématiques de l'énergie dissipée.....</b>	<b>49</b>
<b>3.3.1.</b>	<b><i>Modèle 1D de Ayappa</i> .....</b>	<b>49</b>
<b>3.3.2.</b>	<b><i>Modèle 2D de Zhong et al(2015)</i>.....</b>	<b>53</b>
	<b>CHAPITRE 4.....</b>	<b>56</b>
	<b>VALIDATION NUMÉRIQUE DES MODÈLES 1D ET 2D .....</b>	<b>56</b>
<b>4.1.</b>	<b>Validation numérique .....</b>	<b>57</b>
<b>4.2.</b>	<b>Applications : Résultats et discussion.....</b>	<b>64</b>

CHAPITRE 5.....	87
CONCLUSION .....	87
RÉFÉRENCES .....	89
ANNEXES .....	93

## LISTE DE SYMBOLES

### SYMBOLES LATINS

SYMBOLE	GRANDEUR	UNITÉ
$x,y,z$	Coordonnées spatiales.	m.
$t$	Temps.	s.
$T$	Température.	°C.
$T_0$	Température de référence.	°C.
$T_\infty$	Température du milieu ambiant.	°C.
$k$	Conductivité thermique	W .m-1. °C-1.
$C_p$	Capacité thermique	
$Q_{rad}$	Source radiative.	W. m-3.
$h$	Coefficient d'échange de chaleur par convection.	W. m-2 . °C-1.
$f$	fréquence.	s-1.
$c$	Vitesse de la lumière.	m. s-1.
$d$	Profondeur de pénétration.	m.



## SYMBOLES GRECS

SYMBOLE	GRANDEUR	UNITÉ
$\eta, \xi$	Coordonnées de l'élément de référence.	
$\mu, \mu_0$	Perméabilités magnétiques du milieu et du vide.	H. m-1.
$\rho$	Masse volumique	Kg. m-3.
$\Omega$	Pulsation	s-1.
$\Sigma$	Conductivité électrique.	S.m-1.
$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon_0$	Permittivités diélectriques.	C.V-1.m-1.
$\kappa', \kappa''$	Permittivités diélectriques relatives.	
A	Constante de phase	
$\beta$	Constante d'atténuation	m-1.
$\lambda_0$	Longueur d'onde dans le vide	m.
$\lambda_m$	Longueur d'onde dans le milieu	m.

**VECTEURS**

<b>SYMBOLE</b>	<b>GRANDEUR</b>	<b>UNITÉ</b>
S	Vecteur Poynting	W . m-2.
E, E*	Champ électrique et son conjugué.	V . m-1. *
H, H*	Champ magnétique et son conjugué.	T.
B	Induction électrique	C. m-2.
J	Densité de courant	A. m-2

## LISTE DES FIGURES

- Figure 1 : Biocomposites avec différentes formes de fibres.
- Figure 2 : Classification des biocomposites bois-polymères.
- Figure 3 : État structural d'un thermoplastique en fonction de sa température.
- Figure 4 : Mécanisme de chauffage diélectrique.
- Figure 5 : Illustration de la forme de la maille élémentaire.
- Figure 6 : Illustration des conditions aux limites.
- Figure 7 : Validation analytique-numérique de la conduction.
- Figure 8 : Profil de température à 10mins d'irradiation.
- Figure 9 : Profil de température à 20mins d'irradiation.
- Figure 10 : Profil de température à 30mins d'irradiation.
- Figure 11 : Erreur relative Numérique-Analytique.
- Figure 12 : Schéma d'un milieu multicouche exposé à une onde plane.
- Figure 13 : Représentation schématique du guide d'ondes.
- Figure 14 : Représentation schématique du maillage.
- Figure 15 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de bœuf de 0.92cm d'épaisseur, résultats Ayappa 1991 en haut, modèle 1D en bas.
- Figure 16 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de bœuf de 1.84cm d'épaisseur, résultats Ayappa 1991 en haut, modèle 1D en bas.
- Figure 17 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de Gelée d'Algue de 0.9 cm d'épaisseur, résultats Barringer 1995 en haut, modèle 1D en bas.

Figure 18 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de Gelée d'Algue de 3 cm d'épaisseur, résultats Barringer 1995 en haut, modèle 1D en bas.

Figure 19 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de bœuf de 0.92 cm d'épaisseur, modèle 2D de Zhong.

Figure 20 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de bœuf de 1.84cm d'épaisseur, modèle 2D de Zhong.

Figure 21 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de Gelée d'Algue de 0.9 cm d'épaisseur, modèle 2D de Zhong.

Figure 22 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de Gelée d'Algue de 3 cm d'épaisseur, modèle 2D de Zhong.

Figure 23 : Évolution de la température au centre de la plaque de 2mm d'épaisseur.

Figure 24 : Évolution de la température au centre de la plaque de 4mm d'épaisseur.

Figure 25 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 1D.

Figure 26 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 1D.

Figure 27 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.

Figure 28 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.

Figure 29 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.

Figure 30 : Profil de température sur la largeur de la plaque 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.

Figure 31 : Évolution de la température au centre de la plaque de 2mm d'épaisseur.

Figure 32 : Évolution de la température au centre de la plaque de 2mm d'épaisseur.

Figure 33 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 1D.

Figure 34 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 1D.

Figure 35 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.

Figure 36 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.

Figure 37 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.

Figure 38 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.

Figure 39 : Évolution de la température au centre de la plaque de 2mm d'épaisseur.

Figure 40 : Évolution de la température au centre de la plaque de 4mm d'épaisseur.

Figure 41 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 1D.

Figure 42 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 1D.

Figure 43 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.

Figure 44 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.

Figure 45 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.

Figure 46 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.

Figure 47 : Évolution de la température au centre de la plaque de 2mm d'épaisseur.

Figure 48 : Évolution de la température au centre de la plaque de 4mm d'épaisseur.

Figure 49 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 1D.

Figure 50 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 1D.

Figure 51 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.

Figure 52 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.

Figure 53 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.

Figure 54 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.

Figure 55 : Profil de température sur l'épaisseur de la plaque de 2mm par le modèle 1D.

Figure 56 : Profil de température sur l'épaisseur de la plaque de 4mm par le modèle 1D.

Figure 57 : Profil de température sur l'épaisseur de la plaque de 2mm par le modèle 2D Guide.

Figure 58 : Profil de température sur l'épaisseur de la plaque de 4mm par le modèle 2D Guide.

Figure 59 : Énergie dissipée dans la plaque en fonction du facteur de perte.

Figure 60 : Température moyenne dans la plaque en fonction du facteur de perte.

## **LISTE DES ANNEXES**

**Annexe 1: Formulation de l'équation de conservation de l'énergie.**

**Annexe 2: Transformation des intégrales dans l'élément de référence.**

**Annexe 3: Résolution analytique de l'équation de la chaleur à 1D.**



# CHAPITRE 1

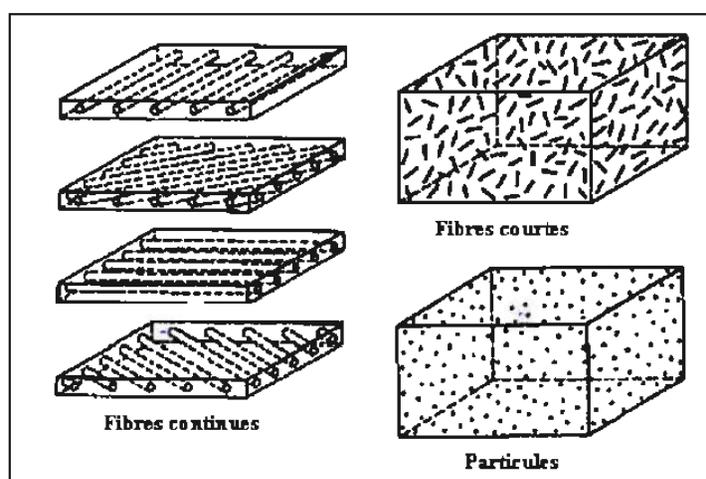
## 1. INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ces dernières décennies ont connu une continuelle augmentation de la demande de l'utilisation des polymères comme matière première, parmi lesquelles 80% sont des thermoplastiques. L'intérêt envers les composites à renfort en bois ou fibres végétales (Biocomposites) est généralement grandissant et ceux-ci sont de plus en plus acceptés pour des applications très diverses. Cet intérêt porté aux renforts végétaux dans les composites est dû à leur légèreté, leur flexibilité pendant la transformation, leur rigidité spécifique et leur bas prix, ce qui les rend, aussi attractifs auprès manufacturiers (Kozlowski *et al.*, 2008).

En plus, le développement technologique en relation avec la demande et les attentes des consommateurs continue de peser sur les ressources d'approvisionnement en matières premières, conduisant à un manque majeur de disponibilité. En réponse à ces contraintes environnementales et économiques, le secteur des biocomposites est devenu un domaine d'intérêt croissant pour le développement de matériaux et produits fonctionnels. En effet, des recherches sont intensivement entreprises pour le développement de nouveaux composites (avec différentes propriétés), de nouveaux processus de transformation et de recyclage de ces nouveaux matériaux. Ce récent engouement technologique se reflète dans le nombre important et croissant de publications scientifiques (Faruk *et al.*, 2012).

### 1.1. Généralités sur les biocomposites (polymères-bois)

Les composites à base de bois-plastique ou WPC (Wood Polymer Composite), sont des matériaux fabriqués à partir d'un mélange de fibres de bois et, généralement, d'un polymère thermoplastique (voir Figure1), dans le but d'obtenir un produit présentant certaines caractéristiques de ces deux matériaux. Aussi, les composites bois-plastique offrent la possibilité de valoriser les résidus de bois et le plastique recyclé de post-consommation.



**Figure 1 : Biocomposites avec différentes formes de fibres(Campbell, 2010).**

Si on compare un matériau composite renforcé de fibres naturelles par rapport à un autre renforcé de fibres de verre, ou même à un alliage, on constate des avantages : la faible densité, l'absence d'abrasion, etc. À cela s'ajoute d'autres avantages dans les domaines suivants :

- Environnemental: matière première renouvelable avec un caractère écologique;
- Économique: moins cher, gain de poids et de prix, valorisation des sous-produits;

- Technologique: isotropie des propriétés, résistance mécanique élevée, etc.;

Mais aussi, ils présentent des inconvénients tels que:

- Caractère hydrophile des fibres (mise en forme, stabilité dimensionnelle);
- Peu d'adhérence fibre-matrice, ce qui oblige un traitement des interfaces hydrophobe-hydrophile, nécessité de traitement à certains risques (moisissure par exemple).

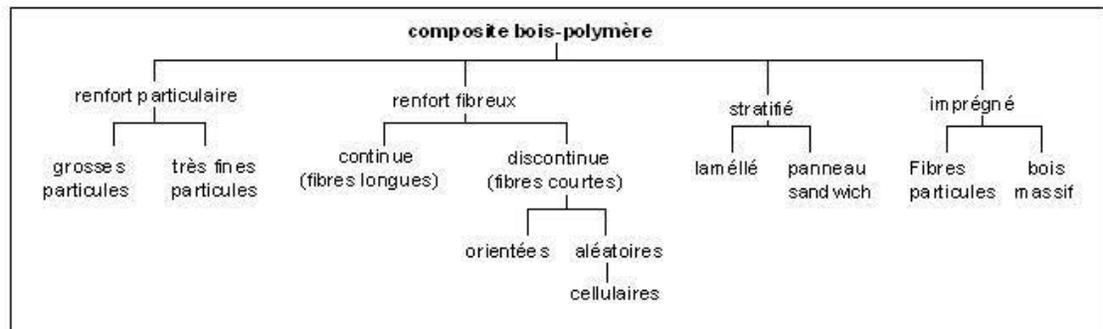
Soulignons que les composites bois-polymères sont utilisés dans différents secteurs d'ingénierie tels que:

- Matériaux de construction (planches, volets, châssis, portes et fenêtres);
- Matériaux de consommation et industriels, (armoires, planchers, palettes, revêtement de sols);
- Véhicules automobiles (panneaux de portes, composants de coffres arrières, des vide-poches, des couvercles de pneus de rechange);
- Autres applications (bancs, tables de pique-nique, modules de jeux, ordures de jardin, ponts et pièces de bateaux).

## **1.2. Procédés de fabrication des composites**

Plusieurs techniques existent pour élaborer les composites bois-polymère (WPC) en fonction de leur utilisation. Généralement, on rencontre trois techniques pour l'élaboration de ces nouveaux matériaux (Tazi, 2015) : méthodes physiques, méthodes chimiques et méthodes basées sur le traitement alcalin. Les méthodes physiques consistent à modifier les propriétés structurales des renforts en bois et le polymère afin de faciliter l'interface entre ces deux constituants. Concernant les méthodes chimiques, généralement, elles sont basées sur l'utilisation d'un troisième matériau (agent de couplage) qui favorise la compatibilité entre la

matrice polymérique et le renfort. Finalement, la méthode alcaline elle consiste à détruire les liaisons hydrogène caractérisant les fibres du bois. Cela augmente la cohésion entre la fibre traitée et la matrice polymérique. Toutefois, il est important de souligner que la qualité du composite dépend aussi des conditions de son d'élaboration : vitesse de rotation du mélangeur, la température de mélange, le temps, l'humidité (Campbell, 2010). La figure 2 illustre les différentes techniques de fabrication des composites bois-plastique en fonction du type de renforts.



**Figure 2 : Classification des biocomposites bois-polymères (Michaud, 2003).**

### 1.3. Transfert de chaleur dans les biocomposites

Un des plus importants défis de la transformation et la mise en forme des biocomposites réside dans l'étape chauffage. Au cours de celle-ci, la matrice thermoplastique du composite subit des transformations structurales permettant sa déformation et sa mise en forme. La possibilité de passer d'une phase à l'autre dépend fortement de la température : en dessous de la température de transition vitreuse ( $T_g$ ), les chaînes moléculaires du thermoplastique ne sont pas assez mobiles et le matériau est solide, avec une

microstructure figée. Au-dessus de la température de fusion ( $T_f$ ), les liaisons entre les chaînes sont détruites, le matériau est liquide. Entre ces deux températures, les chaînes sont mobiles et leur configuration peut changer. C'est ce dernier état du matériau qui est intéressant pour beaucoup de procédés de fabrication et de mise en forme, car il permet à la fois de déformer celui-ci avec moins d'efforts et de faire évoluer sa microstructure. La figure 3 illustre l'état structural d'un polymère thermoplastique en fonction de sa température (Bourai, 2010).

$T_g$  : température de transition vitreuse.

$T_f$  : température de fusion.

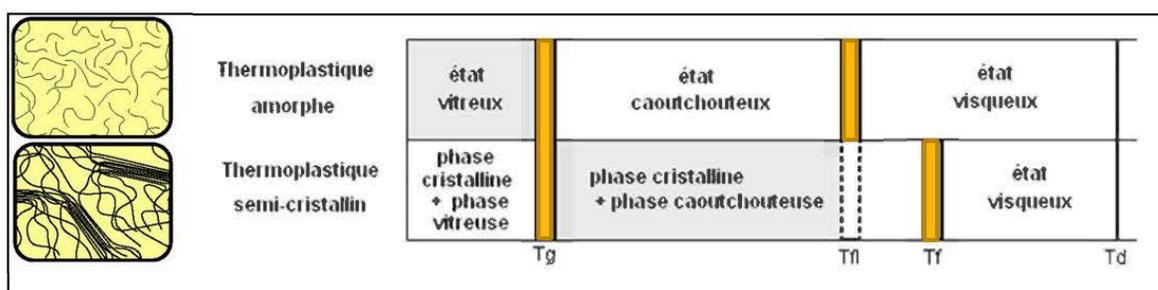


Figure 3 : État structural d'un thermoplastique en fonction de sa température (Bourai, 2010).

Les techniques les plus couramment utilisées pour le chauffage des composites à matrices thermoplastique sont le chauffage par conduction, le chauffage par rayonnements infrarouge et le chauffage par convection forcée. Toutefois, celles-ci présentent des désavantages qui limitent leurs applications :

- Difficulté de démoulage après un chauffage par conduction ou nécessité d'utiliser un agent de démoulage (Bourai, 2010).;
- Opacité totale ou partielle des Biocomposites aux rayonnements infrarouges;



- Lenteur du chauffage (convection forcée ou rayonnement infrarouge) et risque de surchauffe surfacique.

Concernant le chauffage par ondes électromagnétique des biocomposites, ils sont peu étudiés et les travaux sont très limités (Bourai, 2010). Dans ce contexte que le présent travail (mémoire) est orienté et il concerne une étude introductive sur l'utilisation des micro-ondes pour le chauffage des membranes biocomposites, à base de fibres de bois et de thermoplastique. Cette technique de chauffage par micro-ondes vise à chauffer des matériaux peu conducteurs électriquement et, généralement, thermiquement.

#### **1.4. Chauffage diélectrique des matériaux par micro-ondes**

Le chauffage par micro-ondes ou par chauffage diélectrique, qui utilise les ondes électromagnétiques dans l'intervalle de fréquences allant de 300 MHz à 3000MHz, est utilisé pour le chauffage de matériaux diélectriques. Toutefois, dans le spectre de fréquences des micro-ondes, il ya des fréquences qui sont utilisées pour les téléphones cellulaires, les radars, la télévision et la communication par satellites. Seules deux fréquences suivantes 0.915GHz et 2.45 GHz sont réservées pour des utilisations industrielles, scientifiques et médicales. Le mécanisme de chauffage dominant dans cette technique est basé sur les pertes diélectriques (dissipation thermique), aussi connu comme le mécanisme des pertes de réorientation (Chandrasekaran *et al.*,2011).

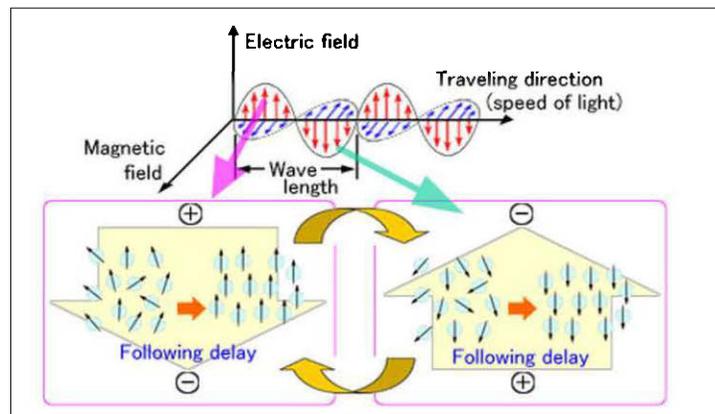
Quand un matériau est introduit dans un champ électromagnétique oscillant, ces molécules dipolaires sont incapables de suivre les oscillations rapides du champ. Il en résulte un déphasage ente les vecteurs de polarisation et le champ électrique. Cela induit une énergie thermique qui est dissipée dans le matériau.

La constante diélectrique d'un matériau est généralement exprimée par un nombre complexe. Les parties réelle et imaginaire de ce nombre caractérisent les différents mécanismes de chauffage diélectrique :

$$\epsilon^* = \epsilon' + i\epsilon'' \quad (1.1)$$

En réalité, tous les matériaux ne sont pas adaptés au chauffage diélectrique. La facilité avec laquelle un matériau diélectrique peut être chauffé est définie par le terme imaginaire de la constante diélectrique (appelé facteur de pertes). Plus le facteur de pertes est élevé, plus le matériau absorbe l'énergie. Le chauffage diélectrique nécessite un facteur de pertes important (Clark *et al.*, 2000).

Pour la description physique du chauffage diélectrique, on considère, comme première approche, deux aspects phénoménologiques à savoir : 1) la polarisation et 2) l'interaction entre les molécules polarisées. L'ensemble de ces éléments est contenu dans la définition du facteur de perte  $\epsilon''$ , donné par la formule suivante (voir figure 4):



**Figure 4 : Illustration graphique du mécanisme de chauffage diélectrique**

$$\varepsilon'' = \varepsilon' \cdot \tan\delta \quad (1.2)$$

$\varepsilon'$  est la permittivité relative ou constante diélectrique du matériau (mesure directe de la capacité d'un matériau à être polarisé).

$\delta$  est l'angle de perte, c'est-à-dire le déphasage temporel entre l'orientation de la molécule et l'orientation du champ électrique (du fait du frottement) (Erchiqui, 2013).

Soulignons que le facteur de perte contrôle la quantité d'énergie qui se dissipe dans le matériau.

Si  $\varepsilon'' < 10^{-2}$  le matériau est dit de type à pertes faibles, et interagit très peu avec les micro-ondes. Pour qu'un tel matériau soit chauffé par micro-ondes, un fort champ électrique est requis et son application doit se faire dans une cavité à mode unique. Celui-ci serait un mauvais candidat au chauffage aux micro-ondes (Bradshaw *et al.*, 1998).

