Table des matières

Introduction

La théorie qualitative des équations différentielles et des systèmes dynamiques traitent en grandes parties les propriétés asymptotiques des solutions et des trajectoires - ce qui se passe avec le système après une longue période de temps. Le type le plus simple du comportement se manifeste par des points d'équilibre, ou de points fixes et par des orbites périodiques. Si une orbite particulière est bien comprise, il est naturel de se demander ensuite si un petit changement dans l'état initial va conduire à un comportement similaire. La théorie de la stabilité aborde les questions suivantes : est-ce qu'une orbite à proximité reste indéfiniment à proximité d'une orbite donnée ? Va-t-elle converger vers l'orbite donnée (il s'agit d'une propriété plus forte) ? Dans le premier cas, l'orbite est dite stable et dans ce dernier cas, asymptotiquement stable, ou attractive.

La notion de stabilité de Lyapunov (ou, plus correctement, de stabilité au sens de Lyapunov) apparaît en mathématiques et en automatique dans l'étude des systèmes dynamiques. Le champ des applications de cette notions est indéfiniment large elle joue également un rôle en mécanique, dans les modèles économiques, les algorithmes numériques, la mécanique quantique, la physique nucléaire ,. . ., etc.

Historiquement la théorie qualitative des équations différentielles, a été initiée par Poincaré et Birkhoff, puis c'est Alexandre Lyapunov qui a établi les fondations de sujet, en effet Joseph Liouville a appliqué le principe de Lagrange aux mouvements d'un fluide en rotation en 1842, puis en 1855. Ses résultats ont été peu convaincants, et le problème a intéressé Pafnouti Tchebychev en 1882 ; il l'a confié à Alexandre Lyapunov dans le cadre de sa maîtrise.

Lyapunov a tout d'abord repris la méthode de Liouville, puis s'est vivement intéressé à la démonstration de Dirichlet. Aux yeux de Lyapunov, le point essentiel était que l'énergie totale

$$V(q, q') = T(q, q') + U(q)$$

est une « fonction définie positive » en $x = (q, q')$, qui reste constante tandis que le système bouge. Cette énergie totale allait devenir en 1892, dans sa thèse de doctorat intitulée Le problème général de la stabilité du mouvement, ce que nous appelons aujourd'hui une « fonction de Lyapunov ». Cette thèse est d'abord parue en russe, puis traduite en français en 1908, et en anglais pour son centenaire, en 1923. Dans ce travail, Lyapunov, influencé d'autre part par les travaux d'Edward Routh avec son Treatise " on the Stability of a Given State of Motion " (1877), de William Thomson (Lord Kelvin) et Peter Guthrie Tait avec leur Treatise " Natural Philosophy " (1879), de Nikolaï Iegorovitch Joukovski qui avait fait sa thèse sur la stabilité du mouvement en 1882, et de Poincaré avec son mémoire de 1889 déjà mentionné, a également introduit les notions de stabilité (au sens que nous appelons aujourd'hui « de Lyapunov ») et de stabilité asymptotique. Lyapunov a d'autre part étudié la stabilité de l'origine pour les systèmes « quasi-linéaires »

$$x' = Ax + f\left(x\right),$$

et est parvenu à la conclusion que, lorsque la matrice A est constante, et que 0 est asymptotiquement stable pour ce système lorsqu'il est linéaire ($f = 0$), alors il est également stable pour le système non linéaire lorsque $\|f(x)\| = o(\|x\|)$ pour $\|x\| \longrightarrow 0$. Durant les années qui ont suivi, Lyapunov a continué d'étudier la stabilité de ces systèmes quasi-linéaires dans le cas où la matrice constante A du système linéaire a ses valeurs propres sur l'axe imaginaire. Ces travaux ont été retrouvés dans les papiers de Lyapunov et publiés une dizaine d'années après qu'il se fut donné la mort en 1918.

Les progrès de l'Analyse, grâce notamment aux travaux de Maurice René Fréchet, ont alors permis à Joël Guilievitch Malkine d'affiner les définitions de Lyapunov et d'introduire la notion de stabilité uniforme dans les années 1940. Konstantin Petrovitch Persidski, dans son article " Sur la théorie de la stabilité des équations différentielles " (1946) a établi pour le système quasi-linéaire ci-dessus, que si 0 est uniformément asymptotiquement stable lorsque $f = 0$, 0 est encore uniformément asymptotiquement stable lorsque $f \neq 0$ vérifie la condition indiquée.

Il n'était pas suffisant de définir clairement la stabilité uniforme, il convenait d'étudier de plus près la stabilité asymptotique. La notion de stabilité exponentielle a été introduite par Malkine en 1935.

R.E. Vinograd a montré sur un exemple, en 1957, que l'attractivité d'un point d'équilibre n'entraîne pas sa stabilité asymptotique, même pour un système autonome.

Nikolaï Tchetaïev a énoncé en 1934 un important critère d'instabilité de l'origine, généralisant un autre critère obtenu par Lyapunov en 1892 (le théorème de Tchetaïev a lui-même été généralisé par plusieurs auteurs, dont José Luis Massera (en) en 1956 et James A. Yorke (en) en 1968. Les livres de Malkine (Theory of Stability of Motion, 1952), Nikolaï N. Krasovskii (Stability of Motion, 1959) et l'article de Massera déjà mentionné, ont contribué à donner à ces résultats leur forme définitive. Une addition importante est celle faite par Evgenii Alekseïevitch Barbachine et Krasvoskii en 1952 en Russie, et indépendamment par Joseph P. LaSalle en 1960 aux États-Unis, du « Principe d'invariance (en) de Krasovskii-LaSalle ». Ce Principe a tout d'abord été obtenu pour les systèmes autonomes ; sa généralisation au cas des systèmes non autonomes, qui est non triviale, a été réalisée par Jack K. Hale et LaSalle en 1967.

L'approche inaugurée par Lyapunov pour les systèmes définis par une équation différentielle a été étendue au cas des systèmes définis par une équation différentielle retardée vers la fin des années 1950 et le début des années 1960 par Krasvoskii et Boris Sergueïevitch Razoumikhine ; le principe d'invariance de Krasovskii-LaSalle a été étendu à ces systèmes par Hale en 1965, et on doit à cet auteur une synthèse, plusieurs fois rééditée et à chaque fois augmentée, de l'ensemble de ces résultats.

Il est bien connu d'après la littérature que les Ã©quations différentielles scalaire de troisième ordre de la forme

$$x''' + a_1 x'' + a_2 x' + a_3 x = p\left(t, x, x', x''\right),$$

dans lesquels a_1, a_2 et a_3 ne sont pas nécessairement des constantes a fait l'objet de nombreuses études de plusieurs auteurs, pour étudier les comportements qualitatifs de solutions de ce type des équations différentielles à savoir stabilité des solutions, l' instabilité des solutions, le comportement asymptotique la bornitude des solutions et l'existence de solutions périodiques.

Cependant, selon les observations des auteurs de l'article [95] dans la littérature. Seulement un peu de recherches ont été réalisées sur les comportements des équations différentielles vectorielles non linéaires de troisième ordre de la forme

$$X''' + A_1 X'' + A_2 X' + A_3 X = P\left(t, X, X', X''\right)$$

telle que $X \in \mathbb{R}^n$, A_1, A_2 et A_3 sont des matrices non nécessairement constantes de $\mathbb{R}^{n \times n}$. et

$$P : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Le premier article ecrit pour étudier cette classe des équations différentielles vectorielles non linéaires de troisième ordre est l'article d' Ezeilo et Tejumola en 1966 [75], ils ont établiÃⓒ des résultats sur la bornitude et l'existence des solutions périodiques de l'équation

$$X''' + AX'' + BX' + H(X) = P(t, X, X', X'')$$

où A et B sont des matrices symétriques constantes. Ces résultats étaient en quelque sorte des généralisation des résultats trouvés dans le cas des équations différentielles scalaires non linéaires de troisième ordre et inspiration des techniques utilisées pour étudier le comportement qualitative des équations différentielles vectorielles non linéaires de deuxième ordre.

Puis en 1967 Ezeilo [26] a étudié la bornitude et la stabilité des solutions de l'équation précédente pour généraliser les résulats de cas scalaire.

Quelques années plus tard A. U. Afuwape en 1983 [4] a donné un résultat concernant l'ultimate bornitude des solutions de l'équation précédente puis il a étudié l'équation

$$X''' + AX'' + G(X') + H(X) = P(t, X, X', X'')$$

pour obtenir un résultat plus général sur l'ultimate bornitude de ses solutions.

Puis au début des années 90s F.W Meng [34] a donné des conditions suffisantes pour lesquelles l'équation d'Ezeilo ait des solutions périodiques, et a obtenu des résultats sur la bornitude et l'existence des solutions périodiques de l'équation précédente.

