Introduction

Les mathématiques du Flou, de plus en plus designer sous le terme générique de théorie du Flou, regroupent plusieurs théories qui sont des généralisations ou des extensions de leurs homologues classiques : la théorie des sous ensembles Flous étend celle des ensembles, la logique Floue étend la logique binaire, la théorie des quantités Floues étend celle des nombres et des intervalles, la théorie des possibilités étend celle des probabilités, plus généralement la théorie de la mesure Floue étend celle de la mesure, elle ont tous pour objectif de proposer des concepts, des techniques et des méthodes formellement rigoureuses pour recueillir, représenter et traiter des connaissances et des données Floues c'est –à-dire contenant de l'imprécision, de l'incertitude et de la subjectivité; ces trois facettes principales du Flou étend souvent coexistantes d'autre synonymes tel que connaissance mal spécifiée, mal décrite, imparfaite, vague, qualitative, linguistique, partielle, incomplète, approximative ou approchée recouvrent cette même acceptation du Flou.

En rejetant l'axiome de binarité posé par Aristote il y a plus que 2300 ans, de telle mathématique devient plus utiles est applicable car plus en adéquation avec le monde réel les mathématiques du Flou offrent aussi la possibilité de sélectionner et d'appliquer les operateurs adéquat en fonction du Problème à résoudre et de la variabilité de l'agent décisionnaire (comportement optimiste pessimiste ou de compromis, sensibilités physiologiques……)

La logique Flou apparait comme une logique graduelle qui ce veut être très proche de notre perception nuancée du monde, tandis que la mesure de possibilités remplacera avec justice la mesure de probabilité lorsque les informations disponibles sont en faible nombre et/ou de mauvaise qualité, ceci est normalement le cas dans les panels d'évaluation sensorielle ou un petit nombre de sujets joue le rôle de capteurs (le plus souvent imprécis). Formellement la théorie du Flou définit une interface entre le qualitatif/ symbolique et le quantitatif/numérique. Pratiquement, elle offre une approche élégante pour la résolution des problèmes multidimensionnels et complexes, caractérisés par une forte interactivité des parties, faisant intervenir l'Homme à la fois comme capteur et comme décideur /actionnaire.

Le mémoire est subdivisé en trois chapitres.

Dans le première chapitre, nous présentons la théorie des ensembles flous, sa position par rapport à la théorie classique des ensembles, ainsi que les concepts flous relatifs comme les relations floues, les quantités floues, …etc.

Dans le deuxième chapitre, nous exhibons quelques exemples de l'investigation de la logique floue dans les domaines des mathématiques classiques. Ainsi, nous présentons des versions floues de l'Arithmétique, la topologie floue, la théorie des mesures et de l'intégration, et la programmation mathématique

Dans le troisième chapitre, la logique floue est présentée avec ses différentes notions : le raisonnement approximatif, alternative au raisonnement exacte rigide, est étudié dans le cadre de la théorie des possibilités. Ainsi que les systèmes flous.

Historique :

La genèse de la théorie du Flou prend ses racines dans le développement des logique multivaluées mené par Lukasiewicz, tête de file de l'école polonaise de logique des années 30 [Lukasiewicz,1920,1930].Au même moment le philosophe et logicien Bertrand Russel soulignera le fait que la logique binaire, héritée d'Aristote ,était mal adapté à la formalisation du langage naturel puisque ce dernier contenait bon nombre de termes vagues, mal définies [Russel,1923].Toutefois ces au philosophe Max Black que l'on doit en 1937 l'idée novatrice de formaliser le sens des prédicats vagues, utilisées dans le langage courant , par des fonctions numériques d'appartenance[Black,1937]. Il ne rester à Lotfi Zadeh qu'a oser faire la jonction entre toute ces prémisses pour aboutir à la définition formelle de la logique Floue , logique nuancée qu'il voulait être proche d'une logique humaine .

- 1965, naissance du concept flou avec le Pr. Zedeh Lofti (Californie).

    → « Un contrôleur électromécanique doté d'un raisonnement humain serait plus performant qu'un contrôleur classique.

    → Théorie des « sous ensembles flous ».

- 1970: Premières applications: Systèmes experts, Aide à la décision en médecine, commerce…

- 1973, Zadeh introduit la notion de variables linguistiques.

!

- 1974, Première application industrielle :
  Mamdani (Londres) réalise un contrôleur flou pour moteur à vapeur.

- 1987, explosion du flou au Japon et qui atteint son apogée en 1990.

- Aujourd'hui, une vaste gamme de nouveaux produits ont une étiquète « Produit flou » (Fuzzy).

Section 1 : La théorie des ensembles Flous

1.1 Définition d'un sous ensemble flou

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous ensemble. Le mérite de Zadeh a été de tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée: permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous ensemble, c'est-à-dire d'autoriser un élément à appartenir plus moins fortement à ce sous ensemble.

Soit **X** un ensemble classique de référence et soit **x** un élément quelconque de **X**. Un Sous ensemble flou **A** de **X** est défini comme l'ensemble des couples :

$$A= \{(x, \mu_A(x)), x \in X\} \qquad (1)$$

Avec:

$$\mu_A: X \rightarrow [0,1] \qquad (2)$$

Ainsi, un sous ensemble flou A de X est caractérisé par une fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ qui associe, à chaque point x de X un réel dans l'intervalle $[0,1]$; $\mu_A(x)$ qui représente le degré d'appartenance de x à A. On observe les trois cas possibles suivants :

$$\begin{cases} \mu_A(x)=0 \\ 0< \mu_A(x) <1 \\ \mu_A(x)=1 \end{cases} \qquad (3)$$

Où $\mu_A(x)=0$ si x n'appartient pas A; $0 < \mu_A(x) <1$ si x appartient partiellement à A; et $\mu_A(x)=1$ si x appartient entièrement à A. La fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ inclut ou exclut donc à ses extrémités, tout élément x au sous ensemble A, mais entre les valeurs extrêmes le degré d'appartenance varie à proportion de la proximité à l'ensemble.

Afin d'exemplifier chacune des définitions, nous allons concevoir au fil de ce mémoire d'introduction à la logique Floue un système d'inférence ou concret dont l'objectif est de décider du pourboire à donner a la fin d'un repas au restaurant en fonction de la qualité du service ainsi que de la qualité de la nourriture.

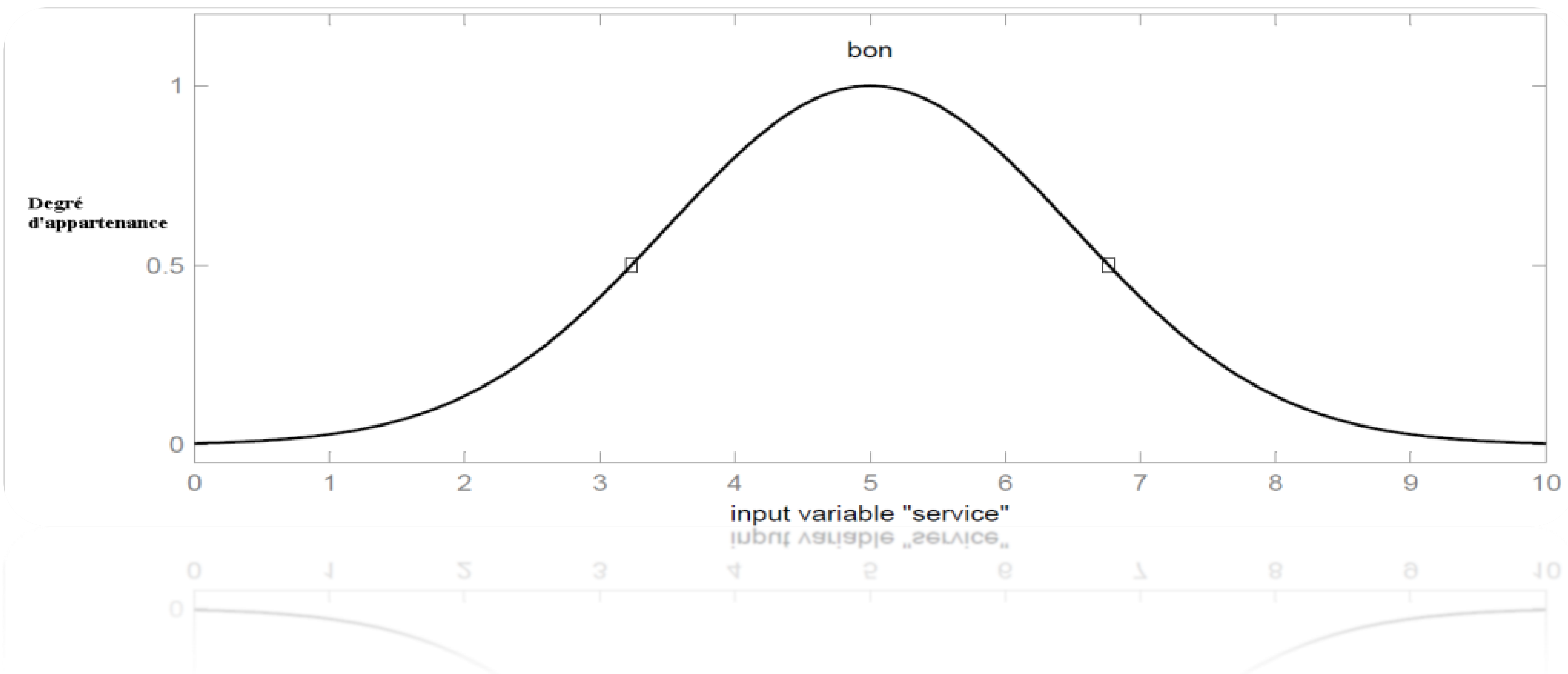


Figure 1.1: Fonction d'appartenance caractérisant le sous-ensemble 'bon' de la qualité du service

La figure **1.1** montre la fonction d'appartenance choisie pour caractériser le sous ensemble 'bon' de la qualité du service.

On peut faire remarquer que si A est un sous-ensemble classique, la fonction d'appartenance qui lui est associée ne peut prendre que les valeurs extrêmes **0** et **1.** On a dans ce cas :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \notin A \\ 1, \text{ si } x \in A \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

La figure 1.2 montre graphiquement la différence entre un ensemble classique et l'ensemble Flou correspondant a une nourriture délicieuse.

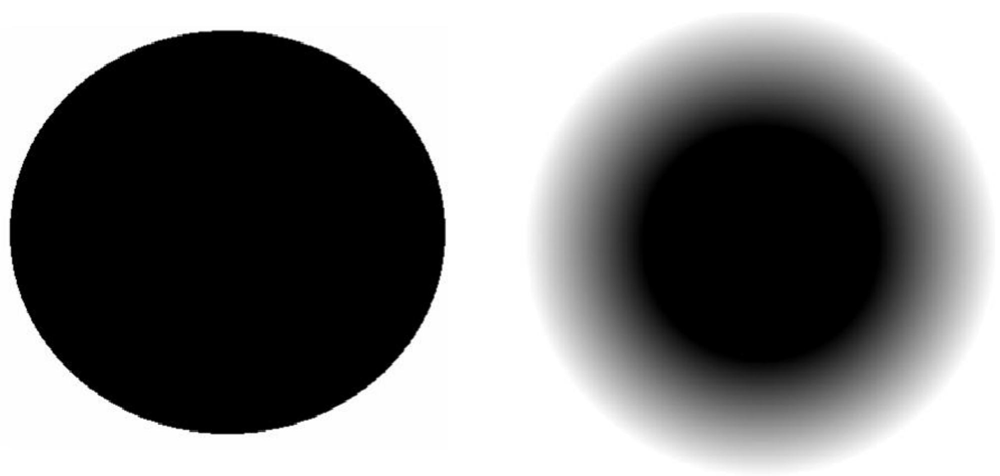


Figure 1.2: Représentation graphique d'un ensemble classique et d'un ensemble Flou

La figure 1.3 compare les deux fonctions d'appartenance correspondant aux ensembles précédents.