Si  $\varepsilon'' > 5$  l'épaisseur de pénétration de l'énergie électromagnétique dans le matériau était faible; ceci peut occasionner un chauffage non-uniforme dans les objets dont les dimensions sont supérieures à l'épaisseur de pénétration (Bradshaw *et al.*, 1998).

### 1.5. Objectif de l'étude

L'objectif principal de ce travail est l'étude numérique du chauffage d'une plaque en biocomposite par micro-ondes. Pour cela, nous considérons la méthode des éléments finis pour caractériser l'évolution de la température dans le composite et la qualité de chauffage.

Aussi, de manière secondaire, caractériser numériquement la distribution de l'énergie électromagnétique dans le matériau Biocomposite.

## 1.6. Méthodologie

La méthodologie suivie pour la réalisation de l'étude est la suivante :

- Formulation mathématique du chauffage diélectrique par micro-ondes.
- Modélisation numérique du chauffage par micro-ondes (éléments finis 2D) : Approximation spatiale; Assemblage ; schémas d'intégration temporelle ; Validation (cas de la conduction).
- Expression de l'énergie dissipée (théorème de Poynting) par micro-ondes dans les matériaux diélectriques : Loi de Lambert 1D, Modèle 1D de Ayappa (Ayappa *et al.*, 1990), modèle 2D de Zhong *et al* (2015). Validation des expressions des énergies dissipées.
- Validation du chauffage diélectrique et applications : trois types de composites bois-plastiques et un thermoplastique pur, seront considérés.

## CHAPITRE 2

### 2. MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS 2D DU CHAUFFAGE MICRO-ONDES

De nos jours, des modèles mathématiques variés sont appliqués pour la description des processus physiques complexes de la propagation et l'absorption des ondes électromagnétiques dans les matériaux. L'interaction des ondes électromagnétiques avec les matériaux diélectriques requière la considération simultanée des équations de conservation de l'énergie et des équations différentielles des ondes électromagnétiques avec des conditions aux limites correspondantes (Komarov, 2011).

#### 2.1. Formulation mathématique du chauffage diélectrique par micro-ondes

Considérons un milieu matériel diélectrique, occupant un volume  $V$ . En vertu de la première loi de la thermodynamique, l'équation de conservation de l'énergie thermique en l'absence de convection est donnée par l'équation suivante (Wa Soa *et al.*, 2004).

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \cdot \nabla T) = -\nabla \cdot Q_{rad} \quad (2.1)$$

$Q_{rad}$  représente la densité du flux radiatif.  $C_p$ ,  $\rho$  et  $k$  représentent, respectivement, la chaleur spécifique, la densité et le tenseur de conductivité thermique du Biocomposite.

Pour un matériau isotrope, nous avons  $\mathbf{k} = k \delta_{ij}$ . L'équation précédente devient.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - k \cdot \nabla^2 T = -\nabla \cdot Q_{rad} \quad (2.2)$$

La condition de frontière considérée dans ce travail, dans le cas d'un milieu isotrope, est donnée par :

$$k\nabla.T \cdot n - Q_{rad} \cdot n = 0 \quad (2.3)$$

$Q_{rad}$  est le flux de chaleur reçu par la membrane composite.

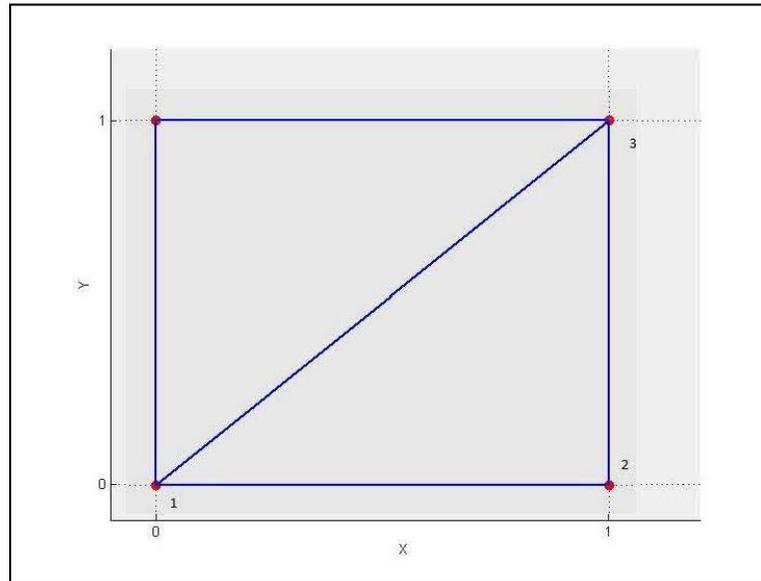
## 2.2. Approximation spatiale

La méthode des éléments finis de type Galerkin est largement répandue pour la modélisation du transfert de chaleur. Indépendamment de la dimensionnalité spatiale du problème de la chaleur, la méthode des éléments finis mène aux équations de premier ordre, de rang égal au nombre total des nœuds formant le maillage géométrique de la membrane (Lin et al., 1995):

$$C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + K \cdot T = Q \quad (2.4)$$

Où C, K et Q sont respectivement les matrices globales de capacité thermique, de conductance thermique et de charge thermique. T est le vecteur nodal global des températures. Pour améliorer la stabilité numérique, la matrice de capacité thermique C peut être diagonalisée «lumped Matrix». Bien que cette matrice présente une diffusion numérique, elle élimine les oscillations indésirables produites par la matrice masse consistante «unlumped Matrix» (Erchiqui *et al.*, 20019).

Dans le cas d'une géométrie linéaire, triangulaire composée de 3 nœuds; dont la configuration est illustrée dans le schéma ci-dessous :



**Figure 5 : Illustration de la forme de la maille élémentaire**

Les coordonnées des nœuds 1, 2 et 3 sont :

$$Noeud1 = (x_1, y_1)$$

$$Noeud2 = (x_2, y_2)$$

$$Noeud3 = (x_3, y_3)$$

Les matrices élémentaires de capacité thermique  $C$  et de conductivité thermique  $K$  s'écrivent (Dhatt, G. et Touzot, G., 1981) :

$$[C]^e = \frac{\rho A C_p}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
& [K]^e \\
&= \frac{k}{4A^2} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \\ (y_3 - y_1)(y_2 - y_3) + (x_1 - x_3)(x_3 - x_2) & (y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\ (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) & (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) + (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) & (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

$$C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + K \cdot T = Q \tag{2.7}$$

### 2.3. Assemblage

La discrétisation de l'équation de la chaleur par éléments finis nous a conduit à interpoler sur chaque élément la variable température par ses valeurs prises aux nœuds de l'élément. Ainsi, pour chaque élément considéré, on obtient un système élémentaire. La contribution de tous ces systèmes élémentaires, permet de construire un système global. Cette étape est appelée assemblage (Dhatt et Touzot, 1998).

$$\sum_e ([C]^e \cdot \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}^e + [K]^e \cdot \{T\}^e) = \sum_e Q \tag{2.8}$$

Ainsi, l'équation (44) se réécrit après assemblage sous la forme:

$$[C] \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + [K] \cdot T = Q \quad (2.9)$$

où

$[K] = \sum_e [K]^e$ : La matrice globale conductivité

$[C] = \sum_e [C]^e$  : La matrice globale de capacité

$\{Q\} = \sum_e \{Q\}^e$ : Le vecteur global de charge thermique

#### 2.4. Schéma d'intégration temporelle

L'intégration temporelle permet d'obtenir l'évolution au cours du temps du vecteur des températures aux nœuds du maillage, et donc par approximation nodale la température et son gradient en tout point du solide.

La résolution du système d'équations différentielles linéaires précédent nécessite une discrétisation du temps. Pour ce faire, on subdivise la durée du chauffage en une suite d'intervalles  $([t_n, t_{n+1}])$ . En utilisant une paramétrisation linéaire sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  on obtient :

$$t_\theta = t_n + \theta \cdot \Delta t \quad \theta \in [0,1] \quad (2.10)$$

Où  $\theta$  est un paramètre.  $\Delta t$  est le pas de temps.

La discrétisation du gradient de température est exprimé ainsi :

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}_\theta = \frac{\{T\}_{n+1} + \{T\}_n}{\Delta t} \quad \theta \in [0,1] \quad (2.11)$$

$\{T\}_{n+1}$  et  $\{T\}_n$  étant les températures aux instants  $t_{n+1}$  et  $t_n$  respectivement. Ainsi la température  $\{T\}_\theta$  et le vecteur de charge thermique global  $\{Q\}_\theta$  à l'instant  $t_\theta$  seront approchés par les formules suivantes:

$$\{T\}_\theta = (1 - \theta) \cdot \{T\}_n + \theta \cdot \{T\}_{n+1} \quad \theta \in [0,1] \quad (2.12)$$

$$\{Q\}_\theta = (1 - \theta) \cdot \{Q\}_n + \theta \cdot \{Q\}_{n+1} \quad \theta \in [0,1] \quad (2.13)$$

$\{Q\}_{n+1}$  et  $\{Q\}_n$  étant les vecteurs de charge thermique globaux aux instants  $t_{n+1}$  et  $t_n$  respectivement.

En substituant  $\left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}_\theta$ ,  $\{T\}_\theta$  et  $\{Q\}_\theta$  par leurs expressions dans (3.5), on obtient le schéma suivant:

$$[\hat{C}] \cdot \{T\}_{n+1} = [\hat{K}] \cdot \{T\}_n + \{\hat{Q}\} \quad (2.14)$$

Avec

$$[\hat{C}] = ([C] + \Delta t \cdot \theta \cdot [K]) \quad \theta \in [0,1] \quad (2.15)$$

$$[\hat{K}] = ([C] - (1 - \theta) \cdot \Delta t \cdot [K]) \quad \theta \in [0,1] \quad (2.16)$$

$$\{\hat{Q}\} = \Delta t[(1 - \theta) \cdot \{Q\}_n + \theta \cdot \{Q\}_{n+1}] \quad \theta \in [0,1] \quad (2.17)$$

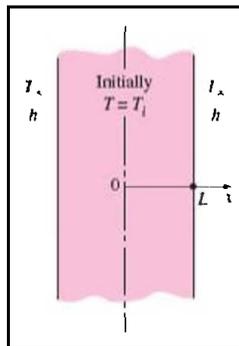
$[\hat{C}]$  est la matrice d'itération du système. Elle est constante pour les problèmes linéaires tant que le pas de temps ne change pas. Son inverse n'est évalué qu'une seule fois.

- **Schéma implicite d'intégration**

Pour la stabilité de la méthode, on choisira  $\theta = 0.5$  qui correspond au schéma implicite d'intégration de Crank-Nicolson (Hamani, 2007).

## 2.5. Validation analytique-numérique : chauffage par conduction

La validation est faite par la comparaison du modèle numérique avec la solution de l'équation de la conservation de l'énergie avec les conditions limites suivantes :



**Figure 6 : Illustration des conditions limites.**

$$T(x, 0) = T_i = 348K \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x=0 \quad (2.19)$$

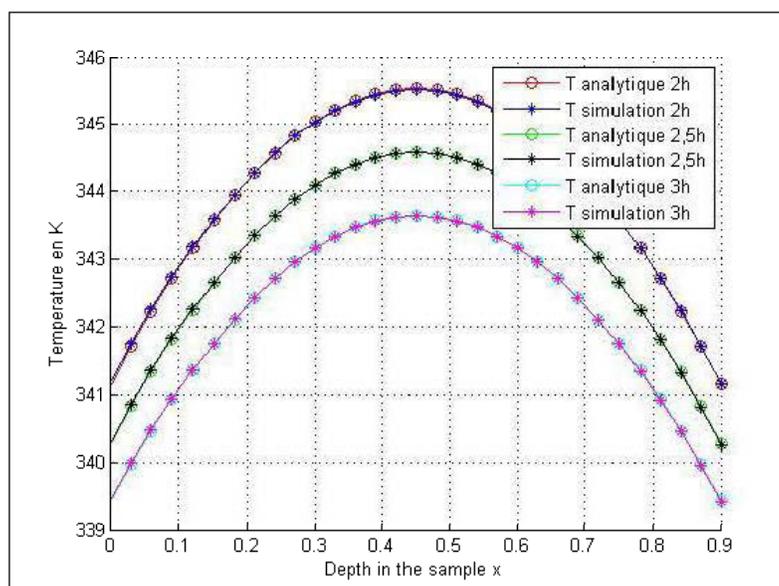
$$\frac{\partial T}{\partial x} = h(T(L, t) - T_\infty) \text{ en } x = L \quad (2.20)$$

$$T_\infty = 298K$$

La solution analytique est donnée par la formule suivante :

$$\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos\left(\frac{\lambda_1 x}{L}\right) \quad \text{Pour } \tau > 0.2 \quad (2.21)$$

Les résultats des simulations sur une épaisseur d'acier de 90cm à une température initiale de 348K, température ambiante de 298K, et  $h = 10W / m^2.K$  ; sont représentés dans les figures suivantes :



**Figure 7 : validation analytique-numérique de la conduction.**

On observe que les résultats numériques 2D se superposent parfaitement sur les résultats analytiques et l'erreur relative est quasi nulle.

## **2.6. Validation analytique-numérique : chauffage par radiation.**

Cette fois-ci, la validation est faite par la comparaison du modèle numérique avec la solution numérique de l'équation de la conservation de l'énergie dans un milieu soumis à un flux d'énergie régie par la loi de Beer-Lambert. La solution analytique est donnée par la formule suivante (De Vriendt, 1984) (Annexe 2):

$$\begin{aligned}
T(z, t) = T_0 - \frac{q_0}{k\kappa} \exp(-\kappa z) + 2\frac{q_0}{k} \sqrt{\alpha t} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\
+ \frac{q_0}{2k\kappa} \exp(\kappa^2 \alpha t + \kappa z) \operatorname{erfc}\left(\kappa \sqrt{\alpha t} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\
+ \frac{q_0}{2k\kappa} \exp(\kappa^2 \alpha t - \kappa z) \operatorname{erfc}\left(\kappa \sqrt{\alpha t} - \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Tableau 1 : Propriétés de la gelée d'Algue (Barringer *et al.*, 1995).

Densité	Cp[J/kg.K]	$\epsilon_r$	$\tan\delta$
1070	4200	0,60	0,156

Les résultats des simulations sur une épaisseur de gelée d'Algue de 9cm (propriétés thermo-physiques et diélectriques dans le tableau 1) a une température initiale de 298K et  $q_0 = 38 \text{ W/cm}^2$ , sont représentés dans le Tableau 1.

On observe une excellente corrélation entre les résultats numérique et analytique. Le maximum des erreurs relatives entre les solutions analytique et numérique 2D reste inférieur à 1.2%.

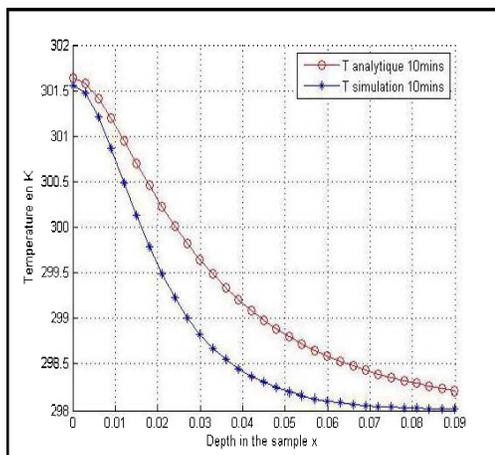


Figure 8 : Profil de température à  
10mins d'irradiation

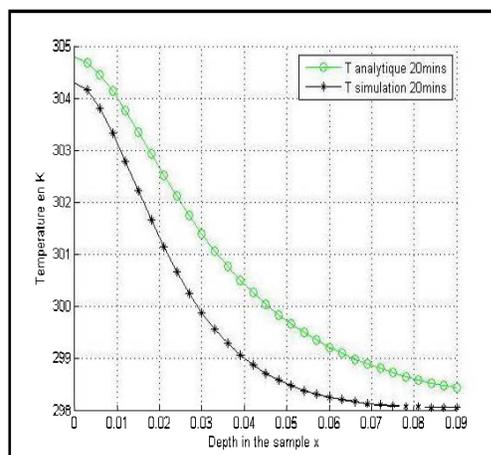


Figure 9 : Profil de température à  
20mins d'irradiation

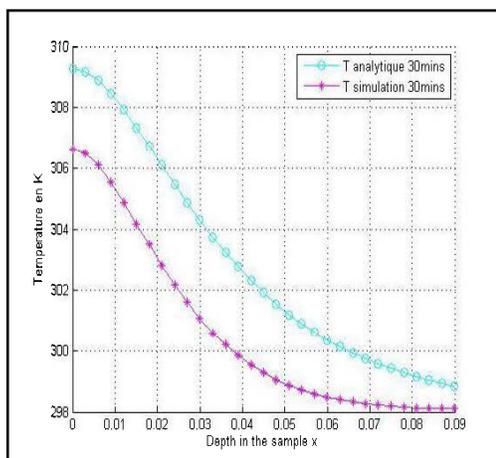


Figure 10 : Profil de température à  
30mins d'irradiation

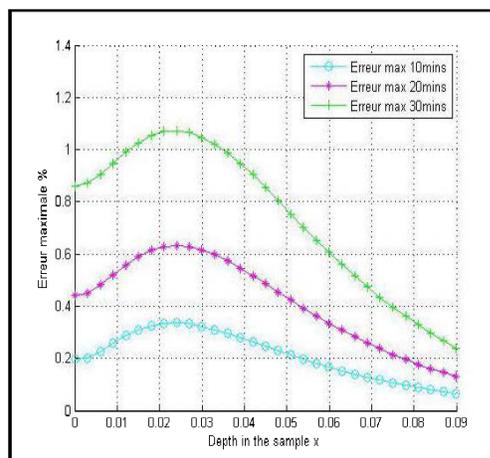


Figure 11 : Erreur relative Numérique-  
Analytique

## CHAPITRE 3

### 3. EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES DE L'ÉNERGIE DISSIPÉE DANS LES MEMBRANES DIÉLECTRIQUES

La pénétration des micro-ondes dans un matériau diélectrique agit comme une source de chaleur volumique. Dans beaucoup de systèmes de modélisation, le chauffage diélectrique est modélisé par la loi de Lambert, selon laquelle l'énergie des micro-ondes s'atténue exponentiellement en fonction de la distance de pénétration dans le matériau. Cependant, la loi de Lambert n'est valide que pour les épaisseurs assez grandes pour être considérées infinies (Erchiqui, 2013). Cette loi est une approximation faible pour beaucoup de situations particulières.

Dans ce genre de cas, la formulation rigoureuse des problèmes de chauffage requière la résolution des équations de Maxwell qui gouvernent la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique. Cette approche est utilisée pour l'étude des effets des micro-ondes et des radiofréquences dans les milieux à faibles épaisseurs

Dans ce chapitre, on résout les équations de Maxwell pour un matériau multicouche ayant des propriétés thermiques et diélectriques constantes.

### 3.1. Résolution des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell fournissent des relations entre les variations des grandeurs électromagnétiques en tout point de l'espace. Ainsi, si on désigne par  $E$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $D$ , et  $B$  respectivement le champ électrique, le champ magnétique, le flux de courant, le déplacement électrique et l'induction magnétique, on a alors pour les équations de Maxwell les expressions suivantes :

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{Et} \quad \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (3.1)$$

Pour un matériau sujet à un champ électrique alternatif  $E_0(t)$ , les quantités  $J$ ,  $D$  et  $B$  obéissent aux équations suivantes :

$$J = \sigma(\omega)E(t), \quad D = \varepsilon(\omega)E(t) \quad \text{et} \quad B = \mu(\omega)H(t)$$

$$\text{Ou } E = \hat{E}e^{-i\omega t} \quad \text{et} \quad H = \hat{H}e^{-i\omega t}$$

Et ainsi l'équation (3.1) devient

$$\nabla \times \hat{E} = -i\omega\mu(\omega)\hat{H}(t) \quad (3.2)$$

Et

$$\nabla \times \hat{H} = [\sigma(\omega) - i\omega\varepsilon(\omega)]\hat{E}(t) \equiv -i\omega\varepsilon^*(\omega)\hat{E}(t) \quad (3.3)$$

La conductivité  $\sigma(\omega)$ , la constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$  et la perméabilité magnétique  $\mu(\omega)$  sont en général des fonctions complexes de la pulsation (fréquence)  $\omega$  de l'onde.

La constante diélectrique complexe est définie comme suit :

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \quad (3.4)$$

La partie réelle  $\varepsilon'(\omega)$  représente la capacité du matériau à emmagasiner l'énergie électrique et la partie imaginaire  $\varepsilon''(\omega)$  quantifie la perte diélectrique à travers l'énergie dissipée. Elles sont habituellement rapportées sous forme de constante diélectrique relative  $\kappa'$  et la perte diélectrique relative où :

$$\kappa' = \varepsilon' / \varepsilon_0 \quad \text{Et} \quad \kappa'' = \varepsilon'' / \varepsilon_0 \quad (3.5)$$

$\varepsilon_0$  est la permittivité du vide.

