

## Table des matières

Introduction général.....	4
Première partie .....	6
<b>Discrétisation du système du Navier Stokes instationnaires .....</b>	<b>6</b>
Introduction-Modèle mathématique .....	7
1. Discrétisation en temps.....	8
2. Discrétisation en espace.....	8
2.1 La méthode des volumes finis .....	9
2.2 Maillage .....	9
2.2.1 Composantes du maillage .....	10
2.2.2 Types du maillage .....	10
3. Le schéma pour la convection.....	11
3.1 Définition à l'intérieur du domaine : .....	12
3.1.1 Conditions aux limites .....	12
3.2 Le schéma pour la diffusion.....	12
3.2.1 Définition à l'intérieur du domaine .....	13
3.2.2 Conditions aux limites.....	14
3.2.3 Résultats théoriques.....	14
4 Méthode d'interpolation locale sur les maillages triangulaires.....	16
4.1 Le problème.....	16
4.2 La méthode.....	16
4.3 Interpolation au milieu des arêtes internes.....	16
4.4 Interpolation au milieu des arêtes de bord.....	16
4.4.1 Cas d'une arête de bord sans conditions aux limites .....	17
4.4.2 Interpolation en tout point du domaine de calcul .....	17
5. Schéma global de la résolution NAVIER-STOKES.....	18
5.1 Définition des opérateurs.....	18
5.1.1 L'opérateur de convection-diffusion : $(CDs)$ .....	18
5.1.2 L'opérateur d'extension : $E$ .....	19
5.1.3 L'opérateur de projection : $P$ .....	20
5.2 Résolution du système complet .....	21

5.2.1 Terme source pour la convection diffusion de la vitesse .....	21
5.2.2 L'algorithme complet .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Conclusion .....	22
Deuxième partie .....	23
Simulation numérique des écoulements stationnaires incompressible .....	23
Présentation du problème .....	24
6. Étude d'un fluide stationnaire.....	25
6.1 Le modèle mathématique : .....	25
6.2 Maillage structuré : .....	25
6.4 Équations de Navier-Stokes en 2D : .....	26
6.4.1 Discrétisation des équations .....	27
6.4.2 Théorème .....	28
6.4.3 Estimation de Terme de diffusion .....	29
6.4.4 Terme de pression : .....	31
6.5 La méthode itérative : .....	32
6.6 Couplage pression-vitesse : .....	36
6.6.1 Résultats numériques.....	37
Conclusion générale .....	40

## Remerciement

Au terme de ce travail, j'exprime mes plus vifs remerciements à mon encadrant Mr. Prof AKHMOUCH Mohammed, professeur à la Faculté des sciences et Techniques de Fès d'avoir accepté de diriger mon projet et qui m'a fourni un sujet présentant un intérêt à la fois théorique et numérique. Il s'est montré toujours disponible et m'a constamment aidé à y voir plus clair. Il a fait preuve d'une grande patience, gentillesse et d'un esprit responsable. J'apprécie ses conseils et jugements indispensables à la progression de ce travail.

Je remercie également les membres de jury devant lesquels j'ai l'honneur de présenter ce modeste travail, ainsi que nos enseignants de master (MACS) mathématiques et application au calcul scientifique.

Mes remerciements vont aussi à Mr. Mohammed Benzakour Amine pour son aide et ses encouragements.

Je remercie infiniment mes parents, mes frères et sœurs, les membres de ma famille pour leurs sacrifices et qui m'ont beaucoup soutenu moralement et matériellement durant la période de mes études.

En fin que tous ceux qui m'ont guidé de près ou de loin pour mener à bien mon travail, trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

## Introduction général

Les problèmes physiques rencontrés dans notre quotidien (le transport de polluants, les problèmes de convection, les écoulements dans les conduites, la modélisation de l'écoulement des polymères fondus, la modélisation de la pollution atmosphérique, etc.) sont décrits par des équations aux dérivées partielles fortement couplées et non linéaires.

En général, ces équations n'admettent pas de solution analytique sauf dans des cas très simplifiés. C'est pourquoi un recours aux méthodes de résolution numériques s'avère nécessaire.

Il existe plusieurs méthodes numériques :

- méthode des différences finies
- méthode des volumes finis
- méthode des éléments finis
- méthode spectrales, ...

Chaque méthode de résolution numérique d'un problème continue comporte une phase de maillage et une phase de discrétisation.

La phase de maillage consiste à diviser le domaine d'étude de petits volumes appelés volumes de contrôle.

La phase de discrétisation transforme le problème continu en un problème discret. Les équations ainsi que les conditions aux limites sont approchées par des équations et conditions discrètes.

Notre objectif est développer les principes de la méthode des volumes finis.

Le projet a donc naturellement été organisé en deux parties :

La première partie sera consacré à l'exposer de la méthode des volumes finis sur un maillage non structuré pour un problème de Navier Stokes instationnaire incompressible.

L'objet de la deuxième partie sera l'utilisation de la méthode des volumes finis sur un maillage structuré pour un problème de Navier Stokes stationnaire incompressible, puis on présente certains résultats numériques dans le cas de l'écoulement stationnaire sur un maillage structuré composé des carrés uniformes.

## Rappels historiques

La première résolution numérique connue des équations pour un fluide visqueux date de 1933 par une méthode de relaxation. Peu avant en 1910, Richardson réalisa une expérience de résolution numérique du Laplacien par la même méthode. La méthode de relaxation consiste à construire un processus itératif. Dans ce processus, les points de maillage sont pris à tour de rôle. Et pour chaque point, on calcule pour l'inconnue une correction proportionnelle au résidu de son équation. L'intérêt d'une telle méthode réside dans la simplicité des opérations unitaires. Cette simplicité diminué le risque d'erreur de calculs lorsque ceux-ci sont effectués manuellement. Le problème de Laplacien a reçu beaucoup d'attention dans l'histoire de l'analyse mathématique. Il constitue jusqu' à présent un problème modèle pour le test d'algorithme de résolution de problème linéaire. À l'époque où les méthodes de relaxation sont apparues, les seuls calculateurs existant étaient des machines électromécaniques. La majeure partie du travail se faisait par des groupes de personnes payées au Laplacien résolu. En 1946, Southwell développe une méthode de relaxation de résidus plus efficace. Elle consiste à traiter à chaque tour, le point pour lequel le résidu est le plus important en valeur absolue. Les premiers calculs à grande échelle sont effectués par cet auteur en 1955 pour le calcul de l'écoulement autour d'un cylindre pour un nombre de Reynolds de 1000. Ces travaux purent s'effectuer grâce au financement accordé par une compagnie privée à l'Impérial Collège de Londres. Entre-temps la deuxième guerre mondiale eu lieu. Pendant ce conflit, le calcul numérique a connu deux avancées importantes, dues en partie au même homme : JOHN Von Neumann. Ce dernier fut à l'origine de l'architecture des ordinateurs dont beaucoup de constructeurs informatiques continuent de s'inspirer aujourd'hui. Il est surtout à l'origine des premiers travaux sur l'étude de la stabilité des schémas numériques au laboratoire de Los Alamos en 1944. Il développa notamment une méthode systématique d'analyse des systèmes linéaires. Cette méthode permet de déduire des critères de stabilité pour les schémas numériques.

En 1966 Thoman et Szwcyk réussirent à calculer un écoulement avec un nombre de Reynolds de 1.000.000 en utilisant un schéma aux différences décentrées. Jusque-là, les différentes expériences de calcul avaient buté sur une limite supérieure pour le nombre de Reynolds. Limite au-delà de laquelle des instabilités apparaissent dans la solution. C'était la naissance du schéma upwind du premier ordre. Son adoption vient notamment du fait que les résultats obtenus sont physiquement réalistes. Les premières méthodes de résolution passaient par la détermination d'une équation de poisson pour la pression. Le but ici était d'éviter une résolution directe de l'équation de continuité. L'apparition de l'opérateur de Laplace permettait ensuite d'utiliser des méthodes générales.

Première partie

**Discrétisation du système du Navier Stokes  
instationnaires**

## Introduction-Modèle mathématique

Même s'il existe déjà plusieurs schémas numériques stables, convergents et globalement conservatifs pour résoudre les équations de Stokes, la plupart des problèmes industriels sont régis par les équations de NAVIER- STOKES, plus générales. De plus, elles sont souvent couplées avec une équation Supplémentaire, afin de modéliser la convection-diffusion d'une quantité scalaire comme la température, la concentration d'un polluant ou l'énergie cinétique turbulente. Parmi les méthodes dédiées à la résolution de ces problèmes, seules quelques unes satisfont les principes physiques suivants :

- la conservation locale de la masse et des quantités scalaire conservatives.
- la préservation numérique du principe du maximum pour les quantités Scalaires.

Quelques schémas numériques utilisant la méthode des volumes finis sur maillage structurés peuvent répondre à ces spécifications. Cependant, peu sont disponibles sur les maillages non structurés (voir [11] ;[7] ;[6] ) pour les systèmes hyperboliques, [8];[9];[10] ;[3] ;[4] ;[10] pour les systèmes elliptique, et [6] ;[7] ;[11] pour les systèmes parabolique.

Le schéma présenté ci-après satisfait les deux principes précédents sur les maillages non structurés. Il est basé sur une méthode à pas de temps fractionnaire proposée initialement dans [6], mais intègre un schéma pour la diffusion intéressant proposé récemment dans [7].

La méthode ne requiert aucun assemblage de matrice, et le nombre d'opérations arithmétiques à effectuer est faible.

On effectue tout d'abord un petit rappel du modèle mathématique. L'écoulement d'un fluide incompressible dans un domaine  $[0, T]$  est régi par les équations suivantes, dit de NAVIER –STOKES :

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (I.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p - \nabla \cdot (\mu \nabla u) = f \quad (I.2)$$

Où :

- $p$  représente  $P/\rho_0$  avec  $\rho_0$  est la densité et  $P$  la pression du fluide incompressible.
- $\mu$  est la viscosité cinématique du fluide supposée constante.

On adopte le modèle suivant pour la convection-diffusion d'une quantité scalaire passive dans l'écoulement :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (Cu) - \nabla \cdot (\alpha \nabla C) = s \quad (I.3)$$

Avec  $\alpha$  représente la diffusivité constante de la quantité scalaire  $C$ . Notons que ces équations sont accompagnées de conditions aux limites convenables afin que la solution du problème soit unique.

Le champ d'applications industrielles de ce modèle s'étend à la prédiction du transport de polluant et du transfert de chaleur, en ajustant le terme source au problème correspondant.