A partir de l'année 2000 beaucoup des articles ont été ecrit sur le sujet nous citons :

En 2006 Cemil Tunç et Ateş Muzaffer [95] ont établi la bornitude et la stabilité asymptotique de l'équation

$$X''' + F(X, X', X'') + B(t)X' + H(X) = P(t, X, X', X'')$$

Cemil Tunç a été concerné dans un autre article [82] à la bornitude des solutions de l'équation

$$X''' + A(t)F(X'') + B(t)X' + C(t)H(X) = 0$$

En 2007 Omeike, Mathew Omonigho [38] a généralisé les résultats de la bornitude et l'existence des solutions périodiques sur des équations matricielles de la forme

$$X''' + AX'' + BX' + H(X) = P(t, X, X', X'')$$

avec $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, et A, B et $H(X)$ sont aussi des matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$, et même $P(t, X, X', X'') \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

En 2008 Omeike, Mathew Omonigho [41] a raffiné les conditions pour assurer la bornitude et la stabilité asymptotique de l'équation

$$X''' + F(X, X', X'') + B(t) X' + H(X) = P(t, X, X', X'')$$

En 2009 Cemil Tunç [84] a donné des conditions qui assurent la stabilité et la bornitude des solutions de l'équation

$$X''' + \Psi(X') X'' + BX' + cX = P(t).$$

Notations

$\mathcal{K}$	Fonctions de classe $\mathcal{K}$.
$\mathcal{KL}$	Fonctions de classe $\mathcal{KL}$.
$\mathcal{K}_\infty$	Fonctions de classe $\mathcal{K}_\infty$.
(US)	point d'équilibre uniformément stable.
(AS)	point d'équilibre asymptotiquement stable.
$(G.U.A.S)$	point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable.
$(E.S)$	point d'équilibre exponentiellement stable.
$(G.E.S)$	point d'équilibre globalement exponentiellement stable.
$\|E\|$	cardinal de l'ensemble E.
$\|\|X\|\|$	Norme d'un vecteur X de $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{R}^{n\times n}$	Ensemble de matrices carrées de n lignes et n colonnes.
$\|\|A\|\|$	Norme d'une matrice vecteur X de $\mathbb{R}^{n\times n}$.
$\rho\,(A)$	Rayon spectrale de la matrice A.
$\langle X, Y\rangle$	Produit scalaire de vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$.
$J_h(X)$	Matrice Jacobienne de la fonction $H(X)$ de variable X de $\mathbb{R}^n$.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Équations différentielles ordinaires définitions et notions de base

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base de la théorie des équations différentielles ordinaires.

1.1.1 Définitions

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Définition 1.1. Une équation différentielle ordinaire sur U est une relation du type

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$

que l'on note :

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.1}$$

où " $\dot{x}$ " $= \frac{dx}{dt}$.

Définition 1.2. Soit x une fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

1. La fonction x est dite solution de l'équation (1.1) sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur I, si $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$, et si x satisfait la relation (1.1) sur I.
2. Soit $(t_0, x_0) \in U$ donné. La fonction x est dite solution du problème à valeur initiale associé à l'équation (1.1) s'il existe un intervalle I contenant t_0 tel que x soit solution de l'équation (1.1) sur I et vérifie $x(t_0) = x_0$.

Remarque 1.3. Pour $(t_0, x_0) \in U$ donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation (1.1) est généralement exprimé sous l'écriture suivante :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in I. \tag{1.2}$$

Remarque 1.4. Une solution de (1.2) est également dite solution de l'équation (1.1) à valeur initiale x_0 à l'instant t_0.

Définition 1.5. Pour $(t_0, x_0) \in U$ donné, une solution du problème (1.2) est dite unique si elle coincide avec toute autre solution partout où elles sont toutes les deux définies.

Remarque 1.6. Si le problème (1.2) admet une solution unique, celle ci est notée par

$$x = x(t, t_0, x_0).$$

Proposition 1.7. *Pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) est équivalent à l'équation intégrale :*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

1.1.2 Existence et unicité des solutions

Nous rappelons, dans ce paragraphe, quelques résultats de base sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (1.1).

Théorème 1.8. *(Existence) Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet au moins une solution.*

Définition 1.9. Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On dit que $f = f(t, x)$ est k-lipschitzienne en x si

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in U, \ \| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq k \| x_1 - x_2 \|,$$

(k ne dépend pas de t).
f est dite localement lipschitzienne en x si $\forall\ (t_0, x_0) \in U$, il existe un voisinage $V(t_0, x_0)$ de (t_0, x_0) dans lequel f est $k(t_0, x_0)$ lipschitzienne.

Théorème 1.10. *Toute fonction de classe C^1 (en t et x) est localement lipschitzienne en x. Dans tout ensemble Ω fermé borné elle est alors lipshitzienne. (Ω est borné en x et en t!).*

Théorème 1.11. *(Unicité) Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ si $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne en x, pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet une solution unique.*

1.2 Stabilité cas autonome

Définition 1.12. On considère le système autonome

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1.3}$$

de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue. On dit que a est un point d'équilibre du système (1.3) si $f(a) = 0$ pour tout $t \geq 0$.
1) On dit que a est un point d'équilibre uniformément stable si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta(\epsilon) : \|x_0 - a\| \leq \eta \Longrightarrow \|x(t, x_0) - a\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

2) On dit que a est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable si, a est uniformément stable et si en plus il existe un voisinage de a où $x(t, x_0)$ a pour limite a. (c'est à dire qu'il existe $\rho > 0 : \|x_0 - a\| \leq \rho \Rightarrow \lim\limits_{t \mapsto \infty} x(t, x_0) = a$).
3) Un point d'équilibre qui n'est pas uniformément stable est dit instable.

Fonctions de Lyapunov :

Définition 1.13. Soit 0 l'origine de R^n, D voisinage de 0. Soit U une fonction à valeurs réelles définie sur D telle que :

1. $U(0) = 0$.
2. $U(x) > 0$ si $x \neq 0$.

On dit que U est définie positive dans D.

Théorème 1.14. *[27] (Théorème de stabilité de Lyapunov)*
Soit 0 le point d'équilibre de $\dot{x} = f(x)$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, D un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $V : D \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et définie positive.

- *Si $\dot{V} \leq 0, \forall x \in D$, alors $x = 0$ est stable.*
- *Si $\dot{V}(x) < 0$ dans $D - \{0\}$, alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.*

Remarque 1.15. La fonction V définie dans le théorème ci-dessus est appelée fonction de Lyapunov.

1.3 Stabilité et bornitude des solutions des équations differentielles ordinaires cas général

Définition 1.16. On considère le système non autonome (1.1)

$$\dot{x} = f(t, x)$$

tel que $f : \mathbb{R}_+ \times D \to \mathbb{R}^n$ continue en t, localement lipschitzienne en x avec $D \subset \mathbb{R}^n$.
On dit que 0 est un point d'équilibre du système (1.1) si $f(t, 0) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 1.17. [27] Le point d'équilibre 0 de (1.1) est :

- stable (S) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que
$$\|x(t_0)\| < \delta \Longrightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \ \forall t \geq t_0 \geq 0. \tag{1.4}$$
- uniformément stable $(U.S)$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, indépendant de t_0, tel que (1.4) soit satisfaite.
- instable s'il n'est pas stable.
- asymptotiquement stable $(A.S)$ s'il est stable et il existe une constante positive $c = c(t_0) > 0$ telle que $x(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$, pour tout $\|x(t_0)\| < c$.
- uniformément asymptotiquement stable (U.A.S) s'il est uniformément stable et il existe une constante positive c, indépendante de t_0, telle que pour toute $\|x(t_0)\| < c$, $x(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$, uniformément en t_0 ; c'est à dire, pour tout $\eta > 0$, il existe $T = T(\eta) > 0$ tel que
$$\|x(t)\| < \eta, \ \forall t \geq t_0 + T(\eta), \ \forall \|x(t_0)\| < c.$$
- globalement uniformément asymptotiquement stable $(G.U.A.S)$ s'il est uniformément stable, $\delta(\varepsilon)$ peut être choisi pour satisfaire à la condition $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$, et, pour chaque couple de nombres positifs η et c, il existe $T = T(\eta, c) > 0$ tel que
$$\|x(t)\| < \eta, \ \forall t \geq t_0 + T(\eta, c), \ \forall \|x(t_0)\| < c.$$
- exponentiellement stable $(E.S)$ s'il existe des constantes positives c, k, et λ

telles que

$$\|x(t)\| \leq k\,\|x(t_0)\|\,e^{-\lambda(t-t_0)},\ \forall\,\|x(t_0)\| < c. \tag{1.5}$$

- globalement exponentiellement stable $(G.E.S)$ si (1.5) est satisfaite quelle que soit la condition initiale $x(t_0)$.

Ces concepts de stabilité d'un point d'équilibre peuvent être illustrés sur la figure 4.1. La position A correspond à un point d'équilibre instable, la position B à un point d'équilibre stable et la position C à une position d'équilibre asymptotiquement stable.