Dans nos matériaux la perméabilité magnétique  $\mu(\omega)$  est proche de sa valeur  $\mu_0$  dans le vide. Dans ce qui suit, les conditions sont considérées vraies. Avec cette supposition et la condition d'électro-neutralité du matériau qui implique  $\nabla(\nabla \cdot \hat{E}) = 0$ , en insérant l'équation (3.2) dans l'équation (3.3) on obtient l'équation de Helmholtz (sachant que  $\nabla \times \nabla \times \hat{E} = \nabla(\nabla \cdot \hat{E}) - \nabla^2 \hat{E}$ ):

$$\nabla^2 \hat{E} + k^2 \hat{E} = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{Où} \quad k = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 (\kappa' + i\kappa'') \quad (3.7)$$

Seuls les vecteurs du champ qui sont indépendants du temps sont considérés, le chapeau sur le E sera donc abandonné à partir de maintenant.

La constante de propagation  $k$  est représentée telle une quantité complexe

$$k = \alpha + i\beta \quad (3.8)$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont reliées aux propriétés diélectriques du milieu et la fréquence de l'onde par

$$\alpha = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\frac{\kappa'(\sqrt{1+\tan^2\delta}+1)}{2}} \quad (3.9)$$

$$\text{Et } \beta = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\frac{\kappa'(\sqrt{1+\tan^2\delta}-1)}{2}} \quad (3.10)$$

$$\text{Où } \tan\delta = \frac{\kappa''}{\kappa'} \quad (3.11)$$

Où  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$  est la vitesse de la lumière,  $f$  est la fréquence de l'onde. La constante de phase  $\alpha$  représente le changement de phase de l'onde se propageant dans le milieu et est reliée à la longueur d'onde dans le milieu ( $\lambda_m$ ) par :

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\alpha} \quad (3.12)$$

Qui, dans le vide, se réduit à  $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ . La constante d'atténuation  $\beta$  contrôle le taux auquel l'intensité du champ électrique  $E_0$  s'atténue dans le matériau. Dans un milieu semi-infini

$$E = E_0 e^{-i\beta x} \quad (3.13)$$

Ainsi pour des fréquences plus élevées,  $\beta$  augmente et la pénétration des micro-ondes dans le matériau diminue.  $\beta^{-1}$  est connu comme l'épaisseur de pénétration caractéristique, la distance à laquelle l'intensité du champ diminue à 1/e sa valeur incidente.

### 3.2. Énergie dissipée et théorème de Poynting

Le flux d'énergie associé à la propagation d'une onde électromagnétique est représenté par le vecteur de Poynting  $S$ , flux moyen pour un champ harmonique, donné par :

$$S = \frac{1}{2} E \times H^* \quad (3.14)$$

Le théorème de Poynting permet l'évaluation de l'énergie dissipée dans le milieu ; il est exprimé par :

$$\oint S \cdot n \, ds = -\frac{1}{2} \omega \epsilon_0 \kappa'' \int E \cdot E^* \, dv + i\omega \int \left( \frac{\mu_0}{2} H \cdot H^* + \frac{\epsilon_0 \kappa'}{2} E \cdot E^* \right) dv^* \quad (3.15)$$

En appliquant la divergence à l'équation (3.15) la forme ponctuelle du théorème de Poynting.

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{1}{2}\omega\varepsilon_0\kappa''\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + i\omega\left(\frac{\mu_0}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + \frac{\varepsilon_0\kappa'}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*\right)^* \quad (3.16)$$

Et l'énergie dissipée par unité de volume est

$$P^M = -\text{Re}(\nabla \cdot \mathbf{S}) = -\frac{1}{2}\omega\varepsilon_0\kappa''|\mathbf{E}|^2 \quad (3.17)$$

Par conséquent, connaissant l'intensité du champ électrique dans le milieu, l'énergie dissipée est obtenue de l'équation (3.17).

### 3.2.1. La loi de Lambert :

L'expression la plus communément utilisée pour exprimer l'énergie micro-onde est la loi de Lambert. Si  $I_t$  est le flux d'énergie transmis dans le milieu alors le profil  $I(x)$  en fonction de la distance  $x$  à partir de la surface du matériau est (Erchiqui, 2013):

$$I(x) = I_t e^{-\beta x} \quad (3.18)$$

L'énergie absorbée par unité de volume est

$$P^L(x) = -\frac{dI}{dx} = 2I_t\beta e^{-\beta x} \quad (3.19)$$

$I_t$  est le flux d'énergie transmis.

La loi de Lambert est valide pour les milieux semi-infinis

Plusieurs modèles décrivant cette énergie dissipée dans un milieu sont proposés dans la littérature. Dans ce travail, on se propose d'étudier deux d'entre eux :

- Un modèle à une dimension décrivant l'énergie dissipée dans un matériau multicouche. (Ayappa *et al.* 1991).  
Le modèle d'Ayappa (1D) est une simulation de la puissance transmise par l'onde électromagnétique à un milieu matériel de largeur négligeable par rapport à la largeur du guide d'ondes.
- Le modèle de propagation dans un guide d'onde et d'une cavité d'un champ électromagnétique de mode TE<sub>10</sub>. (Zhong *et al.*, 2015).

Les deux modèles découlent de la résolution des équations de Maxwell.

### 3.2.2. Équation de Maxwell :

On considère un champ électromagnétique incident dans la direction normale au matériau considéré (voir figure 13). Pour la propagation d'une onde plane uniforme, les composantes électrique et magnétique sont dans le plan (y-z) et sont d'une amplitude constante (indépendante du temps), et varient uniquement dans la direction de propagation (axe-x). L'équation de Helmholtz (3.6) se simplifie donc pour donner :

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + k^2 E_z = 0^* \quad (3.20)$$

$$x_{l-1} \leq x \leq x_l^* \quad l = 1 \dots n \quad (3.21)$$

Où  $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 (k' + ik'')$  est la constante de propagation dans le milieu. L'équation reliant les composantes du champ électromagnétique de l'onde plane est déduite de l'équation (3.2)

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} = i \mu_0 \omega H_y^* \quad (3.22)$$

Les deux modèles, précédemment cités, se différencient par les conditions aux limites imposées au champ électromagnétique incident.

### 3.3. Modèles Mathématiques de l'énergie dissipée :

#### 3.3.1. Modèle de Ayappa :

Les conditions aux frontières entre la couche l-1 et la couche l (Figure 12), pour les vecteurs champs électrique et magnétique sont

$$\begin{aligned} n \times (E_{l-1} - E_l) &= 0 \\ n \times (H_{l-1} - H_l) &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dans le cas de la propagation dans la direction de l'axe x d'une onde plane uniforme, on a

$$\left. \begin{aligned} E_{z,l-1} &= E_{z,l} & l &= 1 \dots n \\ H_{y,l-1} &= H_{y,l} & x &= x_1 \dots x_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

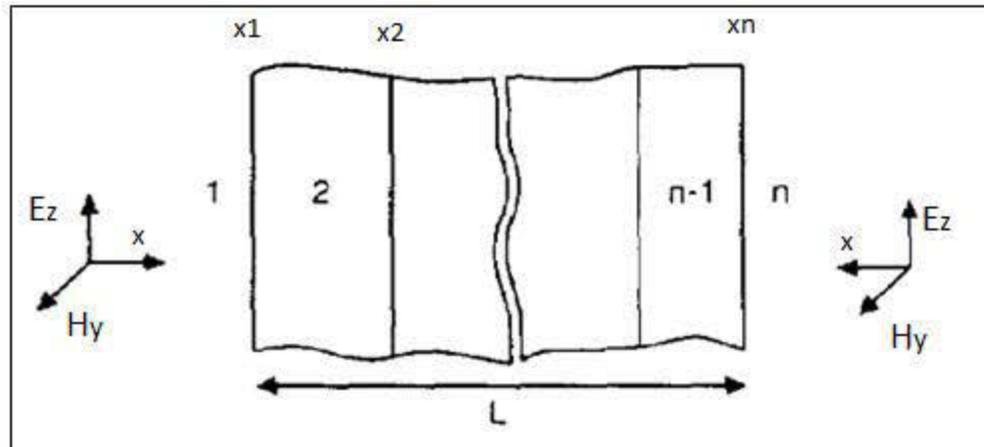


Figure 12 : Schéma d'un milieu multicouche exposé à une onde plane (Ayappa *et al.*, 1991).

La solution générale de l'équation (3.20) peut être représentée comme une combinaison linéaire d'ondes se propageant dans deux directions opposées. Donc pour un matériau à n-couches les solutions pour l'intensité du champ électrique

$$\begin{aligned}
 E_{z,1} &= A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} & x \leq x_1 \\
 E_{z,l} &= A_l e^{ik_l x} + B_l e^{-ik_l x} & x_{l-1} \leq x \leq x_l \quad l = 2 \dots n-1 \\
 E_{z,n} &= A_n e^{ik_n x} + B_n e^{-ik_n x} & x \geq x_{n-1}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Si les coefficients de l'équation (3.23) sont représentés comme des quantités complexes

$$A_l = |A_l|e^{iv_{al}} \quad \text{et} \quad B_l = |B_l|e^{iv_{bl}} \quad (3.26)$$

En utilisant l'équation (3.17), l'expression de l'énergie absorbée par chaque couche du matériau est donnée par

$$P_l^M(x) = \omega \varepsilon_0 \kappa_l'' \left[ \frac{|A_l|^2}{2} e^{-\beta_l x} + \frac{|B_l|^2}{2} e^{+\beta_l x} + |A_l| |B_l| \cos(v_{al} - v_{bl} + \alpha_l x) \right]$$

$$x_{l-1} \leq x \leq x_l ; \quad l = 2 \dots n - 1 \quad (3.27)$$

Les deux premiers termes de droite de l'équation (3.27) représentent les contributions à l'énergie des ondes se propageant dans les directions positive et négative de l'axe-x respectivement.

En utilisant les conditions d'interface de l'équation (3.23), les coefficients  $A_l$  et  $B_l$  sont obtenus. De l'équation (3.27) résulte alors les équations algébriques suivantes :

$$A_l e^{ik_l x_l} - B_l R_{l,l+1} e^{-ik_l x_l} - A_{l+1} T_{l,l+1} e^{ik_{l+1} x_l} = 0$$

$$B_l T_{l,l+1} e^{ik_l x_l} - A_{l+1} R_{l,l+1} e^{ik_{l+1} x_l} - B_{l+1} e^{-ik_{l+1} x_l} = 0$$

$$l = 2 \dots n - 1 \quad (3.28)$$

Si les intensités des champs incidents à gauche et à droite du matériau  $A_l = E_l$  et  $B_l = E_R$  sont connus, alors l'équation (3.27) peut être résolue pour le reste des  $2n-2$

coefficients.  $R_{l,l+1}$  et  $T_{l,l+1}$  sont les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface et sont exprimés en termes d'impédances ainsi:

$$R_{l,l+1} = \frac{\zeta_{l+1} - \zeta_l}{\zeta_{l+1} + \zeta_l} \quad \text{Et} \quad T_{l,l+1} = \frac{2\zeta_{l+1}}{\zeta_{l+1} + \zeta_l} \quad (3.29)$$

Où  $\zeta_l = \mu_l \omega / k_l$  est l'impédance intrinsèque de la l-ième couche (Stratton, 1941) ; Les coefficients de réflexion et de transmission peuvent être exprimés en fonction du coefficient d'atténuation  $\beta$ , la constante de phase  $\alpha$  et la perméabilité  $\mu$ . Le coefficient de réflexion à l'interface entre l et l+1 est

$$R_{l,l+1} = |R_{l,l+1}| e^{i\delta_{l,l+1}}$$

$$\text{Où} \quad |R_{l,l+1}| = \sqrt{\frac{(\mu_{l+1}\alpha_l - \mu_l\alpha_{l+1})^2 + (\mu_{l+1}\beta_l - \mu_l\beta_{l+1})^2}{(\mu_{l+1}\alpha_l + \mu_l\alpha_{l+1})^2 + (\mu_{l+1}\beta_l + \mu_l\beta_{l+1})^2}} \quad (3.30)$$

$$(3.31)$$

$$\text{Et} \quad \delta_{l,l+1} = \tan^{-1} \left[ \frac{2\mu_l\mu_{l+1}(\alpha_{l+1}\beta_l - \alpha_l\beta_{l+1})}{\mu_{l+1}^2(\alpha_l^2 + \beta_l^2) - \mu_l^2(\alpha_{l+1}^2 + \beta_{l+1}^2)} \right] \quad (3.32)$$

Le coefficient de transmission à l'interface entre l et l+1 est

$$T_{l,l+1} = |T_{l,l+1}| e^{i\tau_{l,l+1}}$$

$$\text{Où} \quad |T_{l,l+1}| = \sqrt{\frac{4\mu_{l+1}^2(\alpha_l^2 + \beta_l^2)}{(\mu_{l+1}\alpha_l + \mu_l\alpha_{l+1})^2 + (\mu_{l+1}\beta_l + \mu_l\beta_{l+1})^2}} \quad (3.33)$$

$$(3.34)$$

$$\text{Et} \quad \tau_{l,l+1} = \tan^{-1} \left[ \frac{\mu_l\mu_{l+1}(\alpha_{l+1}\beta_l - \alpha_l\beta_{l+1})}{\mu_{l+1}^2(\alpha_l^2 + \beta_l^2) + \mu_l\mu_{l+1}(\alpha_l\alpha_{l+1} + \beta_l\beta_{l+1})} \right] \quad (3.35)$$

Pour un matériau dans le vide exposé aux radiations micro-ondes incidentes du côté gauche avec un champ d'intensité  $E_L$ . L'expression analytique de l'énergie avec  $x_1 = 0$  et  $x_2 = L$  est donnée par :

$$P_2^M(x) = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \kappa_2'' E_L^2 |T_{1,2}|^2 \left\{ \frac{e^{-2\beta_2 x} - 2|R_{1,2}|e^{-2\beta_2 L} \cos[\delta_{1,2} + 2\alpha_2(L-x)] + |R_{1,2}|^2 e^{-2\beta_2 L} e^{-2\beta_2(L-x)}}{1 - 2|R_{1,2}|^2 e^{-2\beta_2 L} \cos(2\delta_{1,2} + 2\alpha_2 L) + |R_{1,2}|^4 e^{-4\beta_2 L}} \right\}$$

$$0 \leq x \leq L \quad (3.36)$$

Avec pour un matériau à une seule couche :

$$E_L = \sqrt{\frac{2I_0\beta_2}{\pi f \varepsilon_0 \kappa_2'' |T_{1,2}|^2}} \quad (3.37)$$

$I_0$  est le flux d'énergie transmis;

### 3.3.2. Modèle de Zhong et al (2015)

Ce modèle propose deux expressions, une pour la propagation dans un guide d'onde et l'autre dans une cavité (Barringer *et al.*, 1995).

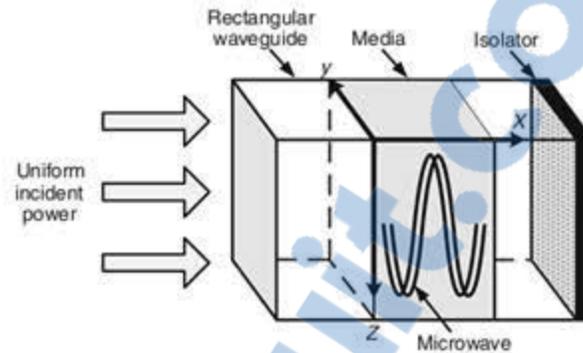


Figure 13 : Représentation schématique du guide d'ondes (Ayappa *et al.*, 1991).

$$E_{z,XY} = E_{z,y}^+ e^{ikx} + E_{z,y}^- e^{-ikx} \quad (3.38)$$

Pour un guide d'ondes électromagnétiques ou une cavité, les parois latérales sont considérées conductrices parfaites et donc sans pertes. En d'autres termes, toutes les composantes du champ dans le conducteur sont considérées nulles. Pour cela, les frontières avec ce type de caractéristiques sont appelées « murs électriques » à cause des composantes tangentielles du champ électrique qui sont court-circuitées (Barringer *et al.*, 1995).

Et donc, aux surfaces des parois latérales

$$E_t = 0 \quad \text{et} \quad H_t = 0 ; \quad (3.39)$$

Par conséquent, le champ électrique dans la direction y et de la forme :

$$E_{z,y}^+ = E_0^+ \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \quad \text{et} \quad E_{z,y}^- = E_0^- \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \quad (3.40)$$

$a$  : et la dimension du guide d'onde dans la direction  $y$ .

Si les coefficients de l'équation (3.40) sont représentés comme des quantités complexes

$$E_0^+ = |A|e^{iv_a} \quad \text{et} \quad E_0^- = |B|e^{iv_b} \quad (3.41)$$

$$\text{Tel que : } B = A.R.e^{-2\beta l} \quad (3.42)$$

$R$  : coefficient de réflexion du champ électrique.

L'équation (3.38) prend une nouvelle forme

$$E_{z,XY} = [ |A|e^{iv_a} . e^{ikx} + |A|e^{iv_a} . R . e^{-2\beta l} . e^{-ikx} ] . \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \quad (3.43)$$

Par l'équation (3.38), l'expression de l'énergie absorbée par le matériau est donnée par

$$P(x, y) = P_{\max} . [ e^{-2\beta x} + R^2 . e^{-4\beta l + 2\beta x} + 2R . e^{-2\beta l} . \cos(2\delta + 2\alpha x) ] . \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \quad (3.44)$$

$$0 \leq x \leq L$$

Dans le cas de cette étude, le montage est choisi de manière à ce que l'onde stationnaire, perpendiculairement, incidente sur une surface du matériau soit complètement réfléchi à l'autre surface, ce qui signifie un coefficient de réflexion  $R=1$ .

Donc

$$P_{\text{cavité}}(x, y) = P_{\text{max}} \cdot [e^{-2\beta x} + e^{-4\beta l + 2\beta x} + 2 e^{-2\beta l} \cdot \cos(2\delta + 2\alpha x)] \cdot \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

$$0 \leq x \leq L \quad (3.45)$$

## CHAPITRE 4

### 4. VALIDATION NUMÉRIQUE ET APPLICATION DES MODÈLES 1D ET 2D :

Pour l'analyse et la validation, un code basé sur MATLAB a été développé pour modéliser la distribution de l'énergie électromagnétique absorbée par le milieu diélectrique. Afin de valider nos modèles, nous avons confronté les résultats obtenus avec les résultats d'Ayappa et al (1991) et de Barringer et Davis (1995), qui ont utilisé le modèle 1D exact pour simuler la distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de bœuf et un échantillon de gelée d'algues respectivement.

Le maillage utilisé pour la modélisation 2D est illustré sur la figure 14.

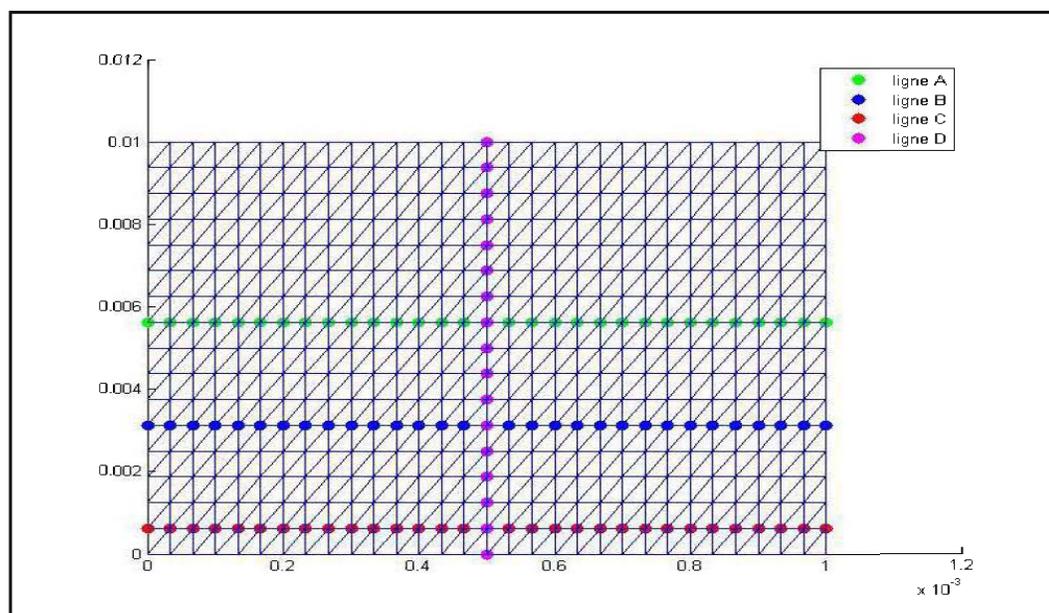


Figure 14 : Représentation schématique du maillage.