## 1. Discrétisation en temps

La discrétisation en temps utilisée ici est basée sur une variation du schéma de projection proposé initialement par [CHORIN 1968] (voir [4]) :

- prédiction :

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\delta t} + \nabla \cdot (u^{n+\frac{1}{2}} \otimes u^n) - \nabla \cdot (\mu \nabla u^{n+\frac{1}{2}}) + \nabla p^n = f^n \quad (I.4)$$

- projection :

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\delta t} + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 \quad (I.5)$$

$$\nabla \cdot u^{n+1} = 0 \quad (I.6)$$

- Convection-Diffusion du scalaire passif  $C$  :

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\delta t} + \nabla(u^{n+1} C^{n+1}) - \nabla \cdot (\alpha \nabla C^{n+1}) = s^n \quad (I.7)$$

Notons que les équations (I.5) et (I.6) sont utilisées par la suite sous la forme suivante :

$$\nabla \cdot u^{n+\frac{1}{2}} - \delta t \Delta(p^{n+1} - p^n) = 0 \quad (I.8)$$

$$u^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} - \delta t \nabla(p^{n+1} - p^n) \quad (I.9)$$

## 2. Discrétisation en espace

On définit les espaces suivants :

$$V_h = \{v \in [L^2(\Omega)]^2 \mid v|_{T_i} \in RT_0(T_i), \forall i = 1, 2, \dots, N\}$$

$$V_h^c = \{v \in V_h \mid v|_{T_i} \cdot n_{ij} = -v|_{T_j} \cdot n_{ji}, \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, N\}\}$$

$$V_h^0 = \{v \in V_h^c \mid \nabla \cdot v|_{T_i} = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}\}$$

$$Q_h = \{q \in L^2(\Omega) \mid q \in P_0(T_0) \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}\}$$



Avec :

-  $RT_0(T_i)$  l'espace associé à l'élément fini de RAVIAR-THOMAS de degré zéros qui contient les polynômes suivants (voir [11] et [10]) :

$$\begin{cases} a + cx \\ b + cy \end{cases} \text{ Où } a, b, c \text{ éléments de } \mathbb{R}$$

-  $n_{ji}$  le vecteur normal unitaire du côté commun aux triangles  $T_i$  et  $T_j$  et orienté vers l'extérieur de  $T_i$ .

Dans cette partie, on suppose que l'approximation de la vitesse, notée  $u_h$ . Appartient à  $V_h^0$

Les approximations de toutes les variables scalaires sont supposées appartenir à  $Q_h$ .

Avec ces notations on a :

$$V_h^0 \subset (Q_h)^2 \subset V_h^c \subset V_h$$

## 2.1 La méthode des volumes finis

Les méthodes de volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservation hyperbolique, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques.

Ces équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. En utilisant le théorème de STOKES, les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface et ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de flux numérique pour élaborer une approximation des flux aux interfaces. Puisque le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent, ces méthodes sont conservatives, donc parfaitement adaptées à la résolution de lois de conservation.

Un autre avantage de la méthode des volumes finis est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non structurés car, en matière de discrétisation des lois de conservation, sa formulation ne tient aucun compte de la complexité du maillage.

## 2.2 Maillage

C'est une discrétisation spatiale d'un milieu continu, ou aussi une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés finis et bien définis. L'objet d'un maillage est de procéder à une simplification d'un système par un modèle représentant ce système et, éventuellement, son environnement (le milieu), dans l'optique de simulations de calculs ou de représentations graphiques.

La génération du maillage (2D ou 3D) est une phase très importante dans une analyse CFD,

Vu son influence sur la solution calculée. Un maillage de très bonne qualité est essentiel pour l'obtention d'un résultat de calcul précis, robuste et signifiant. La qualité du maillage a un sérieux impact sur la convergence, la précision de la solution et surtout sur le temps de calcul. Une qualité du maillage repose sur la minimisation des éléments présentant des « distorsions ». Un bon maillage doit également être suffisamment lisse.

### 2.2.1 Composantes du maillage

Le domaine de calcul est défini par un maillage qui représente le fluide et les faces solides qui interviennent.

- Volume de contrôle divisant la géométrie.
- Frontière d'une cellule, où sont définies les conditions aux limites.
- Frontière d'une face.
- Point de maillage.

### 2.2.2 Types du maillage

On définit les maillages structurés et non structurés.

- Maillage structuré est un maillage qui peut être généré en reproduisant plusieurs fois une maille élémentaire. dans ce type de maillage, tout nœud peut être repéré par un doublet ou un triplet  $(i, j, k)$ . le maillage structuré tire profit de la numérotation et la topologie est implicite. En 2D, les éléments sont des quadrilatères, en 3D ce sont des hexaèdres. Il présente les avantages suivants :
  - Économique en nombre d'éléments, présente un nombre inférieur de mailles par Rapport à un maillage non structuré.
  - Lorsque l'écoulement moyen est aligné avec le maillage, un maillage structuré réduit les risques d'erreurs numériques.

Ses inconvénients :

- Difficile à générer le cas d'une géométrie complexe.
- Difficile d'obtenir une bonne qualité de maillage pour certaine géométrie complexe.

Un exemple de maillage triangulaire structuré

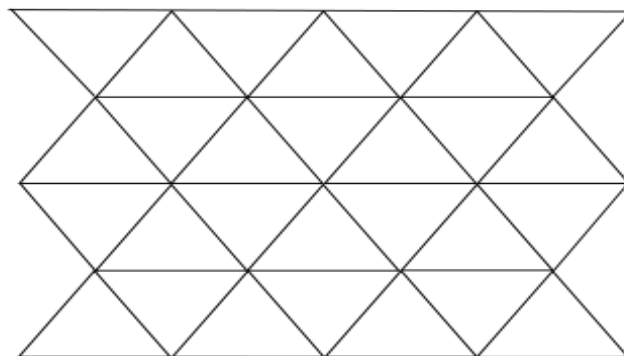


Figure (1.1) : maillage structuré.

- Maillage non structuré

Les éléments de ce type de maillage sont générés d'une arbitrairement géométrie sans aucune contrainte quant - à leur disposition.

Ses avantages :

- Peut-être généré sur une géométrie complexe tout en gardant une bonne qualité des éléments.
- Les algorithmes de génération de ce type de maillage (tri / tétra) sont très automatisés.

Ses inconvénients :

- Très gourmand en nombre de maille comparativement au maillage structuré.
- Impose une structure de données gourmande en capacités de stockage.
- Engendre des erreurs numériques (fausse diffusion) qui peuvent être plus importantes si on le compare avec le maillage structuré.

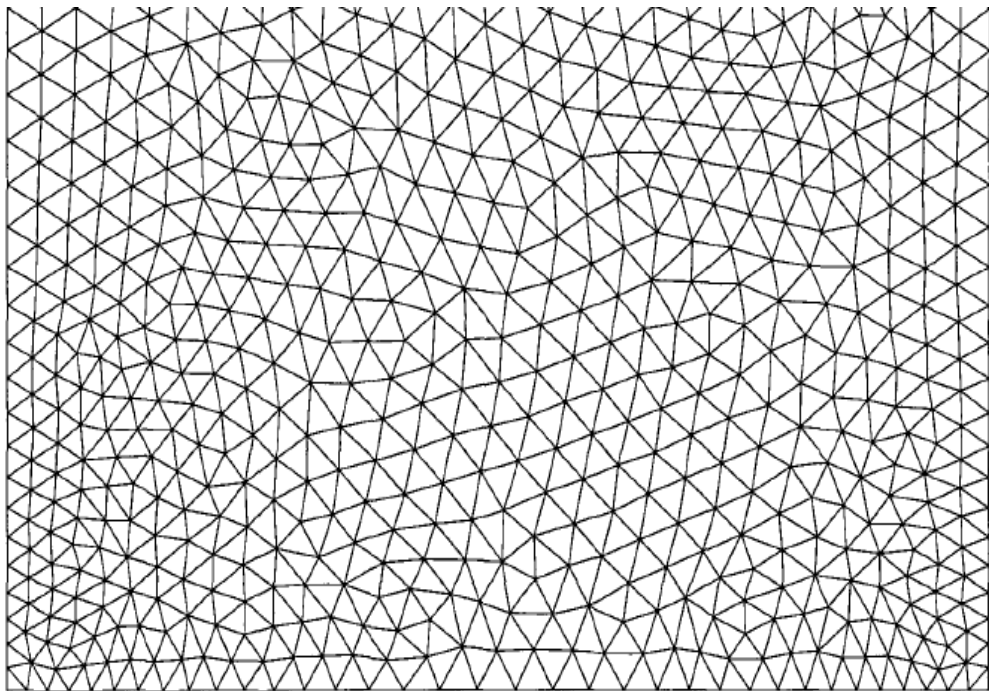


Figure (1.2) : maillage non structuré triangulaire

### 3. Le schéma pour la convection

Le schéma pour la convection utilisé dans toute la suite est un schéma décentré amont. Le terme à approximer est le suivant :

$$\int u \cdot \nabla \phi d \Omega = \int \nabla \cdot (u \phi) d \Omega \quad (I.10)$$

Avec  $\varphi$  la variable convectée et  $u$  la vitesse, qui satisfait l'équation de continuité  $\nabla \cdot u = 0$ .

Une discrétisation de l'équation (I.10) peut être obtenue par intégration sur chaque triangle  $T$ , suivie de l'application du théorème de STOKES :

$$\int_T \nabla \cdot (u\varphi) d\Omega = \int_{\partial T} \varphi u \cdot n dT$$

Avec  $n$  le vecteur normal unitaire sortant et  $\partial T$  le bord du triangle.

### 3.1 Définition à l'intérieur du domaine :

En notant  $\varphi_h(T_i)$  et  $\varphi_h(T_j)$  les approximations de la variable  $\varphi$  dans les triangles adjacents  $T_i$  et  $T_j$  le terme convectif au travers de leurs côté commun  $a_{ij}$  s'écrit :

$$\int_{a_{ij}} \varphi u \cdot n d\xi \approx l_{a_{ij}} (u_h \cdot n)_{a_{ij}} [\alpha_{ij} \varphi(T_i) + (1 - \alpha_{ij}) \varphi(T_j)]$$

Où  $l_{a_{ij}}$  est la longueur du côté  $a_{ij}$ ,  $n$  le vecteur normal unitaire dirigé de  $T_i$  vers  $T_j$

$$\text{et : } \alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (u_h \cdot n)_{a_{ij}} > 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

#### 3.1.1 Conditions aux limites



Pour un côté situé sur le bord du domaine  $a_b$ .

❖ Si le fluide entre (i.e.  $(u_h \cdot n)_{a_{ij}} < 0$ ) :

$$\int_{a_b} \varphi u \cdot n d\xi \approx l_{a_b} (u_h \cdot n)_{a_b} \varphi_h^b$$

Où  $(u_h \cdot n)_{a_b}$  et  $\varphi_h^b$  représentent les valeurs prescrites de  $\varphi$  et  $u \cdot n$  Sur le bord d'entrée

❖ Si le fluide sort (i.e.  $(u_h \cdot n)_{a_b} > 0$ ) :

$$\int_{a_b} \varphi u \cdot n d\xi \approx l_{a_b} (u_h \cdot n)_{a_b} \varphi_h(T)$$

Tel que  $T$  est le triangle contenant le côté  $a_b$ .

### 3.2 Le schéma pour la diffusion

Ce schéma a été proposé et analysé en profondeur dans [7]. Ce qui suit un bref résumé de ses propriétés qui nous intéressent directement.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ \text{conditions aux limites} \end{cases} \quad (I.11)$$

Où l'ensemble des conditions aux limites est supposé être tel que le problème est bien posé.

Soit  $(T_i)_{i=1,2,\dots,N}$  une triangulation du domaine  $\Omega$ . Pour chaque triangle  $T_i$ , Soit  $S_i$  sa surface,  $E_i$  l'ensemble de ses arêtes, et  $u_i$  son inconnue discrète associée.