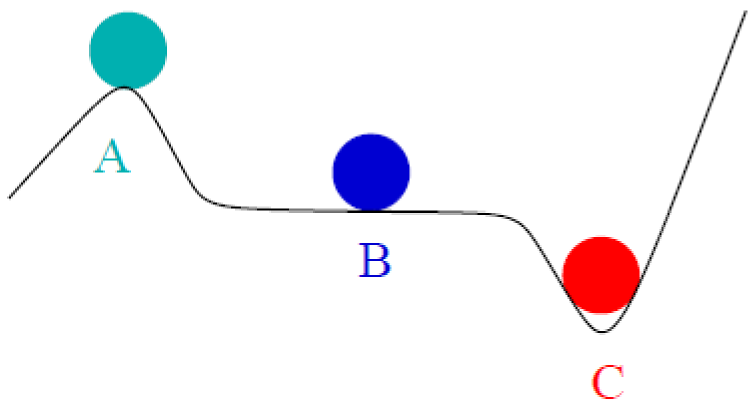

FIGURE 4.1- Stabilité de l'équilibre d'une bille

Définition 1.18. [27] Les solutions de (1.1) sont

- uniformément bornées s'il existe une constante positive c, indépendante de $t_0 \geq 0$, telle que pour tout $a \in]0, c[$, il existe $\beta = \beta(a) > 0$, indépendante de t_0, satisfaisant

$$\|x(t_0)\| \leq a \Longrightarrow \|x(t)\| \leq \beta,\ \forall t \geq t_0. \tag{1.6}$$

- globalement uniformément bornées si (1.6) est satisfaite pour n'importe quelle valeur de a assez grande.
- uniformément ultimement bornées s'il existe deux constantes positives b et c indépendante de $t_0 \geq 0$, telles qu'à chaque $a \in]0, c[$, est associée une constante positive $T = T(a, b) \geq 0$ indépendante de t_0 satisfaisant :

$$\|x(t_0)\| \leq a \Longrightarrow \|x(t)\| \leq b,\ \forall t \geq t_0 + T. \tag{1.7}$$

- globalement uniformément ultimement bornées si (1.7) est satisfaite pour n'importe quelle valeur de a assez grande.

Nous appellerons la constante b la borne ultime.

1.3.1 Fonctions de classe $\mathcal{K}$ et de classe $\mathcal{KL}$

Définition 1.19. [27] Une fonction continue $\alpha : [0, a[\to \mathbb{R}_+$ est dite de classe $\mathcal{K}$ si elle est strictement croissante et $\alpha(0) = 0$. Elle est dite de classe $\mathcal{K}_\infty$ si $a = \infty$ et $\alpha(r) \to \infty$ lorsque $r \to \infty$.

Définition 1.20. [27] Une fonction continue $\beta : [0, a] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ est dite de classe $\mathcal{KL}$ si, pour tout s fixé, l'application $\beta(r, s)$ est de classe $\mathcal{K}$ par rapport à r et, pour tout r fixé, l'application $\beta(r, s)$ est décroissante par rapport à s et $\beta(r, s) \to 0$ lorsque $s \to \infty$.

Lemme 1.21. *[27] Soient α_1 et α_2 des fonctions de classe $\mathcal{K}$ sur $[0, a[$, α_3 et α_4 des fonctions de classe $\mathcal{K}_\infty$, et β une fonction de classe $\mathcal{KL}$. Notons l'inverse de α_i par α_i^{-1}. Alors,*

- *α_1^{-1} est défini sur $[0, \alpha_1(a)[$ et appartient à la classe $\mathcal{K}$.*
- *α_3^{-1} est défini sur $[0, \infty[$ et appartient à la classe $\mathcal{K}_\infty$.*
- *$\alpha_1 \circ \alpha_2$ est de classe $\mathcal{K}$.*
- *$\alpha_3 \circ \alpha_4$ est de classe $\mathcal{K}_\infty$.*
- *$\sigma(r, s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$ est de classe $\mathcal{KL}$.*

Voici une reformulation des notions de stabilité utilisant les fonctions de classe $\mathcal{K}$ et $\mathcal{KL}$.

Proposition 1.22. *[27]*

Le point d'équilibre $x = 0$ de (1.1) est :

1. *uniformément stable si et seulement s'il existe une fonction α de classe $\mathcal{K}$ et une constante positive c indépendante de t_0 telle que :*

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x(t_0)\| < c.$$

2. *globalement uniformément stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale $x(t_0)$.*

Proposition 1.23. *[27]*

Le point d'équilibre $x = 0$ de (1.1) est :

1. *uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une constante positive c indépendante de t_0 telle que :*

$$\|x(t)\| \leq \beta\Big(\|x(t_0)\|, t - t_0\Big), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x(t_0)\| < c.$$

2. *globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale $x(t_0)$.*

1.3.2 Théorie de Lyapunov

Dans ce qui suit nous donnerons quelques définitions et théorèmes concernant la stabilité au sens de Lyapunov. Les résultats que nous développerons aux chapitres 2, 3 et 4 s'appuierons sur ces concepts pour démontrer les propriétés de stabilité asymptotique.

Définition 1.24. On considère le système (1.1). Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de 0 et $V : \mathbb{R}_+ \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable. La fonction V est dite :

1. semi définie positive si :

  a) $V(t, 0) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

  b) $V(t, x) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in D$.

2. définie positive si :

  a) $V(t, 0) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

  b) Il existe une fonction $W_1(x)$ définie positive (voir la définition 1.13) telle que : $W_1(x) \leq V(t, x)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in D$.

3. décrescente s'il existe une fonction $W_2(x)$ définie positive telle que : $V(t, x) \leq W_2(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in D$.

4. radialement non bornée si : $V(t, x) \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$.

$V(t, x)$ est dite définie négative (semi-définie) si $-V(t, x)$ est définie positive (semi-définie).

Lemme 1.25. *[27]*

Soit $V : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie positive sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ qui contient l'origine. Soit $B_r \subset D$ avec $r > 0$. Alors, il existe des fonctions α_1 et α_2 de classe $\mathcal{K}$, définies sur $[0, r]$, telles que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

pour tout $x \in B_r$. Si $D = \mathbb{R}^n$, les fonctions α_1 et α_2 seront définies sur $[0, \infty[$ et l'inégalité précédente aura lieu pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Par ailleurs, si $V(x)$ est radialement non bornée, alors α_1 et α_2 peuvent être choisies dans la classe $\mathcal{K}_\infty$.

Remarque 1.26. Soit $V(t,x)$ une fonction définie positive et décrescente sur D. D'après la définition et le lemme précedents il existe des fonctions α_1 et α_2 de classe $\mathcal{K}$ telles que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|), \forall x \in B_r \subset D.$$

Si de plus $V(t,x)$ est radialement non bornée sur D alors les fonctions α_1 et α_2 sont de classe $\mathcal{K}_\infty$.

Définition 1.27. (Fonction de Lyapunov)

On considère le système (1.1) :

$$\dot{x} = f(t, x(t)).$$

Soit D un voisinage de 0 et $V : \mathbb{R}_+ \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable.

- On dit que V est une fonction de Lyapunov si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

i. V est définie positive.

ii. $\dot{V}(t,x) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in D$

_ On dit que V est une fonction de Lyapunov stricte, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

i. V est définie positive.

ii. $\dot{V}(t,x) < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in D - \{0\}$

Remarque 1.28. $V(t,x)$ est aussi une fonction de Lyapunov (stricte) si elle est définie négative et sa dérivée totale est semi-définie positive (définie).

Théorème 1.29. *[27]*

Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système (1.1) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine qui contient l'origine. Soit $V : \mathbb{R}_+ \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que

$$W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x)$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq 0$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in D$, où $W_1(x)$ et $W_2(x)$ sont des fonctions continues définies positives sur D. Alors $x = 0$ est uniformément stable.

Théorème 1.30. *[27]*

Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système (1.1) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine qui contient l'origine. Soit $V : \mathbb{R}_+ \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que

$$W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -W_3(x)$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in D$, où $W_1(x)$, $W_2(x)$ et $W_3(x)$ sont des fonctions continues définies positives sur D. Alors $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable.
Si $D = \mathbb{R}^n$ et $W_1(x)$ est radialement non bornée, alors $x = 0$ est globalement uniformément asymptotiquement stable.

Théorème 1.31. *[27]*

Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système (1.1) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine qui contient l'origine. Soit $V : \mathbb{R}_+ \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que

$$k_1\|x\|^a \leq V(t,x) \leq k_2\|x\|^a$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -k_3\|x\|^a$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in D$, où k_1, k_2 k_3 et a sont des constantes positives. Alors $x = 0$ est exponentiellement stable.
Si toutes les conditions sont vérifiées globalement, alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.