#### 4.1. Validation numérique

Les figures 15 et 16 illustrent les résultats obtenus par notre modèle en comparaison avec ceux d'Ayappa. On constate une parfaite concordance. Même constat avec les résultats de Barringer et Davis (1995), voir les figures, 17 et 18.

Dans le cas de la modélisation 2D, on a considéré le modèle de Zhong (Zhong *et al.*, 2015). Pour ce modèle, la distribution de l'énergie dissipée est calculée dans trois zones (linéaires) A, B et C (voir figure 14) différentes.

Les figures 19, 20, 21 et 22 montrent que sur la région centrale (A), le modèle 2D sous-estime légèrement l'énergie dissipée. Sur les deux autres régions (B et C), l'énergie dissipée diminue en s'éloignant du centre dans la direction de l'axe y, ce qui correspond aux conditions d'extinction du champ électrique aux parois du guide d'ondes. En conclusion, nous estimons que les résultats obtenus pour nos deux modèles sont très concluantes comparativement avec ceux d'Ayappa et d'autres.

Dans la section prochaine, le modèle développé sera utilisé pour étudier le chauffage diélectriques de trois plaques composites de type bois-plastique.

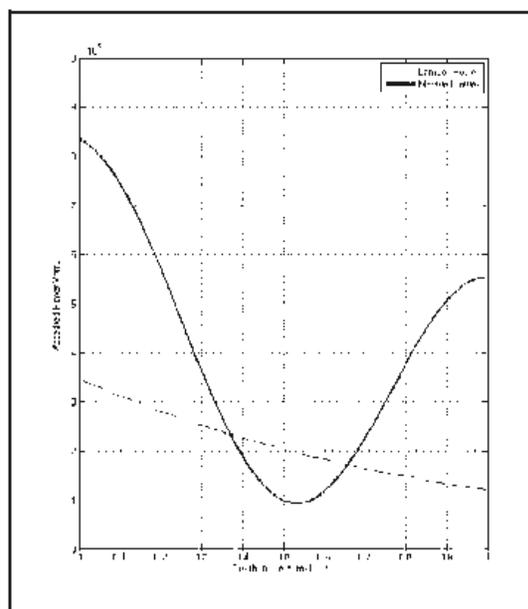
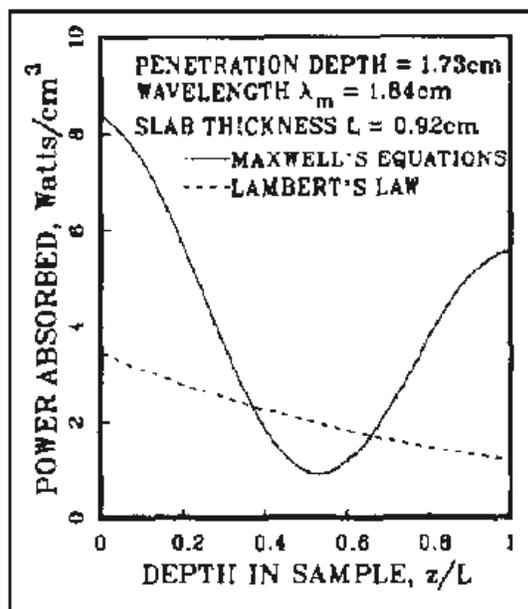
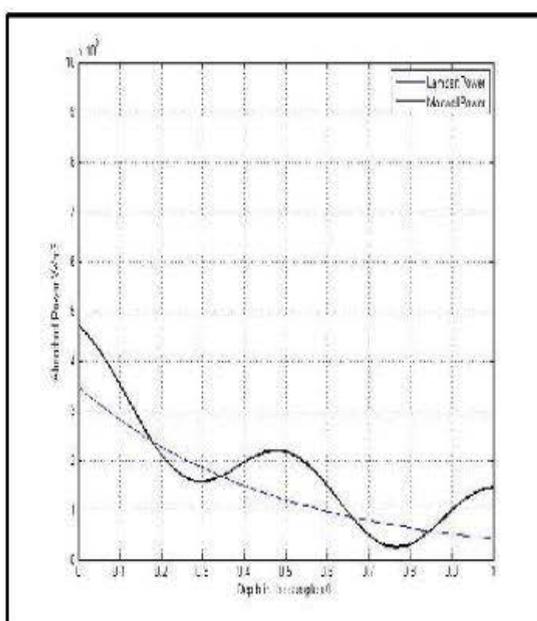
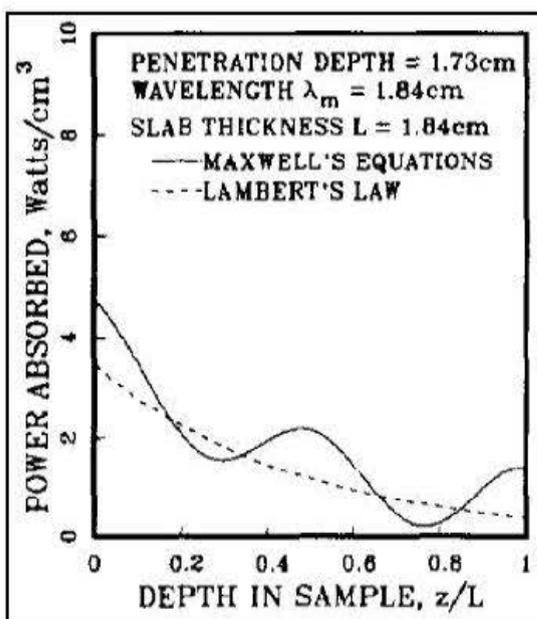
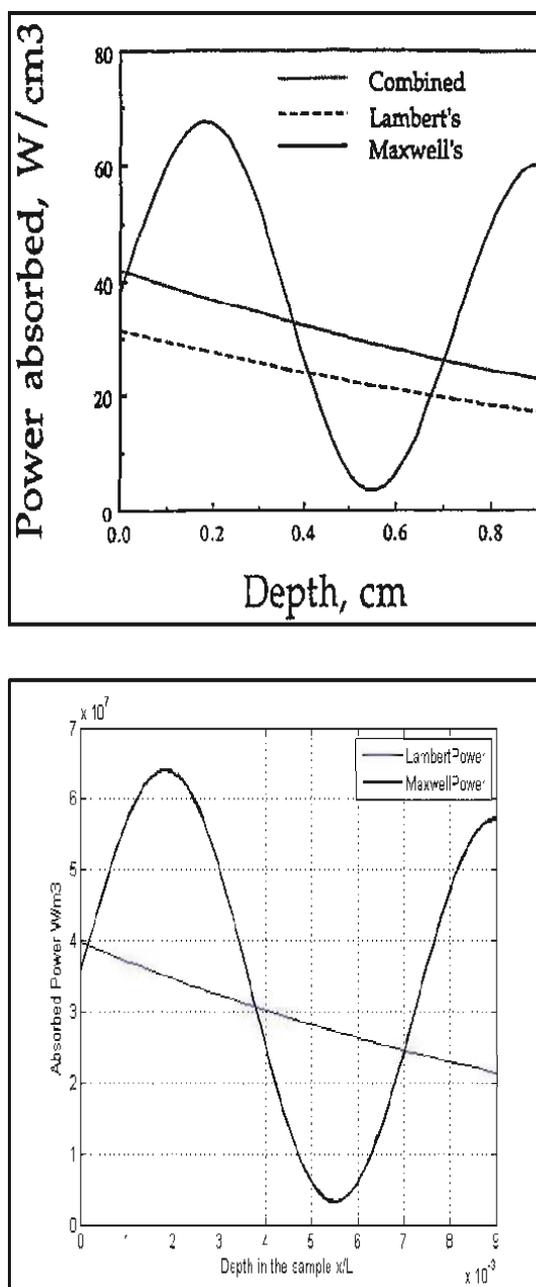


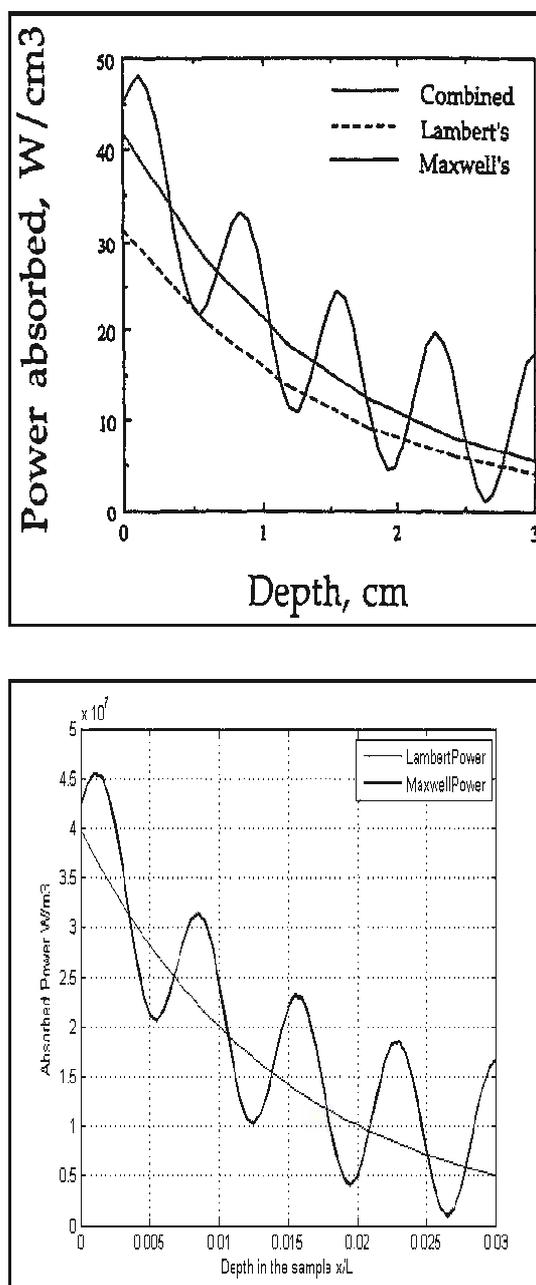
Figure 15 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de bœuf de 0.92cm d'épaisseur, résultats Ayappa 1991 en haut, modèle 1D en bas.



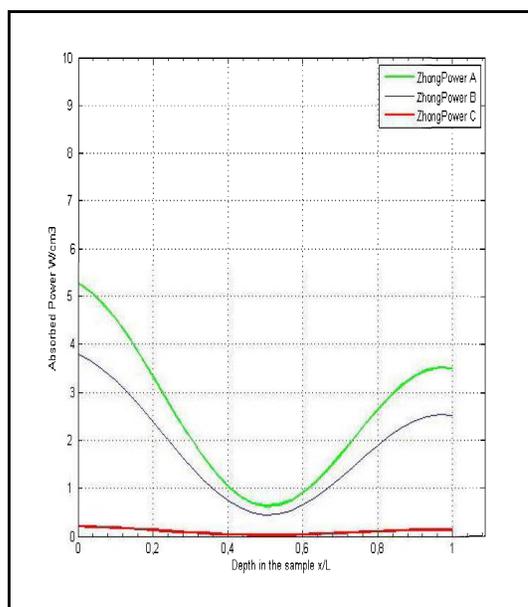
**Figure 16 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de bœuf de 1.84cm d'épaisseur, résultats Ayappa 1991 en haut, modèle 1D en bas.**



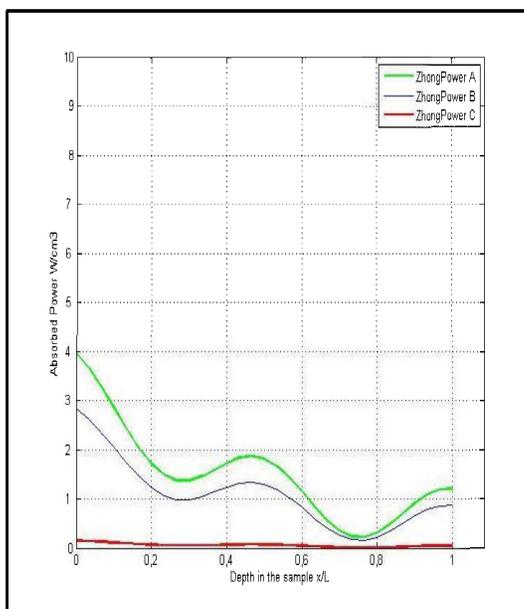
**Figure 17 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de Gelée d'Algue de 0.9 cm d'épaisseur, résultats Barringer 1995 en haut, modèle 1D en bas.**



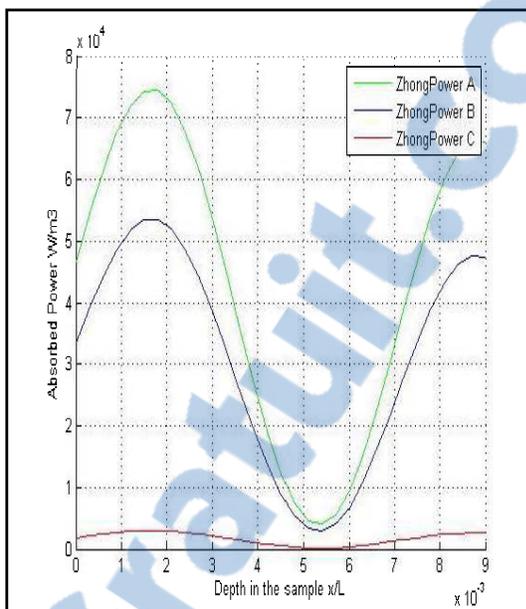
**Figure 18 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de Gelée d'Algue de 3 cm d'épaisseur, résultats Barringer 1995 en haut, modèle 1D en bas.**



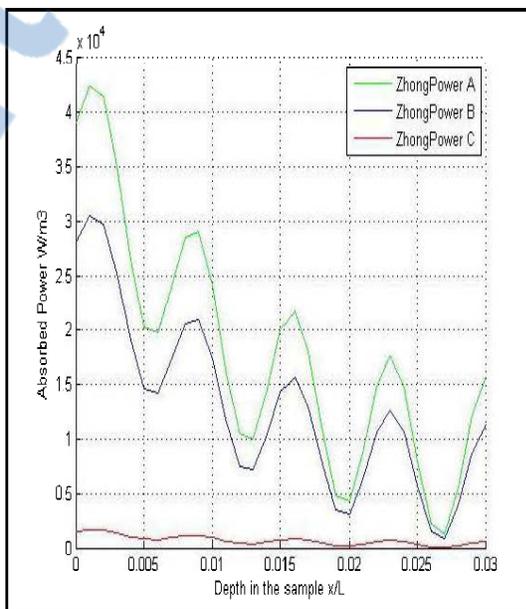
**Figure 19 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de bœuf de 0.92cm d'épaisseur, modèle 2D de Zhong.**



**Figure 20 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de bœuf de 1.84cm d'épaisseur, modèle 2D de Zhong.**



**Figure 21 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de Gelée d'Algue de 0.9 cm d'épaisseur, modèle 2D de Zhong.**



**Figure 22 : Distribution de l'énergie absorbée par un échantillon de Gelée d'Algue de 3 cm d'épaisseur, modèle 2D de Zhong.**

#### 4.2. Applications : Résultats et discussion

Après avoir validé les modèles numériques avec une source micro-ondes 1D et 2D, on s'intéresse, dans cette partie, à une étude numérique du chauffage par micro-ondes de feuilles biocomposites de type thermoplastique-bois. Les biocomposites sont constitués de 70% de polypropylène et 30% de renfort en bois *Leucaena Leucocephala* (Gaur et Wunderlich, 1982). Pour l'analyse, nous avons considéré, d'une part une géométrie carrée de 10 cm de côté et deux épaisseurs (2mm et 4mm) et, d'autre part, trois différentes tailles des fibres de bois sont considérées selon (Gaur et Wunderlich, 1982). La fréquence de l'onde électromagnétique incidente est 2.5GHz et elle est supposée plane et normale à la surface des plaques biocomposites.

Les propriétés diélectriques à une fréquence de 2,5Ghz et les propriétés thermo-physiques des feuilles utilisées sont résumées dans le tableau suivant :

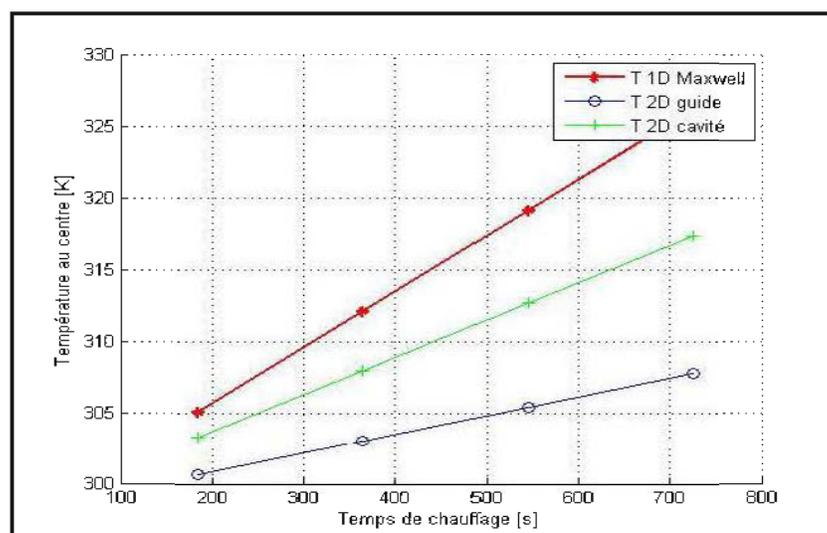
**Tableau 2 : Propriétés des biocomposites (Azlan *et al.*, 2014).**

	Densité	Cp	K[W/m.°C]	$\epsilon_r$	tan $\delta$	Taille fibres	Épaisseur
<b>PP</b>	930	2077,51	0,206	2,57	0,0352	0	2 et 4 mm
<b>A</b>	838,92	2206,84	0,215	3,38	0,0596	100 $\mu$ m	2 et 4 mm
<b>B</b>	838,92	2206,84	0,215	3,06	0,0082	150 $\mu$ m	2 et 4 mm
<b>C</b>	838,92	2206,84	0,215	3,89	0,0945	500 $\mu$ m	2 et 4 mm

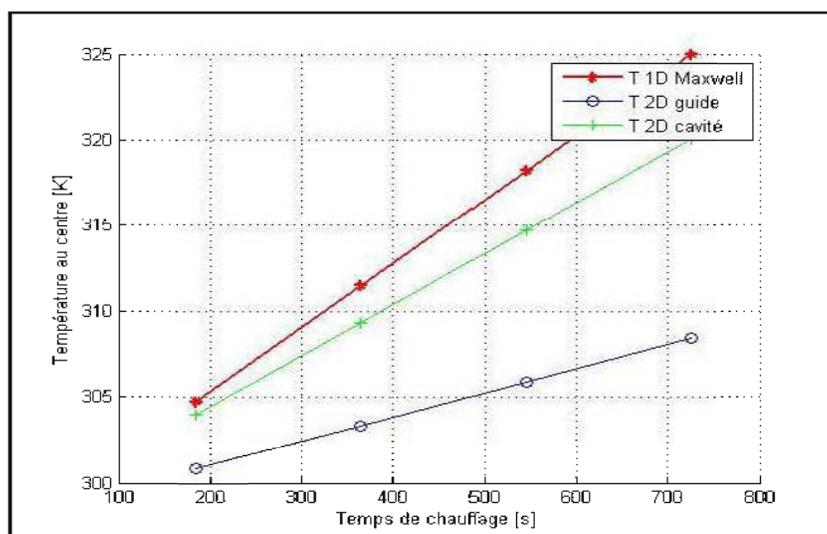
Les propriétés sont considérées constantes sur tout l'intervalle de température et les changements de phase ne sont pas pris en compte (Gaxiola *et al.*, 2009).

La plaque en biocomposite, placée au centre du guide d'ondes, est exposée à une onde électromagnétique (micro-ondes) plane, de mode Fondamental TE<sub>10</sub>, dont la longueur de coupure  $\lambda_c = 2a$  ( $a$  est la largeur du guide d'ondes) et incidente sur la face gauche (voir Figure13). Les micro-ondes se propagent dans la direction de l'axe X perpendiculaire à la plaque et les champs électrique et magnétique constituant l'onde sont dans le plan YZ parallèle à la plaque. Les surfaces de la plaque sont considérées sans perte de chaleur et la température initiale est de 298K.