L'intégration de (I.11) sur le triangle  $T_i$  suivie de l'application du théorème de STOKES donne :

$$-\sum_a F_a(u_h) = S_i f_i \quad (I.12)$$

Où  $S_i f_i = \int_{T_i} f(x) dx$  et  $F_a(u_h)$  est une approximation de  $\int_a \nabla u \cdot n_a ds$  avec  $n_a$  est le vecteur normal unitaire sortant du côté 'a' de triangle T.

### 3.2.1 Définition à l'intérieur du domaine

Pour chaque triangle  $T_i$ , soit  $x_i$  L'intersection des bissecteurs orthogonaux (IDBO) des côtés voir figures (1, 2 et 3). Ce point est situé en dehors de  $T_i$  chaque fois que le triangle a un angle strictement plus grande que  $\frac{\pi}{2}$ . Il est sur le bord si  $T_i$  est un triangle rectangle.

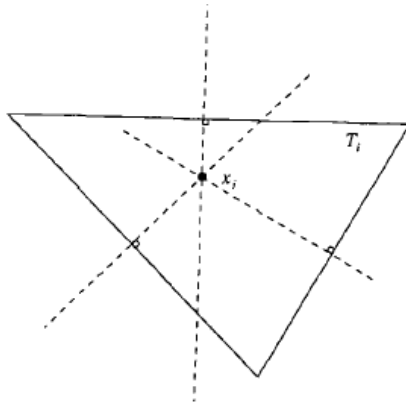


Figure 1

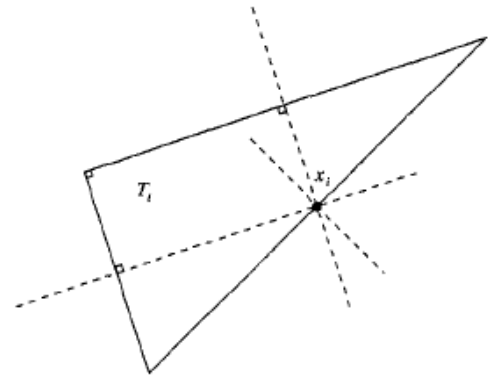


Figure 2

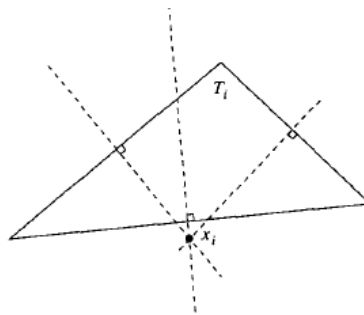


Figure 3

Nous supposons ici que le côté  $a_{ij}$  est commun aux deux triangles  $T_i$  et  $T_j$  et que  $x_i \neq x_j$ . Le cas particulier de l'égalité sera discuté dans la section 3.2.3

L'expression du flux numérique associé  $F_a(u_h)$  est :

$$F_a(u_h) = l_{ij} \frac{u_i - u_j}{(x_i - x_j) \cdot n_{ij}} \quad (I.13)$$

Avec  $n_{ij}$  est le vecteur normal unitaire du  $a_{ij}$  du triangle  $T_i$ .

Le coefficient suivant, appelé transmittivité est introduit dans [7] pour chaque arête interne  $a_{ij}$  sous la condition que  $x_i \neq x_j$  :

$$\tau_{a_{ij}} = \frac{l_{ij}}{(x_i - x_j) \cdot n_{ij}}$$

Avec cette définition, (I.13) être réécrite de la façon suivant :

$$F_a(u_h) = \tau_{a_{ij}}(u_j - u_i)$$

### 3.2.2 Conditions aux limites

Si la condition aux limites appliquée sur l'arête de bord  $a_b$  est une condition de Neumann. Le flux numérique  $F_a$  est égal au flux exact.

Lorsqu'une condition aux limites de Dirichlet est appliquée, la valeur  $u_{a_b}$  est donnée au milieu de l'arête de bord  $a_b$ . Soit  $T_i$  le triangle du maillage qui contient  $a_b$ , et  $x_i$  son (IDBO). En supposant que  $x_i \neq x_{a_b}$ . Le flux numérique vaut alors :

$$F_{a_b}(u_h) = \tau_{a_b}(u_{a_b} - u_i) \quad (I.14)$$

### 3.2.3 Résultats théoriques

Les propriétés démontrées dans [7] dépendent de la qualité de la triangulation  $(T_i)_{i=1,2,3..N}$ . Trois différentes catégories de maillage sont introduites pour la suite (voir figure I.3).

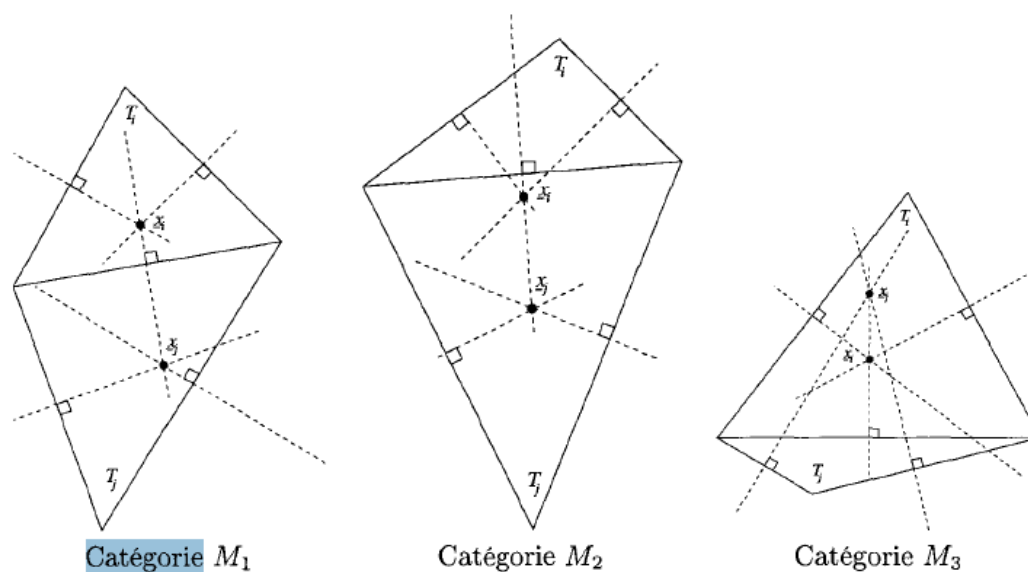


Figure I.3 triangles de maillage non structuré

- La catégorie « M1 » contient les maillages admissibles au sens de [7], qui sont des triangulations telles que :

$$\checkmark x_i \in T_i \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (I.15)$$

$$\checkmark x_i \neq x_j, \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, N\}^2 / T_i \cap T_j \neq \emptyset \quad (I.16)$$

$$\checkmark x_i \neq x_{a_b}, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} / T_i \cap \partial\Omega = a_b \quad (I.17)$$

Les conditions (I.16) et (I.17) sont nécessaires pour l'existence de transmittivité  $\tau_a$  pour chaque arête 'a' du maillage. (I.16) assure que deux triangles adjacents ont des (IDBO) distincts (Ils pourraient être tous deux sur l'arête commune des triangles) implique  $\tau_a$  est positive.

- La catégorie « M2 » est le sous-ensemble de l'ensemble des maillages non admissibles qui remplissent les conditions (I.16), (I.17) et la suivante :

$$\tau_a > 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall a \in E_i \quad (I.18)$$

La seule différence avec la catégorie de maillage précédente est que l'IDBO d'un triangle peut être situé en dehors de celui-ci.

- Les maillages qui ne sont inclus dans aucune des deux catégories précédente forment la catégorie « M3 ». un cas particulier de cette catégorie est constitué par les maillages dont la transmittivité n'est pas définie pour toutes les arêtes. le cas général correspond à la permutation de deux IDBO associés à deux triangles adjacents.

Les propriétés suivantes ont été démontrées dans [7] :

- Convergence : si le maillage appartient à la catégorie M1, le schéma précédent converge vers la solution unique du problème (I.11)
- Estimation d'erreur suivante :

$$\|e_\tau\| \leq Ch \quad (I.19)$$

Tel que :

- $e_\tau(x) = u(x_i) - u_i$
- $C$  est un nombre réel positif
- $h$  est le pas du maillage (par exemple la longueur de la plus grande arête)
- Principe du maximum : si le maillage appartient à l'une des catégories M1 ou M2, le schéma respecte le principe du maximum discret (cf. [7] pour les détails).

Pour une équation de convection-diffusion telle que (I.3), la vitesse théorique de convergence obtenue avec les schémas des sections (3.1) et (3.2) est  $\frac{1}{2}$ , à cause de la vitesse de convergence du schéma de convection (voir section 3.1 et la référence ([10], [7] et [11])).

## 4 Méthode d'interpolation locale sur les maillages triangulaires

### 4.1 Le problème

Le schéma de convection décentré amont présent ci-dessus (voir section 2.1) Nécessite de fournir une valeur de la vitesse convectée à l'intérieure de la cellule, afin de calculer un flux correct au travers des arêtes. Dans le cas contraire, le décentrage amont devient un décentrage aval sur chaque arête dont la transmittivité est négative, ce qui pourrait résulter dans un manque de stabilité du schéma convectif localement.

De plus, afin de calculer de bonnes approximations des intégrales sur les cellules, comme  $\int_{T_i} \frac{\partial w_h}{\partial t} d\Omega$ , les valeurs de l'inconnue discrètes  $w_h$  à l'intérieur des triangles doivent être connues.

### 4.2 La méthode

La méthode décrite ci-dessous est basée sur l'observation suivante. Soit  $u_i$  l'approximation obtenue pour le triangle  $T_i$  avec le schéma pour la diffusion présenté plus haut. Soit  $x_i$  et  $x_i^G$  l'IDBO. et le centre de gravité de  $T_i$  respectivement. Comme nous le verrons dans la section 4.4.2,  $u_i$  est une approximation du second ordre de  $u(x_i)$  et par conséquent une approximation de premier ordre de  $u(x_i^G)$ . Ceci conduit à utiliser  $u_i$  comme une bonne représentation de la solution exacte à l'IDBO. Pour calculer cette valeur, on calcule d'abord une approximation de  $u$  au milieu de chaque arête du maillage, de la façon exposée ci-après.

### 4.3 Interpolation au milieu des arêtes internes

Soit une arête interne donnée  $a_{ij}$ , commun aux deux triangles  $T_i$  et  $T_j$  dont les IDBO. Sont  $x_i$  et  $x_j$  respectivement voir figure (1.3). En notant  $x_{ij}$  le milieu de l'arête  $a_{ij}$ , les trois points  $x_i, x_j$  et  $x_{ij}$  sont alignés. C'est pourquoi  $x_{ij}$  peut être considéré comme le barycentre du système pondéré :

$$\{(x_i, t_{ij}); (x_j, 1 - t_{ij})\}, \text{ avec } t_{ij} = \frac{(x_j - x_{ij}) \cdot (x_j - x_i)}{(x_j - x_i)^2}$$

Supposons que le calcul conduit à des approximations du premier ou second ordre de la solution exacte à l'IDBO. De  $T_i$  et  $T_j$ , notées  $u_i$  et  $u_j$  respectivement.