Théorème 1.32. *[104]*

Soit $V(t,x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, $\|x\| \geq \rho$ où $\rho > 0$ peut être assez grand, telle que

(i) $\alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \alpha_1 \in \mathcal{K}_\infty$ *et* $\alpha_2 \in \mathcal{K}$ *;*

(ii) $\dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq 0.$

Alors les solutions de (1.1) sont uniformément bornées.

Théorème 1.33. *[104]*

Si en plus de la condition (i) *du Théorème 1.32,* $\dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$, *où α_3 est continue et strictement positive, alors les solutions de (1.1) sont uniformément ultimement bornées.*

1.4 Quelques résultats sur les équations à retard

1.4.1 Introduction

Les équations à retard sont souvent plus réalistes pour décrire des phénomènes naturels comparées à elles même sans retard. Tout d'abord, nous allons donner les définitions préliminaires et les critères de stabilité.
Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|.\|$ est une norme quelconque. Pour $r > 0$ et $H > 0$, on définit $C_H := \{\phi \in C([-r, 0],\ \mathbb{R}^n) : \|\phi\|_C \leq H\}$ avec $(C, \|.\|_C)$ l'espace de Banach des fonctions continues $\phi : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$ et $\|.\|_C$ est la norme sur C définie par

$$\forall \phi \in C, \quad \|\phi\|_C = \sup_{\theta \in [-r,0]} \|\phi(\theta)\|.$$

Soit $x : [t_0 - r, t_0 + A] \to \mathbb{R}^n$ continue où $t_0 \geq 0$ et $A > 0$. Pour t fixé dans $[t_0, t_0 + A]$, on définit la fonction :

$$x_t = x(t + \theta)\ , \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

$x_t \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ et c'est la restriction de x à l'intervalle $[t - r, t]$ translaté à $[-r, 0]$.
Considérons, à présent

$$\dot{x} = f(t, x_t), \tag{1.8}$$

où $f : I \times C_H \to \mathbb{R}^n$ est une application continue, localement lipschitzienne en son second argument et telle que $f(t, 0) = 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$. De plus, f satisfait à la condition :

$$\forall H_1 < H,\ \exists L(H_1) > 0, \quad \|\phi\|_C < H_1 \Rightarrow \|f(t, \phi)\| < L(H_1)$$

Une fonction $x(t)$ est dite solution de (1.8) si elle est définie et continue sur $[t_0 - r, t_0 + A]$ vérifie $x(t) = \varphi(t)$ sur $[t_0 - r, t_0]$, est différentiable sur $[t_0, t_0 + A]$ et satisfait (1.8) sur $[t_0, t_0 + A]$.

Remarque 1.34. Une application telle que f, définie sur un ensemble de fonctions, est parfois désignée sous le nom de **fonctionnelle** au lieu de fonction.

1.4.2 Théorème d'existence et d'unicité de solutions

Définition 1.35. [Yoshizawa [104] p.184] Une fonction $x(t_0, \varphi)$ est dite solution du système (1.8) avec la condition initiale $\varphi \in C_H$ en $t = t_0$, $t_0 \geq 0$, s'il existe une constante $A > 0$ telle que $x(t_0, \varphi)$ est une fonction de $[t_0 - r, t_0 + A]$ vers $\mathbb{R}^n$ avec les propriétés :

1. $x_t(t_0, \varphi) \in C_H$ pour $t_0 \leq t \leq t_0 + A$,
2. $x_{t_0}(t_0, \varphi) = \varphi$,
3. $x(t_0, \varphi)$ satisfait (1.8) pour $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.

$x(t; t_0, \varphi)$ est la valeur de $x(t_0, \varphi)$ au point t.

Théorème 1.36. *[21] Supposons la fonction f continue. Alors pour tout $\varphi \in C$, l'équation (1.8) admet au moins une solution. De plus, si la fonction f est localement lipschitzienne par rapport à x_t, alors la solution est unique.*

1.4.3 Définitions et théorèmes de stabilité et bornitude de solutions

Définition 1.37. [22] Le point d'équilibre 0 de (1.8) est

- uniformément stable (U.S) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\|\varphi\|_C < \delta \Longrightarrow \|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \ \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

- uniformément asymptotiquement stable (U.A.S) s'il est uniformément stable et il existe une constante positive c telle que pour tout $\eta > 0$, il existe $T = T(\eta) > 0$ de telle sorte que

$$\|\varphi\|_C < c \Longrightarrow \|x(t, t_0, \varphi)\| < \eta, \ \forall t \geq t_0 + T(\eta).$$

- globalement uniformément asymptotiquement stable si la condition précédente est vraie quelle que soit $\varphi \in C$.

Les définitions de stabilité et bornitude peuvent être données de la même manière que pour les équations différentielles ordinaires, i.e, en remplaçant la condition initiale x_0 et la solution $x(t, t_0, x_0)$ par φ et $x_t(t_0, \varphi)$, respectivement. De même, une fonctionnelle $V(.)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times C$ est dite définie positive s'il existe une fonction scalaire ω vérifiant $\omega(\theta) > 0$ pour $\theta > 0$ et $\omega(0) = 0$, telle que $V(t, x_t) \geq \omega(\|x(t)\|), \ \forall x_t \in C, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.38. *[72] Soit $V(t, x_t) : [t_0, +\infty[\times C_H \to \mathbb{R}_+$ une fonctionnelle continue satisfaisant une condition locale de Lipschitz. $V(t, 0) = 0$, et telle que :*

(i) $W_0(\|x(t)\|) \leq V(t,x_t) \leq W_1(\|x(t)\|)+W_2(\|x_t\|_2)$ *où* $\|x_t\|_2 = (\int_{t-r}^{t} \|x(s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}$.

(ii) $\dot{V}_{(1.8)}(t,x_t) \leq -W_3(\|x(t)\|)$,
où, W_i $(i = 0,1,2,3)$ *sont de classe* $\mathcal{K}$*. Alors la solution nulle de (1.8) est uniformément asymptotiquement stable.*

Théorème 1.39. *[72] Soit* $x = 0$ *un point d'équilibre de (1.8) et* D *un ouvert qui contient l'origine. Soit* $V : \mathbb{R}_+ \times D \to \mathbb{R}$ *une fonction continûement différentiable sur* D *telle que :*

i $W_1(\|x(t)\|) \leq V(t,x) \leq W_2(\|x(t)\|)$

ii $\dot{V}_{(1.8)}(t,x_t) \leq -W_3(\|x(t)\|) + M$, *pour* $M > 0$,

où, W_i $(i = 1,2,3)$ *sont de classe* $\mathcal{K}$*. Alors les solutions de (1.8) sont uniformément bornées et uniformément ultimement bornées.*

Théorème 1.40. *[72] Soit* $V(t,x_t) : [t_0,+\infty[\times C_H \to \mathbb{R}_+$ *une fonctionnelle continue satisfaisant une condition locale de Lipschitz avec* $H = \infty$*, telle que :*
(i) $W_0(\|x(t)\|) \leq V(t,x_t) \leq W_1(\|x(t)\|) + W_2(\int_{t-r}^{t} W_3(\|x(s)\|)ds)$.
(ii) $\dot{V}_{(1.8)}(t,x_t) \leq -W_3(\|x(t)\|) + M$, *pour* $M > 0$,
où, W_i $(i = 0,1,2,3)$ *sont de classe* $\mathcal{K}$*. Alors les solutions de (1.8) sont uniformément bornées et uniformément ultimement bornées.*

Chapitre 2

Stabilité et bornitude des solutions d'une classe d'équations différentielles vectorielles du troisième ordre avec retard

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier le comportement asymptotique des solutions des équations de la forme suivante :

$$\Big(G\big(X(t)\big)X'(t)\Big)'' + AX''(t) + BX'(t) + H\Big(X\big(t - r(t)\big)\Big) = P\left(t\right), \qquad (2.1)$$

où les matrices A et B sont des matrices constantes de $\mathbb{R}^{n\times n}$, $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ une fonction deux fois differentiable, symétrique et inversible, $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et differentiable telle que $H(0) = 0$ et $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on suppose $0 \leq r\left(t\right) \leq \gamma$ (pour une constante $\gamma > 0$) et $r'\left(t\right) \leq \zeta$ pour une constante $0 < \zeta < 1$.

En 1966, 1983 et 1993, respectivement, Ezeilo & Tejumola [75], Afuwape [4] et Meng [34] ont étudié l'ultimate bornitude, et l'existence des solutions periodiques pour l'equation vectorielle non linéaire de la forme

$$X'''(t) + AX''(t) + BX'(t) + H(X(t)) = P(t, X(t), X'(t), X''(t)).$$

En 2014, Tunc¸, C. et Gozen, M [102] ont obtenu des résultats sur le comportement qualitative des solutions, stabilité, bornitude, bornitude uniforme et existence des solutions periodiques, pour un type des équations differentielles vectorielles de la forme suivante :

$$X'''(t) + X''(t) + G(X'(t)) + H(X(t)) = P(t, X(t), X'(t), X''(t)).$$

Récemment, en 2015 Omeike [39] en définissant une fonction de Lyapunov complète, a discuté des conditions pour la stabilité uniforme de la solution triviale et l'ultimate bornitude uniforme des solutions de l'équation

$$X'''(t) + AX''(t) + BX'(t) + H\Big(X\big(t-r\big)\Big) = P\left(t\right), \tag{2.2}$$

quand $P\left(t\right) = 0$ et $P\left(t\right) \neq 0$, respectivement. tel que $X \in \mathbb{R}^n, P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, A et B sont des matrices constantes réelles , $0 \leq r(t) \leq \gamma$, γ est une constante positive .