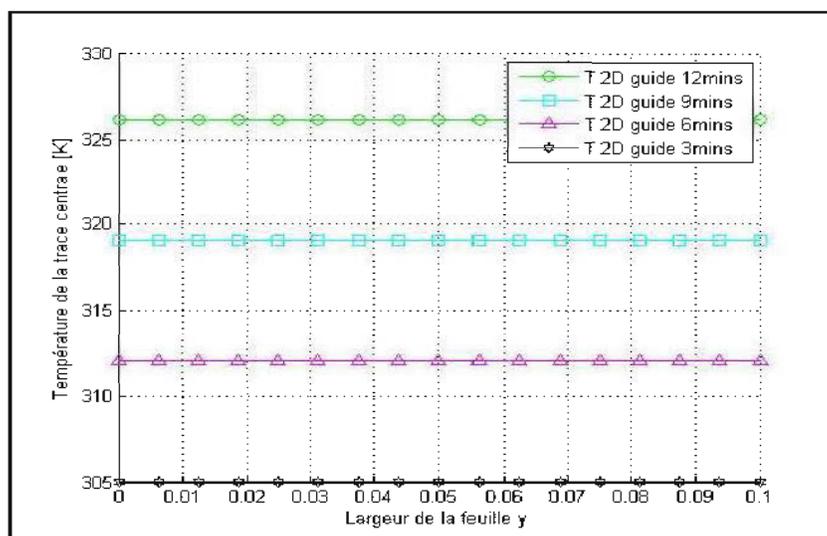
- **Matériau PP (Polypropylène sans renfort) : 2mm et 4mm d'épaisseur 10cm de largeur.**



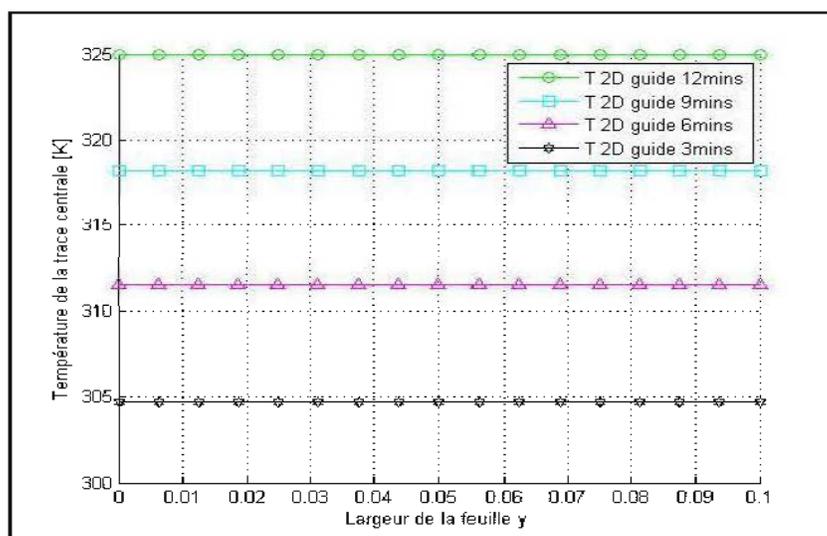
**Figure 23 : Évolution de la température au centre de la plaque de 2mm d'épaisseur.**



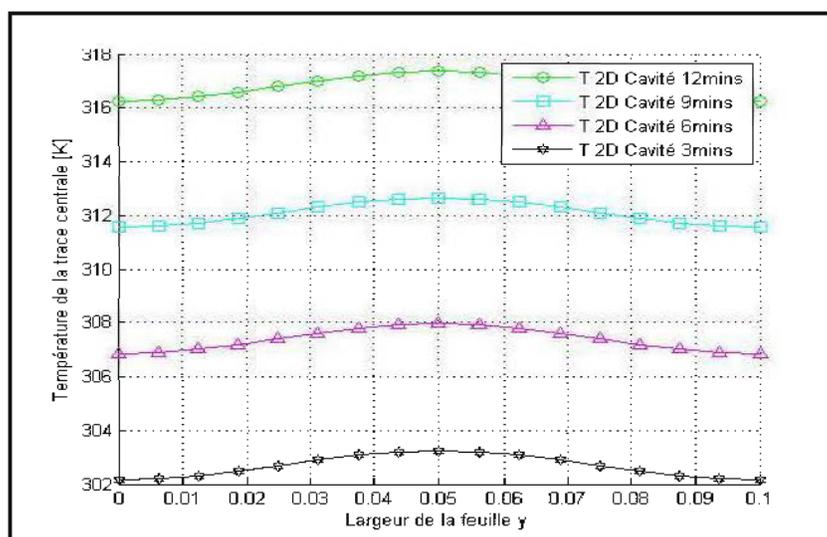
**Figure 24 : Évolution de la température au centre de la plaque de 4mm d'épaisseur.**



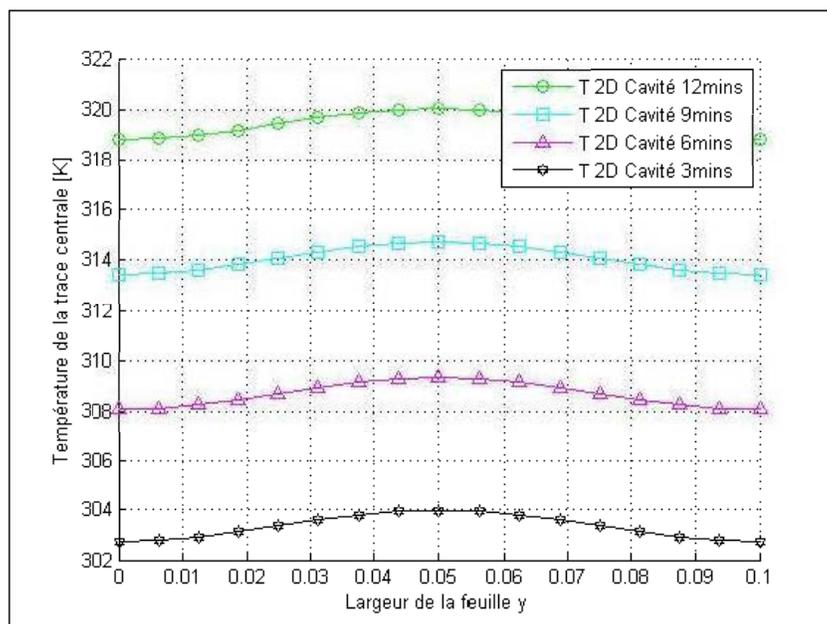
**Figure 25 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 1D.**



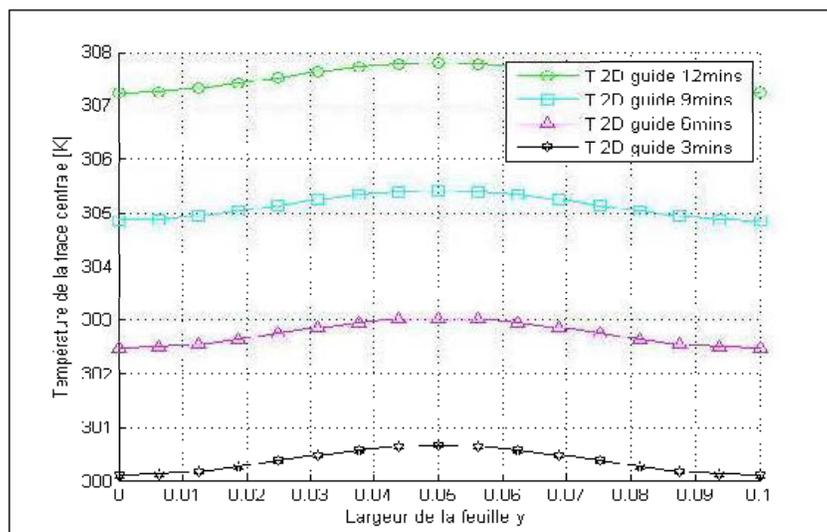
**Figure 26 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 1D.**



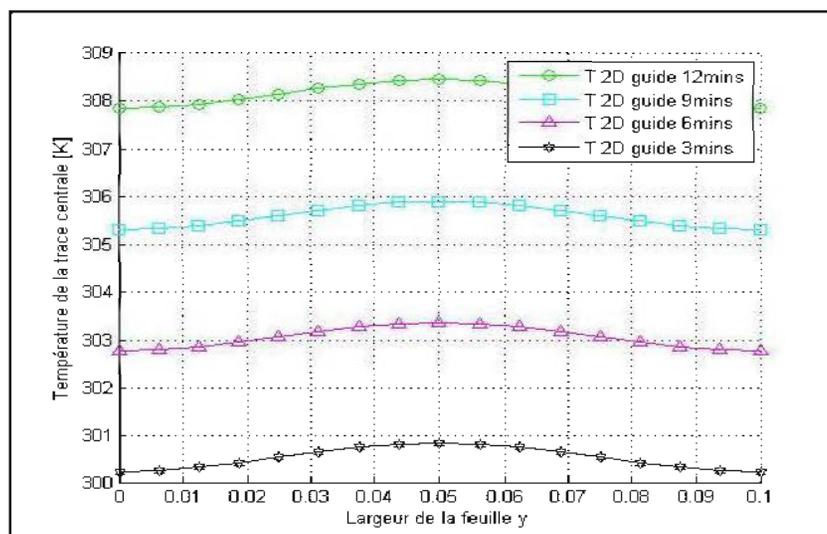
**Figure 27 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.**



**Figure 28 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.**

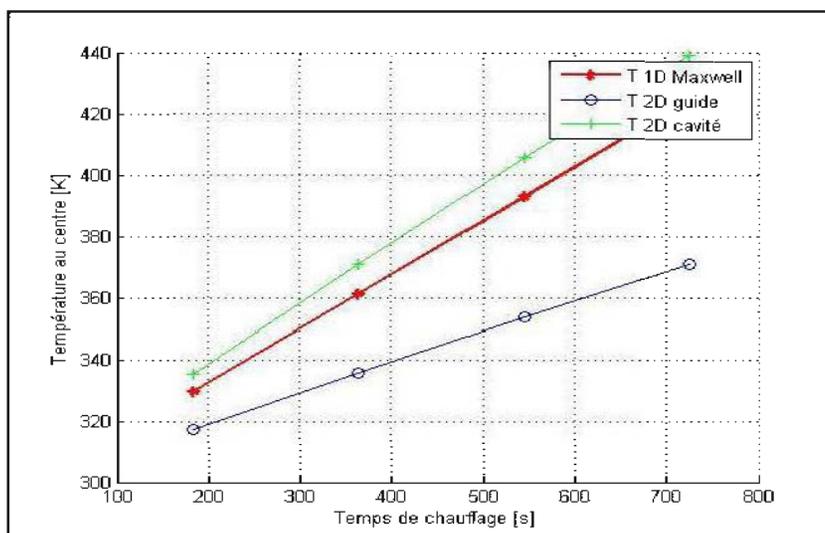


**Figure 29 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.**

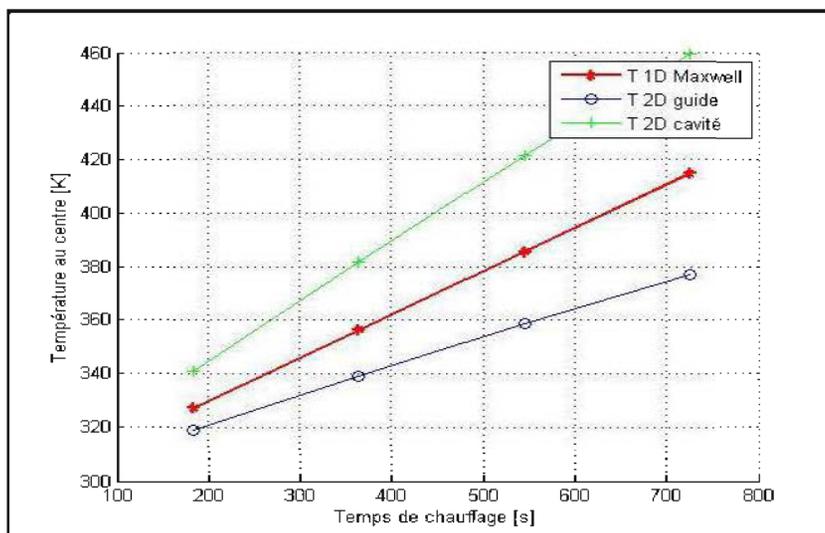


**Figure 30 : Profil de température sur la largeur de la plaque 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.**

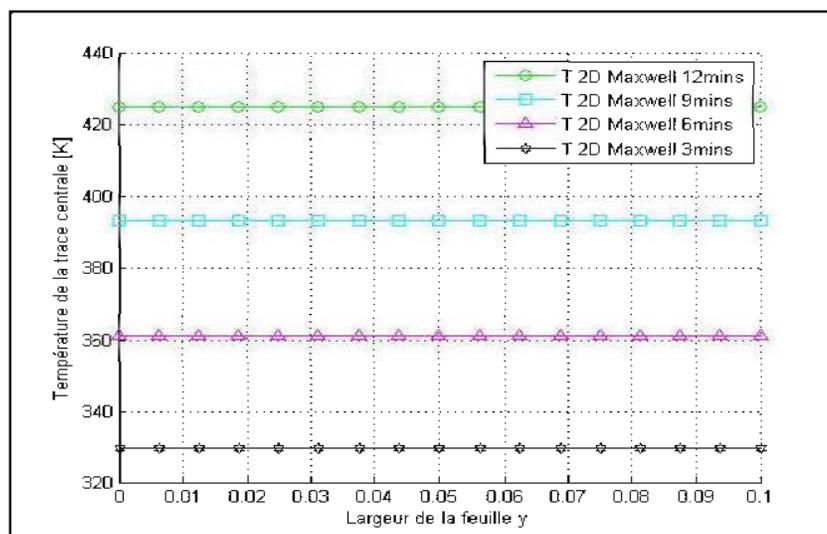
➤ **Matériau A (fibres de 100 $\mu$ m) : 2mm et 4mm d'épaisseur 10cm de largeur.**



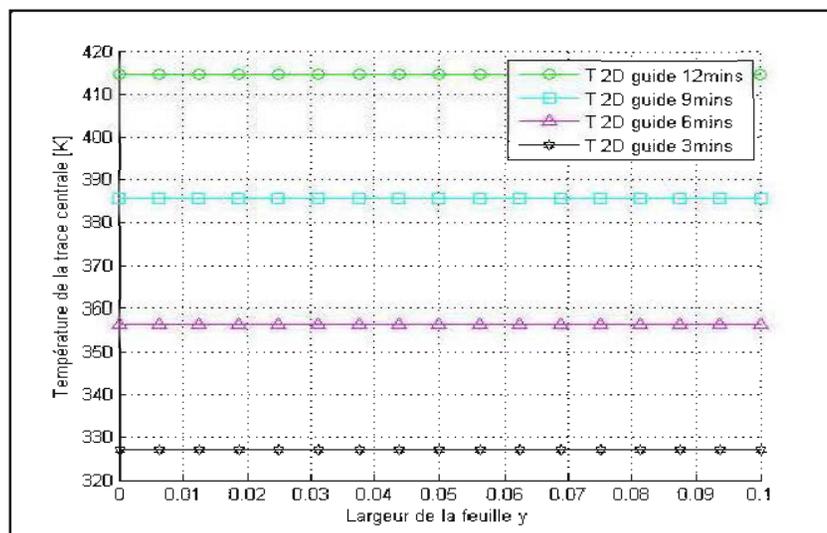
**Figure 31 : Évolution de la température au centre de la plaque de 2mm d'épaisseur.**



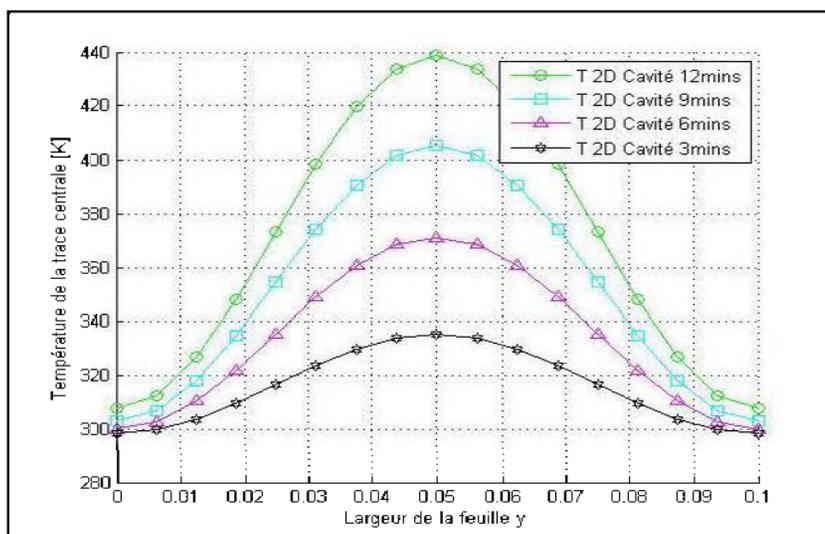
**Figure 32 : Évolution de la température au centre de la plaque de 2mm d'épaisseur.**



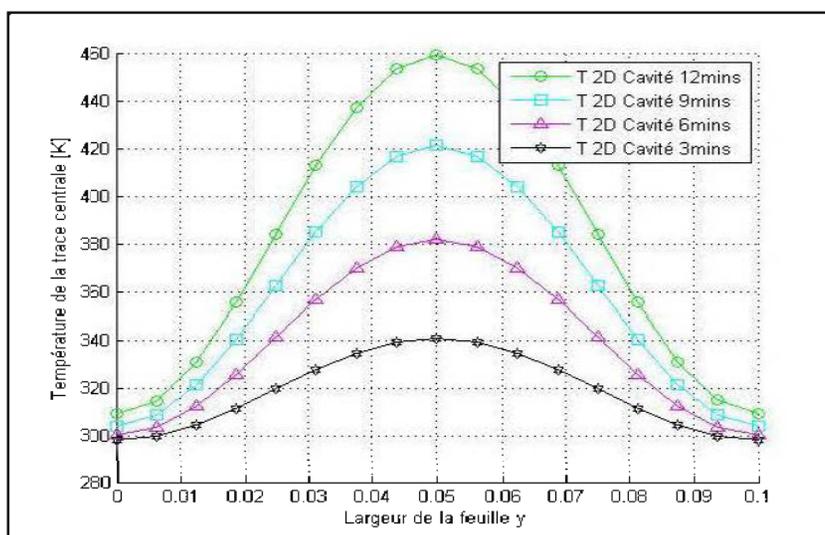
**Figure 33 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 1D.**



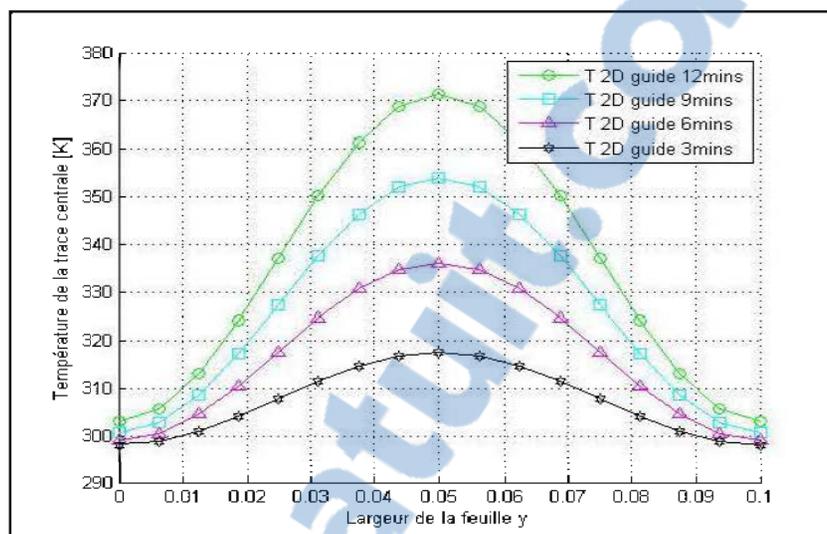
**Figure 34 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 1D.**



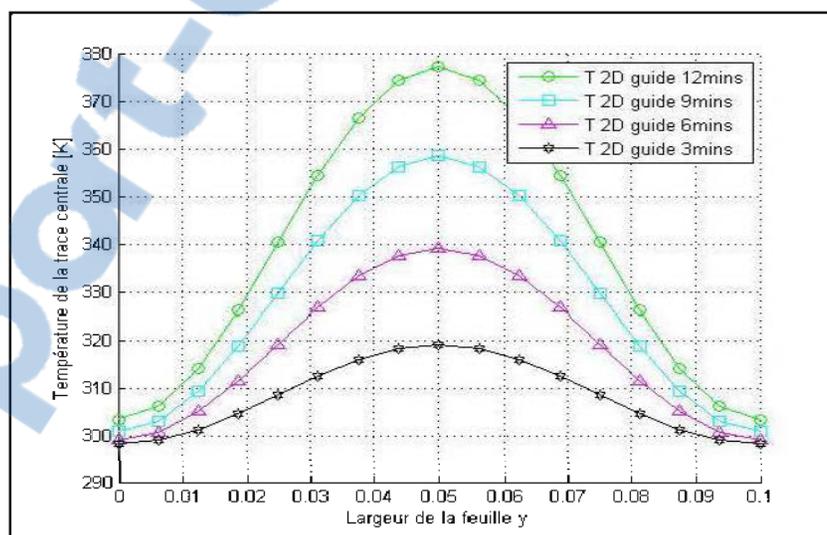
**Figure 35 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.**