Alors ce niveau de précision est préservé pour le milieu de l'arête  $a_{ij}$ , si l'on fait le choix suivant pour l'approximation en ce point :

$$u_{ij} = t_{ij}u_i + (1 - t_{ij})u_j \quad (I.20)$$

### 4.4 Interpolation au milieu des arêtes de bord

Soit  $a_b$  une arête de bord incluse dans le triangle  $T_i$ . Si une condition aux limites de Dirichlet est applique sur  $a_b$ , aucune approximation n'est nécessaire pour la valeur de la



solution exacte au milieu de  $a_b$ , puisque cette valeur est fournie directement. Si par contre une condition aux limites de Neumann est appliquée, c'est la valeur exacte du flux au travers de  $a_b$ ,  $F_{a_b}$ , qui est fournie, et le choix naturel pour l'approximation au milieu de  $a_b$  est la valeur  $u_{a_b}$  telle que :

$$F_{a_b} = \tau_{a_b}(u_i - u_{a_b}) \text{ i.e. : } u_{a_b} = u_i - \frac{F_{a_b}}{\tau_{a_b}}$$

Si  $u_i$  est une approximation du second ordre de la solution exacte à l'IDBO. De  $T_i$ , alors  $u_{a_b}$  est aussi une approximation du second ordre de la solution exacte au milieu de la face  $a_b$ .

#### 4.4.1 Cas d'une arête de bord sans conditions aux limites

Soit  $a_b$  une arête de bord sur laquelle aucune condition aux limites n'est appliquée,  $x_{a_b}$  son milieu,  $T_i$  le triangle qui contient. Même dans ce cas, on peut généralement calculer une bonne approximation  $u_{a_b}$  de la solution au point  $x_{a_b}$ .

Cependant, si  $T_i$  n'a qu'un seul triangle adjacent (i.e. il possède deux côtés sur le bord du domaine), l'approximation choisie est simplement :  $u_{a_b} = u_i$ , ce qui n'est qu'une approximation du premier ordre.

Dans le cas contraire, les valeurs  $u_i$  et  $u_k$  sur les deux triangles  $T_i$  et  $T_k$  adjacents avec  $T_i$ , peuvent être utilisées pour calculer une approximation plus précise :

$$u_{a_b} = u_i + \frac{\{\tau_{a_b i j}(u_i - u_j) + \tau_{a_b i k}(u_i - u_k)\}}{\tau_{a_b}}$$

Notons que si  $u_i, u_j$  et  $u_k$  sont des approximations du second ordre de la solution exacte aux (IDBO) de  $T_i, T_j$  et  $T_k$  respectivement, alors  $u_{a_b}$  est une approximation du second ordre de la solution exacte au milieu de  $a_b$ .

#### 4.4.2 Interpolation en tout point du domaine de calcul

Soit M un point du triangle  $T_i$  du maillage. Soient  $x_{a_1}, x_{a_2}, x_{a_3}$  les milieux des arêtes  $a_1, a_2, a_3$  de  $T_i$ , et soient  $u_{a_1}, u_{a_2}, u_{a_3}$  des approximations du second ordre de la solution exacte en ces points.

Notons  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels tels que M soit le barycentre du système pondéré :

$$\{(x_{a_1}, \alpha); (x_{a_2}, \beta); (x_{a_3}, 1 - \alpha - \beta)\}$$

Une approximation du second ordre de la solution au point M est la suivante :

$$u_M = \alpha u_{a_1} + \beta u_{a_2} + (1 - \alpha - \beta) u_{a_3}$$

Un cas particulier important pour M est celui du centre de gravité  $G_i$  du triangle  $T_i$  i.e.  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$  :

$$u_i^G = \frac{u_{a_1} + u_{a_2} + u_{a_3}}{3} \quad (I.21)$$

La combinaison des équations (I.20) et (I.21) nous donne un opérateur G d'une précision du second ordre localement. À partir d'un champ défini à l'IDBO, l'application de cet opérateur conduit à un champ défini aux centres de gravité des triangles du maillage. La valeur de ce dernier pour une variable discrète  $w_h$ , sur une triangulation  $T_i$   $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , est notée dans toute la suite  $G_i(w_h)$ .

## 5. Schéma global de la résolution NAVIER-STOKES

Quelques opérateurs sont définis ci-dessous, qui seront utilisés dans la présentation du schéma complet de résolution des équations de NAVIER-STOKES.

### 5.1 Définition des opérateurs

#### 5.1.1 L'opérateur de convection-diffusion : (CD<sub>s</sub>)

Dans cette section, on discrétise l'équation suivante sur le domaine  $\Omega$ :

$$\frac{w^* - w^n}{\delta t} + \nabla \cdot (u^n w^*) - \nabla \cdot (\mu \nabla w^*) = s^n \quad (I.22)$$

Avec  $s^n$  est un terme source.

- ❖ La variable  $w$  peut être soit  $u_x, u_y$  (les deux composantes de la vitesse  $u$ ) ou  $C$  (un scalaire passif)
- ❖  $u^n$  est telle que  $\nabla \cdot u^n = 0$

La forme discrète est obtenue par intégration sur chaque triangle  $T_i$ , et en prenant  $w$  dans  $Q_h$  et  $V_h^0$ :

$$\int_{T_i} \left( \frac{w_h^* - w_h^n}{\delta t} + \nabla \cdot (u_h^n w^*) - \nabla \cdot (\mu \nabla w_h^*) \right) d\Omega = \int_{T_i} s_h^n d\Omega$$

Où  $u_h^n$  est un champ de vitesse à divergence nulle dans le sens suivant :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \sum_{a \in E_i} l_a(u_h^n \cdot n_a) = 0$$

Les termes convectifs et diffusifs sont calculés comme dans les sections (3) et (3.2) respectivement. Étant donné les résultats des sections (3.2) et (4) les inconnues discrètes sont choisies comme les approximations de leurs variables respectives à l'IDBO. Des triangles. Cependant, comme indiqué dans la section (3), une approximation de la variable convectée  $w$  à l'intérieur du triangle doit être utilisée pour le terme convectif. C'est pourquoi la valeur choisie pour la convection est l'approximation de  $w$  au centre de gravité du triangle, est calculée comme dans la section (4.2.2). Cette valeur, notée  $G_i(w_h)$ , sera aussi utilisée pour le calcul de la dérivée en temps, afin d'augmenter la précision.

La forme discrète de l'équation (I.22) pour un triangle  $T_i$  est la suivante :

$$S_i \frac{G_i(w_h^*) - G(w_h^n)}{\delta t} + \sum_{a \in E_i} l_a u_h^n \cdot n_a G_a(w_h^*) - \mu \sum_{a \in E_i} F_a(w_h^*) = S_i s_i^n \quad (I.23)$$

Avec  $S_i$  est la surface de  $T_i$ .

❖  $G_a(w_h^*)$  dépend du type d'arête :

- si 'a' est une arête interne, commune à  $T_i$  et  $T_j$  alors :

$$G_a(w_h^*) = \lambda_{ij} G_i(w_h^*) + (1 - \lambda_{ij}) G_j(w_h^*).$$

$$\text{avec } \lambda_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (u_h \cdot n_{a_{ij}}) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- si 'a<sub>b</sub>' est une arête de bord où le fluide entre (i.e.  $(u_h \cdot n_{a_b}) < 0$ )

Alors on a :

$$G_{a_b}(w_h^*) = w_h^b$$

- si 'a' est une arête de bord où le fluide sort (i.e.  $(u_h \cdot n_{a_{ij}}) > 0$ )

$$G_{a_b}(w_h^*) = w_i^*$$

$F_{a_b}(w_h^*)$  Est le flux diffusif calculé comme dans la section 3.2.

Le système (I.23) est linéaire mais non symétrique. La matrice associée est une M-matrice à diagonale dominante. La solution  $w_h^*$  du système notée  $CD_s(w_h^n)$ .

La convection-diffusion de ses deux composantes indépendamment. C'est pourquoi on peut aussi utiliser la notation  $u_h^* = CD_s(u_h^n)$ . Remarquons que  $u_h^n$  est dans  $V_h^0$ , mais que  $u_h^*$  est dans  $(Q_h)^2$ . C'est pourquoi les deux opérateurs qui suivent corrigent la vitesse pour qu'elle appartienne d'abord à  $V_h^c$ , puis à  $V_h^0$ .

### 5.1.2 L'opérateur d'extension : E

Cet opérateur s'applique sur une approximation de la vitesse appartient à  $(Q_h)^2$ , notée  $u_h^*$ . son résultat, noté  $u_h^{**} = E(u_h^*)$ , appartient à  $V_h^c$  tel que, pour une arête quelconque 'a' du maillage :

- Si 'a' est une arête interne commune aux triangles  $T_i$  et  $T_j$ , alors :

$$u_h^{**} \cdot n_{a,T_i} = t_{ij}(u_i^* \cdot n_{a,T_i}) + (1 - t_{ij})u_j^* \cdot n_{a,T_i}$$

Le coefficient  $t_{ij}$  a été introduit dans la section (4.3). L'expression ci-dessus est une interpolation sur l'arête des projections sur  $n_{a,T_i}$  de la vitesse dans les triangles  $T_i$  et  $T_j$ .

- Si 'a' est une arête de bord sur laquelle la valeur  $g_a$  de la vitesse normale est fournie, alors :

$$u_h^{**} \cdot n_{a,T_i} = g_a$$

Ce cas correspondant à celui d'une paroi ou d'un bord où le fluide rentre.

Si  $a_b$  est une arête de bord où la vitesse normale n'est pas fournie, alors

$$u_h^{**} \cdot n_{a,T_i} = u_i^* \cdot n_{a,T_i}$$

Ce cas correspond à un bord où le fluide sort.

Ces valeurs de  $u_h^{**} \cdot n_{a,T_i}$  définissent la vitesse  $u_h^{**}$  sur tout le domaine  $\Omega$  puisque  $u_h^{**}$  a été choisie dans  $V_h^c$ .

### 5.1.3 L'opérateur de projection : P

Cet opérateur s'applique à la fois sur la pression et la vitesse :

$$\begin{aligned} P : Q_h \times V_h^c &\mapsto Q_h \times V_h^0 \\ (p_h^n, u_h^{**}) &\mapsto (p_h^{n+1}, u_h^{n+1}) \end{aligned}$$

Cette opération est effectuée en deux étapes, correspondant à la discrétisation des équations (I.8) et (I.9). Si l'on note,  $\delta p = p^{n+1} - p^n$  on a :

$$\nabla \cdot u^{**} - \delta t \Delta(\delta p) = 0 \quad (I.24)$$

$$u^{n+1} = u^{**} - \delta t \nabla(\delta p) \quad (I.25)$$

L'équation (I.24) est un problème de diffusion pour l'incrément de pression  $\delta p$  avec un terme source. Il est résolu comme dans la section (3.2). Par intégration sur le triangle  $T_i$ , dont l'ensemble des arêtes est  $E_i$ , on obtient :

$$-\sum_{a \in E_i} F_a^D(\delta p) = -\frac{1}{\delta t} \sum_{a \in E_i} l_a u_h^{**} \cdot n_{a,T_i}$$

Qui a la même forme que l'équation (I.12) et peut donc être résolue de la même façon. Comme la matrice du système correspondant est symétrique et positive, on peut utiliser un gradient conjugué et il n'est pas nécessaire d'assembler la matrice.