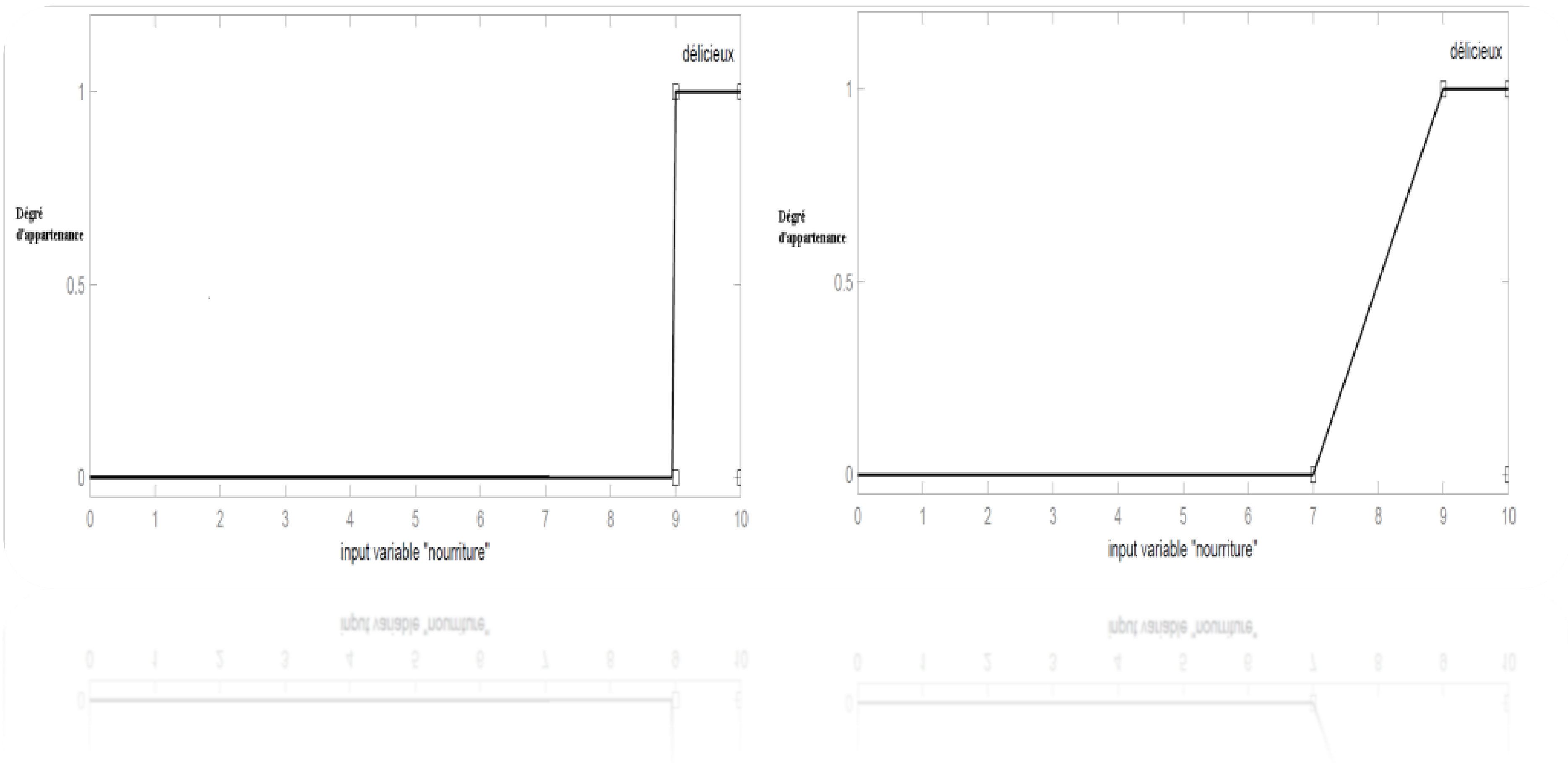


Figure 1.3: Comparaison entre fonction caractéristique d'un ensemble classique et fonction d'appartenance d'un ensemble Flou

Dans notre exemple du pourboire, il nous faudra redéfinir des fonctions d'appartenance Pour chaque sous ensemble ou de chacune de nos trois variables :

-Input 1 : qualité du service. Sous ensembles : mauvais, bon et excellent.

-Input 2 : qualité de la nourriture. Sous ensembles : exécrable et délicieux.

-Output : montant du pourboire. Sous ensembles : faible, moyen et élevée.

La forme de la fonction d'appartenance est choisie arbitrairement en suivant les conseils de l'expert ou en faisant des études statistiques : formes sigmoïde, tangente, Hyperbolique, exponentielle, gaussienne ou de toute autre nature sont utilisables.

1.2 Caractéristiques d'un sous ensemble flou

Un sous ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance. A partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristiques du sous ensemble flou peuvent être étudiées.

1.2.1 Support et Hauteur

Ces deux caractéristiques, pour l'essentiel montrent, dans quelle mesure un Sous ensemble flou **A** de **X** diffère d'un sous-ensemble classique de **X**. La première est le support et la deuxième la hauteur. Le support d'un sous-ensemble flou de **A** de **X**, noté **Supp(A),** est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent au moins un petit peu. Formellement:

$$\boldsymbol{Supp\ (A) = \{\ x \in X\ /\ \mu_A(\mathrm{x}) > 0\}} \qquad \textbf{(5)}$$

La hauteur du sous ensemble flou **A** de ***X***, notée ***h (A),*** est le plus fort degré avec lequel un élément de ***X*** appartient à ***A***. Formellement:

$$\boldsymbol{h(A)\ = \{\ sup_{x\in X}\ \mu_A(\mathrm{x}) > 0\ /\ x \in X\ \}} \qquad \textbf{(6)}$$

1.2.2 Noyau

Un sous ensemble flou est normalisé si sa hauteur **h(A) = 1.** Le noyau d'un sous ensemble flou ***A*** de ***X***, noté **Noy (A),** est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent totalement (avec un degré 1). Formellement :

$$\boldsymbol{Noy(A) = \{x \in X\ /\ \mu_A(x) = 1\}} \qquad \textbf{(7)}$$

1.2.3 Cardinalité

La cardinalité d'un sous-ensemble flou ***A*** de ***X,*** noté **|*A*|,** est le nombre d'éléments appartenant à ***A*** pondéré par leur degré d'appartenance. Formellement, pour ***A*** fini :

$$|\mathrm{A}| = \sum_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}} \mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) \qquad \textbf{(8)}$$

Si ***A*** est sous-ensemble ordinaire de ***X,*** sa cardinalité est le nombre d'éléments qui le composent, selon la définition classique.

1.2.4 α-coupe

Le sous ensemble ordinaire $A\alpha$ de X associé à A pour le seuil α est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A avec un degré au moins égal à α **.** On dit que α est l'α – coupe de A. Formellement :

$$A_\alpha = (A) = \{x \in X \ / \ \mu_A(x) >= \alpha\} \qquad \textbf{(9)}$$

Et A_α est un sous ensemble ordinaire de fonction caractéristique :

$$\chi\, A_\alpha\ (x) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \mu_A(x) >= \alpha \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Si A est un sous ensemble flou d'un univers X, de fonction d'appartenance μ_A, on a :

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha\, \chi\, A_\alpha\ (x) \qquad \text{(théorème de décomposition)}$$

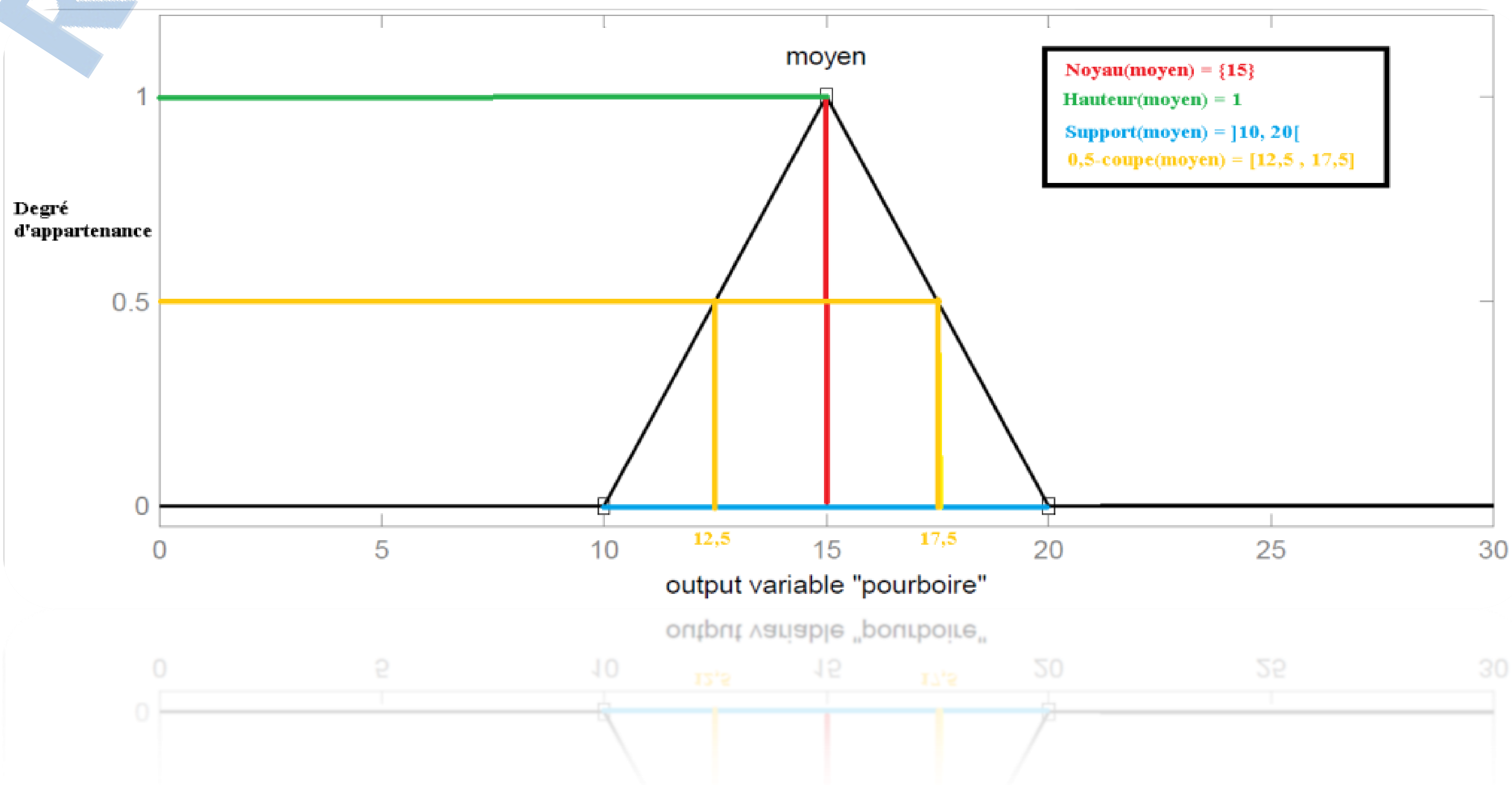


Figure 1.4: Propriétés d'un ensemble Flou

1.3 Opérations sur les sous ensembles flous

Etant donné que le concept de sous ensemble flou peut-être vu comme une généralisation du concept d'ensemble classique, et afin de pouvoir manipuler aisément les ensembles flous, on est conduit à introduire des opérations sur les sous ensembles flous qui sont équivalentes aux opérations classiques de la théorie des ensembles lorsqu'on a affaire à des fonctions d'appartenance à valeurs **0** ou **1.**

Contrairement aux définitions des propriétés des ensembles flous qui sont toujours les mêmes, la définition des operateurs sur les ensembles flous est choisie, à l'instar des fonctions d'appartenance.