**Figure 36 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.**

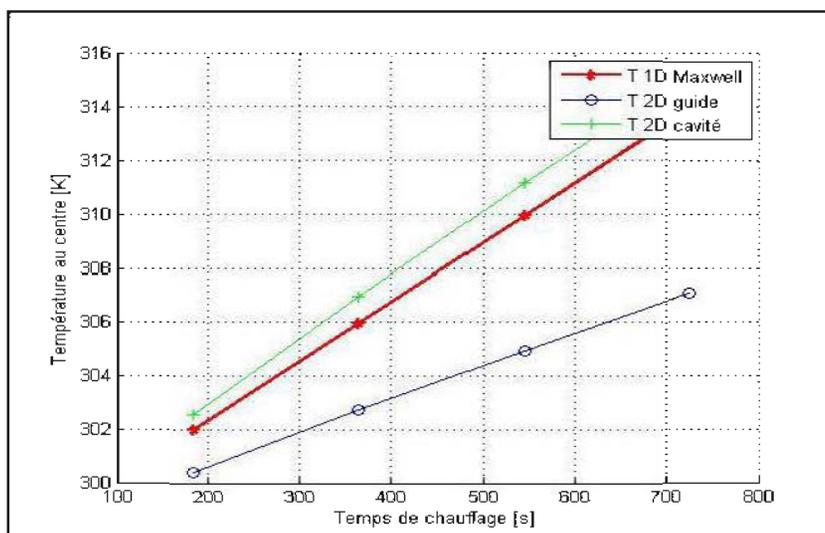


**Figure 37 : Profil de température sur la largeur de la plaque 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.**

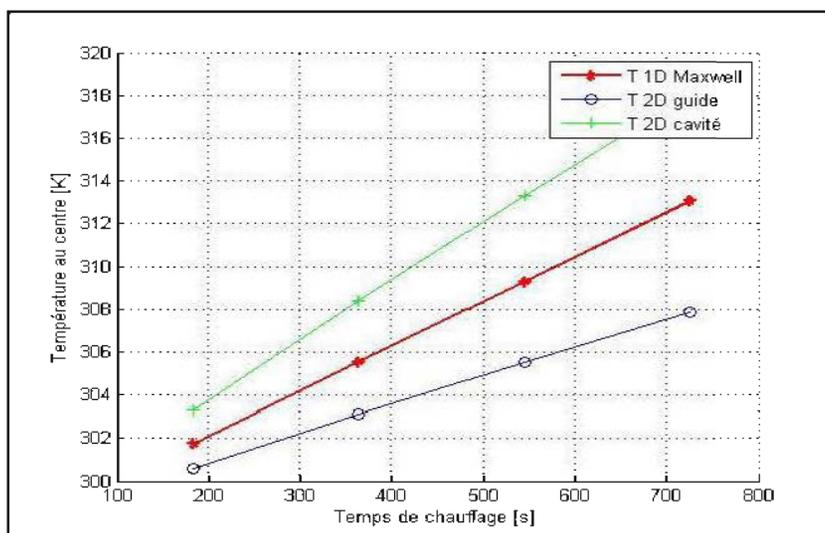


**Figure 38 : Profil de température sur la largeur de la plaque 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.**

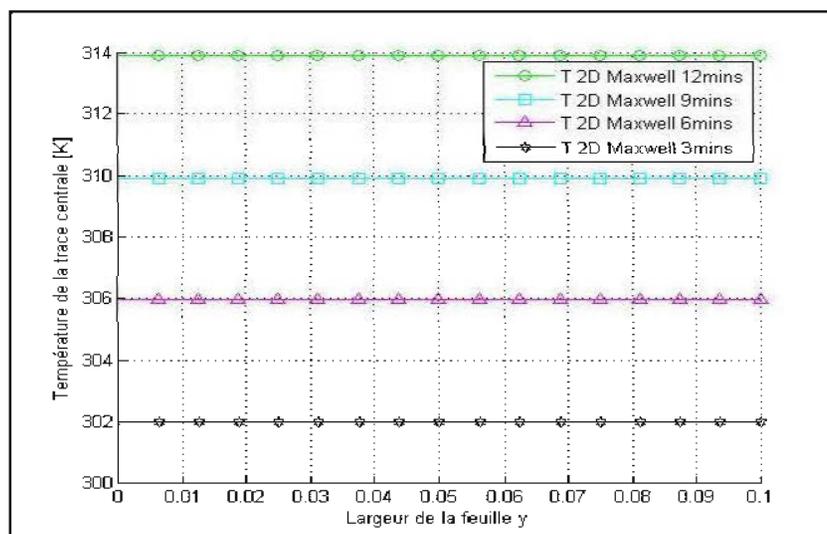
➤ **Matériau B (fibres de 150 $\mu$ m) : 2mm et 4mm d'épaisseur 10cm de largeur.**



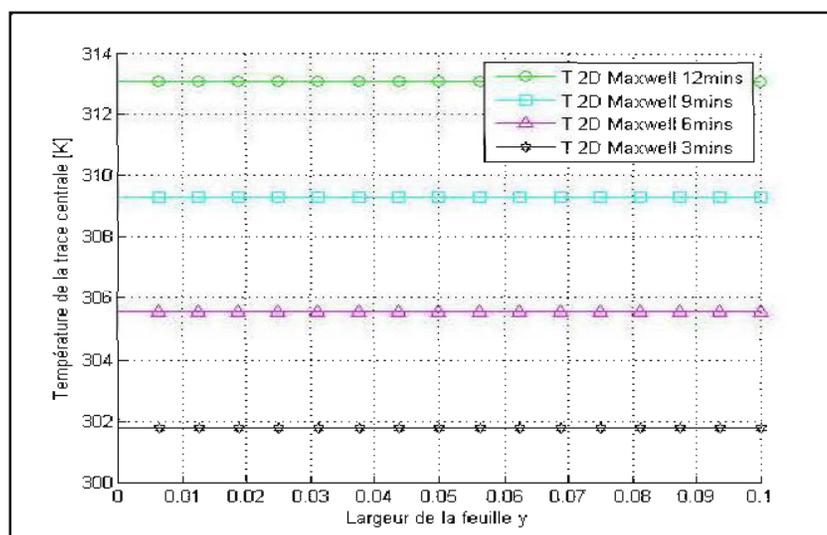
**Figure 39 : Évolution de la température au centre de la plaque de 2mm d'épaisseur.**



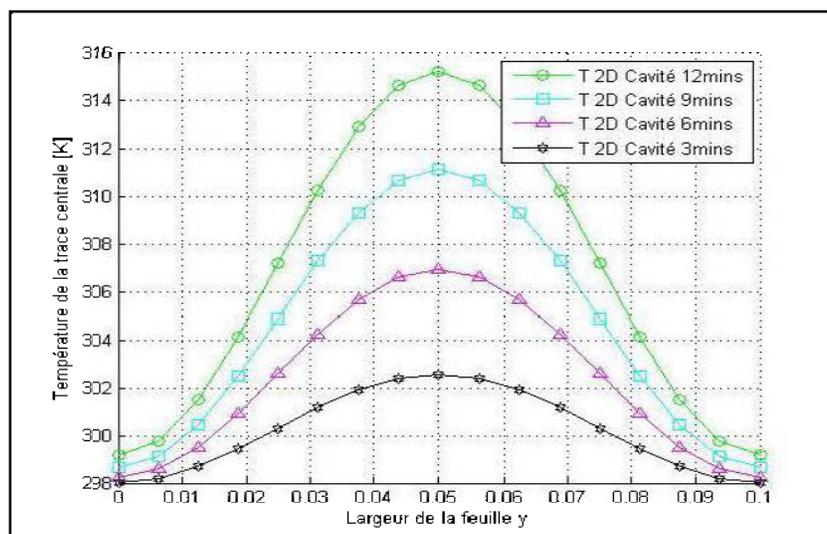
**Figure 40 : Évolution de la température au centre de la plaque de 4mm d'épaisseur.**



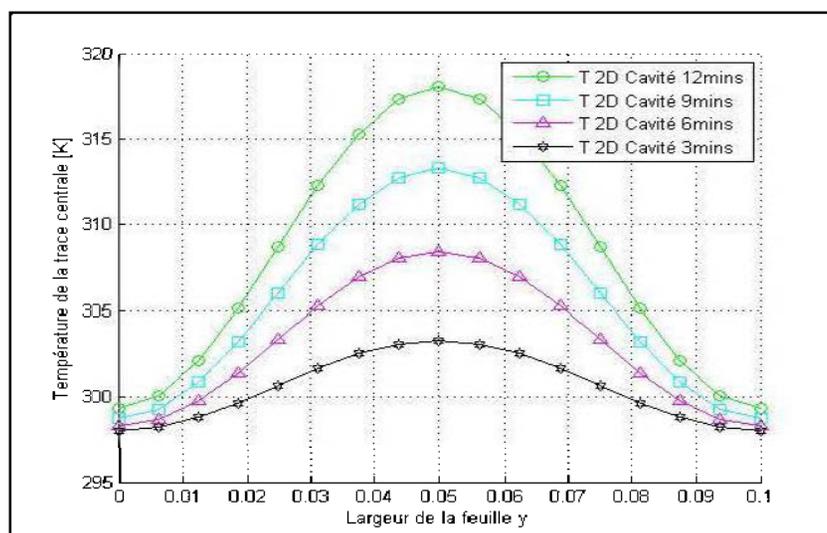
**Figure 41 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 1D.**



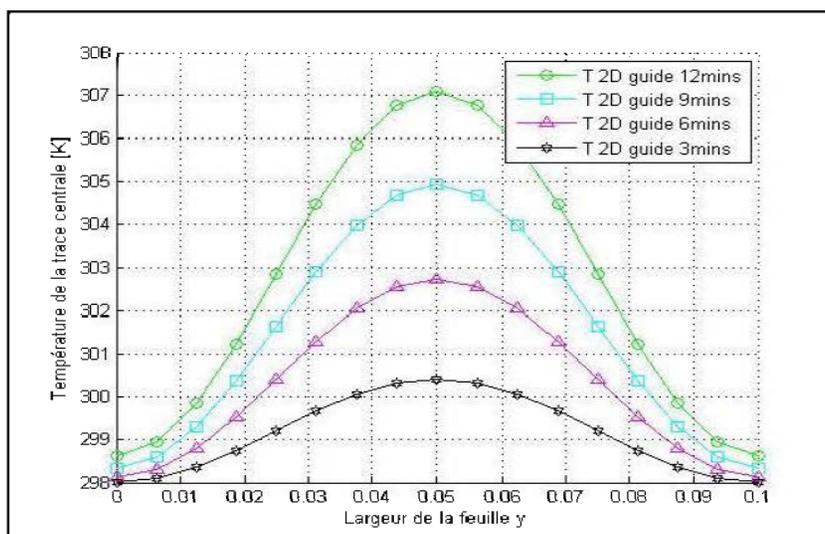
**Figure 42 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 1D.**



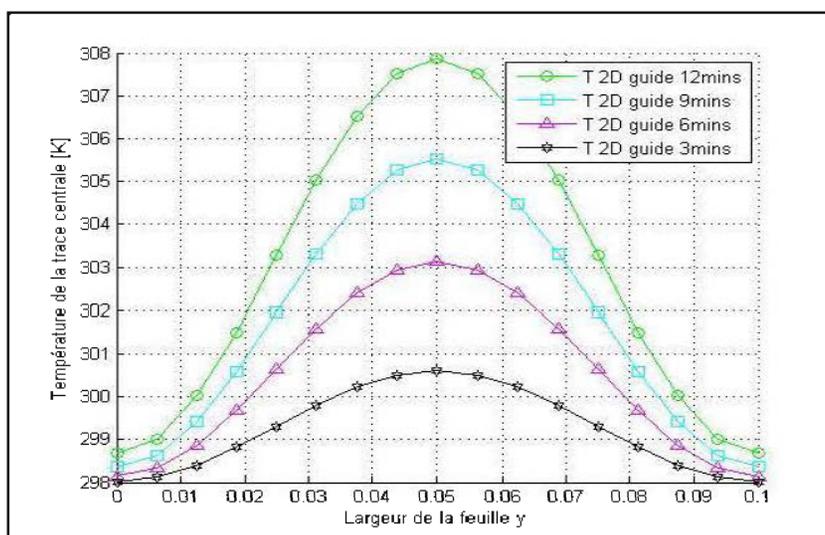
**Figure 43 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.**



**Figure 44 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.**

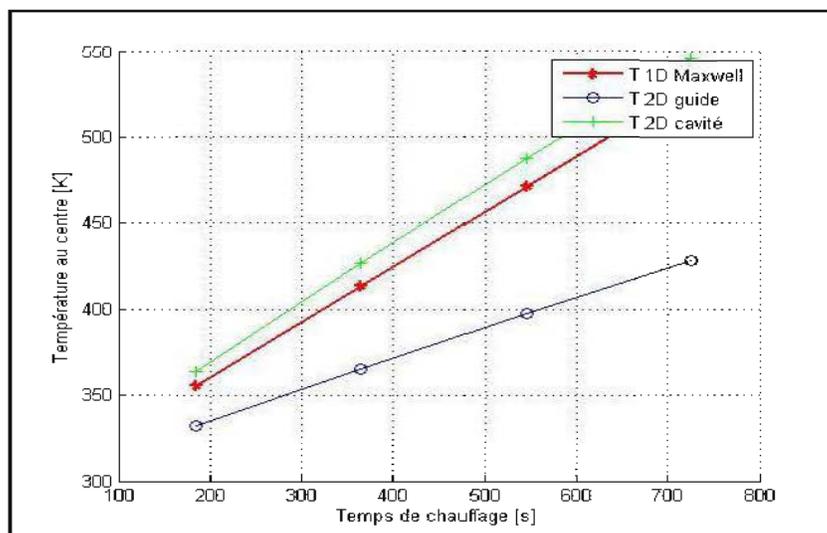


**Figure 45 : Profil de température sur la largeur de la plaque 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.**

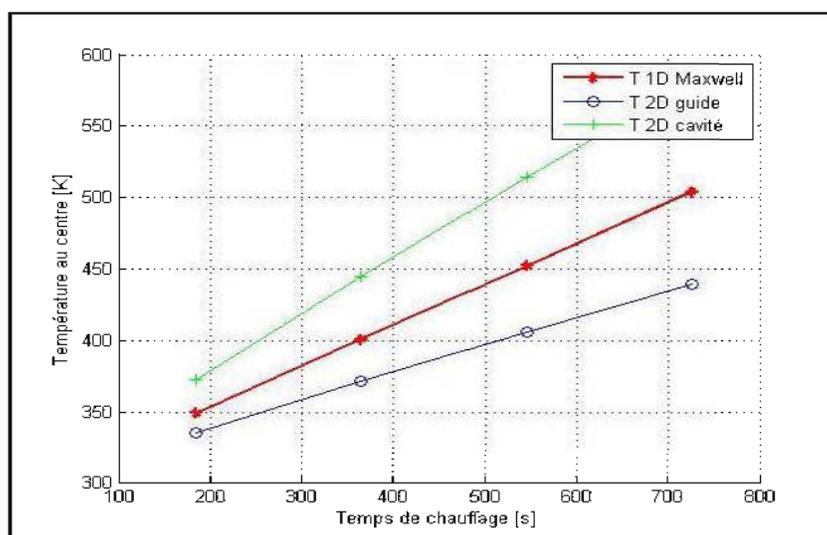


**Figure 46 : Profil de température sur la largeur de la plaque 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.**

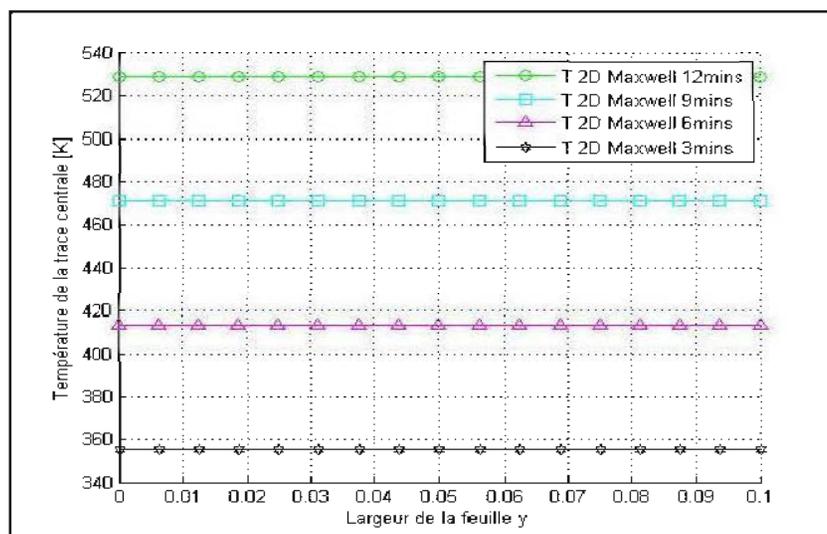
➤ **Matériau C (fibres de 500 $\mu$ m) : 2mm et 4mm d'épaisseur 10cm de largeur.**



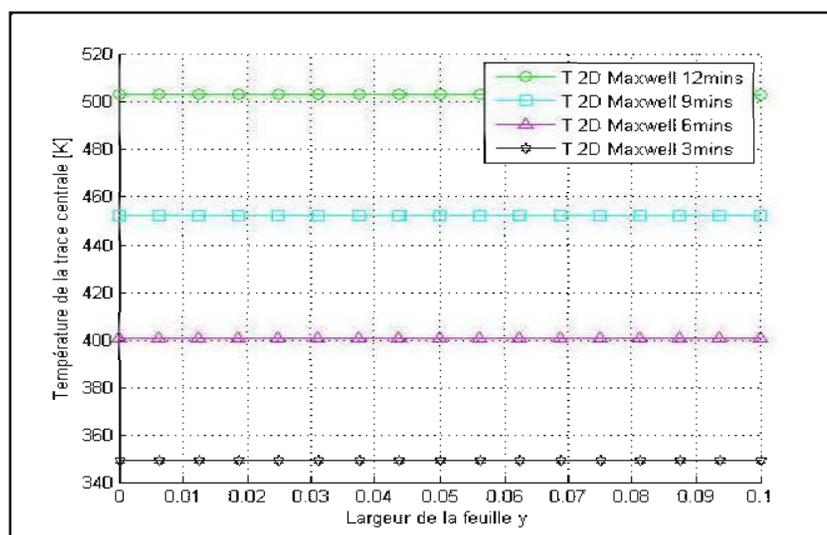
**Figure 47 : Évolution de la température au centre de la plaque de 2mm d'épaisseur.**



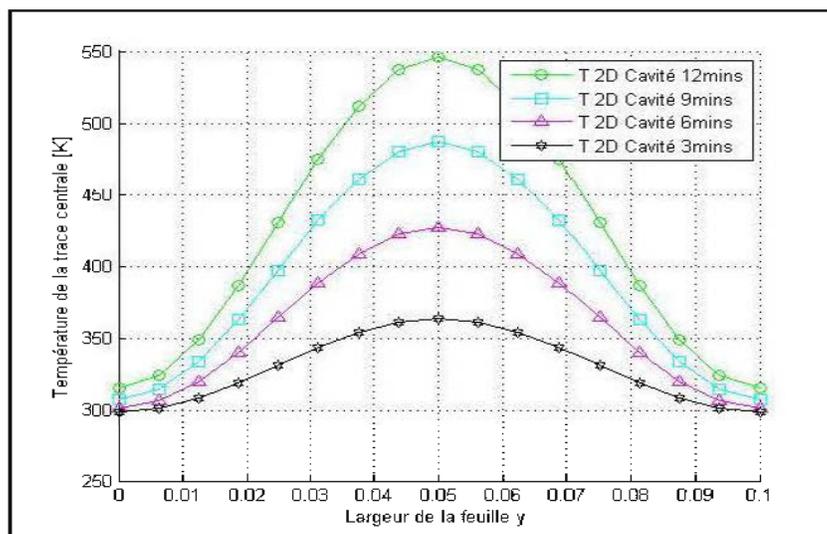
**Figure 48 : Évolution de la température au centre de la plaque de 4mm d'épaisseur.**