L'équation (I.25) est alors discrétisée dans  $V_h^c$ :

$$u^{n+1} \cdot n_a = u^{**} \cdot n_a - \frac{\delta t}{l_a} F_a^D(\delta p)$$

Pour chaque arête du maillage. Notons que  $u^{n+1} \in V_h^0$  grâce à l'équation (I.6).

Afin de calculer  $u_i^{n+1}$  sur un triangle  $T_i$  donné à l'aide des trois valeurs  $u^{n+1} \cdot n_a \forall a \in E_i$ , on résout le système de trois équations à deux inconnues  $b_i, c_i$  qui suit :

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = \begin{pmatrix} b_i \\ c_i \end{pmatrix} \\ \forall a \in E_i, u_i^{n+1} \cdot n_a = (u_i^{n+1} \cdot n)_a \end{cases}$$

Ce problème est bien posé grâce à la combinaison linéaire suivante basée sur une propriété des triangles :

$$0 = u_i^{n+1} \cdot \sum_{a \in E_i} l_a \cdot n_a = \sum_{a \in E_i} l_a u_i^{n+1} \cdot n_a = \sum_{a \in E_i} l_a (u_i^{n+1} \cdot n)_a$$

## 5.2 Discrétisation du système de N-S

### 5.2.1 Terme source pour la convection diffusion de la vitesse

Le terme source pour la convection-diffusion de la vitesse est le suivant :

$$s^n = f^n - \nabla p^n$$

Étant donné un triangle  $T_i$  du maillage, une intégration de cette expression sur  $T_i$  donne :

$$\int_{T_i} s^n dS = \int_{T_i} f^n dS - \int_{\partial T_i} p^n \cdot n_i d\zeta$$

Une forme discrète de ce terme source peut être obtenue en calculant des approximations de  $p^n$  au milieu des arêtes. Ceci est grâce à la méthode exposée dans la section (3.1) si l'on noté  $p_a^n$  la valeur calculée de cette façon, la forme discrète du terme source obtenue est :

$$S_i s_i = S_i f_i - \sum_{a \in E_i} l_a p_a^n \cdot n_a \quad (I.26)$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{G_i(w_h^*) - G(w_h^n)}{\delta t} + \sum_{a \in E_i} l_a u_h^n \cdot n_a G_a(w_h^*) - \mu \sum_{a \in E_i} F_a(w_h^*) = S_i s_i^n \quad (I.23)$$

## Conclusion

Un schéma de discrétisation des équations de Navier Stokes pour un écoulement incompressible.

Le schéma est basé sur une discrétisation temporelle de type pas fractionnaire et une discrétisation spatiale de type volumes finis. L'originalité du schéma tient principalement à sa nature non structuré, les volumes de contrôle étant constitué des triangles. De même, la nature implicite du schéma ne limite pas la valeur du pas de temps.

## Deuxième partie

### Simulation numérique du système de N-S stationnaire

## Présentation du problème

Les méthodes modernes de calcul de mécanique des fluides s'appuient sur la résolution des équations de NAVIER-STOKES. Dans le cas laminaire, i.e. avec des nombres de Reynolds petits, celle-ci sont résolues de façons directes.

Pour les deux types d'écoulement, il faut intégrer un système d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, non linéaires et couplées entre elles.

Pour l'écoulement en deux dimensions cas intéressant à étudier sur le plan pratique, ces besoins sont encore beaucoup plus importants.

Les équations de NAVIER STOKES en version fluide incompressible présentent deux difficultés majeures. Premièrement, elles sont quasi-non linéaire et ensuite elles sont faiblement couplées. La non-linéarité est contournée par un calcul itératif. En choisissant un schéma numérique stable, les erreurs introduites par la solution initiale sont amorties et la procédure convergera facilement vers une solution finale acceptable. Le problème du couplage se manifeste par l'apparition des variables vitesse pression dans les trois équations de quantité de mouvement. Le gradient de pression qui apparaît comme terme source dans ces équations joue le rôle du moteur de l'écoulement. Malheureusement, on ne dispose d'aucune équation de transport pour cette troisième variable qui est la pression (les deux autres étant les deux composantes de la vitesse). En d'autres termes, si le gradient de pression est connu a priori on peut calculer le champ de vitesse qui dans ce cas vérifie bien l'équation de continuité. Malheureusement, la pression est toujours une inconnue à déterminer aussi bien que la vitesse. Le problème est un peu similaire à la non-linéarité des équations elles-mêmes. L'approche à suivre sera donc de même nature et elle est sensé résoudre les deux problèmes en même temps. On suppose un champ de pression initial qu'on injecte dans les équations de quantité de mouvement. On résout le système pour trouver un champ de vitesse intermédiaire (qui n'est pas juste puisque la pression ne l'est pas). L'équation de continuité est transformée pour devenir une équation de correction de pression. Elle est résolue pour trouver une correction de pression qui permettra de réinjecter une nouvelle pression dans les équations de quantité de mouvement. Le cycle est répété autant de fois que nécessaire jusqu'à l'obtention d'une correction de pression nulle, signe de la convergence de l'algorithme.



## 6. Étude d'un fluide stationnaire

### 6.1 Le modèle mathématique :

L'évolution spatio-temporelle d'un écoulement incompressible dans un domaine  $\Omega \times [0, T]$  peut être décrite par la forme générale des équations de Navier-stokes :

$$\frac{\rho \partial U}{\partial t} + \nabla(\rho U \cdot U) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f \quad (2.0)$$

Dans cette équation  $U$  représente le vecteur de vitesse du fluide incompressible.  $P$  et  $T$  représentent successivement la pression d'écoulement et le tenseur des contraintes, et  $f$  est un terme source, (les forces extérieures par exemple la gravité du flux...).

Dans cette partie on s'intéresse à un écoulement stationnaire, à deux dimensions, laminaire et de densité constante, l'équation d'un fluide Newtonien stationnaire est :

$$\nabla \cdot (\rho U U) = -\nabla P + \mu \Delta U \quad (2.1)$$

Avec  $\mu$  est une constante de viscosité.

L'écoulement est incompressible alors on a :

$$\nabla \cdot (\rho U) = 0 \quad (2.2)$$

### 6.2 Maillage structuré :

Dans un espace à deux dimensions, le domaine est subdivisé en un nombre fini de volumes de contrôle (cellules) qui sont alors constitués d'éléments de surface réguliers. Le maillage à la forme suivante :

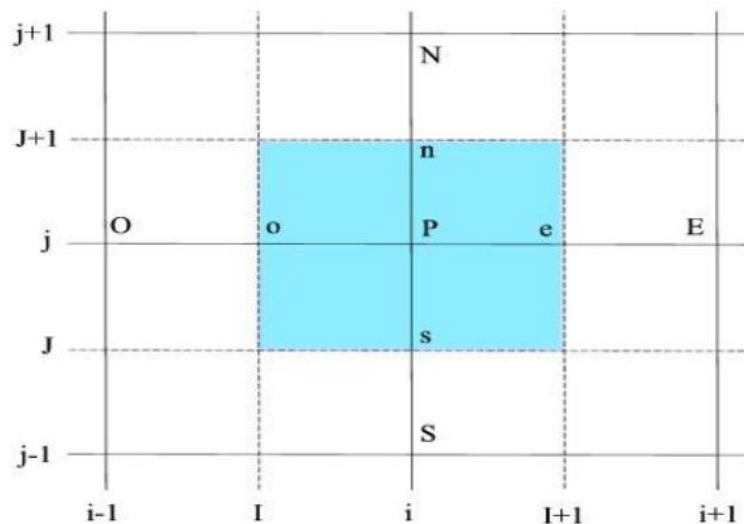


Figure 1.1 maillage structuré.

Où : P est le nœud principal, i est l'indice de discrétisation suivant l'axe des "x", j l'indice de discrétisation suivant l'axe des "y".

En général, les lettres E, O, N et S représentent respectivement l'Est, l'Ouest, le Nord et le Sud. Le carré coloré en bleu clair représente un élément de volume de contrôle. Les segments [PE] et [PN] valent respectivement  $\Delta x$  et  $\Delta y$ .

Par la suite, nous allons adopter les maillages suivants :

- ✓ Suivant l'axe des "x" on a :

$$x(i) = (i - 1)\Delta x$$

Où :  $\Delta x$  est le pas de discrétisation suivant cette direction.

- ✓ Suivant l'axe des "y" on a :

$$y(j) = (j - 1)\Delta y$$

Où :  $\Delta y$  est le pas de discrétisation suivant cette direction.

### 6.3 Géométrie et système de coordonnées

La figure 1.1 présente la géométrie et le système de coordonnées de l'exemple-test étudié.

L'écoulement est en deux dimensions, laminaire sur une marche descendante. La zone d'intégration a une longueur  $L=0.25\text{cm}$ , la hauteur du canal à la sortie est  $0.05\text{m}$  la hauteur de la marche est  $h=H/2$ .

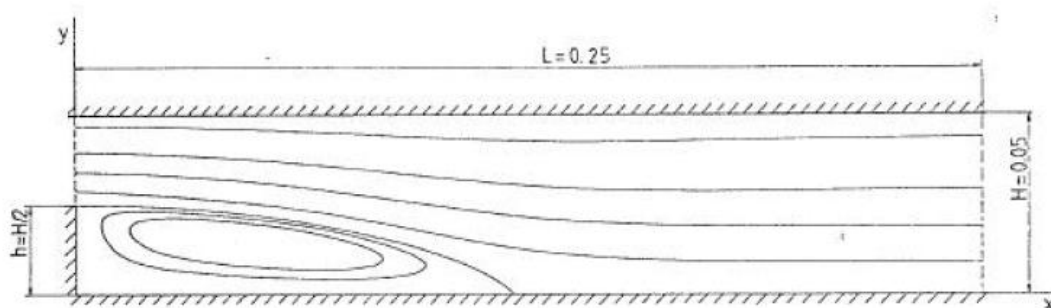


Figure 1.2 géométrie de l'exemple test et système de coordonnées.

### 6.4 Équations de Navier-Stokes en 2D :

L'écoulement présenté (voir figure (1.2)) peut être décrit par les conservations physiques de la masse et de la quantité de mouvement. Si l'on considère un écoulement stationnaire, en deux dimensions laminaire et de densité constante, les équations pour un fluide Newtonien sont :

- ❖ Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

$\rho$  Représente la densité de l'écoulement.

- ❖ Conservation de la quantité de mouvement en x :

$$\nabla \cdot (\rho U u) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \Delta u \quad (2.4)$$

- ❖ Conservation de la quantité de mouvement en y :

$$\nabla \cdot (\rho U v) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \Delta v \quad (2.5)$$

Dans ces équations,  $u$  et  $v$  sont les vitesses dans les directions  $x$  et  $y$ .  $P$  est la pression statique, et  $\mu$  est une constante de viscosité.