1.3.1 Egalite

Deux sous ensembles flous $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{X}$ sont égaux, si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur pour tous les éléments $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{X}$ .Formellement $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ si et seulement si :

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) = \mu_B(x) \tag{10}$$

1.3.2. Complément

Le complémentaire d'un sous ensemble flou $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{X}$ noté $\overline{\boldsymbol{A}}$ est défini par :

$$\forall x \in X,\ \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{11}$$

1.3.3 Inclusion

Soit A et B deux sous ensembles flous de X. Si pour n'importe quel élément x de $\boldsymbol{X}$, x appartient toujours moins à $\boldsymbol{A}$ qu'à $\boldsymbol{B}$, alors on dit que $\boldsymbol{A}$ est inclus dans $\boldsymbol{B}$ **(**$\boldsymbol{A \subseteq B}$**).** Formellement, $\boldsymbol{A \subseteq B}$ si et seulement si :

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \tag{12}$$

1.3.4 Union

L'union de deux sous ensembles flous A et B de X est le sous ensemble flou constitué des éléments de X affectés du plus grand des degrés avec lesquels ils appartiennent à A et B. Formellement, $A \cup B$ est donné par :

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x)) \quad (13)$$

1.3.5 Intersection

L'intersection de deux sous ensembles flous A et B de X est le sous ensemble flou constitué des éléments de X affectés du plus petit des degrés avec lesquels ils appartiennent à A et B. Formellement, $A \cap B$ est donné par :

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x)) \quad (14)$$

Le tableau suivant montre une comparaison entre les deux ensembles d'opérateurs pour le complément (NON), l'intersection (ET) et l'union (OU) utilises le plus couramment :

Dénomination	Intersection ET : $\mu_{A\cap B}(x)$	Réunion OU : $\mu_{A\cup B}(x)$	Complément NON : $\mu_{\bar{A}(x)}$
Opérateurs de Zadeh MIN/MAX	$min(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$max(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$1-\mu_A(x)$
Probabiliste PROD/PROBOR	$\mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$1-\mu_A(x)$

Cependant, il existe d'autres opérateurs utilisables pour définir ces opérateurs. Les plus Connus sont les normes triangulaires pour l'intersection, les conormes triangulaires pour l'union et les négations pour le complément

1.3.6 Propriétés de l'union et de l'intersection

Avec les définitions usuelles des operateurs flous, nous retrouvons toujours les propriétés de commutativité, distributivité et associativité des operateurs classiques. Et Comme pour les ensembles classiques, toutes les propriétés de treillis distributif et les relations de Morgan restent valables, ainsi que l'idempotence.

(a) Commutativité : $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

(b) Associativité: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(c) Idempotence : $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

(d)Distributivité: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(e) Les relations de Morgan : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(f) Les lois d'absorption : $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$

(g) $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup X = X$

(h) Identité : $A \cup \varnothing = A$; $A \cap X = A$

(i) Cardinalité : $|A| + |B| = |A \cap B| + |A \cup B|$

(j) Formule d'équivalence : $(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

(k) Formule de la différence symétrique : $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cup B)$

Cependant, relevons deux exceptions notables :

- En logique flou, le principe du tiers exclu est contredit : $A \cup \bar{A} \neq X$, autrement dit. $\mu\, A \cup \bar{A} \neq 1$

-En logique floue et Contrairement aux sous ensembles classiques, la propriété de non contradiction n'est pas satisfaite un élément peut appartenir a A et non A en même temps $\mathbf{A} \cap \bar{\mathbf{A}} \neq \emptyset$, autrement dit. $\mu_{A \cap \bar{A}} \neq 0$ .Notons que ces éléments correspondent a l'ensemble **supp(A) - noy(A).**

En effet, considérons, par exemple, la partie floue F de E donnée par la fonction d'appartenance:

$$\forall x \in E, \mu(x) = 1/2$$

Cette partie floue est égale à son complémentaire car sa fonction d'appartenance vérifie $\mu = 1 - \mu$.

On déduit alors de $F = \overline{F}$ que $F \cup \overline{F} = F \cap \overline{F} = F$

1.4 Concepts flous

- Un sous ensemble flou **A** de **X** est dit convexe si, sa fonction d'appartenance est convexe.

- Le produit cartésien de n sous ensemble flous $A_1, A_2, \ldots \ldots A_n$ est défini par :

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \ldots \times A_n, \quad \forall x = (x_1, \ldots \ldots, x_n) \in X \qquad f_A(x) = \min(f_{A_1}(x_1), \ldots \ldots, f_{A_n}(x_n))$$

- La projection sur X_1 d'un sous ensemble flou A de $X_1 \times X_2$ est le sous ensemble flou $\mathbf{Proj}_{X_1}$**(A),** dont la fonction d'appartenance est définie par :

$$\forall x_1 \in X_1, \quad f_{\mathrm{Proj}_{X_1}(A)}(x_1) = \sup_{x_2 \in X_2} f_A((x_1, x_2)).$$

- ***Principe d'extension*** : Zadeh a introduit le principe d'extension, l'un des plus Importants de la théorie des sous ensembles flous, pour permettre d'exploiter nos connaissances classiques dans le cas de données floues : Arithmétique floue, relations floues, …

Soit A un sous-ensemble flou de **X** et φ une application de **X** vers **Y**.

Le principe d'extension définit un sous-ensemble flou **B** de **Y** associé à **A** (image directe) par l'intermédiaire de φ par :

$$\forall y \in Y \quad f_B(y) = \sup_{\{x, \varphi(x) = y\}} f_A(x).$$

avec la convention : $\sup_{\varphi} f_A(x)$.

1.5 Relation floues :

- Une ***relation floue*** **R** entre n ensembles de référence $X_1, X_2, \ldots X_n$ est un sous ensemble flou de $X_1 \times X_2 \times \ldots, \ldots \ldots \times X_n$, de fonction d'appartenance f_R .

Si **n = 2,** X_1 **=** X_2 **= X ; R** est dite relation binaire floue sur **X.**

- La **composition** de deux relations floues R_1 sur **X*Y** et R_2 sur **Y *Z** définit une relation floue **R=**$R_1 \circ R_2$ sur **X * Z** de fonction d'appartenance définie par :

$$\forall (x, z) \in X * Z \qquad f_R(x, z) = \sup_{y \in Y} \min(f_{R_1}(x, y), f_{R_2}(y, z))$$

Cette définition correspond à la composition sup-min. Il est cependant possible de remplacer l'opérateur min par un autre opérateur T, par exemple une norme triangulaire, pour définir la composition T-sup.

On peut généraliser les notions de relations d'équivalence et de relations d'ordre pour définir les relations de similarité et les relations d'ordre floues

Section 2 : Mathématiques Floues

Le but de cette section est de donner des exemples de l'investigation de la logique floue dans les domaines classiques des mathématiques. On a choisi les branches les plus abordées dans la littérature.

2.1 Arithmétique floue

La notion de quantité floue est un paradigme puissant pour la représentation des imprécisions dans les informations numériques. L'idée que les quantités floues peuvent être arithmétiquement combinées suivant les lois de la théorie des sous-ensembles flous est due à Zadeh.

2.1.1 Définitions

- Une quantité floue est un sous-ensemble flou normalisé de X. Une valeur de degré d'appartenance 1 est dite valeur modale.

- Un intervalle flou est une quantité floue convexe.

- Un nombre flou est un intervalle flou de fonction d'appartenance semi continue supérieurement et de support borné, admettant une valeur modale unique.

Le calcul des quantités floues est une application du principe d'extension. Les imperfections dans les connaissances (imprécisions, flou) peuvent être propagées dans un calcul arithmétique sous forme de degrés de possibilité, donc suivant les règles de la théorie des possibilités.

2.1.2 Définitions : Soit φ une opération unaire, Ψ une opération binaire, définies sur X.

Une opération unaire floue Δ fait correspondre, à toute quantité floue Q, une autre quantité floue ΔQ de fonction d'appartenance :

$$\forall\, z \in X : f_{\Delta Q}(z) = \mathrm{Sup}_{\{x\ /\ z=\varphi(x)\}}\ f_Q\ (x)$$

Une opération binaire floue * fait correspondre à deux quantités floues Q et Q', une autre quantité floue Q*Q' de fonction d'appartenance :

$$\forall\, z \in X : f_{Q*Q'}(z) = \mathrm{Sup}_{\{(x,y)\ /\ z=\Psi(x,y)\}}\ \min\left(f_Q\ (x), f_{Q'}\ (y)\right)$$

Remarque : L'addition et la multiplication floues sont des opérations internes dans l'ensemble des intervalles flous.

Applications : Plusieurs applications de l'arithmétique floue ont été proposées dans la littérature : Applications à l'Analyse, Recherche opérationnelle, Analyse décisionnelle, …

2.2 Topologie floue

Dès 1968, Chang a appliqué la théorie des ensembles flous à la topologie, donnant naissance à la topologie floue.

2.2.1 Définition

Soit E un ensemble. Une topologie floue est donnée par une collection δ de fonctions d'appartenance vérifiant les propriétés suivantes :

(i) les fonctions 0 et 1 appartiennent à la collection δ
(ii) La borne inférieure d'un nombre fini d'éléments de δ est élément de δ
(iii) La borne supérieure d'un nombre quelconque d'éléments de δ est élément de δ.

Les éléments de δ sont les ouverts flous. Leurs complémentaires sont les fermés flous. La propriété (i) exprime que l'ensemble E et l'ensemble vide sont des ouverts flous, la propriété (ii) qu'une intersection finie d'ouverts flous est un ouvert flou et la propriété (iii) qu'une réunion quelconque d'ouverts flous est un ouvert flou.

Par exemple, étant donné un espace E muni d'une topologie τ au sens usuel, on peut lui associer une topologie floue naturelle ω(τ) en prenant pour δ la collection des fonctions semi-continues inférieurement à valeurs dans [0,1]. La topologie floue ainsi définie est dite engendrée par la topologie initiale τ de E. Réciproquement, si δ est une topologie floue définie sur E, on peut lui associer une topologie ι(δ) au sens usuel, à savoir la topologie la moins fine rendant toutes les fonctions de δ semi-continues inférieurement.

2.2.2 Image réciproque : Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Considérons une partie floue de F donnée par sa fonction d'appartenance μ. On appelle image réciproque de cette partie floue par f la partie floue de E donnée par la fonction d'appartenance suivante, notée f − 1(μ) :

$$\forall x \in E, f^{-1}(\mu)(x) = \mu(f(x))$$

2.2.3 Image directe : Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Considérons une partie floue de E donnée par sa fonction d'appartenance μ. On appelle image directe de cette partie floue par f la partie floue de F donnée par la fonction d'appartenance suivante, notée f(μ) :

$$\forall y \in F, f(\mu)(y) = \sup\{\mu(x), x \in f^{-1}(\{y\})\}$$

2.2.4 Notions topologiques

a-Continuité

Ainsi une fonction est continue floue si et seulement si l'image réciproque d'un ouvert flou de l'ensemble d'arrivée est un ouvert flou de l'ensemble de départ. Les fonctions constantes sont continues floues si et seulement si la topologie floue de l'espace de départ contient tous les ouverts flous définis par des fonctions d'appartenance constante.

b-Compacité

Par analogie à la notion topologique usuelle, un espace topologique flou est compact si, de tout recouvrement par des ouverts flous, on peut extraire un recouvrement fini. Si l'image d'un compact par une application continue floue est compacte.

2.3 Mesures et intégrations Floues

Mesures floues

La notion de mesure floue est une extension de celle de mesure de probabilité. Les mesures floues servent à mesurer le degré ou au même titre que les mesures de probabilité servent à mesurer l'aléatoire.

2.3.1 Définition : Soit X un ensemble crisp, B une tribu de Borel sur X.
On appelle mesure floue toute fonction g de B à valeurs entre 0 et 1, satisfaisant :
- **Bornée** : g (∅) = 0, g (X) = 1.

- **Monotone** : A, B deux parties de B : A ⊂ B → g(A) <= g(B),
Le triplet (X, B, g) est dit : espace mesuré flou.

La notion de fonction mesurable se définit de manière analogue à la définition classique.

Remarque : Une mesure floue n'est pas nécessairement σ-additive.

Différentes versions floues de l'intégration ont été proposées dans la littérature. On présente ici les deux types les plus répandus : l'intégrale floue de Sugeno et celle de Choquet.

Soit **X** un ensemble ordinaire, **A** une partie crisp de **X**, ***μ*** une mesure floue définie sur X et μ une fonction réelle m-mesurable et bornée.

2.3.2 Définition : L'intégrale floue de Choquet de f sur A, par rapport à μ est définie par :

$$\int_A f\, d\mu = \int_{-\infty}^{0} [\mu(A \cap \{f \geq x\}) - \mu(A)]dx + \int_0^{+\infty} \mu(A\{f \geq x\})dx$$

Le signe d'intégration dans le terme droit désigne l'intégrale impropre de Reimann.

Soit **(X , B , g)** un espace mesuré flou, f une fonction réelle mesurable sur X.

2.3.3 Définition : L'intégrale floue de Sugeno de la fonction f sur une partie mesurable A de X, par rapport à la mesure floue μ est définie par :

$$\int_A f(x)^\circ\mu(.) = sup_{0\leq\alpha\leq1} [\alpha\wedge \mu(A \cap F_\alpha)]$$

où F_α={x /f(x)>= α}.

Applications: Diverses applications ont été proposées : Synthèse et agrégation d'informations floues, théorie des possibilités, …

2.4 Programmation mathématique floue :

On donne ici quelques exemples de l'apport de la logique floue en optimisation, c'est-à-dire, quelques éléments de l'optimisation floue. On va discuter principalement la programmation mathématique floue.