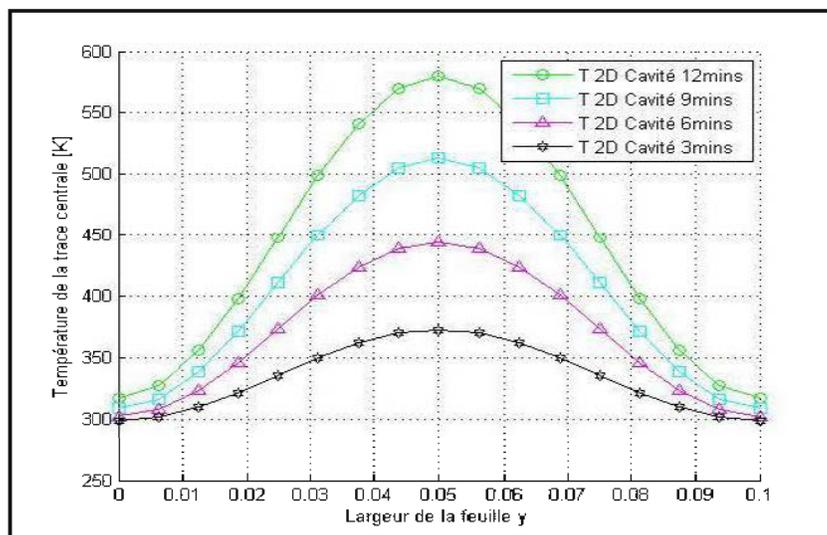
**Figure 49 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 1D.**



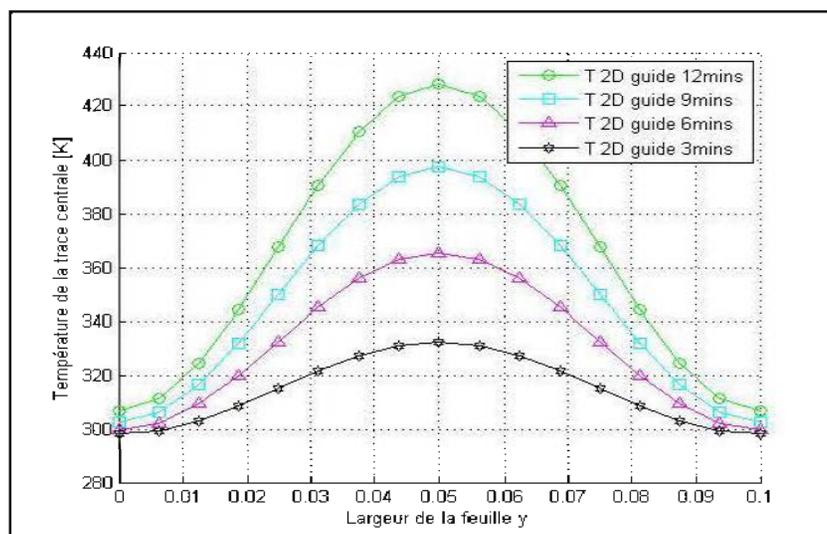
**Figure 50 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 1D.**



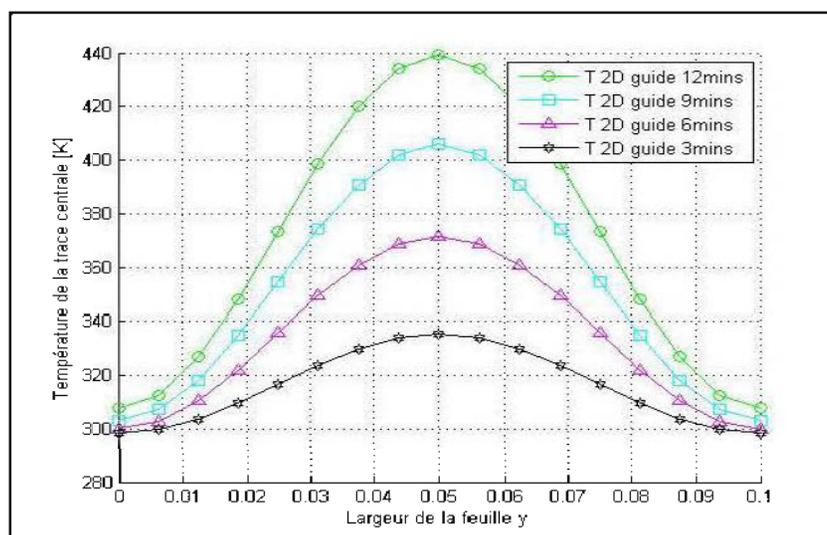
**Figure 51 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.**



**Figure 52 : Profil de température sur la largeur de la plaque de 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Cavité.**



**Figure 53 : Profil de température sur la largeur de la plaque 2mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.**



**Figure 54 : Profil de température sur la largeur de la plaque 4mm d'épaisseur par le modèle 2D Guide.**

Les figures 23, 31, 39 et 47 représentent l'évolution de la température au centre de la plaque au cours du temps. Le temps de chauffage est fixé à 700 seconds. On remarque que la température du matériau augmente graduellement avec le temps jusqu'à atteindre une température de l'ordre de 500K pour le modèle 1D et de 530K (température de fusion du PP) pour le modèle 2D de la cavité.

On constate que l'augmentation de la température est linéaire. Ceci s'explique par l'uniformité du flux thermique incident. Aussi, on constate que l'ensemble des plaques biocomposites se chauffent plus vite dans le cas du modèle 2D de cavité que dans le modèle 1D et le modèle 2D de guide d'ondes. Ceci est dû à la réflexion totale (dans la cavité) de l'énergie de l'onde à la surface de sortie de la plaque.

Dans le modèle 1D, on a représenté sur les figures 26, 33, 41 et 49 le profil de la température obtenue dans le temps. On constate un profil qui évolue d'une manière constante sur la largeur de la plaque (pas de variation).

Dans le cas du modèle 2D, du guide d'ondes et de la cavité, on remarque une non-uniformité ou un gradient de température sur la largeur de la feuille biocomposite, entre le centre et l'extrémité. Ce gradient de température peut être expliqué comme une conséquence de deux causes :

- Dans un guide d'ondes ou une cavité, l'énergie dissipée dans le matériau diminue en se rapprochant des parois où elle a tendance à s'annuler.
- Diffusivité thermique faible des biocomposites, ce qui réduit le rôle de la diffusion de la chaleur par conduction à l'intérieur du matériau. La conduction qui tend à compenser le gradient d'énergie dissipée.

Pour les trois modèles et des deux épaisseurs utilisés, on a représenté sur les figures 55, 56, 57 et 58 les profils de températures obtenus numériquement sur l'épaisseur de la plaque biocomposite. On constate une uniformité du profil. Ceci est dû au fait que

l'épaisseur est très faible par rapport à l'épaisseur de pénétration ( $D_p$ ), caractéristique du matériau.

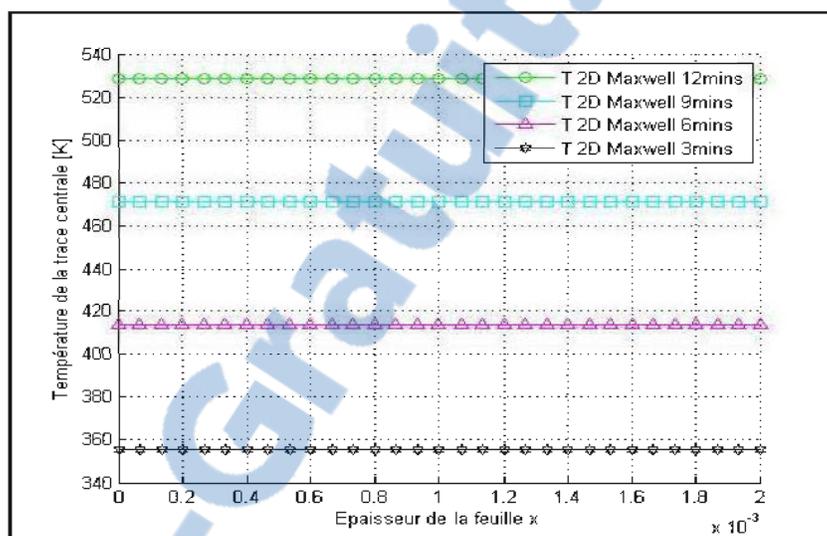
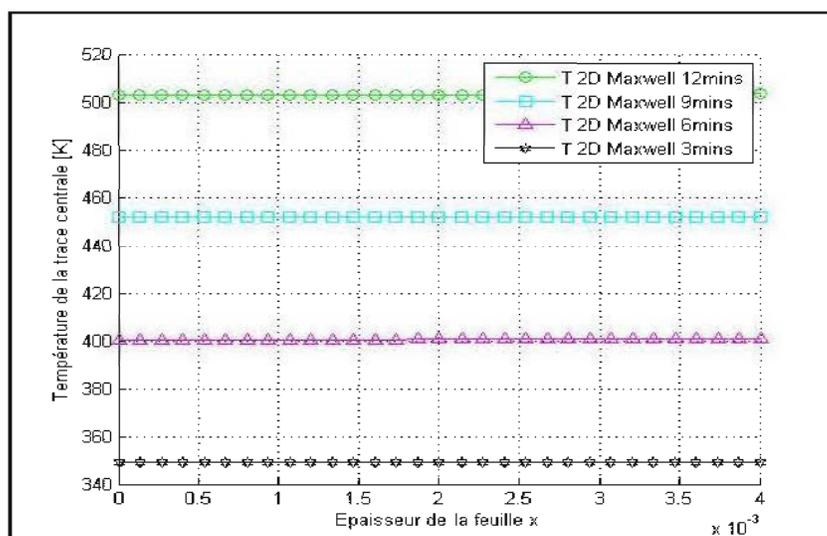
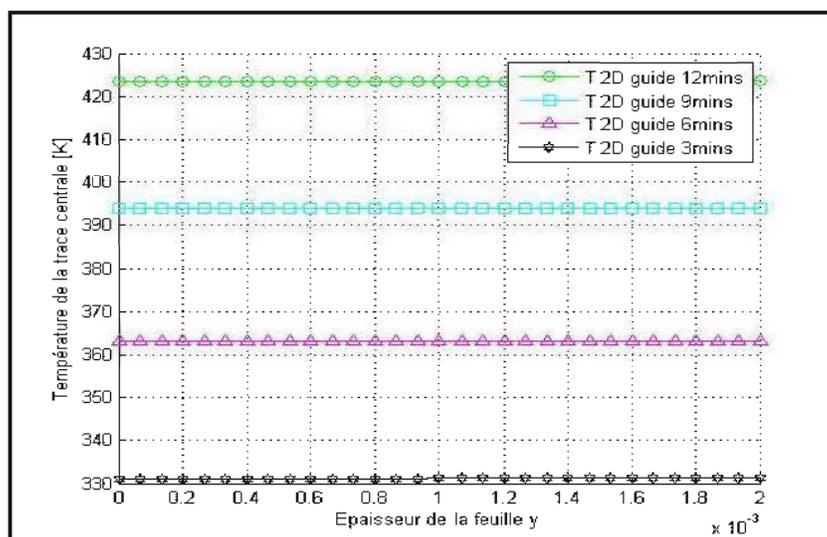


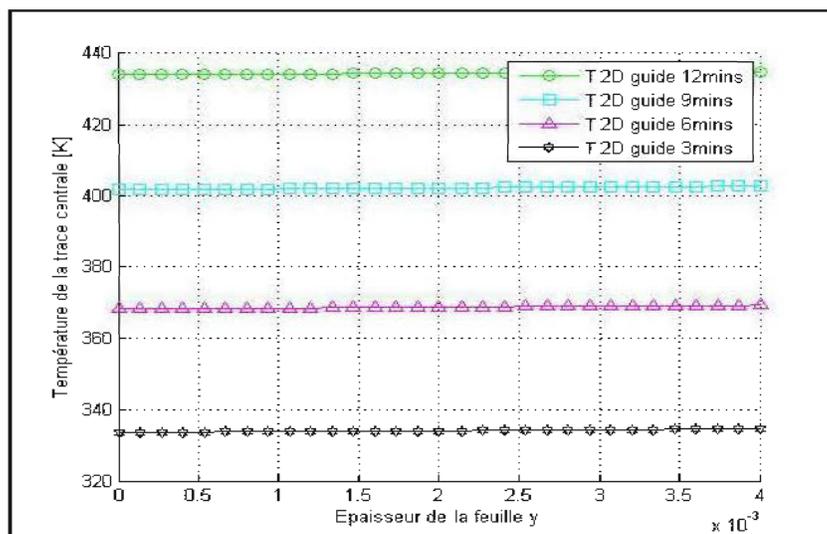
Figure 55 : Profil de température sur l'épaisseur de la plaque de 2mm par le modèle 1D.



**Figure 56 : Profil de température sur l'épaisseur de la plaque de 4mm par le modèle 1D.**



**Figure 57 : Profil de température sur l'épaisseur de la plaque de 2mm par le modèle 2D Guide.**



**Figure 58 : Profil de température sur l'épaisseur de la plaque de 4mm par le modèle 2D Guide.**

Pour les trois modèles utilisés, on a rapportés les résultats obtenus sur les figures 59 et 60. Selon les figures, nous constatons une augmentation de l'énergie moyenne dissipée avec l'augmentation du facteur de perte du matériau, et par conséquent, une augmentation de la température moyenne de la plaque. Cette dernière confirme que l'ensemble des trois modèles respecte la description théorique du paragraphe 2.

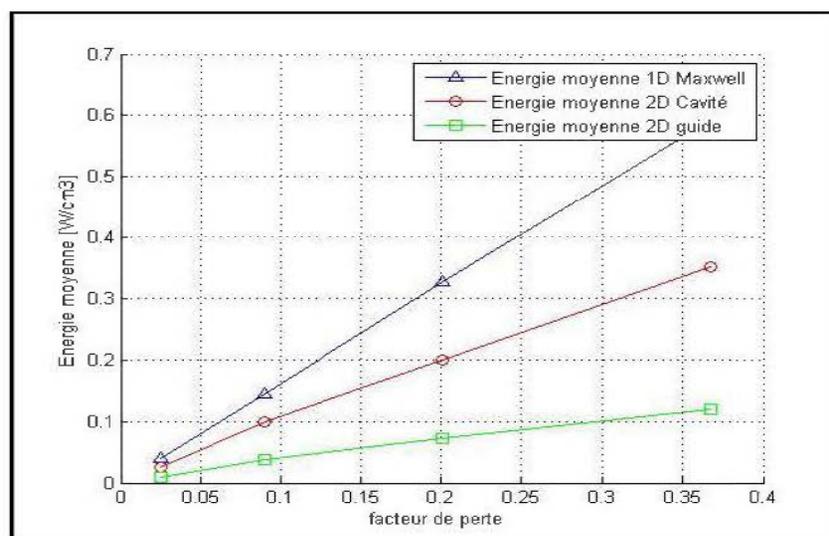


Figure 59 : Énergie dissipée dans la plaque en fonction du facteur de perte.

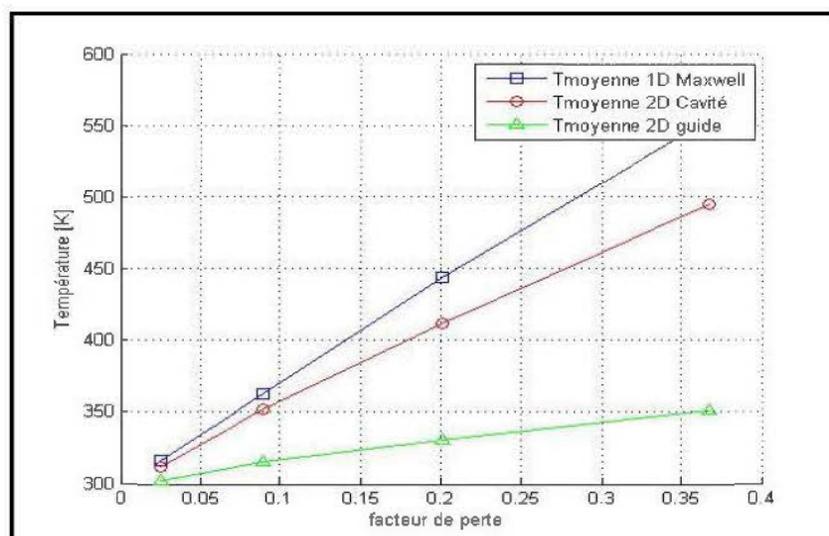


Figure60 : Température moyenne dans la plaque en fonction du facteur de perte.

## CHAPITRE 5

### 5. CONCLUSION

Dans ce travail, le problème de la modélisation numérique 2D du transfert de chaleur par micro-ondes dans les biocomposites a été traité. Pour cela, nous avons développé un outil numérique de base, par la méthode des éléments finis, pour résoudre l'équation de conservation de l'énergie.

Dans un premier temps, une étude introductive sur les matériaux biocomposites (types de biocomposites, méthodes de fabrication, etc.), sur leurs caractéristiques de base ainsi que sur les mécanismes de chauffage diélectrique. Ensuite, nous avons orienté le travail vers une formulation mathématique de l'équation d'énergie. Pour ce volet, un modèle de simulation du profil de température, par la méthode des éléments finis 2D, est réalisé. La formulation intégrale, la discrétisation spatiale en éléments triangulaires et le schéma d'intégration temporelle sont exposés. Ensuite, nous avons effectué des validations numérique-analytique pour deux situations relatives à la conduction et au rayonnement thermique.

Pour le volet de micro-ondes, nous avons utilisé et validé deux modèles pour l'énergie dissipée dans les matériaux.

Ensuite, le modèle numérique développé a été appliqué pour étudier l'impact de la taille des fibres du bois sur la qualité du chauffage des plaques biocomposites (à base de polypropylène contenant un renfort 30% en fibres de bois). Suite à l'étude, nous remarquons :

Les matériaux contenant du bois réagissent plus aux effets des micro-ondes, et donc chauffent plus rapidement que le polypropylène pur.

La plaque biocomposite C de 2mm d'épaisseur (fibres de 500 $\mu$ m) atteint une température de 530K dans une cavité et 505K avec le modèle 1D, en 11minutes, alors que la plaque biocomposite A de même épaisseur (fibres de 100 $\mu$ m) ne dépasse pas les 440K dans une cavité et 420K avec le modèle 1D.

La plaque biocomposite C de 4mm d'épaisseur (fibres de 500 $\mu$ m) atteint une température de 530K dans une cavité et 440K dans un guide d'onde, en 11minutes seulement, alors que la plaque biocomposite A (fibres de 100 $\mu$ m) n'atteint que 460K dans une cavité et 380K dans un guide d'onde.

Pour l'ensemble des plaques biocomposites, on constate que la température augmente avec le facteur de perte qui, en l'occurrence, augmente avec la présence de fibres et leurs tailles.

L'ensemble de nos résultats démontre qu'avec la présence de fibres de bois ainsi que l'augmentation de leur taille, le matériau devient plus susceptible d'être chauffé sous l'action des micro-ondes.