2.2 Stabilité

Avant d'enoncer notre théorème principale nous allons présenter quelques hypothèses qui seront utilisées avec les fonctions qui sont apparues dans l'équation (2.1). Supposons qu'il y a des constantes positives, $\delta_a, \delta_b, \delta_g, \delta_{g^{-1}}, \delta_h$, $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_g, \Delta_{g^{-1}}$ et Δ_h, telles que les matrices A, B, G^{-1} et $J_h(X)$ (la matrice jacobienne de $H(X)$) sont symétriques et definites positive , de plus les valeurs propres $\lambda_i(A), \lambda_i(B), \lambda_i(G^{-1})$ et $\lambda_i(J_h(X))(i = 1, 2, ..., n)$ de A, B et $J_h(X)$, respectivement vérifient,

$$\begin{aligned}
0 &< \delta_a \leq \lambda_i\left(A\right) \leq \Delta_a, \\
0 &< \delta_b \leq \lambda_i\left(B\right) \leq \Delta_b, \\
0 &< \delta_g \leq \lambda_i\left(G\right) \leq \Delta_g, \\
0 &< \delta_{g^{-1}} \leq \lambda_i\left(G^{-1}\right) \leq \Delta_{g^{-1}}, \qquad \Delta_{g^{-1}} = \delta_g^{-1}; \quad \delta_{g^{-1}} = \Delta_g^{-1}, \\
0 &< \delta_h \leq \lambda_i\left(J_h\left(X\right)\right) \leq \Delta_h.
\end{aligned}$$

En raison de simplicité posons

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= \frac{d}{dt}G^{-1}(X(t)) = -G^{-1}\big(X(t)\big)\frac{d}{dt}G\big(X(t)\big)G^{-1}\big(X(t)\big), \\
\mu(t) &= \int_0^t \|\theta(s)\|\, ds.
\end{aligned}$$

Pour le cas $P \equiv 0$, nous avons le resultat suivant.

Théorème 2.1. *Supposons que les hypothèses ci-dessus sont vérifiées et que les matrices A, B, G^{-1} et $J_h(X)$ qui commutent deux à deux, sous les conditions suivantes :*

(H_0) *Il existe une constante* $\beta > 0$ *telle que* $\dfrac{1}{2\sqrt{\delta_a}} < \beta < \dfrac{\delta_b}{\Delta_h \Delta_g}$,

(H_1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \frac{d}{ds} G\big(X(s)\big) \right\| ds < +\infty.$

La solution nulle de (2.1) est uniformément asymptotiquement stable, pourvu que

$$\gamma < \min \left\{ \frac{2\left(\beta\delta_a - 1\right)}{\beta\Delta_h \delta_g^{-1}}, \frac{2\left(\Delta_g^{-2}\delta_b - \beta\Delta_h\delta_g^{-1}\right)(1-\xi)}{\Delta_h\delta_g^{-1}\left[2\left(\beta + \Delta_g^{-1}\right) + (1-\xi)\,\delta_g^{-1}\right]} \right\}. \tag{2.3}$$

Démonstration. Dans l'espace des phases, on écrit l'équation (2.1) sous la forme de système équivalent suivant,

$$\begin{cases} X' = G^{-1}(X)\,Y \\ Y' = Z\,; \\ Z' = -AG^{-1}(X)\,Z - \left[A\left(G^{-1}\right)' + BG^{-1}\right]Y \\ \qquad - H(X) + \int_{t-r(t)}^{t} J_h(X)\,G^{-1}(X)\,Y ds. \end{cases} \tag{2.4}$$

La preuve dépend de certaines propriétés fondamentales d'une fonctionnelle continûment différentiable, que l'on notera $W = W(X,Y,Z)$ définie par

$$W_1 = \exp(-\frac{1}{\rho_0}\mu(t))V_1, \tag{2.5}$$

où

$$\begin{aligned} V_1(X_t,Y_t,Z_t) &= 2\int_0^1 \langle H(\sigma X), X\rangle\, d\sigma + \left\langle G^{-1}Y, Z\right\rangle + 2\beta\,\langle Y, H(X)\rangle \\ &\quad + \left\langle AG^{-2}Y, Y\right\rangle + \beta\left\langle Y, BG^{-1}Y\right\rangle + \beta\,\langle Z, Z\rangle \\ &\quad \omega_0 \int_{-r(t)}^{0}\int_{t+s}^{t} \langle Y(\theta), Y(\theta)\rangle\, d\theta ds, \end{aligned} \tag{2.6}$$

ω_0, ρ_0 sont des constantes positives à déterminer plus tard dans la preuve. Comme

$$\omega_0 \int_{-r(t)}^{0}\int_{t+s}^{t} \langle Y(\theta), Y(\theta)\rangle\, d\theta ds$$

n'est pas négatif, nous avons

$$\begin{aligned} V_1(X_t,Y_t,Z_t) &\geq 2\int_0^1 \langle H(\sigma X),X\rangle\, d\sigma + \left\langle AG^{-2}Y,Y\right\rangle + \beta\left\langle Y,BG^{-1}Y\right\rangle \\ &\quad +\beta\langle Z,Z\rangle + \left\langle G^{-1}Y,Z\right\rangle + 2\beta\langle Y,H(X)\rangle \\ &\geq 2\int_0^1\int_0^1 \sigma\langle J_h(\sigma\tau X)X,X\rangle\, d\tau d\sigma + \left\langle \left[A-\frac{1}{4}\beta^{-2}I\right]G^{-2}Y,Y\right\rangle . \\ &\quad +\beta\left\|\left(BG^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}Y + \left(BG^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}H(X)\right\|^2 + \beta\left\|Z+\frac{1}{2}\beta^{-1}G^{-1}Y\right\|^2 \\ &\quad -\beta\left\langle \left(BG^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}H(X),\left(BG^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}H(X)\right\rangle . \end{aligned}$$

En utilisant les lemmes .4, .5 et .7, et le fait que

$$\beta\left\|\left(BG^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}Y + \left(BG^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}H(X)\right\|^2 \geq 0,$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} V_1(X_t,Y_t,Z_t) &\geq 2\int_0^1\int_0^1 \sigma\left[I-\beta GB^{-1}J_h(\sigma X)\right]\langle J_h(\sigma\tau X)X,X\rangle\, d\tau d\sigma \\ &\quad +\beta\left\|Z+\frac{1}{2}\beta^{-1}G^{-1}Y\right\|^2 + \left\langle\left[A-\frac{1}{4}\beta^{-1}I\right]G^{-2}Y,Y\right\rangle . \end{aligned}$$

Ensuit, en vue de l'hypothèse du théorème (2.1) et le lemme (.5) respectivement, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} V_1(X_t,Y_t,Z_t) &\geq \left(1-\beta\delta_b^{-1}\Delta_g\Delta_h\right)\delta_h\|X\|^2 + \beta\left\|Z+\frac{1}{2}\beta^{-1}G^{-1}Y\right\|^2 \\ &\quad +\left(\delta_a-\frac{1}{4}\beta^{-2}\right)\delta_{g^{-1}}^2\|Y\|^2 . \end{aligned} \tag{2.7}$$

De manière claire à partir des termes contenus dans (2.7), il existe une constante $k>0$ telle que

$$V_1(X_t,Y_t,Z_t) \geq k\left(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2\right). \tag{2.8}$$

De l'hypothèse $(H1)$ du théorème (2.1) on a

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \int_0^t \|\theta(s)\|\, ds \\ &= \int_0^t \left\|G^{-1}\big(X(s)\big)\frac{d}{ds}G\big(X(s)\big)G^{-1}\big(X(s)\big)\right\| ds \\ &\leq \int_0^t \left\|G^{-1}(X(s))\right\|^2\left\|\frac{d}{ds}G\big(X(s)\big)\right\| ds. \end{aligned}$$

D'après le Lemme (.10), nous avons

$$\mu(t) \leq (\Delta_{g^{-1}})^2 \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} G\big(X(s)\big) \right\| ds < \infty.$$