2.4.1 Programmation linéaire floues

Un problème réel comme par exemple une prise de décision, ne peut pas toujours être représenté d'une manière précise. C'est le cas quand l'objectif et/ou les contraintes ne sont connus que de manières approximatives. Ceci nous amène à utiliser la logique floue pour la représentation et le traitement des imperfections de connaissance, présentes dans les problèmes réels.

La Programmation Linéaire Floue (PLF) peut assouplir les conditions de la PL classique principalement de deux façons :

- P.L.F dans un environnement flou : C'est le cas où les contraintes et/ou la fonction objectif sont floues,

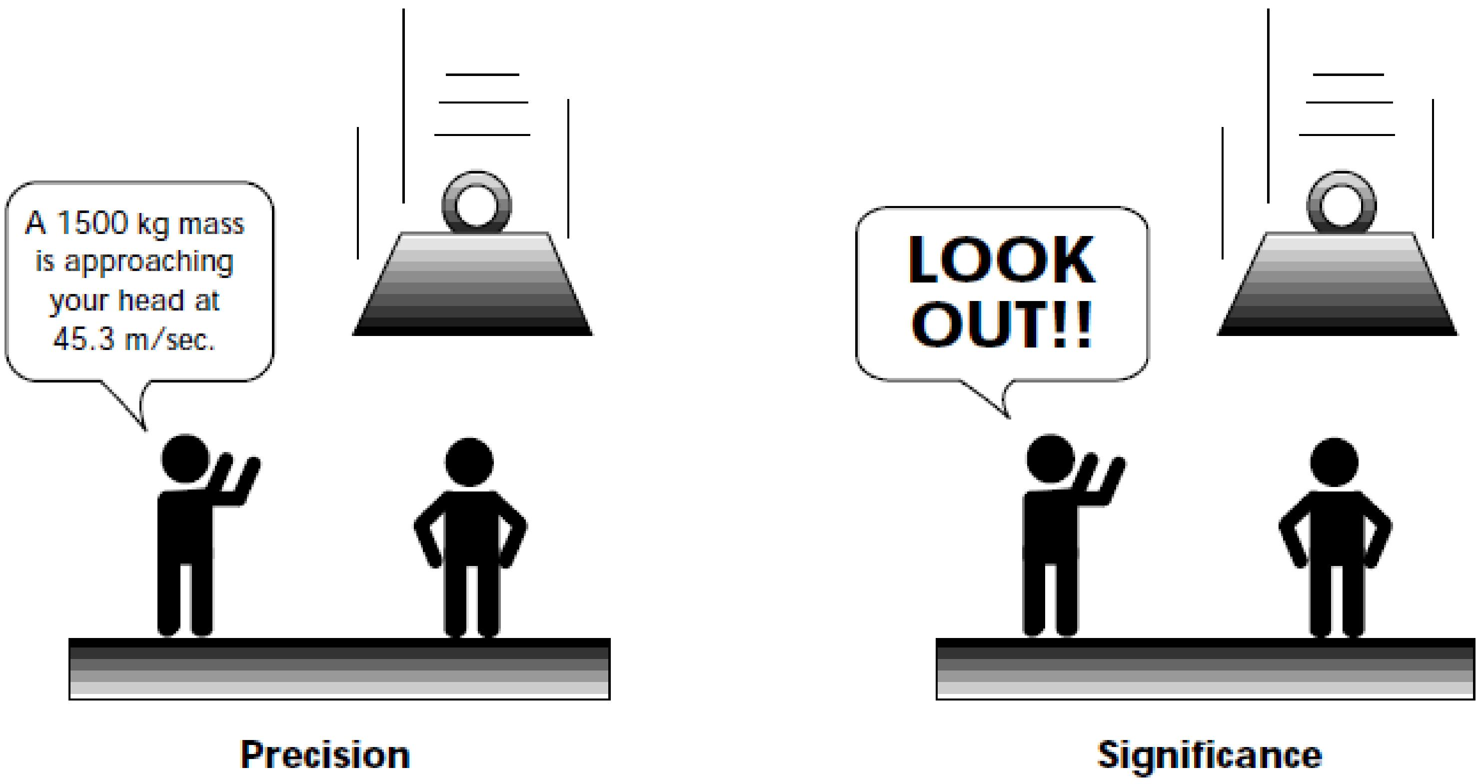
- P.L.F avec des coefficients flous : C'est le cas où les coefficients du problème (1) ne sont connus que de manières imprécises, représentés donc par des ensembles flous.

Différentes méthodes de résolution ont été proposées dans la littérature : méthode de Zimmerman, méthode de Verdgay, ...

2.4.2 Programmation mathématique floue

Les autres domaines de la programmation mathématique floue comme la programmation non linéaire, entière, dynamique, etc. n'ont pas été aussi explorés que celui de la programmation linéaire floue. Dans ce paragraphe une approche basée sur la modélisation des contraintes floues par des règles floues " Si - Alors " est présentée.
Les applications de la programmation mathématique floue ont touché plusieurs domaines et différents types de problèmes, notamment la décision multicritères.

Section 3 : La Logique Floue



3.1 Introduction

La logique floue est une extension de la logique booléenne créée par Lotfi Zadeh en 1965 en se basant sur sa théorie mathématique des ensembles floue, qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques. En introduisant la notion de degré dans la vérification d'une condition, permettant ainsi a une condition d'être dans un autre état que vrai ou faux, la logique floue confrère un flexibilité très appréciable aux raisonnements qui l'utilisent, ce qui rend possible la prise en compte des imprécisions et des incertitudes.

Un des intérêts de la logique floue pour formaliser le raisonnement humain est que les règles sont énoncées en langage naturel. Voici par exemple quelques règles de conduite qu'un conducteur suit, en supposant qu'il tienne a son permis :

Si le feu est rouge...	si ma vitesse est élevée...	et si le feu est proche...	alors je freine fort.
Si le feu est rouge...	si ma vitesse est faible...	et si le feu est loin...	alors je maintiens ma vitesse.
Si le feu est orange...	si ma vitesse est moyenne...	et si le feu est loin...	alors je freine doucement.
Si le feu est vert...	si ma vitesse est faible...	et si le feu est proche...	alors j'accélère.

Intuitivement, il semble donc que les variables d'entrée à l'instar de cet exemple sont Appréciées par le cerveau de manière approximative, correspondant ainsi au degré de Vérification d'une condition de la logique floue.

3.2 La théorie des possibilités

La théorie des possibilités est une théorie mathématique basée sur la théorie classique des ensembles, qui correspond à l'introduction de la nouvelle notion de distribution de possibilité. Elle fournit une méthode pour formaliser les incertitudes subjectives sur des événements, c'est un moyen de dire dans quelle mesure la réalisation d'un événement est possible et à quel point on en est certain sans, toutefois, avoir à sa disposition l'évaluation de sa probabilité.

3.2.1 Définition : Une mesure de possibilité π est une fonction π : P(X) → [0,1], vérifiant :

i) π (∅) = 0, π (X) = 1,

ii) ∀ $(A_i)_{i\in I}$ ∈ P(X) $\pi(\bigcup_i A_i) = sup_i\, \pi(A_i)$

où I est un ensemble d'indices quelconque.

3.2.2 Propriété : π (A∪ B) = Max (π (A), π (B)).

3.2.3 Définition : Une distribution de possibilité π est une fonction π : X → [0,1], vérifiant la condition de normalité : $\mathrm{Sup}_{x\in X}\, \pi$ (x) = 1.

La mesure de possibilité associée est définie par : π (A) = $\mathrm{Sup}_{x\in X}\, \pi$ (x)

3.2.4Définition : Une mesure de nécessité est une fonction N : P(X)→[0,1], vérifiant :

i) N (∅) = 0, N(X) = 1.

ii) ∀ $(A_i)_{i\in I}$ ∈ P(X) $\pi(\bigcap_i A_i)= min_i\, \pi(A_i)$

où I un ensemble d'indices quelconque.

3.2.5 Propriété : N (A∩ B) =Min (N(A), N(B)),

En l'absence de P(A), l'évaluation de la probabilité de l'événement A, on se sert du couple (N(A), p(A)) pour représenter l'incertitude sur l'occurrence de l'événement A. La nécessité et la possibilité d'un événement quelconque encadrent sa probabilité inconnue.

La théorie des ensembles flous comme base de celle des possibilités

La théorie des ensembles flous fournit une base naturelle à la théorie des possibilités. Une contrainte souple (floue) sur les valeurs que peu prendre une variable x induit une distribution de possibilités sur les valeurs que peut prendre cette variable. On associe donc à une variable dont les valeurs sont floues, une distribution de possibilité de la même manière qu'on associe à une variable aléatoire dont les valeurs ont stochastiques une distribution de probabilité. On peut interpréter donc toute distribution de possibilité comme une restriction floue élastique sur les valeurs que peut prendre une variable. La distribution de possibilité devient alors une fonction d'appartenance d'un ensemble flou représentant cette contrainte.

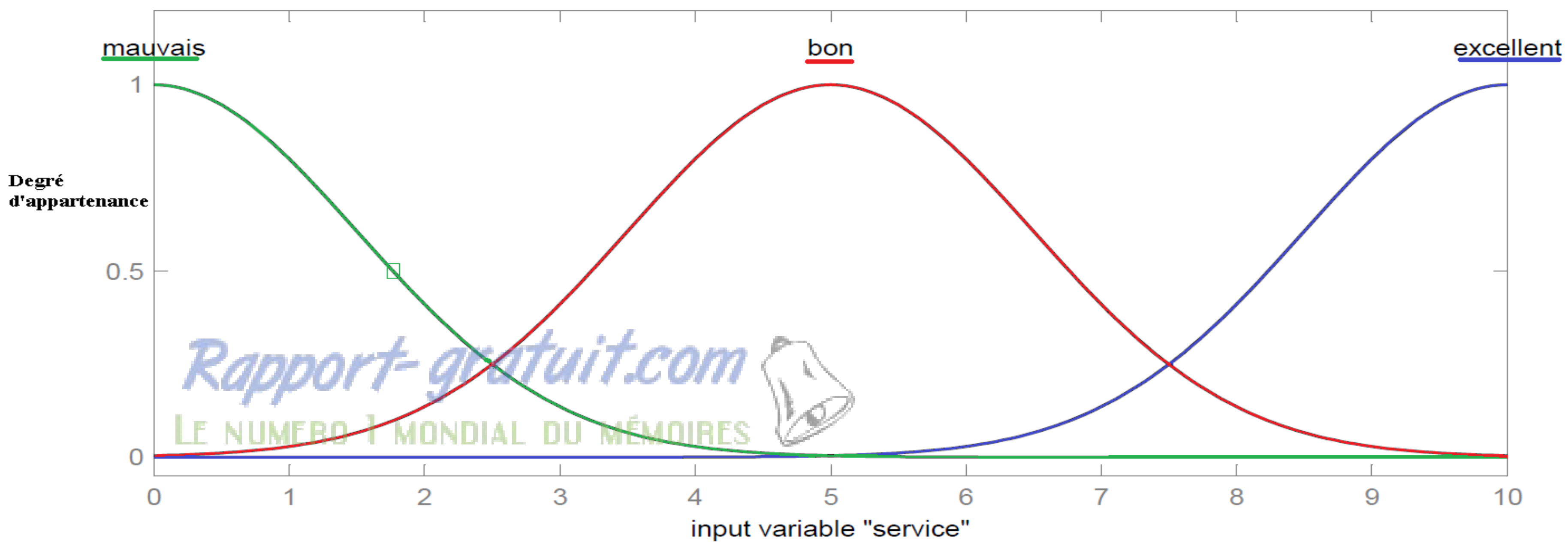
3.3 Les variables linguistiques

Le concept de fonction d'appartenance vu précédemment nous permettra de définir des systèmes Flous en langage naturel, la fonction d'appartenance faisant le lien entre logique Floue et variable linguistique que nous allons définir a présent. Une variable linguistique est une variable prenant ses valeurs dans un ensemble de "mots" symboliques (sous-ensembles flous), définissant certaines catégories d'un ensemble de référence.