Les équations (2.4) et (2.5) sont appelées équations de Navier-Stokes. Elles constituent un système d'équations aux dérivées partielles elliptiques couplées. Pour obtenir une solution unique, il est nécessaire de définir des conditions de départ à la périphérie de la zone d'intégration.

### 6.4.1 Discrétisation des équations

Soit le volume de contrôle suivant :

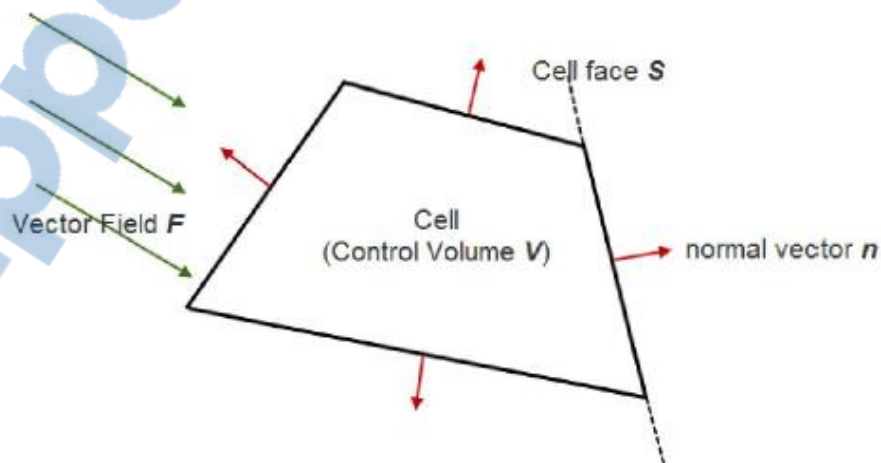


Figure (1.3) volume de contrôle

L'intégration des équations (2.5) et (2.4) sur le volume de contrôle V donne :

$$\int_V \nabla \cdot (\rho U u) dV = \int_V -\frac{\partial P}{\partial x} dV + \int_V \mu(\Delta u) dV. \quad (2.4.1)$$

$$\int_V \nabla \cdot (\rho U v) dV = \int_V -\frac{\partial P}{\partial y} dV + \int_V \mu(\Delta v) dV. \quad (2.5.1)$$

#### 6.4.2 Théorème (Théorème de Gauss)

Considérons un domaine  $\Omega$  borné de  $\mathbb{R}^2$  dont le bord  $\partial\Omega$  est une réunion finie de surface fermées régulières par morceaux et orientables. Si  $\varphi(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est de classe  $C^1$  sur  $\Omega \cup \partial\Omega$ ,

Alors :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\varphi) dV = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot n dS$$

Où :

- $n$  est le vecteur unitaire pointant vers l'extérieur de  $\partial\Omega$ .
- $dS$  est un élément de surface.

On utilise le théorème précédent pour déterminer les expressions de diffusion et de convection.

- Pour le terme de diffusion on a :

$$\int_V \mu(\Delta u) dV = \int_{\partial V} \nabla u \cdot n dS = \mu \cdot \sum_i (\nabla u \cdot n_i \cdot \Delta S_i)_{\text{face}}$$

$$\int_V \mu(\Delta v) dV = \int_{\partial V} \nabla v \cdot n dS = \mu \cdot \sum_i (\nabla v \cdot n_i \cdot \Delta S_i)_{\text{face}}$$

- Pour le terme de convection on a :

$$\int_V \nabla \cdot (\rho U u) dV = \int_{\partial V} \rho U u \cdot n dS = \sum_i \rho U \cdot (n_i \cdot \Delta S_i \cdot u)_{\text{face}}$$

$$\int_V \nabla \cdot (\rho U v) dV = \int_{\partial V} \rho U v \cdot n dS = \sum_i \rho U \cdot (n_i \cdot \Delta S_i \cdot v)_{\text{face}}$$

Où :

- 1) Le flux sortant du côté  $i$ .  $F_i = \rho(U \cdot n_i \cdot \Delta S_i)$ .
- 2)  $\Delta S_i$  est un élément de surface de l'arête.

- 3)  $n_i$  est un vecteur normal à la face  $i$ .
- 4)  $dV$  est un élément de volume de contrôle.

Alors l'intégration des équations (2.4) et (2.5) sur le volume de contrôle de centre P donne :

$$\sum_i \rho U (u \cdot n_i \cdot \Delta S_i)_{face} = \sum_i (\nabla u \cdot n_i \cdot \Delta S_i)_{face} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \Delta V \quad (2.4.2)$$

$$\sum_i \rho U (v \cdot n_i \cdot \Delta S_i)_{face} = \sum_i (\nabla v \cdot n_i \cdot \Delta S_i)_{face} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \Delta V \quad (2.5.2)$$

Où  $\int_V -\frac{\partial P}{\partial y} dV = \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \Delta V$ .

Une forme simple des équations de Navier stokes s'écrit :

$$\sum_i (F_i u)_{face} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \cdot \Delta V + \mu \cdot \sum_i (\nabla u \cdot n_i \cdot \Delta S_i)_{face} \quad (2.4.3)$$

$$\sum_i (F_i v)_{face} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \cdot \Delta V + \mu \cdot \sum_i (\nabla v \cdot n_i \cdot \Delta S_i)_{face} \quad (2.5.3)$$

$$\sum_i (F_i)_{face} = 0 \quad (2.3.2)$$

Les équations (2.4.3), (2.5.3) représentent successivement la conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cartésiennes, et l'équation de la conservation de la masse (l'équation de la continuité).

#### 6.4.3 Estimation de Terme de diffusion

On considère dans ce maillage deux cellules qui ont une face commune [ab] dont les barycentres sont les points P et A :

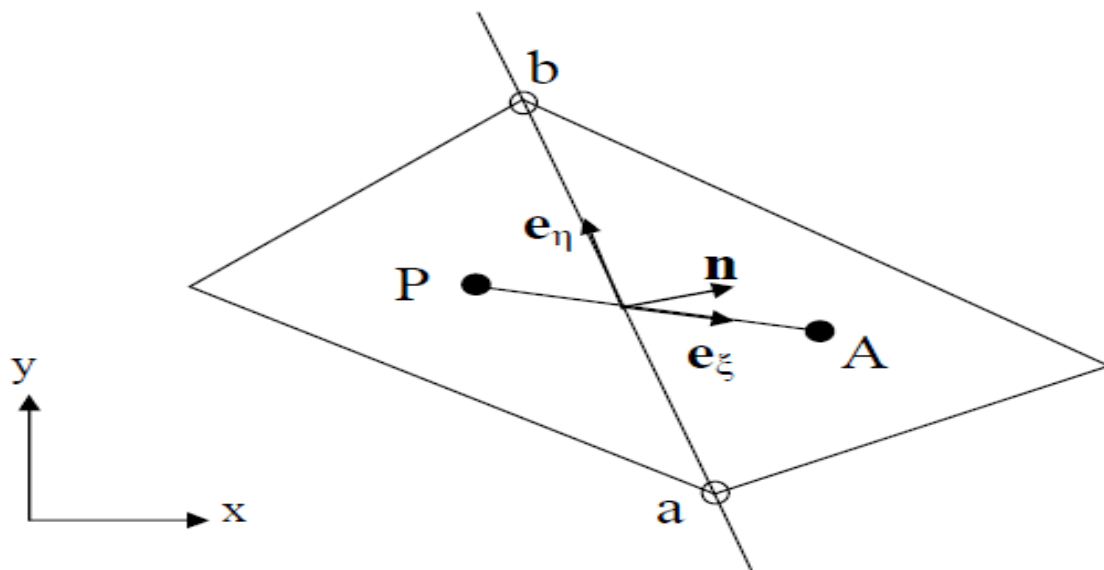


Figure (1.4) cellules adjacente

Les vecteurs  $n$ ,  $e_\eta$  et  $e_\xi$  sont définis par :

$$n = \frac{\Delta y}{\Delta \eta} i - \frac{\Delta x}{\Delta \eta} j = \frac{y_b - y_a}{|ab|} i - \frac{x_b - x_a}{|ab|} j \quad (2.5)$$

$$e_\eta = \frac{\Delta x}{\Delta \eta} i + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} j = \frac{x_b - x_a}{|ab|} i + \frac{y_a - y_b}{|ab|} j \quad (2.6)$$

$$e_\xi = \frac{\Delta x}{\Delta \xi} i + \frac{\Delta y}{\Delta \xi} j = \frac{x_A - x_P}{|PA|} i + \frac{y_A - y_P}{|PA|} j \quad (2.7)$$

Le terme de diffusion est donné par l'expression suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \cdot \sum_i (\nabla u_p \cdot n_i \cdot \Delta S_i)_{face} = \sum_i [D_e \cdot (u_E - u_P) + S_{D_u}]_{face} \\ \mu \cdot \sum_i (\nabla v_p \cdot n_i \cdot \Delta S_i)_{face} = \sum_i [D_e \cdot (v_E - v_P) + S_{D_v}]_{face} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Avec  $u_E$ ,  $u_P$ ,  $v_P$  et  $v_E$  sont successivement les composantes de la vitesse  $U$ , au centre des cellules E et P.

Tel que :

$$D_e = \frac{\mu}{\Delta \xi} \cdot \frac{n \cdot n}{n \cdot e_\xi} |ab| \quad (2.10)$$

$$S_{D_u} = -\mu \cdot \frac{e_\eta \cdot e_\xi}{n \cdot e_\xi} |ab| \cdot \frac{u_b - u_a}{\Delta \eta} \quad (2.11)$$

$$S_{D_v} = -\mu \cdot \frac{e_\eta \cdot e_\xi}{n \cdot e_\xi} |ab| \cdot \frac{v_b - v_a}{\Delta \eta} \quad (2.12)$$

Dans le cas d'un maillage orthogonal, les relations suivantes sont vérifiées :

En remplaçant l'expression de diffusion défini dans la relation (1.8), dans les équations (1.2) et (1.3), puis on obtient les équations suivantes.

$$a_p \cdot u_p = \sum_{nb} a_E \cdot u_E - \overline{\frac{\partial P}{\partial x}} \Delta V \quad (2.13)$$

$$a_p \cdot v_p = \sum_{nb} a_E \cdot v_E - \overline{\frac{\partial P}{\partial y}} \Delta V \quad (2.14)$$

Où  $a_E = D_e - \min(0, F_e)$

$$a_p = \sum_{nb} (a_E + F_e)$$

#### 6.4.4 Terme de pression :

La méthode traditionnelle de calcul du gradient de la pression est basée sur le théorème de Gauss qu'on a vu précédemment. Ici nous allons utiliser une autre méthode, cette dernière est basée sur le développement de Taylor. On considère que la pression est une fonction à deux variables, de classe  $C^1$  sur le domaine.

Considérons un maillage composé de la cellule  $P$ , et des cellules  $A_1, A_2, \dots, A_i$  telles que chaque cellule  $A_n, n \in \{1, 2, \dots, i\}$  a une face commune avec la cellule  $P$ .