Par conséquent, nous pouvons trouver une fonction continue $W_1(|\Phi(0)|)$ avec $0 \leq W_1(|(\Phi(0)|) \leq W((\|\Phi\|)$. L'existence d'une fonction continue $W_2(\|\Phi\|)$ qui vérifie l'inégalité $W(\Phi) \leq W_2((\|\Phi\|))$, est simplement véifie. Ainsi, sous réserve de la discussion ci-dessus, nous pouvons assurer que la condition ***(i)*** de théorème (1.38) est satisfaite.
Maintenant soit $(X, Y, Z) = (X_t, Y_t, Z_t)$ une solution quelconque du système différentiel (2.4). Par dérivation de la fonction $V_1 = V_1(X_t, Y_t, Z_t))$ le long des trajectoires du système (2.4) et en utilisant le Lemme .6 on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_1(X_t, Y_t, Z_t) \;=\; & -2\left\langle \left[G^{-1}BG^{-1} - \beta J_h(X)\, G^{-1} - \omega_0 r(t)\, I\right] Y, Y \right\rangle + \\ & \beta \langle Y, B\theta(t)Y\rangle - 2\langle [\beta A - I]\,\theta(t)Y, Z\rangle - 2\left\langle [\beta A - I]\, G^{-1}Z, Z\right\rangle \\ & + 2\beta \int_{t-r(t)}^{t} \left\langle J_h(X)\, G^{-1}Y(s), Z(t)\right\rangle ds \qquad (2.9) \\ & + 2\int_{t-r}^{t} \left\langle J_h(X)\, G^{-1}Y(s), G^{-1}Y(t)\right\rangle ds \\ & -\omega_0 \left(1 - r'(t)\right) \int_{t-r(t)}^{t} \langle Y(\eta), Y(\eta)\rangle\, d\eta. \end{aligned}$$

Puis, par (2.8), Lemmes .4 et .5, et l'identité $2\,|\langle U, V\rangle| \leq \|U\|^2 + \|V\|^2$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} 2\beta \int_{t-r}^{t} \left\langle J_h(X)\, G^{-1}Y(s), Z(t)\right\rangle ds \;\leq\; & 2\beta \int_{t-r(t)}^{t} \|Z(t)\| \left\| J_h(X)\, G^{-1}Y(s)\right\| ds \\ \leq\; & \beta \Delta_h \delta_g^{-1} \int_{t-r(t)}^{t} (\|Z(t)\|^2 + \|Y(s)\|^2) ds \\ \leq\; & +\beta \Delta_h \delta_g^{-1} \int_{t-r(t)}^{t} \|Y(s)\|^2\, ds \\ & +\beta \Delta_h \delta_g^{-1} \gamma \,\|Z(t)\|^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
2\int_{t-r}^{t}\left\langle J_h\left(X\right)G^{-1}Y\left(s\right),G^{-1}Y\left(t\right)\right\rangle ds &\leq 2\int_{t-r(t)}^{t}\left\|G^{-1}Y(t)\right\|\left\|J_h\left(X\right)G^{-1}Y\left(s\right)\right\|ds\\
&\leq \Delta_h\delta_g^{-2}\int_{t-r(t)}^{t}(\|Y(t)\|^2+\|Y\left(s\right)\|^2)ds\\
&\leq \Delta_h\delta_g^{-2}\int_{t-r(t)}^{t}Y\left\|Y\left(s\right)\right\|ds\\
&\quad +\Delta_h\delta_g^{-2}\gamma\left\|Y\right\|^2,
\end{aligned}$$

d'où nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_1(X_t,Y_t,Z_t) &\leq -2\left[\Delta_g^{-2}\delta_b-\beta\Delta_h\delta_g^{-1}-\omega_0\gamma-\frac{1}{2}\Delta_h\delta_g^{-2}\gamma\right]\left\|Y\right\|^2\\
&\quad -2\left[\beta\delta_a-1-\frac{1}{2}\beta\Delta_h\delta_g^{-1}\gamma\right]\Delta_g^{-1}\left\|Z\right\|^2\\
&\quad +\left(\frac{\beta^2\Delta_a^2+3}{k}+\frac{\beta\Delta_b}{k}\right)\left\|\theta(t)\right\|V_1\\
&\quad +\Big(-\omega_0\left(1-\xi\right)+\Delta_h\delta_g^{-2}\\
&\quad +\beta\Delta_h\delta_g^{-1}\Big)\int_{t-r(t)}^{t}\left\langle Y\left(\eta\right),Y\left(\eta\right)\right\rangle d\eta. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

En choisissant

$$\omega_0=\frac{\left[\beta+\delta_g^{-1}\right]\Delta_h\delta_g^{-1}}{1-\xi},$$

nous avons

$$\frac{d}{dt}V_1(X_t,Y_t,Z_t)\leq -M_1\left\|Z\right\|^2-M_2\left\|Y\right\|^2+\frac{1}{\rho_0}\left\|\theta\right\|V_1, \qquad (2.11)$$

où,

$$M_1=\left[2\left(\beta\delta_a-1\right)-\beta\Delta_h\delta_g^{-1}\gamma\right]$$

et

$$M_2=\left[2\Delta_g^{-2}\delta_b-2\beta\Delta_h\delta_g^{-1}-2\omega_0\gamma-\Delta_h\delta_g^{-2}\gamma\right]$$

avec $\rho_0=\frac{k}{2k_1}$, tels que $k_1=\max\left\{\beta\Delta_b,\beta^2\Delta_a^2+3\right\}$.

En utilisant (2.5), (2.11), (2.15) et (H_1) nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W_1(X_t,Y_t,Z_t) &= \left(\frac{d}{dt}V_1-\frac{1}{\rho_0}\|\theta\|\,V_1\right)e^{-\frac{1}{\rho_0}\mu(t)}\\ &\leq \left(-M_1\|Z\|^2-M_2\|Y\|^2\right)e^{-\frac{1}{\rho_0}\int_0^t\|\theta\|ds}\\ &\leq -D_2\left(\|Y\|^2+\|Z\|^2\right)e^{-\frac{1}{\rho_0}N},\end{aligned}$$

où $D_2=\max\{M_1,M_2\}$. Par conséquent, il s'ensuit que $\frac{d}{dt}W(X_t,Y_t,Z_t)=0$ si et seulement si $X=Y=Z=0$, $\frac{d}{dt}W(\Phi)<0$ pour, $\Phi\neq 0$ et $0<W1(\Phi(0))\leq W(\Phi)\leq W2(\|\Phi\|)$. Ainsi, toutes les conditions de Théorème (1.38) sont satisfaites. Cela montre que la solution nulle du système (2.4) est uniformément asymptotiquement stable. □

Exemple 2.2. Comme cas particulier considérone l'équation

$$\Big(G\big(X(t)\big)X'(t)\Big)''+AX''(t)+BX'(t)+H\Big(X\big(t-r\big)\Big)=P\left(t\right), \tag{2.12}$$

avec $P(t)=0$, Nous prenons n = 2 tel que

$$\begin{aligned}X(t) &= \begin{pmatrix} x\left(t\right)\\ y\left(t\right)\end{pmatrix}, \quad G\big(X(t)\big)=\begin{pmatrix} g_{11}(x(t)) & 0\\ 0 & g_{22}(y(t))\end{pmatrix},\\ A &= \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 80 & 0\\ 0 & 81\end{pmatrix}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}g_{11}(x(t)) &= \frac{\sin(x(t))}{(1+x^2(t))}+3,\\ g_{22}(y(t)) &= \frac{\cos(y(t))}{(1+y^2(t))}+5,\end{aligned}$$

et

$$H\left(X\left(t\right)\right)=\begin{pmatrix} Nx\left(t\right)e^{-x^2(t)+1}+Mx\left(t\right)\\ Ny\left(t\right)e^{-y^2(t)+1}+My\left(t\right)\end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}H\left(X\left(t-r\left(t\right)\right)\right) &= \begin{pmatrix} Nx\left(t-r\left(t\right)\right)e^{-x^2(t-r(t))+1}+Mx\left(t-r\left(t\right)\right)\\ Ny\left(t-r\left(t\right)\right)e^{-y^2(t-r(t))+1}+My\left(t-r\left(t\right)\right)\end{pmatrix} \quad \text{et}\\ J_H\left(X(t)\right) &= \begin{pmatrix} J_{11}\left(X(t)\right) & 0\\ 0 & J_{22}\left(X(t)\right)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} J_{11}\left(X(t)\right) &= M + Ne^{1-x^2(t)} - 2Nx^2\left(t\right)e^{1-x^2(t)}, \\ J_{22}\left(X(t)\right) &= M + Ne^{1-y^2(t)} - 2Ny^2\left(t\right)e^{1-y^2(t)} \end{aligned}$$

et

$$N = \frac{1}{5\left(e+2e^{-\frac{1}{2}}\right)} = 5.087\,3\times10^{-2} \quad , \quad M = \frac{1}{10}\frac{e}{e+2e^{-\frac{1}{2}}} + \frac{3}{5}\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e+2e^{-\frac{1}{2}}} = 0.161\,71.$$