3.3.1 Définition

Définitions : On appelle variable linguistique un triplet (V, X, TV), tel que :

i) X : un ensemble de référence,
ii) V : une variable symbolique définie sur X,
iii) TV : TV = {A1, A2,...} ensemble fini ou dénombrable de sous-ensembles flous Normalisés, utilisés pour caractériser V.



$$V = qualit\acute{e}\ du\ service$$
$$X = \Re^{+}$$
$$T_V = \{\underline{mauvais}, \underline{bon}, \underline{excellent}\}$$

Figure 1.5: Variable linguistique 'qualité du service

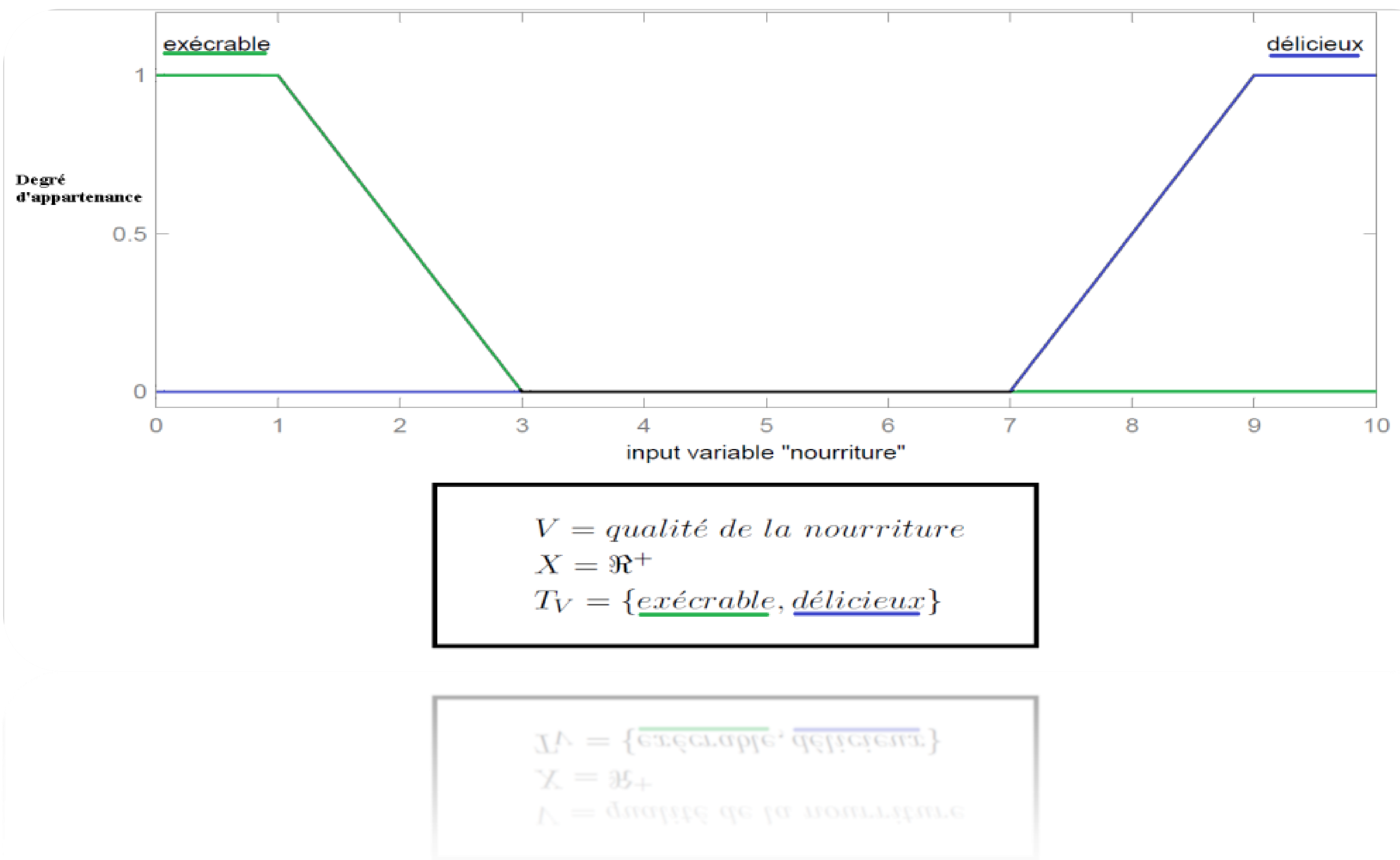


Figure 1.6: Variable linguistique 'qualité de la nourriture'

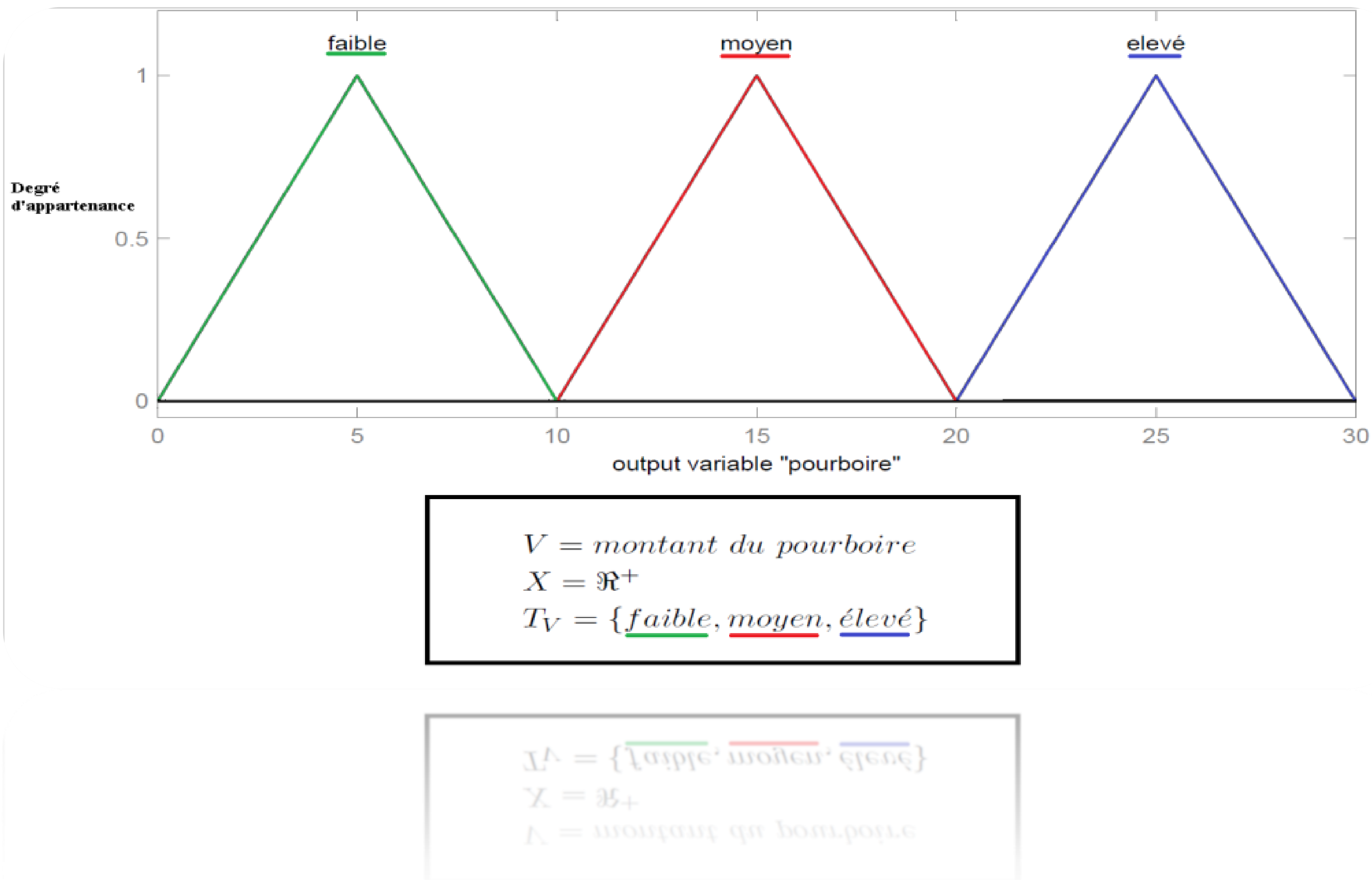


Figure 1.7: Variable linguistique 'montant du pourboire'

3.3.2 Définitions

On appelle **modificateur linguistique** un opérateur qui permet à partir de toute caractérisation floue A de V, de produire une nouvelle caractérisation.

Une **proposition floue élémentaire** est définie à partir d'une variable linguistique (V, X, TV) par la qualification " V est A ", avec : A ∈ TV ou A ∈ M(TV), ce dernier étant l'ensemble des caractérisations nouvelles obtenues en appliquant les modificateurs linguistiques.

L'utilisation conjointe de propositions floues élémentaires "V est A ", " W est B ",… pour des variables V, W …, supposées non-interactives, en utilisant des connecteurs comme la conjonction, la disjonction et l'implication, forme une **proposition floue.**

Une **proposition floue générale** est obtenue par conjonction, disjonction, négation et implication de propositions floues quelconques.

Une **règle floue** est une proposition floue de la forme " Si p alors q " utilisant une implication entre deux propositions floues quelconques p et q.

Distribution de possibilités associée à une proposition floue :

Etant donnée une proposition floue élémentaire "V est A ". Une distribution de possibilités lui est associée, donnée par : $\pi_{V,A}$(x) = f_A (x).

La distribution de possibilités associée à une proposition floue générale peut être calculée en appliquant les opérations ensemblistes de la théorie des ensembles flous, les distributions de possibilités étant considérées comme des fonctions d’appartenance.
Souvent, dans le langage naturel, on utilise des qualifications linguistiques et des quantificateurs symboliques, agissant sur des propositions floues. Ces opérations induisent des distributions de possibilités de différentes natures.

3.4 Le raisonnement en logique floue

La logique floue a été présentée par Zadeh comme un cadre du raisonnement approximatif, une théorie mathématique basée sur la logique floue et ayant pour objet l'étude des méthodes d'inférence à partir de prémisses imprécises et/ou incertaines. Les règles d'inférence sont approximatives au lieu d'être exactes et les prémisses sont des propositions floues. Les principales règles d'inférence dans le raisonnement approximatif sont la projection, la combinaison/projection, la règle compositionnelle et, comme cas particulier, le modus ponens généralisé.
Les problèmes de modélisation sont traditionnellement résolus dans le contexte de la modélisation mathématique en utilisant des équations algébriques, différentielles ou aux différences. Dans ce chapitre, on discutera les systèmes flous dont la relation liant entrée et sortie est décrite d'une manière symbolique qualitative, par des relations floues, généralement, sous forme de règles "Si - Alors", modélisées par des implications floues.

3.4.1 Implication floue :

L'implication floue entre deux propositions floues élémentaires "V est A ", et "W est B ", est une relation floue définie sur X *Y, dont la valeur de vérité est donnée par :

$$f_R\ (x, y) = \varphi\ (f_A\ (x), f_B\ (y))\ ,\ \text{avec} \qquad \varphi : [0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]\ .$$

L'implication floue entre deux propositions floues quelconques se définit de la même manière en considérant les distributions de possibilités associées aux propositions floues en question. Plusieurs classes d'implications floues peuvent être définies.

En logique classique, les raisonnements sont de la forme :

$$\begin{cases} \text{Si p alors} \\ \text{p vrai alors q vrai} \end{cases}$$

En logique floue, le raisonnement ou, également appelée raisonnement approximatif, se blase sur des règles floues qui sont exprimées en langage naturel en utilisant les variables linguistiques dont nous avons donnée la définition précédemment. Une règle Floue aura cette forme :

Si **x** ∈ **A** et **y** ∈ **B** alors **z**, avec **A** et **B** des ensembles flous.

3.4.2 Différents types des systèmes flous

Selon la forme des conclusions des règles floues, deux types principaux de modèles flous peuvent être distingués :

a. Les modèles flous linguistiques : Dans les modèles linguistiques, les quantités floues sont décrites par des termes linguistiques, et le modèle flou constitue une description du système dans une langue naturelle. Ce type est caractérisé par des règles floues ayant des prémisses et des conclusions floues. Ils permettent une description linguistique du système par une base de règles floues de la forme :

R_i : Si X est A_i et Y est B_i Alors Z est C_i , i = 0,...,n

Les modèles les plus connus de ce type sont celui de Mandani et celui de Larsen.

Ces modèles présentent l'avantage d'être facilement interprétables, et bien adaptés à l'utilisation des entrées floues. En revanche, ils ont une capacité de représentation limitée.

b. Modèles flous de Takagi-Sugeno-Kang (TSK) : un modèle de TSK est constitué par une base de règles floues de la forme :

R_i : Si X est A_i et Y est B_i Alors Z= F_i (x, y) , i = 0,..., n.

où Fi sont des fonctions crisp, généralement linéaires, affines ou même constantes. Le modèle global est obtenu par interpolation entre les modèles locaux. Cela nous permet d'accroître la précision du système, mais au détriment de sa lisibilité.