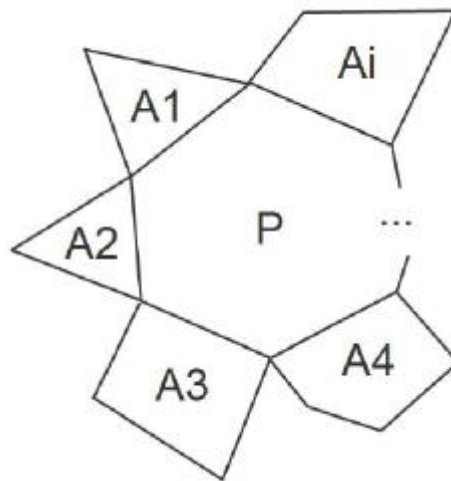


Figure (1.5) pression P.

En utilisant la formule de développement de Taylor à la pression  $P$ , on obtient :

$$P_A = P_P + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_P (x_A - x_P) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_P (y_A - y_P) \quad (2.15)$$

Avec  $(x_A, y_A)$  et  $(x_P, y_P)$  sont les coordonnées cartésiennes au centre des cellules  $A$  et  $P$ .

On applique en suite la formule (1.15) à toutes les cellules  $A_n, n \in \{1, 2, \dots, i\}$ .

On obtient la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} x_{A_1} - x_P & y_{A_1} - y_P \\ \vdots & \vdots \\ x_{A_i} - x_P & y_{A_i} - y_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell} = \begin{bmatrix} P_{A_1} - P_P \\ \vdots \\ P_{A_i} - P_P \end{bmatrix} \Leftrightarrow X \cdot \nabla P = \delta P \quad (2.16)$$

Où  $X$  est une matrice de coordonnées cartésiennes.

On obtient :

$$\nabla P = (X^T X)^{-1} \cdot (X^T \delta P) \quad (2.17)$$

### 6.5 La méthode itérative :

Considérons un exemple simple pour voir le principe de cette méthode. Soit un maillage structuré composé de 9 cellules, on initialise les composantes de vitesse et la pression par  $u=1, v=1, p=1$ , sauf pour la cinquième cellule où on aura  $u=v=p=0$ .

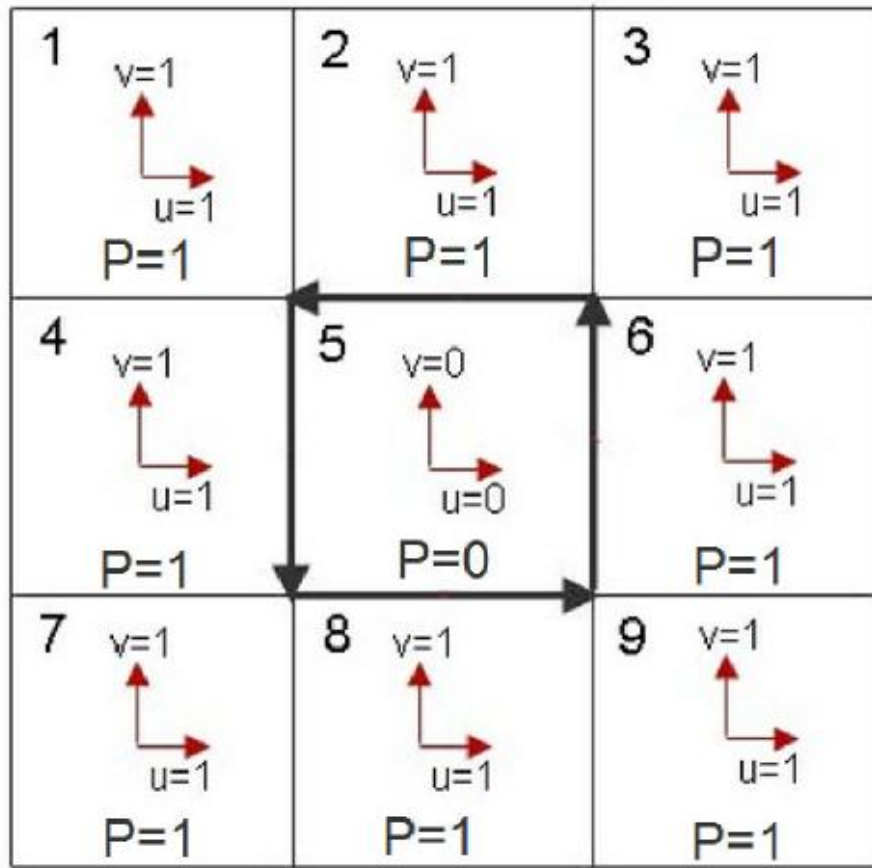


Figure (1.6 ) maillage structuré.

Pour calculer le gradient au centre de la cellule 5, on utilise la formule (1.16).

On obtient

$$\begin{array}{l}
 \text{cell2} \rightarrow \\
 \text{cell6} \rightarrow \\
 \text{cell8} \rightarrow \\
 \text{cell4} \rightarrow
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 \\
 1 & 0 \\
 0 & -1 \\
 -1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \frac{\partial P}{\partial x} \\
 \frac{\partial P}{\partial y}
 \end{bmatrix}_{\text{cell5}}
 =
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1
 \end{bmatrix}
 \Leftrightarrow
 \begin{bmatrix}
 \frac{\partial P}{\partial x} \\
 \frac{\partial P}{\partial y}
 \end{bmatrix}_{\text{cell5}}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (2.18)$$

On applique la même méthode pour calculer les gradients au centre des cellules 2, 4, 6 et 8

On commence par la cellule 2 alors on a :

$$\begin{array}{l}
 \text{cell2N} \rightarrow \\
 \text{cell2E} \rightarrow \\
 \text{cell5} \rightarrow \\
 \text{cell2W} \rightarrow
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 \\
 1 & 0 \\
 0 & -1 \\
 -1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \frac{\partial P}{\partial x} \\
 \frac{\partial P}{\partial y}
 \end{bmatrix}_{\text{cell2}}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 -1 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \Leftrightarrow
 \begin{bmatrix}
 \frac{\partial P}{\partial x} \\
 \frac{\partial P}{\partial y}
 \end{bmatrix}_{\text{cell2}}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 \frac{1}{2}
 \end{bmatrix}
 \quad (2.19)$$



❖ Pour la cellule 4 on obtient :

$$\begin{aligned} cell4N &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell4} \\ cell5 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell4} \\ cell4S &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell4} \\ cell4W &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell4} \end{aligned} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell4} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

❖ pour la cellule 6 on obtient :

$$\begin{aligned} cell6N &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell6} \\ cell6E &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell6} \\ cell6S &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell6} \\ cell5 &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell6} \end{aligned} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell6} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

❖ pour la cellule 8 on obtient :

$$\begin{aligned} cell5 &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell8} \\ cell8E &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell8} \\ cell8S &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell8} \\ cell8W &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell8} \end{aligned} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}_{cell8} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

On donne les valeurs des coefficients  $a_E$ , et les flux traversant les faces de chaque cellule, dans les tableaux suivants :

❖ pour la cellule 2 on a :

Local de face ID	Flux sortant	$a_E$	Contribution de $a_p$
1	1	1	2
2	1	1	2
3	-1/2	3/2	1
4	-1	2	1

Les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisées pour la cellule 2 sont :

$$\begin{aligned} 6u_2 &= u_{2N} + u_3 + \frac{3}{2}u_5 + 2u_1 - \frac{\overline{\partial p}}{\partial x} \Delta V \\ 6v_2 &= v_{2N} + v_3 + \frac{3}{2}v_5 + 2v_1 - \frac{\overline{\partial p}}{\partial y} \Delta V \end{aligned}$$

Sachant que  $u_{2N}$  et  $v_{2N}$  sont des composantes de la vitesse à la face nord de la cellule 2.

❖ pour la cellule 4 on a

Local de face ID	Flux sortant	$a_E$	Contribution de $a_p$
1	1	1	2
2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
3	-1	2	1
4	-1	2	1

Les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisées pour la cellule 6 sont :

$$\frac{11}{2} u_2 = 2u_{4w} + 2u_7 + u_5 + u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta V$$

$$\frac{11}{2} v_2 = 2v_{4w} + 2v_7 + v_5 + v_1 - \frac{\partial p}{\partial y} \Delta V$$

Sachant que  $u_{8S}$  et  $v_{8S}$  sont des composants de la vitesse à la face West de la cellule 4.

❖ pour la cellule 5 on a :

Local de face ID	Flux sortant	$a_E$	Contribution de $a_p$
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1

Les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisées pour la cellule 5 sont :

$$5u_5 = u_2 + u_6 + \frac{3}{2}u_8 + \frac{3}{2}u_4 - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta V$$

$$5v_5 = v_2 + v_6 + \frac{3}{2}v_8 + \frac{3}{2}v_4 - \frac{\partial p}{\partial y} \Delta V$$

Les composantes de la vitesse sont toutes égales 1, et d'après (1.18) on a le gradient de pression pour la cellule 5 égal  $\frac{\overline{\partial p}}{\partial x} = \frac{\overline{\partial p}}{\partial y} = 0$  alors  $v_5 = 1$  et  $u_5 = 1$

❖ pour la cellule 6 on a :

Local de face ID	Flux sortant	$a_E$	Contribution de $a_p$
1	1	1	2
2	1	1	2
3	-1	2	1
4	-1/2	3/2	1

Les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisées pour la cellule 6 sont :

$$6u_2 = u_{6E} + u_3 + \frac{3}{2}u_5 + 2u_9 - \frac{\overline{\partial p}}{\partial x} \Delta V$$

$$6v_2 = v_{6E} + v_3 + \frac{3}{2}v_5 + 2v_9 - \frac{\overline{\partial p}}{\partial y} \Delta V$$

Sachant que  $u_{6E}$  et  $v_{6E}$  sont des composantes de la vitesse à la face d'Est de la cellule 6.

❖ pour la cellule 8 on a :

Local de face ID	Flux sortant	$a_E$	Contribution de $a_p$
1	1/2	1	3/2
2	1	1	2
3	-1	2	1
4	-1	2	1

Les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisées pour la cellule 6 sont :

$$\frac{11}{2}u_2 = u_5 + u_9 + 2.u_{8S} + 2u_7 - \frac{\overline{\partial p}}{\partial x} \Delta V$$

$$\frac{11}{2}v_2 = v_5 + v_9 + 2.v_{8S} + 2v_7 - \frac{\overline{\partial p}}{\partial y} \Delta V$$

Sachant que  $u_{8S}$  et  $v_{8S}$  sont des composantes de la vitesse à la face sud de la cellule 8.

## 6.6 Couplage pression-vitesse :

Les équations discrétisées de quantité de mouvement sont les suivantes :

$$a_p \cdot u_p = \sum_{nb} a_E \cdot u_E - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta V \quad (2.13)$$

$$a_p \cdot v_p = \sum_{nb} a_E \cdot v_E - \frac{\partial P}{\partial y} \Delta V \quad (2.13)$$

Celles-ci pourraient être résolues avec un algorithme approprié selon  $u$  et  $v$ , si la pression  $P$  était connue. Comme la pression n'a pas d'équation de transport mais seulement une condition de comptabilité entre les vitesses ( $u$  et  $v$ ), celle-ci doit être recherchée par une méthode spéciale dans le cas de fluide qui nous intéresse le plus, c'est-à-dire le cas d'un fluide incompressible.