Une vérification triviale montre que G est une matrice non singulière et nous avons

$$\frac{d}{dt}G(X(t)) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}g_{11}(x(t)) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt}g_{22}(y(t)) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g_{11}(x(t)) &= \left(\frac{\cos(x(t))}{10\left(1+x^2(t)\right)} - \frac{2x(t)\sin(x(t))}{10\left(1+x^2(t)\right)^2}\right)x'(t) \\ \frac{d}{dt}g_{22}(y(t)) &= \left(\frac{-\sin(y(t))}{10\left(1+y^2(t)\right)} - \frac{2y\cos(y(t))}{10\left(1+y^2(t)\right)^2}\right)y'(t). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\frac{d}{dt}G(X(t))\| = \max\left\{\left|\frac{d}{dt}g_{11}(x(t))\right|, \left|\frac{d}{dt}g_{22}(y(t))\right|\right\} = D(t),$$

et

$$\begin{aligned} &\| \theta(t) \| = \| G^{-1}\big(X(t)\big)\frac{d}{dt}G\big(X(t)\big)G^{-1}\big(X(t)\big) \| \\ \leq\ &\| G^{-2}\big(X(t)\big) \| \| \frac{d}{dt}G\big(X(t)\big) \| = \left(\frac{1}{\delta_G}\right)^2 D(t). \end{aligned}$$

Pour $t \in [0, +\infty)$ un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
\int_0^t \| \theta(s) \| \, ds &\leq \frac{1}{4}\int_0^t D(s)ds = \frac{1}{4}\int_0^t \max\left\{ \left|\frac{d}{ds}g_{11}(x(s))\right|, \left|\frac{d}{ds}g_{22}(y(s))\right| \right\} ds \\
&\leq \frac{1}{4}\left(\int_0^t \left| (\frac{\cos x}{1+x^2} - \frac{2x\sin x}{(1+x^2)^2})x'(s)\right| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \left| (\frac{-\sin y}{1+y^2} - \frac{2y\cos y}{(1+y^2)^2})y'(s)\right| ds \right) \\
&\leq \frac{1}{4}\left(\int_{\omega_1(t)}^{\omega_2(t)} \left| (\frac{\cos u}{1+u^2} - \frac{2u\sin u}{(1+u^2)^2})du \right| \right. \\
&\quad \left. + \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left| (\frac{-\sin v}{1+v^2} - \frac{2v\cos v}{(1+v^2)^2})dv \right| \right) \\
&< \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1+u^2+2u}{(1+u^2)^2} \right| du + \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1+u^2+2u}{(1+u^2)^2} \right| du \right) \\
&= \frac{1}{2}(\pi+2).
\end{aligned}$$

où $\omega_1(t) = \min\{x(0), x(t)\}$, $\omega_2(t) = \max\{x(0), x(t)\}$ et $\varphi_1(t) = \min\{y(0), y(t)\}$, $\varphi_2(t) = \max\{y(0), y(t)\}$. Nous prenons $r(t) = \exp\left(-t^2\right)$, alors $0 \leq r(t) \leq \gamma$, $(\gamma > 0)$, et $r'(t) = -2t\exp\left(-t^2\right) \leq \xi$ pour $0 < \xi < 1$. Évidemment, $G(X), A, B$ et $J_h(X)$ sont des matrices diagonales, donc elles sont symétriques qui commutent deux à deux. Ensuite, par un calcul facile, nous obtenons les valeurs propres des matrices G, A, B et $J_h(X)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\lambda_1(G) &= \frac{\sin x}{(1+x^2)} + 3, \quad \lambda_2(G) = \frac{\cos x}{(1+x^2)} + 5, \\
\lambda_1(A) &= 2, \quad \lambda_2(A) = \frac{5}{2}, \quad \lambda_1(B) = 80, \quad \lambda_2(B) = 81, \\
\lambda_1(J_H(X)) &= M + Ne^{1-x^2(t)} - 2Nx^2(t)\, e^{1-x^2(t)}, \\
\lambda_2(J_H(X)) &= M + Ne^{1-y^2(t)} - 2Ny^2(t)\, e^{1-y^2(t)}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit facilement que

$$\delta_g = 2, \Delta_g = 6, \delta_a = 2, \Delta_a = 2.5, \delta_b = 80, \Delta_b = 81, \delta_h = \frac{1}{10}, \Delta_h = \frac{3}{10}.$$

Choisissons $\beta = 14.5$ et $\xi = \frac{1}{2}$, nous avons

$$\gamma < \min\left\{25.747, 1.0642 \times 10^{-2}\right\}.$$

Ainsi, tous les les conditions du Théorème (2.1) sont satisfaites.

2.3 Bornitude

Pour étudier la bornitude des solutions de (2.1) pour laquel $P(t) \neq 0$, nous devons l'écrire dans l'espace des phases comme suit

$$\begin{cases} X' = G^{-1}(X)\, Y \\ Y' = Z \\ Z' = -AG^{-1}(X)\, Z - \left[A \left(G^{-1} \right)' + BG^{-1} \right] Y \\ \qquad -H(X) + \int_{t-r(t)}^{t} J_h(X)\, G^{-1}(X)\, Y ds + P(t)\,. \end{cases} \tag{2.13}$$

Ainsi, notre théorème principal dans cette section est indiqué par rapport à (2.13) comme suit :

Théorème 2.3. *Supposons que toutes les conditions du Theoreme 2.1 sont satisfaites et*

$$P(t) \leq m, \tag{2.14}$$

où m est une constante positive.
Alors, la solution nulle de (2.13) est uniformément bornée et uniformément ultimement bornée, à condition que

$$\gamma < \min \left\{ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3 \right\}, \tag{2.15}$$

où

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\Delta_g^{-2}\delta_b - \beta \Delta_h \delta_g^{-1}}{\left(\omega + \Delta_h \delta_g^{-2} + \frac{1}{2} \Delta_h \Delta_a^2 \delta_g^{-2} \right)}, \\ \eta_2 &= \frac{2\left(\beta\delta_a - 1\right) \Delta_g^{-1} - \left(\delta_g^{-1} + \Delta_a \right)^2}{\beta \Delta_h \delta_g^{-1}}, \\ \eta_3 &= \frac{2\left(\delta_a\delta_b - \Delta_h\right) \delta_h - \left(\delta_g^{-1} - \delta_a \right) \Delta_h^2}{\left(\Delta_a \Delta_b - \Delta_h\right) \Delta_h \delta_g^{-1}}. \end{aligned}$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$V(X_t, Y_t, Z_t) = V_1(X_t, Y_t, Z_t) + V_2(X_t, Y_t, Z_t), \tag{2.16}$$

où $V_1(X_t, Y_t, Z_t)$ est définie comme dans 2.7 (en remplaçant ω_0 par ω.) et $V_2(X_t, Y_t, Z_t)$ est définie par

$$\begin{aligned} V_2(X_t, Y_t, Z_t) &= 2\int_0^1 \langle AH(\sigma X), AX\rangle d\sigma + \langle B(AB - \Delta_h I)X, X\rangle \\ &+2\left\langle G^{-1}Y, H(X)\right\rangle + \left\langle \Delta_h G^{-1}Y, Y\right\rangle \\ &+2\left\langle (AB - \Delta_h I)X, Z + AG^{-1}Y\right\rangle \\ &+\left\langle A\left(Z + AG^{-1}Y\right), Z + AG^{-1}Y\right\rangle. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Nous observons que la fonction V_2 peut être définit comme suit

$$\begin{aligned} V_2(X_t, Y_t, Z_t) &= 2\int_0^1 \langle AH(\sigma X), AX\rangle d\sigma \\ &+\left\langle G^{-1}(\Delta_h Y + H(X)), Y + \Delta_h^{-1}H(X)\right\rangle \\ &-\left\langle G^{-1}H(X), \Delta_h^{-1}H(X)\right\rangle \\ &+\left\langle \Delta_h A^{-1}(AB - \Delta_h I)X, X\right\rangle \\ &+\Big\langle (AB - \Delta_h I)X + A\left(Z + AG^{-1}Y\right), \\ &A^{-1}(AB - \Delta_h I)X + Z + AG^{-1}Y\Big\rangle. \end{aligned}$$

Cependant,

$$\langle H(X), H(X)\rangle = 2\int_0^1\int_0^1 \sigma\langle J_h(\sigma X)J_h(\sigma\tau X)X, X\rangle d\tau d\sigma > 0.$$