Les modèles de TSK permettent de décrire des situations où la structure physique du système est bien connue et d'approcher un système complexe par une collection de modèles locaux, généralement linéaires. Les modèles de TSK ont une capacité de représentation importante. Toutefois, les règles n'ont pas toujours une signification sémantique claire comme dans le cas des modèles linguistiques et ne permettent pas d'intégrer l'expérience humaine formulée par des règles linguistiques.

Comparaison : Les modèles linguistiques ont une représentation moins efficace que les modèles TSK, mais offrent une meilleure interprétation sémantique, et permettent d'incorporer des règles proposées par des experts humains de manière directe. Le choix de l'un ou de l'autre dépend des données du problème et du but de la modélisation. Pour la modélisation des systèmes dynamiques, les modèles de TSK s'avèrent plus appropriés, et se caractérisent par une grande précision. Les modèles de Mamdani, largement utilisés en contrôle, sont appropriés à la modélisation des connaissances qualitatives des experts. Les deux types de modélisation s'avèrent donc complémentaires.

Par exemple

'Si (la qualité de la nourriture est délicieuse), alors (le pourboire sera élevée)'.

La variable 'pourboire' appartient a l'ensemble flou 'élevée' a un degré qui dépend du degré de validité de la prémisse, autrement dit du degré d'appartenance de la variable 'qualité de la nourriture' a l'ensemble flou 'délicieux'. L'idée sous jacente est que plus les propositions en prémisse sont vérités, plus l'action préconisé pour les sorties doit être respectée. Pour connaitre le degré de vérité de la proposition Floue le pourboire sera élevée', nous devons définir l'implication floue.

A l'instar des autres opérateurs flous, il n'existe pas de définition unique de l'application floue : le concepteur du système flou devra choisir parmi le large choix d'implications floues déjà définies, ou bien la définir a la main. Voici les deux définitions de l'implication floue les plus couramment utilisées :

Nom	Valeur de vérité
Mamdani	$min\,(f_a(x), f_b(x))$
Larsen	$f_a(x) \times f_b(x)$

Fait notable, ces deux implications ne généralisent pas l'implication classique. Il existe d'autres définitions d'implication Floue la généralisant, mais elles sont moins utilisées.

Si nous choisissons l'implication de Mamdani, voici ce que nous obtenons pour la règle floue 'Si (la qualité de la nourriture est délicieuse), alors (le pourboire sera élevée)' lorsque la qualité de la nourriture est notée 8,31 sur 10 :

Degre de vérité de la proposition

Nourriture=8.31

« le porboire est élevée »

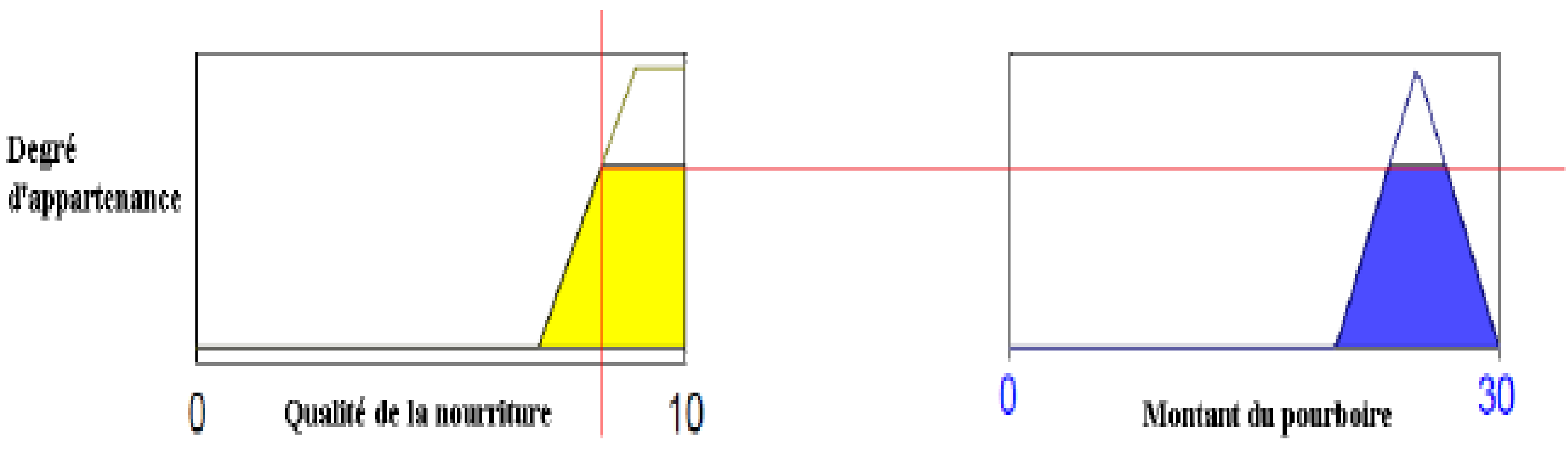


Figure 1.8 exemple d'implication Floue

Le résultat de l'application d'une règle floue dépend donc de trois facteurs :

1. la définition d'implication floue choisie;

2. la définition de la fonction d'appartenance de l'ensemble ou de la proposition située en conclusion de la règle floue;

3 .le degré de validité des propositions situées en prémisse.

Comme nous avons défini les opérateurs flous ET, OU et NON, la prémisse d'une règle floue peut très bien être formée d'une conjonction de propositions floues. L'ensemble des règles d'un système ou est appelée la matrice des décisions. Voici celui de notre exemple du pourboire :

Si le service est mauvais ou la nourriture est exécrable	alors le pourboire est faible
Si le service est bon	alors le pourboire est moyen
Si le service est excellent ou la nourriture est délicieuse	alors le pourboire est elevé

La figure 1.9 montre nous obtenons pour la règle floue 'Si (le service est excellent ou la nourriture est délicieuse), alors (le pourboire sera élevée)' lorsque la qualité du service est notée 7,83 sur 10 et la qualité de la nourriture 7,32 sur 10 si nous Choisissons l'implication de Madani ainsi que la traduction du OU par MAX.

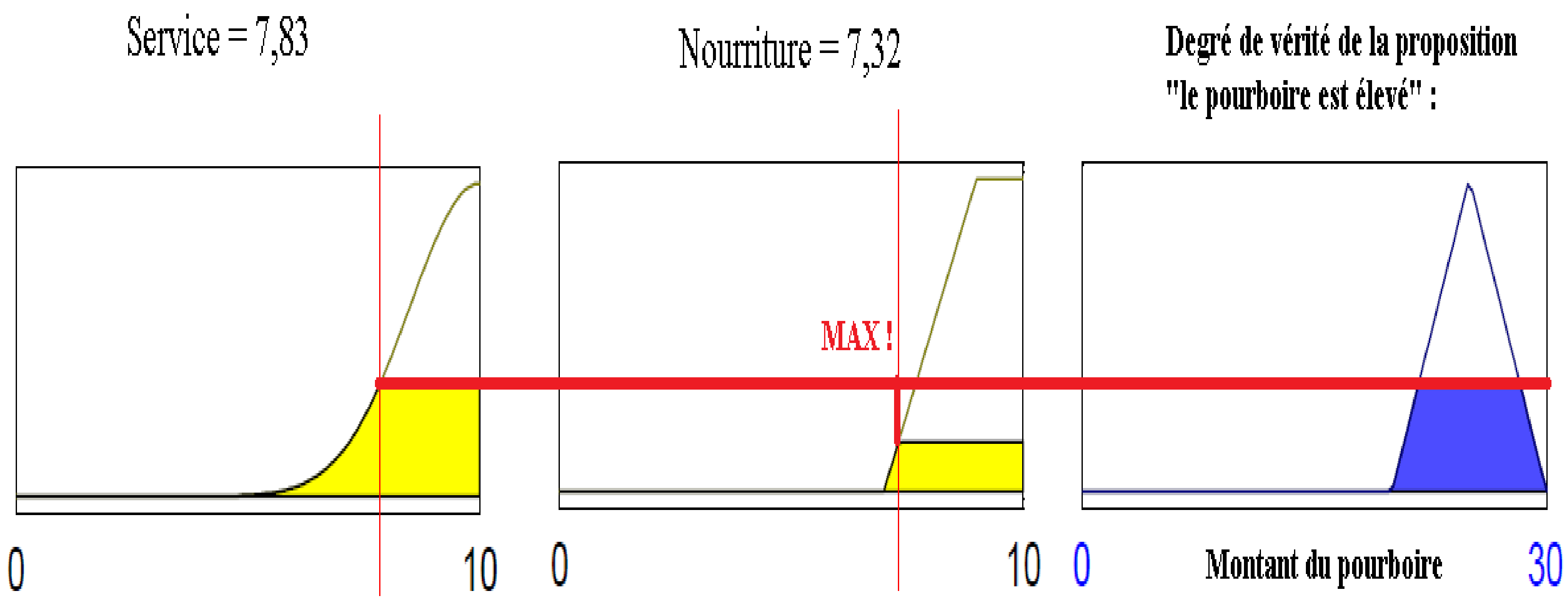


Figure 1.9: Exemple d'implication Floue avec conjonction OU traduite par un MAX

Nous allons maintenant appliquer l'ensemble des 3 règles de notre matrice de décisions. Cependant, nous allons obtenir 3 ensembles flous pour le pourboire : nous les agrégerons par l'operateur MAX qui est presque toujours utilisé pour l'agrégation. La figure 1.10 montre cette agrégation.

Comme nous le voyons, il ne nous reste plus qu'a prendre la décision finale, a savoir quel pourboire nous allons réellement donner sachant que la qualité du service est notée 7,83 sur 10 et la qualité de la nourriture 7,32 sur 10. Cette étape finale, qui permet de passer de l'ensemble ou issu de l'agrégation des conclusions a une décision unique, s'appelle la defuzzification.

La defuzzification

Comme pour tous les opérateurs Flous, le concepteur du systèmes ou doit choisir parmi plusieurs définitions possibles de defuzzification. Une liste détaillée peut être consultée dans [Leekwijck and Kerre, 1999]. Nous allons présenter brièvement les deux principales méthodes de defuzzication : la méthode moyenne des maxima (MM) et la méthode du centre de gravite (COG).

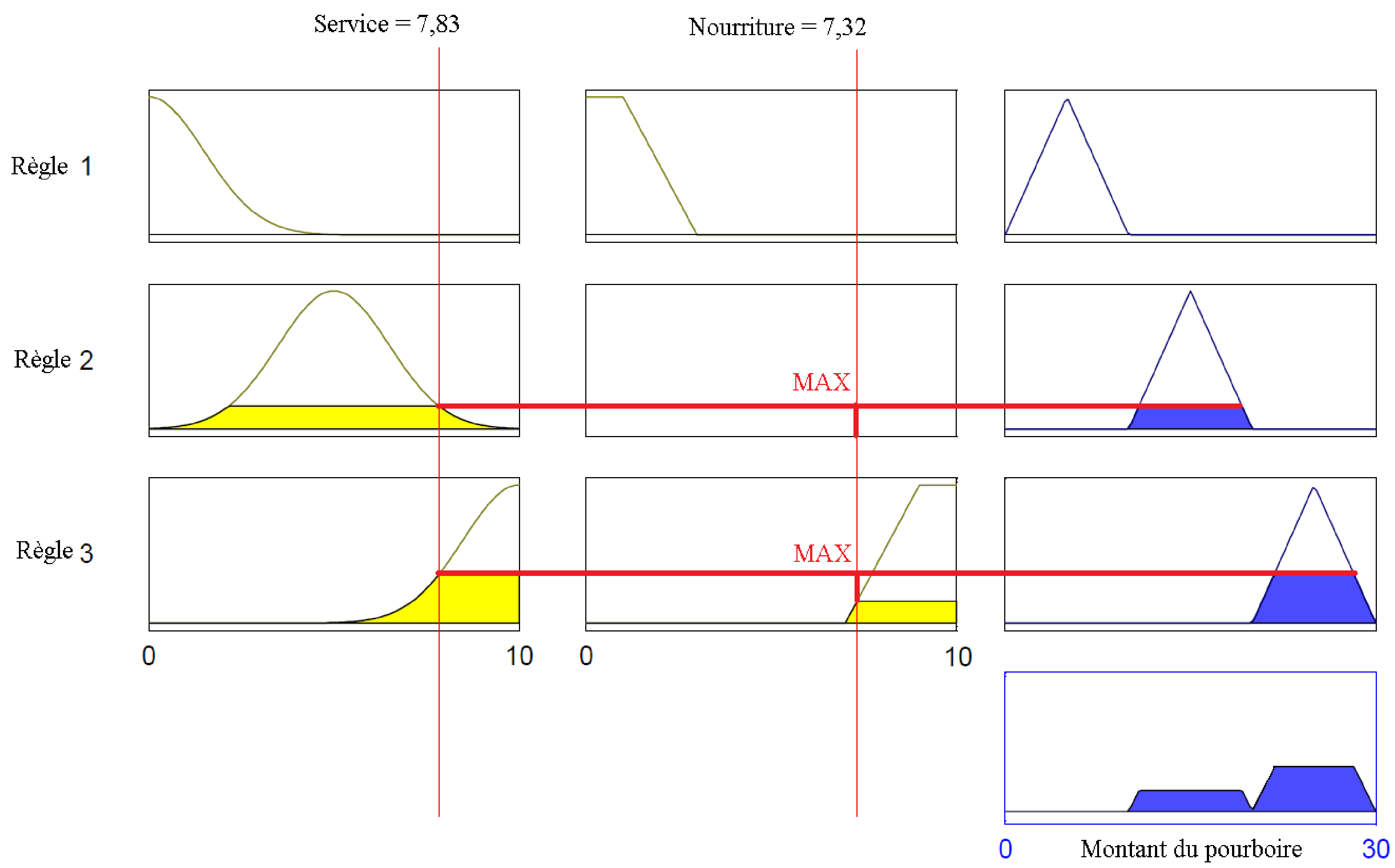


Figure 1.10: Exemple d'implication Floue en utilisant la matrice des décisions

La defuzzification MM définit la sortie (décisions du montant du pourboire) comme étant la moyenne des abscisses des maxima de l'ensemble ou issu de l'agrégation des conclusions.