Soit un maillage composé de cellules suivantes :

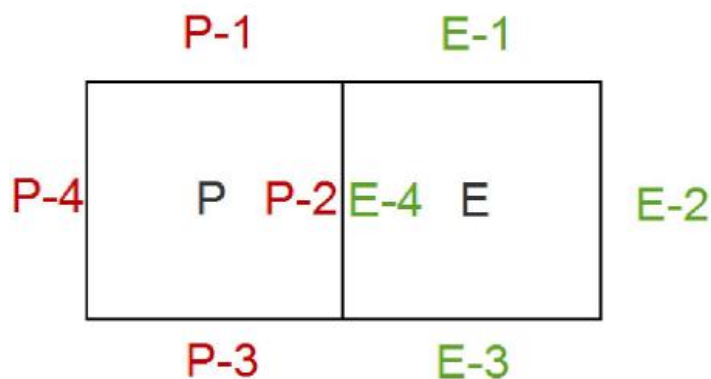


Figure (1.7) cellules adjacentes

On définit une vitesse intérimaire sur les arêtes communes aux cellules adjacentes par les formules suivantes :

$$u_e = \frac{u_p + u_E}{2} \quad \text{Et} \quad v_e = \frac{v_p + v_E}{2} \quad (**)$$

Les solutions provisoires des équations (\*\*) seront  $u_e(k)$  et  $v_e(k)$ . Ces variables seront corrigées ensuite en utilisant les relations suivantes :

$$u_e(k+1) = u_e(k) + u'_e(k) \quad (2.23)$$

$$v_e(k+1) = v_e(k) + v'_e(k) \quad (2.24)$$

$$p(k+1) = p(k) + p'(k) \quad (2.25)$$

Où  $u'_e$ ,  $v'_e$  et  $p'$  sont les termes de corrections définies par :

$$u'_e = \left( \frac{\Delta y}{a_p} \right)_e (P'_p - P'_E) \quad v'_e = \left( -\frac{\Delta x}{a_p} \right)_e (P'_p - P'_E) \quad (2.26)$$

$$\left( \frac{1}{a_p} \right)_e = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_p} + \frac{1}{a_E} \right) \quad (2.27)$$

Avec P et E sont deux cellules adjacentes :

Parmi toutes les équations du modèle étudié, l'équation de continuité est la plus simple à discrétiser. Grâce au maillage décalé, on obtient l'équation suivante qui est la plus précise que l'on puisse avoir dans la mesure où aucune interpolation n'est nécessaire :

$$\Delta y_p(u_E - u_P) + \Delta x_p(v_N - v_P) = 0 \quad (2.28)$$

D'après la relation de la correction de vitesse et l'équation de continuité discrétisée (2.28) nous obtenons la relation suivante :

$$\sum_{E_i} \left\{ \left( \frac{\Delta y_p^2}{a_p} \right)_e + \left( \frac{\Delta x_p^2}{a_p} \right)_e \right\} (P'_p - P'_{E_i}) = \Delta y_p(u_W - u_E) + \Delta x_p(v_S - v_N) \quad (2.29)$$

### 6.6.1 Résultats numériques

Dans cette partie nous intéressons à la variation de pression en fonction des itérations, on sait que la pression dans toutes les cellules de (figure 1.3 maillage structures) au-dessus est constante et égale 1, sauf la cinquième cellule sa pression est nulle.

Les variations de pression et des composantes de vitesse de la cellule 5 pour chaque itération sont présentées dans les courbes suivantes :

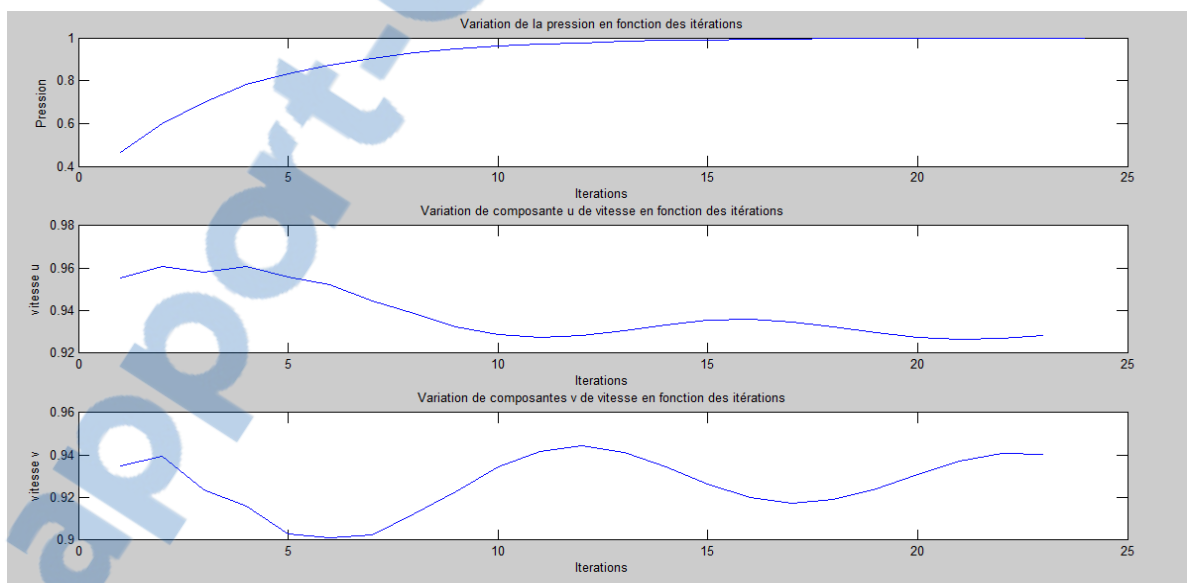


Figure (1.8) courbe pression-vitesse

Les valeurs de pression et de composantes de vitesse pour chaque itération sont données dans le tableau suivant :

Itération	Vitesse u	Vitesse v	Pression
1	0.9555	0.9352	0.4656
2	0.9610	0.9393	0.5992
3	0.9583	0.9158	0.6994
4	0.9607	0.9031	0.7826
5	0.9558	0.9012	0.8309
6	0.9523	0.9025	0.8732
7	0.9446	0.9122	0.9049
8	0.9386	0.9229	0.9287
9	0.9323	0.9346	0.9465
10	0.9290	0.9417	0.9599
11	0.9273	0.9443	0.9699
12	0.9285	0.9411	0.9774
13	0.9306	0.9345	0.9831
14	0.9335	0.9264	0.9873
15	0.9353	0.9202	0.9905
16	0.9360	0.9175	0.9929
17	0.9348	0.9192	0.9946
18	0.9326	0.9243	0.9960
19	0.9299	0.9311	0.9970
20	0.9277	0.9372	0.9977
21	0.9265	0.9192	0.9983
22	0.9268	0.9243	0.9987
23	0.9283	0.9311	0.9990
24	0.9303	0.9373	0.9993

## Conclusion

Nous nous sommes intéressés à la résolution numérique des équations de Navier stokes par la méthode de volumes finis en bidimensionnelle, la méthode de calcul utilise l'algorithme simple dans le lequel on travaille sur des systèmes d'équation linéaires itératif pour les deux composantes de la vitesse et une correction des pressions et des composantes de vitesse.

L'algorithme s'arrête lorsque les équations de masse et de quantité de mouvement sont vérifiées simultanément.

*Rapport-gratuit.com*   
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES

*Rapport-gratuit.com*   
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES

## Conclusion générale

Ce travail a tenté de contribuer à la recherche sur les méthodes de volumes finis sur des maillages non structuré et structuré. Ces méthodes sont encore peu utilisées malgré leurs qualités intrinsèques, comme la conservation numérique locale des quantités conservatives, et la capacité à traiter des géométries complexes.

En ce qui concerne la discrétisation en espace, le schéma pour la diffusion proposé dans [7] a confirmé au cours de simulation effectuée dans le cadre de ce travail, ses excellentes qualités de précision, de facilité de mise en œuvre et faible coût de calcul, qui en font un candidat extrêmement intéressant pour les applications industrielles.

D'autre part, la discrétisation en temps de type prédiction-projection s'est montrée parfaitement adaptée à la résolution des systèmes considérés ici pour la modélisation des écoulements instationnaires, où apparaît une contrainte stationnaire du fait des hypothèses d'incompressibilité.

La flexibilité de cette méthode a permis de traiter de nombreux problèmes physiques, des écoulements incompressibles d'un fluide stationnaire ou instationnaire, en passant par la convection naturelle de BOUSSINESQ, Etc. D'autres extensions sont envisageables grâce à la possibilité de calculer des gradients d'interface complets, par exemple les fluides à viscosité variables ou les modèles de turbulent du type  $k - \varepsilon$ .

En ce qui concerne la deuxième partie, nous décrivons une application sur Matlab concernant la résolution des équations de NAVIER-STOKES, avec une méthode des volumes finis. Comme exemple test, nous prendrons le cas d'un fluide à deux dimensions, laminaire et incompressible stationnaire sur.

Comme perspective de ce travail, je souhaite de généraliser ces résultats au modèle de l'équation de NAVIER-STOKES avec un fluide diphasique en 3D par la méthode des volumes finis.



## Bibliographie

- [1] A study of solving Navier Stokes equation with a finite volume method based on polygonal unstructured grids and the computational analysis of ground vehicle aero Dynamics.
- [2] S. Boivin et J. Mrac Hérard, Un schéma de type volume finis pour résoudre les équations de Navier-Stokes sur une triangulation.
- [3] J.BARANGER, J. F MAITRE, F. OUDIN, Application de la théorie des éléments finies mixtes à l'étude d'une classe de schémas aux volumes différences finis pour les problèmes elliptique, C.R Acad. SCI. Paris, t. 319, Série I, p. 401-404,1994
- [4] J.Baranger, J.F Maitre, connection between finite volume and mixed finite element méthode, Maths
- [5] F. BREZZI , M, Fortin Mixed and hybridée finite element methods, Springer verlage
- [6] F. Cayré, Schémas volumes finis pour un problème elliptique sur maillage triangulaire,
- [7] R. Eymard, T. GALLouet, R. HERBIN, Finite Volume Methods to appear in Handbook of numerical Analysis,
- [8] Faille, Modélisation bidimensionnelle de la genèse et de la migration des hydrocarbures dans un bassin sédimentaire
- [9] FAILLE A control volume method to solve an elliptic equation on a two dimensional irregularity
- [10] T. GALLOUET, An introduction to finite volume methods, Problèmes non linéaires appliqués : Méthodes de volumes finis,
- [11] R. HERBIN, An Error Estimate for a finite volume scheme For diffusion convection problem on a triangular Mesh
- [12] B. Couapel, G scheurer J. volkert Résolution de problème à deux dimensions de mécanique des fluides sur les multiprocesseurs DIRMU.
- [13] Stella Kerll, Schéma volumes finis en mécanique des fluides complexes.
- [14] F.T Finite volume methode applied to computational rheology
- [15] Baléba BALEBA Résolution numérique des équations de Navier-stokes par une méthode implicite par zones en vue d'une application en électrochimie
- [16] équation de Navier Stokes Wikipédia .
- [17] Ghassen Rzagui hamad Marzuogui, transport d'un scalaire Passif dans une Turbulence Magnétohydrodynamique.