## RÉFÉRENCES

- Ayappa, K.G., Davis H.T. et Crapiste, G., (1991). Microwave heating: an evaluation of power formulation. Chemical engineering science. Vol.46, No.4, p.1005-1016.**
- Azlan, A.A., Badrun, M.K.A., Ali, M.T., (2014).A Comparative Study of Material Leucaena Leucocephala Stem Wood Plastic Composite (WPC) Substrate with FR4 Substrate throughout Single Patch Antenna Design. Progress In Electromagnetics Research. Vo.59, p.151-166**
- Barringer, S.A., Davis, E.A.,Gordon, V., K.,Ayappa, G.et Davis, H.T. (1995).Microwave-Heating Temperature Profils for Thin Slabs Compared to Maxwell and Lambert Law Predictions. Journal of food science. Vol. 60, No.5, p. 1137–1142.**
- Bourai, K. (2010). Étude du comportement thermique d'un composite bois-polymères pour une application en roto-moulage. Thèse de doctorat, Université LAVAL. Québec.**
- Bradshaw, S.M., van Wyk, E.J., Swardt, J.B. (1998). Microwave heating principles and the application to the regeneration of granular activated carbon. The Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy, p.201-2010.**
- Campbell, F.C.(2010). Structural composite materials (Book). Edition: ASM International.**
- Chandrasekaran, S., Ramanathan, S., Bsak, T.(2011).Microwave Material Processing. Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com).**

- Clark, D. E., Folz, D. C., West, J. K. (2000). Processing materials with microwave energy. Materials Science and Engineering. A287, p. 153-58.**
- De Vriendt A. B. (1984). La transmission de la chaleur. Ed. Gaëtan Morin. Vol. 1, Tome 1. Chicoutimi, Québec.**
- Dhatt, G. et Touzot, G. (1984); Une présentation de la méthode des éléments finis. Presses de l'université de Laval. MALOINE S.A.**
- Erchiqui, F., Hamani, I., Charrette, A.(2009). Modélisation par éléments finis du chauffage infrarouge des membranes thermoplastiques semi-transparentes. International Journal of Thermal Sciences, Vol.48, No.1, p.73-84.**
- Erchiqui, F.(2013) .Analysis of power formulations for the thawing of frozen wood using microwave energy. Chemical Engineering Science, Vol.98, p. 317–330.**
- Faruk, O.,Bledzki, K., Fink, H.P., Sain, M.(2012). Biocomposites reinforced with natural fibers: Progress in Polymer Science.Vol. 37, No. 11, p. 1552–1596**
- Gaur, U., Wunderlich, B.(1982). Heat capacity and other thermodynamic properties of linear macromolecules. Journal of Physical and Chemical Reference Data. Vol.11, No.2, p.313-325 ·**
- Gaxiola, D.L., Keith, J.M., King, J.A., Johnson, B.A., (2009).Nielsen Thermal Conductivity Model for Single Filler Carbon /Polypropylene Composites. Published online inWileyInterScience ([www.interscience.wiley.com](http://www.interscience.wiley.com)).**

- Hamani,I.(2007).Modélisation par la méthode des éléments finis 3D du chauffage infrarouge d'une membrane semi-transparente en polyéthylène téréphtalate. Mémoire de maîtrise en ingénierie, Université du Québec à Chicoutimi.**
- Komarov, V. V. (2011). Formulations of the coupled mathematical models of microwave heating processes. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. Vol.36, No.4, p.309-316**
- Kozłowski, M., Szczurek, S., Szczurek, T. , Frackowiak, S. (2008). Influence of matrix polymer on melt strength and viscosity of wood flour reinforced composites. International journal of material forming. Vol. 1, no1, pp. 751-754.**
- Lin, Y. E. , Anantheswaran, R. C.(1995). Finite element analysis of microwave heating of solid food. Journal of food engineering. Vol. 25., No.1, p.85-112**
- Michaud, F. (2003). Rhéologie de panneaux composites bois/thermoplastiques sous chargement thermomécanique : Aptitude au postformage. Thèse de doctorat, Université LAVAL. Québec**
- Reddy, J. N.(1993).An introduction to the Finite Element Method. New York: McGraw-Hill.**
- Tazi, M. (2015). Valorisation des sciures de bois dans des composites thermoplastiques (HDPE-BOIS) : élaboration, caractérisation et modélisation en soufflage libre. Thèse de doctorat, Université du Québec à Chicoutimi. Québec.**
- WaSoa, H. et Taube, A. (2004). Modelling and experimental investigation of microwave heating of adhesively bonded polypropylene joint. International Journal of Adhesion & Adhesives. Vol 24., No.4, p.307-312**

**Zhong, J., Liang, S., Xiong, Q., (2015). Approximate microwave heating models for global temperature profile in rectangular medium with TE 10 mode. Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, Vo.122, No.1, p.487-495.**

## ANNEXES

## ANNEXE 1: Formulation de l'équation de conservation de l'énergie

Désignons par  $V$  un volume élémentaire, délimité par une surface  $S$ . Le volume  $V$  et sa frontière  $S$  seront considérés comme indéformables, fixes, continus :

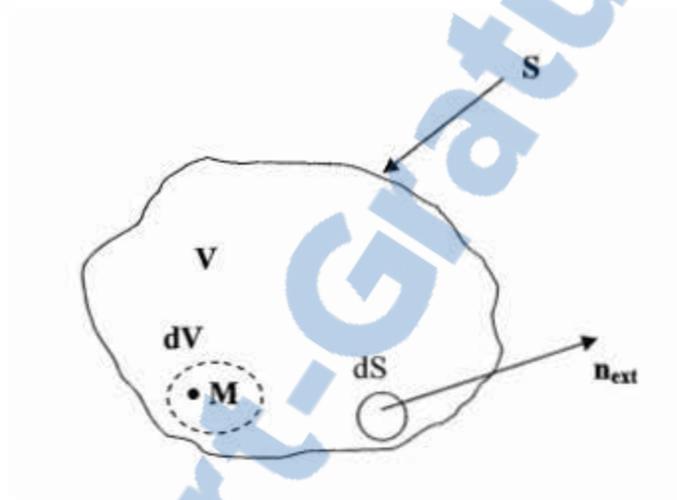


Figure 1a: Élément de volume du milieu

$V$ : volume d'étude

$S$ : frontière de  $V$

$n_{ext}$ : Normale à  $S$ , orienté vers l'extérieur du milieu.

Le milieu  $V$  absorbe et conduit une partie de l'énergie reçue du milieu extérieur. Sa température  $T$  évolue donc dans le temps et l'espace :  $T=T(r,t)$ . Il en est de même de la "densité de flux total de chaleur"  $Q_t(r,t)$ . Rappelons que, par définition de  $Q_t$ , la quantité de chaleur reçue par  $V$  à travers  $S$  par unité de temps, est égale à :

$$\int -Q_t n_{\text{ext}} dS \quad (1a)$$

Le milieu étant considéré comme indéformable, seule la variation locale de température intervient dans l'expression de la variation instantanée de l'énergie interne totale  $E$  du milieu. Par unité de temps, la quantité d'énergie thermique accumulée par le milieu par échauffement est donnée par :

$$\frac{dQ}{dt} = \int C \frac{\partial T}{\partial t} dm = \int \rho \cdot C \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (2a)$$

avec

$Q$ : la quantité de chaleur échangée par le milieu avec son environnement,

$\rho$ : la masse volumique du milieu,

$C$ : la chaleur spécifique du milieu supposée indépendante de la température.

L'application du premier principe de la thermodynamique au volume  $V$  conduit à écrire le bilan suivant lorsqu'il n'y a pas création d'énergie :

Variation de l'énergie interne de  $V$  = flux traversant  $S$

Soit (1a) = (2a) :

$$\int \rho \cdot C \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int -Q_t n_{\text{ext}} dS \quad (3a)$$

Le bilan énergétique devient, après application de la formule d'Ostrogradsky (transformation de l'intégrale de surface en intégrale de volume) au membre de droite de (3a):

$$\int_V \rho \cdot C \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int -\text{div}(Q_t) n_{\text{ext}} dS \quad (4a)$$

soit en terme de bilan local au sein de V et par unité de volume :

$$\rho \cdot C \frac{\partial T}{\partial t} dV + \text{div}(Q_t) = 0 \quad (5a)$$

(5a) est l'équation de conservation de l'énergie et  $Q_t$  désigne la densité de flux de chaleur totale.

On adopte comme hypothèse le transfert de chaleur simultanément radiatif-conductif couplé et en absence de convection naturelle, ce qui revient à exprimer la densité de flux de chaleur totale  $Q_t$ , par:

$$Q_t = Q_r + Q_c \quad (6a)$$

où  $Q_r$  est la densité de flux radiatif totale absorbée par le matériau et  $Q_c$  désigne la densité de flux de chaleur par conduction, donnée par la loi de Fourier:

$$Q_c = -k \cdot \text{grad } T \quad (7a)$$

Où  $k$  est la conductivité thermique du milieu. Il est indépendant de l'espace (substance homogène) et de la température (isotrope). La loi (7a) exprime que les flux de chaleur par conduction sont d'autant plus intenses que les écarts de température sont plus marqués, et qu'en outre la chaleur va des points chauds vers les points froids.

En assimilant la divergence du flux radiatif à un terme source locale  $S_r$ , l'équation (5a) s'écrit :

$$\rho \cdot C \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(k \cdot \text{grad } T) = S_r \quad (8a)$$

avec

$$S_r = -\text{div}(Q_r) \quad (9a)$$

La divergence du flux radiatif est d'un grand intérêt pratique car elle caractérise l'énergie radiative nette absorbée par le milieu. Elle représente, de ce fait, le terme source radiative que l'on retrouve dans l'équation de conservation de l'énergie (8a). Si ce terme est nul, le milieu est dit à l'équilibre radiatif.

L'équation (8a) en coordonnées cartésiennes tridimensionnelles s'écrit:

$$\rho \cdot C \frac{\partial T}{\partial t} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] = S_r(x, y, z) \quad (10a)$$

En posant:

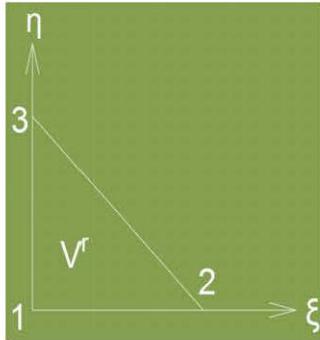
$$q_x = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \quad (11a)$$

L'équation (11a) s'écrit finalement:

$$-\left[ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] + S_r(x, y, z) = \rho \cdot C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (12a)$$

## ANNEXE 2: Transformation des intégrales dans l'élément de référence

Géométrie linéaire, triangulaire composée de trois nœuds dans un espace à deux dimensions (2D) dont la configuration référentielle est illustrée dans le schéma ci-dessous :



$$[M^{el}] = \frac{\rho A C p}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[K^{el}] = \frac{k}{4A^2} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \\ (y_3 - y_1)(y_2 - y_3) + (x_1 - x_3)(x_3 - x_2) & (y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\ (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) & (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) + (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) & (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \end{bmatrix}$$

I. Les coordonnées de chaque nœud s'écrit :

$$\text{Noeud1} = (x_1, y_1)$$

$$\text{Noeud2} = (x_2, y_2)$$

$$\text{Noeud3} = (x_3, y_3)$$

Pour ce type de géométrie, les fonctions d'interpolation s'expriment sous la forme :

$$N_1 = 1 - \xi - \eta$$

$$N_2 = \xi$$

$$N_3 = \eta$$

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} [1]$$

$$\langle N \rangle = \langle 1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta \rangle [2]$$

Le produit de [1] et [2] conduit à :

$$\{N\} \times \langle N \rangle = \begin{bmatrix} (1 - \xi - \eta)^2 & \xi(1 - \xi - \eta) & \eta(1 - \xi - \eta) \\ sym & \xi^2 & \xi\eta \\ sym. & sym & \eta^2 \end{bmatrix} [3]$$

La matrice Jacobienne est formulée dans ce cas sous la forme :

$$[J] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & -(y_2 - y_1) \\ -(x_3 - x_1) & x_2 - x_1 \end{bmatrix} [4]$$

Le déterminant de [4] qui donne :

$$\det[J] = 2A = (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) [5]$$

Or le passage de l'espace réel à l'espace de référence permet d'obtenir la relation :

$$dA = \det[J] d\xi d\eta [6]$$

La matrice élémentaire de capacité thermique est définie par :

$$[M^{el}] = \rho C_p \int_A \{N\} \langle N \rangle dA \quad [7]$$

En introduisant [8] dans [9], on aura :

$$[M^{el}] = 2A\rho C_p \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi} \{N\} \langle N \rangle d\eta d\xi \quad [10]$$

[Mel] peut s'écrire comme :

$$[M^{el}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \quad [11]$$

Et nous déterminerons ainsi les éléments composant [9]

$$[M_{11}] = 2A\rho C_p \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi} (1-\xi-\eta)^2 d\eta d\xi \quad [12]$$

$$[M_{11}] = 2A\rho C_p \int_0^1 \left[ -\frac{1}{3}(1-\xi-\eta)^3 \right]_0^{1-\xi} = 2A\rho C_p \int_0^1 \frac{1}{3}(1-\xi)^3 d\xi$$

$$[M_{11}] = \frac{2A\rho C_p}{3} \left[ -\frac{1}{4}(1-\xi)^4 \right]_0^1 = \frac{2A\rho C_p}{3} \times \frac{1}{4}$$

$$[M_{11}] = \frac{2}{12} \times A\rho C_p \quad [13]$$

$$[M_{12}] = 2A\rho C_p \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi} \xi(1-\xi-\eta) d\eta d\xi \quad [14]$$

$$[M_{12}] = 2A\rho Cp \int_0^1 \left[ -\frac{1}{2}(1-\xi-\eta)^2 \right]_0^{1-\xi} d\xi$$

$$[M_{12}] = A\rho Cp \int_0^1 \xi(1-\xi)^2 d\xi$$

$$[M_{12}] = A\rho Cp \int_0^1 (\xi - 2\xi^2 - \xi^3) d\xi = A\rho Cp \left[ \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3 - \frac{1}{4}\xi^4 \right]_0^1$$

$$[M_{12}] = \frac{1}{12} \times A\rho Cp [15]$$

$$[M_{13}] = 2A\rho Cp \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \eta(1-\xi-\eta) d\xi d\eta [16]$$

$$[M_{13}] = 2A\rho Cp \int_0^1 \left[ -\frac{1}{2}\eta(1-\xi-\eta)^2 \right]_0^{1-\eta} d\eta$$

$$[M_{13}] = A\rho Cp \int_0^1 \eta(1-\eta)^2 d\eta$$

$$[M_{13}] = A\rho Cp \int_0^1 (\eta - 2\eta^2 - \eta^3) d\eta = A\rho Cp \left[ \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{2}{3}\eta^3 - \frac{1}{4}\eta^4 \right]_0^1$$

$$[M_{13}] = \frac{1}{12} \times A\rho Cp [17]$$

$$[M_{22}] = 2A\rho Cp \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \xi^2 d\eta d\xi [18]$$

$$[M_{22}] = 2A\rho Cp \int_0^1 \xi^2 (1-\xi) d\xi = 2A\rho Cp \int_0^1 (\xi^2 - \xi^3) d\xi$$

$$[M_{22}] = \frac{2}{12} \times A\rho Cp [19]$$

$$[M_{23}] = 2A\rho Cp \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \xi \eta d\eta d\xi [20]$$

$$[M_{23}] = 2A\rho Cp \int_0^1 \frac{1}{2} \xi (1-\xi)^2 d\xi = A\rho Cp \int_0^1 (\xi - 2\xi^2 - \xi^3) d\xi$$

$$[M_{23}] = \frac{1}{12} \times A\rho Cp [21]$$

$$[M_{33}] = 2A\rho Cp \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \eta^2 d\xi d\eta [22]$$

$$[M_{33}] = 2A\rho Cp \int_0^1 \eta^2 (1-\eta) d\eta = 2A\rho Cp \int_0^1 (\eta^2 - \eta^3) d\eta$$

$$[M_{33}] = \frac{2}{12} \times A\rho Cp [23]$$

$$[M^{el}] = \frac{A\rho Cp}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} [24]$$

II. La matrice de conductivité thermique peut être définie comme :

$$[K^{el}] = \int_A k [B]^T [B] dA [25],$$

$k$  étant la conductivité thermique du matériau, et est constante

La matrice  $[B]$ (déformation-déplacement) étant une constante :

$$[K^{el}] = Ak \cdot [B]^T [B] [26]$$

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} [27]$$

$$[B]^T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} [28]$$

Le produit de ces deux matrices données conduit à l'expression de la matrice élémentaire de conductivité thermique suivante :

$$[K^{el}] = \frac{k}{4A^2} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} [29]$$

$$\text{Avec } \begin{cases} K_{11} = (y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 \\ K_{12} = (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \\ K_{13} = (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \\ K_{21} = (y_3 - y_1)(y_2 - y_3) + (x_1 - x_3)(x_3 - x_2) \\ K_{22} = (y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2 \\ K_{23} = (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\ K_{31} = (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \\ K_{32} = (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) + (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) \\ K_{33} = (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \end{cases}$$

**ANNEXE 3: Résolution analytique de l'équation de la chaleur 1D**

Appliquée au cas du solide semi-infini diathermane (Monteix et al, 2001)

Il s'agit de résoudre l'équation de la chaleur sous la forme suivante:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Aq_o^* e^{-Az}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$T(z, t = 0) = T_{mi}; \quad \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = 0; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} T(z, t) = T_{mi}$$

On adopte le changement de variable :

$$\theta(z, t) = T(z, t) - T(z, t = 0) + \frac{q_o^* e^{-Az}}{k \cdot A}$$

Ce qui donne l'équation suivante:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Que l'on peut résoudre en utilisant les transformées de Laplace sur la variable temporelle;

$$L[\theta(z,t)] = \bar{\theta}(z,p)$$

Dans l'espace de Laplace l'équation de la chaleur devient:

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} - \frac{p}{\alpha} \bar{\theta} = -\frac{q_o'' e^{-Az}}{\alpha k A}$$

La solution est de la forme :

$$\bar{\theta}(z,p) = \bar{\theta}_1(z,p) + \beta e^{-Az}$$

La substitution de cette solution dans l'équation précédente fait apparaître une équation en  $\bar{\theta}_1$ .

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_1}{dz^2} - \frac{p}{\alpha} \bar{\theta}_1 = -e^{-Az} \left[ \frac{q_o''}{\alpha k A} + \beta \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right) \right]$$

La condition pour laquelle cette équation admet une solution sans second membre permet d'identifier la variable  $\beta$  par

$$\beta = - \left[ \frac{q_o''}{\alpha k A \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right)} \right]$$

Et de disposer d'une équation sans second membre qui admet une solution triviale et permet finalement d'obtenir une solution pour  $\theta$ :

$$\bar{\theta}(z, p) = Ke^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}z} + \beta e^{-Az}$$

Les conditions aux limites par rapport à  $\theta$  :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{q_o''}{k}$$

sont exprimées dans l'espace de Laplace par :

$$\left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{q_o''}{kp} = -k\sqrt{\frac{p}{\alpha}} - \beta A$$

Cette égalité permet d'identifier l'expression de la constante d'intégration  $K$ , et de formuler la solution en  $\theta$  par :

$$\frac{q_o''}{k\alpha\left(A^2 - \frac{p}{\alpha}\right)q} e^{-qz} = -\frac{q_o'' e^{-Az}}{k\alpha} \left[ \frac{A}{(A+q)q} + \frac{B}{(A-q)q} \right]$$

La solution finale de l'équation exprimée dans l'espace  $(z, t)$  est obtenue par transformée inverse de ces trois termes qui sont traités séparément :

L'identification de la transformée inverse du deuxième terme n'est pas apparente sous cette forme et il est nécessaire de la décomposer en fraction rationnelle selon :

Par identification on obtient :

$$A = B = \frac{1}{2A}$$

Finalement pour identifier la transformée inverse, on écrit ce terme de la façon

Suivante:

$$\frac{q}{k\alpha \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right)}$$

En  $a = \pm A\sqrt{\alpha}$   $k' = \frac{z}{\sqrt{\alpha}}$  identifiant et cette expression

Admet une transformée (DeVriendt, 1984) donnée par:

$$L^{-1} \left[ \frac{q_0^*}{k\alpha \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right) q} e^{-qz} \right] = e^{ak't} e^{\sigma^2 t} \operatorname{erfc} \left( a\sqrt{t} + \frac{k'}{2\sqrt{t}} \right)$$

Les premiers et derniers termes expriment la solution et sont plus simples à inverser puisque directement identifiables par une transformée classique par :

$$L^{-1} \left[ \frac{q_0^*}{k\alpha \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right) q} e^{-qz} \right] = e^{ak'} e^{a^2 t} \operatorname{erfc} \left( a\sqrt{t} + \frac{k'}{2\sqrt{t}} \right)$$

$$L^{-1} \left[ \frac{-q_0^* e^{-Az}}{k\alpha A \left( A^2 - \frac{p}{\alpha} \right)} \right] = \frac{q_0^* e^{-aA^2 t} e^{-Az}}{kA}$$

$$L^{-1} \left[ \frac{-q_0^* e^{-Az}}{k \frac{pq}{\alpha}} \right] = \left( \frac{q_0^*}{k} \right) 2\sqrt{\alpha t} \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right)$$

En utilisant les propriétés des fonctions erf tel que :

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) \quad \text{et} \quad -\operatorname{erf}(z) = 1 - \operatorname{erf}(-z)$$

On obtient finalement l'expression de  $\theta$ , en fonction de  $z$  et de  $t$  par :

$$\begin{aligned} \theta(z,t) = T(z,t) - T_{mi} + \frac{q_o'' e^{-Az}}{kA} &= Aq_o'' \sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\ &+ \frac{q_o''}{2k} e^{A^2 \alpha t + Az} \operatorname{erfc}\left(A\sqrt{\alpha t} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\ &+ \frac{q_o''}{2k} e^{A^2 \alpha t - Az} \operatorname{erfc}\left(A\sqrt{\alpha t} - \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(z,t) = T_{mi} - \frac{q_o''}{kA} e^{-Az} + Aq_o'' \sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\ &+ \frac{q_o''}{2k} e^{A^2 \alpha t + Az} \operatorname{erfc}\left(A\sqrt{\alpha t} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\ &+ \frac{q_o''}{2k} e^{A^2 \alpha t - Az} \operatorname{erfc}\left(A\sqrt{\alpha t} - \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \end{aligned}$$