$$\text{Décision}=\frac{\int_S y.dy}{\int_S dy}$$

ou $S = \{ y_m \in R\ , \mu(ym) = SUP_{\ y\in R}\ ((y))\}$

et R est l'ensemble ou issu de l'agrégation des conclusions.

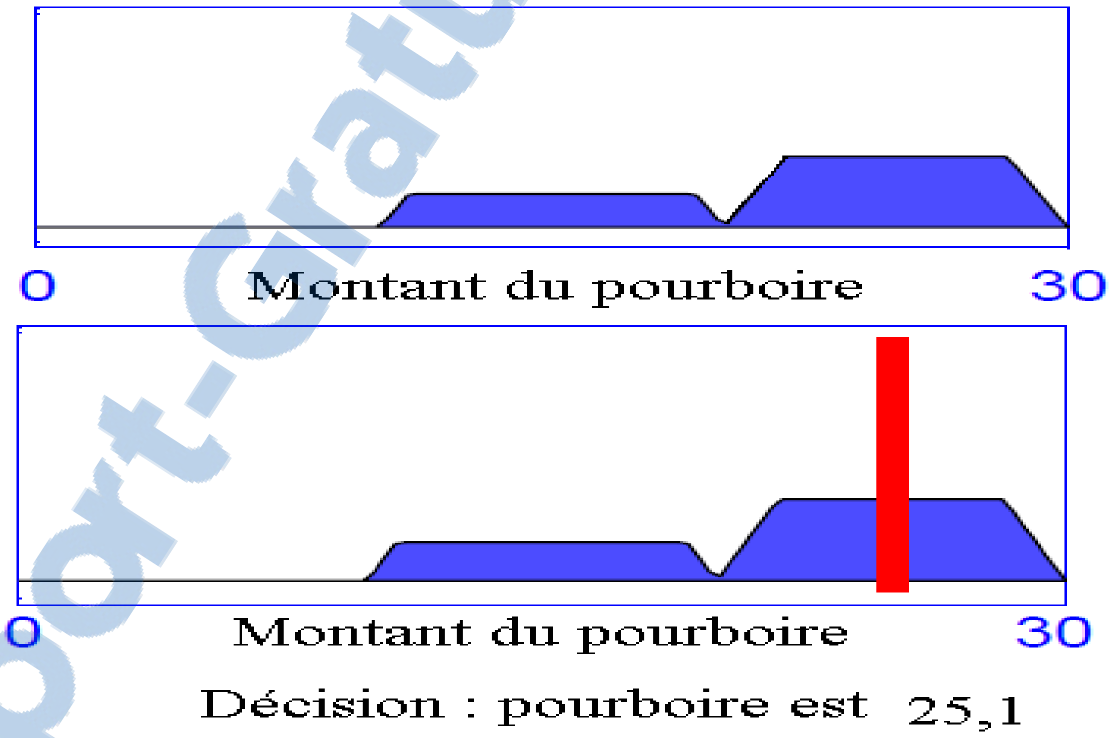


Figure 1.11: Defuzzification avec la méthode moyenne des maxima(MM)

La defuzzification COG est plus couramment utilisée. Elle définit la sortie comme Correspondant a l'abscisse du centre de gravité de la surface de la fonction d'appartenance caractérisant l'ensemble ou issu de l'agrégation des conclusions.

$$\text{Décision}=\frac{\int_S y.\mu\ (\mathrm{u}).dy}{\int_S \mu\ (\mathrm{u}).dy}$$

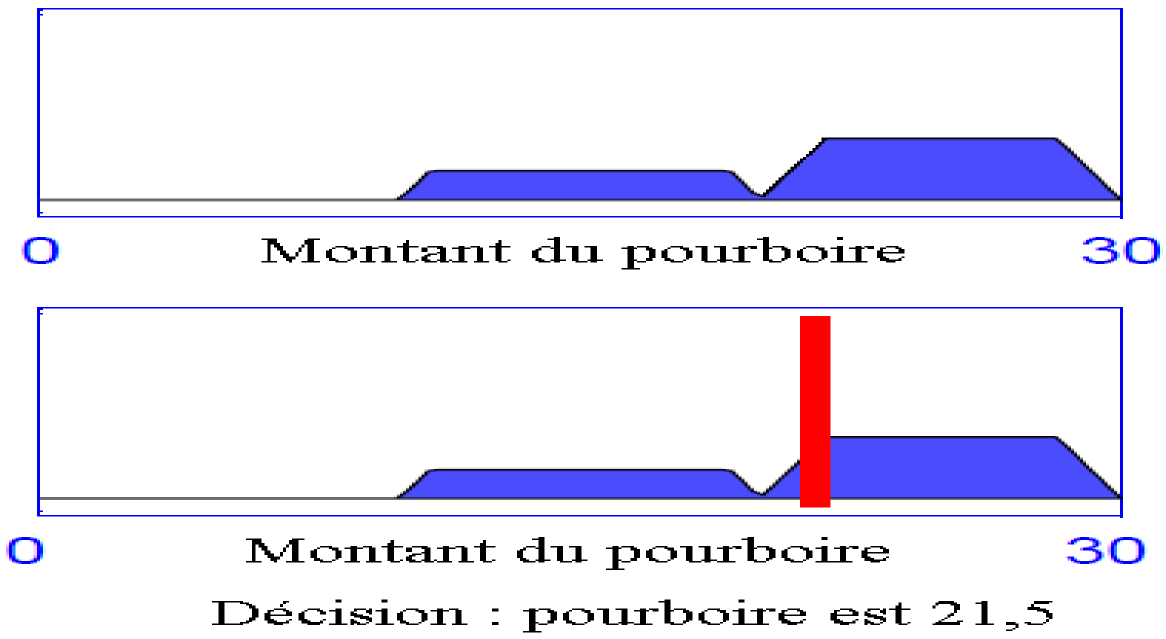


Figure 1.12: Defuzzification avec la méthode centre de gravité (COG)

Cette définition permet d'éviter les discontinuités qui pouvaient apparaitre dans la defuzzification MM, mais est plus complexe et demande des calculs plus importants. Certains travaux tel [Madau D., 1996] cherchent a améliorer les performances en cherchant d'autres méthodes aussi efficaces mais avec une complexité algorithmique moindre. Comme nous le voyons sur les 2 figures montrant les méthodes de defuzzification MM et COG appliquées a notre exemple, le choix de cette méthode a un effet important sur la décision finale.

Au cours des définitions, nous avons vu que le concepteur d'un système ou doit faire un nombre de choix important. Ces choix se basent essentiellement sur les conseils de l'expert ou sur l'analyse statistique des données passées, en particulier pour définir les fonctions d'appartenance et la matrice des décisions. Voici un aperçu synoptique d'un système flou :

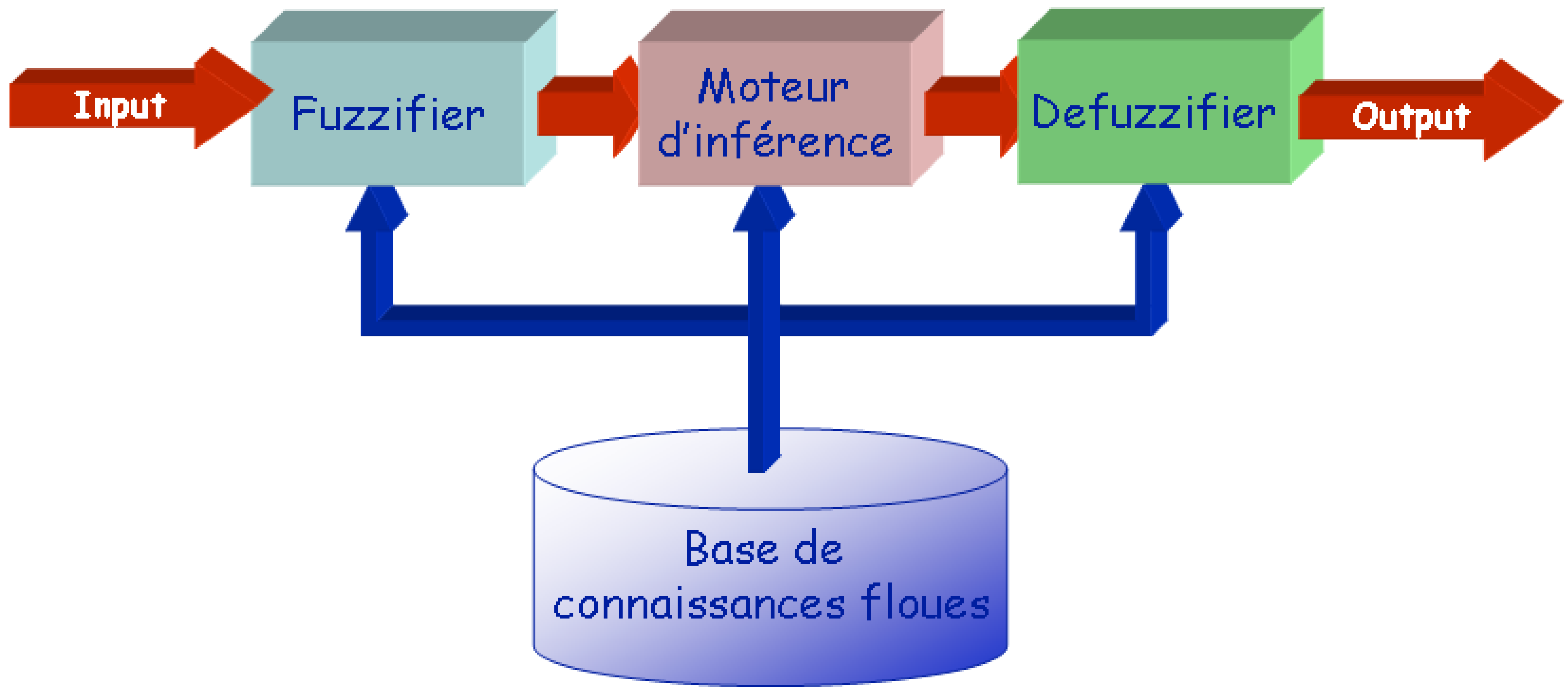


Figure 1.13: Aperçu synoptique d'un système Flou

Dans notre exemple,

-l'input est 'la qualité du service est notée 7,83 sur 10 et la qualité de la nourriture 7,32 sur 10' ;

- le fuzzifier correspond aux 3 variables linguistiques 'qualité du service', 'qualité de la nourriture' et 'montant du pourboire' ;

-le moteur d'inférence est constitué du choix des operateurs flous ;

-la base de connaissances floues est l'ensemble des règles floues ;

- le defuzzifier est la partie ou entre en jeu la méthode de defuzzification ;

- l'output correspond a la décisionnelle : 'le montant du pourboire est 25,1'.

Il est intéressant de voir l'ensemble des décisions en fonction de chacune des variables avec notre système d'inférences ou (Figure 1.14) par rapport au type d'ensemble de décisions que nous obtiendrions en utilisant la logique classique (Figure 1.15).

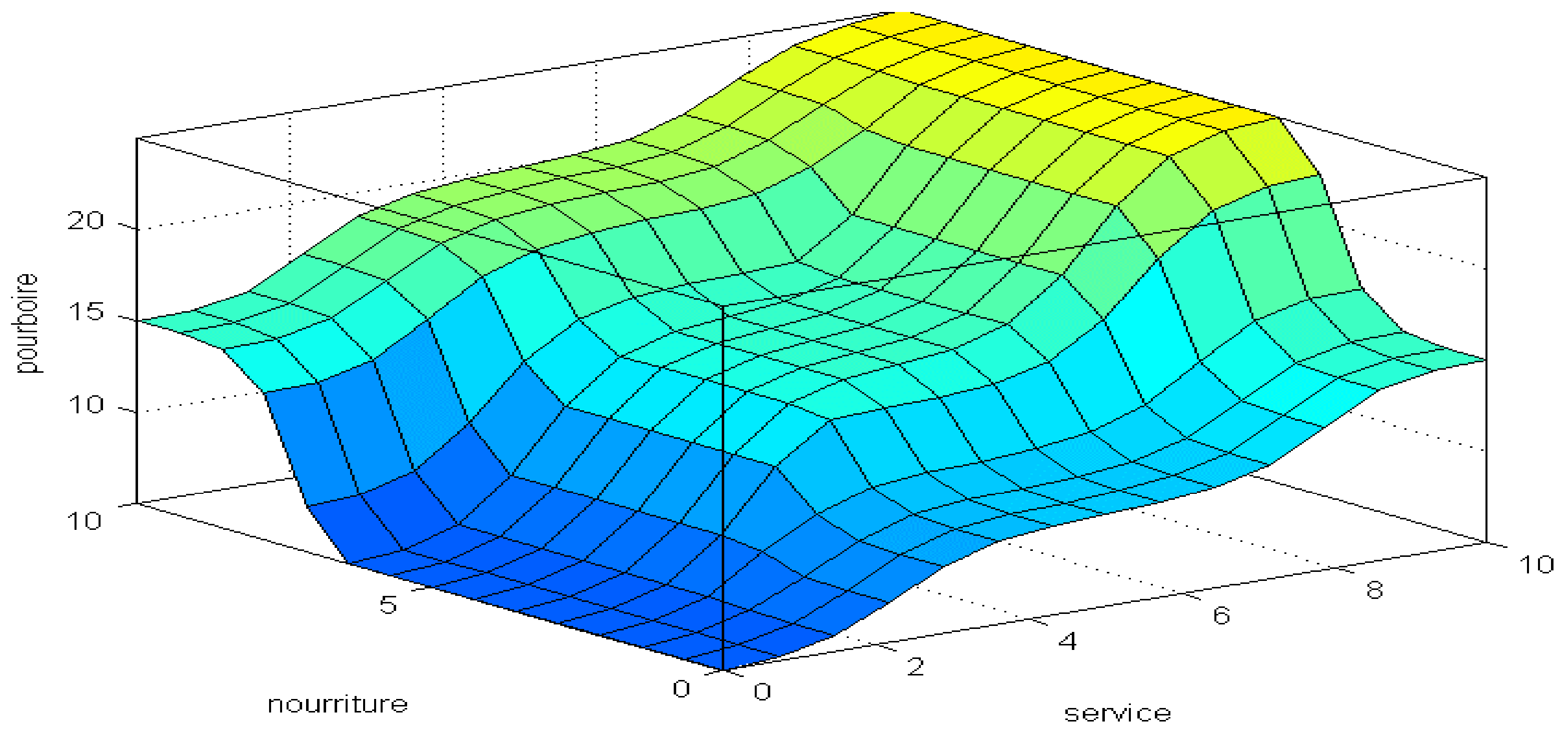


Figure 1.14: Ensemble des décisions d'un système Flou

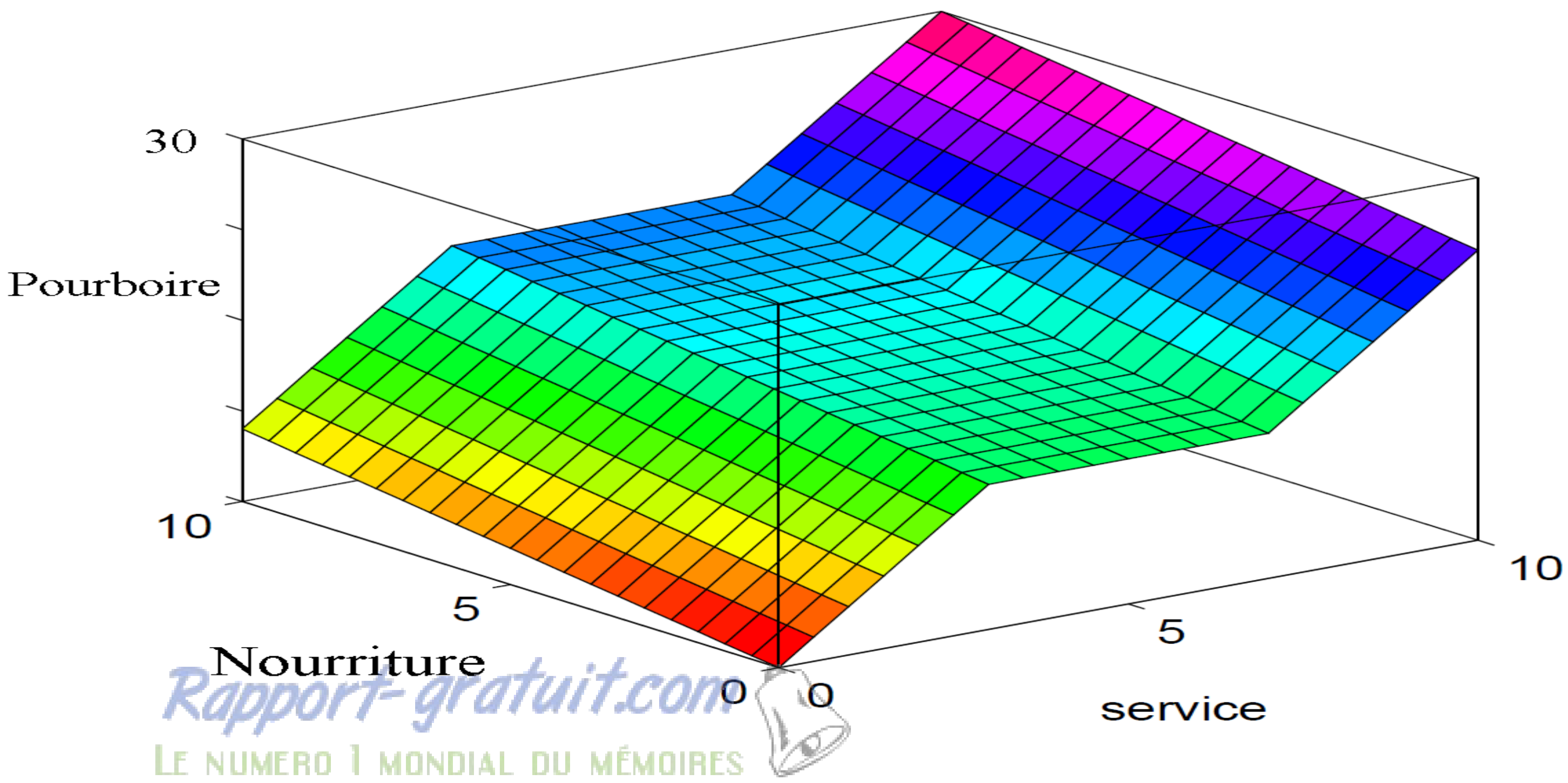


Figure 1.15: Ensemble des décisions d'un système se basant sur la logique classique

Ainsi, toute la puissance de la logique floue est de rendre possible la mise en place de systèmes d'inférences dont les décisions sont sans discontinuités, flexibles et non linéaires, plus proche du comportement humain que ne l'est la logique classique. De plus, les règles de la matrice des décisions sont exprimées en langage naturel, ce qui comporte de nombreux avantages, comme par exemple inclure des connaissances d'un expert non informaticien au coeur d'un système décisionnel ou encore modéliser plus finement certains aspects du langage naturel.

Conclusion

En introduisant la théorie des sous-ensembles flous, Zadeh a offert un outil puissant pour la modélisation des systèmes complexes, pour lesquels on ne dispose que d'une spécification approximative ou imprécise. Le but d'un modèle est de capturer la relation entre les entrées et les sorties d'un système. A l'encontre d'un modèle conventionnel qui décrit cette relation par une loi mathématique, un modèle flou là décrit linguistiquement. De façon générale, les ensembles flous peuvent intervenir efficacement dans la modélisation des systèmes complexes, principalement en raison de leur capacité à synthétiser des informations, à permettre une approche globale de certaines caractéristiques du système grâce à la gradualité qui leur est inhérente, et également, bien sur, en raison de leur aptitude à traiter des connaissances imparfaites, c'est-à-dire par exemple incomplètes, approximatives, vagues, soumises à des erreurs de mesure, …Les modèles flous ont deux propriétés essentielles :

- le traitement se fait au niveau symbolique. En fait, ces modèles sont conçus pour manipuler des valeurs linguistiques, comme c'est le cas chez l'homme. Ceci est devenu possible grâce aux variables linguistiques et à la représentation des spécifications des valeurs linguistiques par des ensembles flous.

- Ils sont capables de représenter l'imprécision et l'incertitude d'un expert humain. Cette propriété est particulièrement intéressante, car les modèles flous sont souvent inspirés de la connaissance humaine. Il est donc nécessaire d'inclure l'imprécision et l'incertitude que contient cette connaissance dans le modèle flou.

Les domaines d'application de la logique floue se sont multipliés depuis la fin des années soixante. Les domaines d'application dans lesquels il existe des utilisations de la logique floue sont très variés : médecine et biologie, génie industrielle, technique, économie, défense, écologie, sciences humaines, recherche scientifique, …

Au-delà de l'intérêt mathématique suscité par la logique floue et de la mise en évidence d'applications commerciales, il faut considérer la logique floue avec la même objectivité que celle accordée à toute méthodologie ou technique actuellement considérée comme classique, comme l'automatique ou la théorie des probabilités par exemple. La logique floue a presque quarante ans, elle entre dans sa maturité et ne doit plus être regardée comme une science balbutiante.

Elle repose sur des fondements théoriques établis dans de multiples publications internationales par des chercheurs de la plus haute compétence ; elle n'est pas isolée dans sa recherche, mais des liaisons ont été établies avec d'autres axes tels que les logiques non classiques, la théorie des probabilités, automatique classique, pour n'en citer que quelques uns. Ses applications touchent tous les domaines parce qu'elle s'efforce d'apporter des solutions à des situations réelles où le flou est présent, d'autant plus que, nous le voulions ou non, nous vivons dans un monde flou…

Sommaire

Table des Figures

Références

[1] Robert Babuska, *Fuzzy Systems, Modeling and Identification*, 1998.

[2] Bernadette *Bouchon*-Meunier, *La logique floue et ses applications*, Collection Vie Artificielle, Addison-Weiley, 1995.

[3] Didier Dubois, Henri Prade, *Fuzzy sets in approximate reasoning*, Part 1, Fuzzy Sets and Systems 40, pp. 143-202, North-Holland, 1991.

[4] Jang , J- S. R., Chuen-Tsai Sun, *Neuro-fuzzy modeling and Control*, Proc. Of the IEEE, March 95.

[5] L.A. Zadeh. *A theory of approximate reasoning*. In J.E. Hayes, D. Michie and L.I. Mikulich, ed. Machine Intelligence, Vol. 9, pp. 149-194. Elsevier, Amsterdam, 1979.

[6] [Leekwijck and Kerre, 1999] Leekwijck, W. V. and Kerre, E. E. (1999). Defuzzification : criteria and classification. Fuzzy Sets and Systems, 108(2) :159 -178. [cited at p. 9]

[7] [Madau D., 1996] Madau D., D. F. (1996). Inuence value defuzzification method. Fuzzy Systems, Proceedings of the Fifth IEEE International Conference, 3 :1819 -1824. [cited at p. 11]

[8] [Zadeh, 1965] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. Information and Control, 8(3) :338 - 353. [cited at p. 2]