En utilisant les Lemmes .4 et .5, nous obtenons

$$\begin{aligned} V_2(X_t, Y_t, Z_t) &\geq 2\int_0^1\int_0^1 \left\langle \sigma\left\{\delta_a^2 - \delta_g^{-1}\right\} J_h(\tau\sigma X)X, X\right\rangle d\sigma d\tau \\ &+\Delta_h\Delta_g^{-1}\left\|Y + \Delta_h^{-1}AH(X)\right\|^2 + \Delta_h\Delta_a^{-1}(\delta_a\delta_b - \Delta_h)\|X\|^2 \\ &+\left\|A^{-\frac{1}{2}}(AB - \Delta_h I)X + A^{\frac{1}{2}}Z + A^{\frac{3}{2}}G^{-1}Y\right\|^2 \\ &\geq \Delta_h\Delta_g^{-1}\left\|Y + \Delta_h^{-1}AH(X)\right\|^2 + \Delta_h\Delta_a^{-1}(\delta_a\delta_b - \Delta_h)\|X\|^2 \\ &+\left\|A^{-\frac{1}{2}}(AB - \Delta_h I)X + A^{\frac{1}{2}}Z + A^{\frac{3}{2}}G^{-1}Y\right\|^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $V_2(X_t, Y_t, Z_t)$ est définie positive. D'après (2.10), (2.10), (2.11), (2.13) et le Lemme .6, nous avons

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_1(X_t,Y_t,Z_t) \;\leq\; & -2\left[\Delta_g^{-2}\delta_b-\beta\Delta_h\delta_g^{-1}-\omega\gamma-\Delta_h\delta_g^{-2}\gamma\right]\|Y\|^2 \\
& -\left[2\left(\beta\delta_a-1\right)\Delta_g^{-1}-\beta\Delta_h\delta_g^{-1}\gamma\right]\|Z\|^2 \\
& +\left[\beta\Delta_h\delta_g^{-1}+\Delta_h\delta_g^{-2}-\omega\left(1-\xi\right)\right]\int_{t-r(t}^{t}\langle Y\left(s\right),Y\left(s\right)\rangle\,ds \\
& +\left(\frac{\beta^2\Delta_a^2+\beta\Delta_b+3}{k_1}\right)\|\theta\|\,V \\
& +\left[2\beta\|Z\|+\delta_g^{-1}\|Y\|\right]m. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Aussi d'après (2.13), (2.17) et le Lemme .6 nous obtenons,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_2(X_t,Y_t,Z_t) \;=\; & -2\int_0^1\langle\left(AB-\Delta_hI\right)J_h\left(\sigma X\right)X,H\left(X\right)\rangle\,d\sigma \\
& +2\left\langle\left(J_h\left(X\right)-\Delta_hI\right)G^{-1}Y,AG^{-1}Y\right\rangle \\
& +2\int_{t-r(t)}^{t}\left\langle A^2G^{-1}Y,J_h\left(X\right)G^{-1}Y\right\rangle ds \qquad (2.19) \\
& +2\int_{t-r(t)}^{t}\left\langle\left(AB-\Delta_hI\right)X,J_h\left(X\right)G^{-1}Y\right\rangle ds \\
& +\langle\Delta_h\theta Y,Y\rangle+2\langle\theta Y,H\left(X\right)\rangle+2\left\langle A\left(Z+AG^{-1}Y\right),P\left(t\right)\right\rangle \\
& +\langle 2\left(AB-\Delta_hI\right)X,P\left(t\right)\rangle+2\left\langle\left(G^{-1}-A\right)Z,H\left(X\right)\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, à partir de (2.16), (2.18) et (2.19), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(X_t,Y_t,Z_t) \;\leq\; & -\Big[2\left(\delta_a\delta_b-\Delta_h\right)\delta_h-\left(\Delta_a\Delta_b-\Delta_h\right)\Delta_h\delta_g^{-1}r\left(t\right) \\
& -\left(\delta_g^{-1}-\delta_a\right)\Delta_h^2\Big]\|X\|^2-2\Big[\Delta_g^{-2}\delta_b-\beta\Delta_h\delta_g^{-1}-\omega\gamma \\
& -\Delta_h\delta_g^{-2}\gamma-\frac{1}{2}\Delta_h\Delta_a^2\delta_g^{-2}r\left(t\right)\Big]\|Y\|^2 \\
& -\left[2\left(\beta\delta_a-1\right)\Delta_g^{-1}-\beta\Delta_h\delta_g^{-1}\gamma-\left(\delta_g^{-1}-\delta_a\right)\right]\|Z\|^2 \\
& +\Big[\eta_4-\omega\left(1-\xi\right)\Big]\int_{t-r(t)}^{t}\langle Y\left(s\right),Y\left(s\right)\rangle\,ds \\
& +k_3\|\theta\|\,V+\Big[2\left(\beta+\Delta_a\right)\|Z\|+\left(\delta_g^{-1}+\delta_g^{-1}\Delta_a^2\right)\|Y\| \\
& +\left(\Delta_a\Delta_b-\Delta_h\right)\|X\|\Big]m,
\end{aligned}
$$

où

$$\eta_4 = \Delta_h \Delta_a^2 \delta_g^{-2} + \Delta_h \delta_g^{-1} \delta_a \delta_b - \delta_g^{-1} \Delta_h^2 + \beta \Delta_h \delta_g^{-1} + \Delta_h \delta_g^{-2}$$

et

$$k_3 = \left(\frac{\beta^2 \Delta_a^2 + \beta \Delta_b + 3}{k_1} + \frac{(\Delta_h + 1) + \Delta_h^2}{k_2} \right).$$

En choisissant $\omega = \dfrac{\eta_4}{(1-\xi)}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(X_t, Y_t, Z_t) \leq\ & -[\eta_3 - \gamma] (\Delta_a \Delta_b - \Delta_h) \Delta_h \delta_g^{-1} \|X\|^2 \\
& -2 [\eta_1 - \gamma] \left(\omega + \Delta_h \delta_g^{-2} + \frac{1}{2} \Delta_h \Delta_a^2 \delta_g^{-2} \right) \|Y\|^2 \\
& - [\eta_2 - \gamma] \beta \Delta_h \delta_g^{-1} \|Z\|^2 \\
& + k_3 \|\theta\| V + \Bigg[2 (\beta + \Delta_a) \|Z\| + \left(\delta_g^{-1} + \delta_g^{-1} \Delta_a^2 \right) \|Y\| \\
& + (\Delta_a \Delta_b - \Delta_h) \|X\| \Bigg] m.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction W

$$W(X_t, Y_t, Z_t) = V(X_t, Y_t, Z_t) e^{-\frac{1}{\rho} \int_0^t \|\theta(s)\| ds}.$$

W est définie positive et nous avons

$$\frac{d}{dt} W(X_t, Y_t, Z_t) = \left(\frac{d}{dt} V(X_t, Y_t, Z_t) - \frac{1}{\rho} \|\theta\| V \right) e^{-\frac{1}{\rho} \int_0^t \|\theta(s)\| ds}.$$

En prenant $k_3 = \frac{1}{\rho}$ et en utilisant le fait que γ vérifie (2.15), il s'ensuit qu'il existe une constante positive D telle que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} W(X_t, Y_t, Z_t) &\leq -D \left[\|X\|^2 + \|Y\|^2 + \|Z\|^2 \right] + \omega D \left[\|X\| + \|Y\| + \|Z\| \right] \\
&\leq -\frac{1}{2} D \|X\|^2 - \frac{1}{2} D \left((\|X\| - \omega)^2 - \omega^2 \right) - D \left[\|Y\|^2 + \|Z\|^2 \right] \\
&\quad + \omega D \left[\|Y\| + \|Z\| \right].
\end{aligned}$$

De l'inégalité

$$-D \|X\|^2 + \omega D \|X\| = -\frac{1}{2} D \|X\|^2 - \frac{1}{2} D \left((\|X\| - \omega)^2 - \omega^2 \right),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(X_t, Y_t, Z_t) &\leq -\frac{1}{2}D\left\|X\right\|^2 - \frac{1}{2}D\left(\|X\| - \omega\right)^2 + \frac{1}{2}D\omega^2 - \frac{1}{2}D\left\|Z\right\|^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}D\left(\|Y\| - \omega\right)^2 + \frac{1}{2}D\omega^2 - \frac{1}{2}D\left\|Z\right\|^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}D\left(\|Z\| - \omega\right)^2 + \frac{1}{2}D\omega^2 \\
&\leq -\frac{1}{2}D\left(\|X\|^2 + \|Y\|^2 + \|Z\|^2\right) \\
&\quad -D\left((\|X\| - \omega)^2 + (\|Y\| - \omega)^2 + (\|Z\| - \omega)^2\right) + \frac{3}{2}D\omega^2 \\
&\leq -\frac{1}{2}D\left(\|X\|^2 + \|Y\|^2 + \|Z\|^2\right) + \frac{3}{2}D\omega^2 \text{ pour } \quad D, \omega > 0.
\end{aligned}$$

Donc la solution nulle de (2.13) est uniformément bornée et uniformément ultimement bornée. □

Exemple 2.4. Maintenant, nous prenons comme cas particulier le système (2.4) (pour $P(t) \neq 0$), avec $n = 2$ et $G, A, B, H(X(t - r(t)))$ définies dans l'exemple 2.2.

Si nous prenons $r\left(t\right) = \exp\left(-t^2\right)$, alors $0 \leq r(t) \leq \gamma$, $(\gamma > 0)$, soient

$$P\left(t\right) = \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{1+t^2} \\ \frac{\sin t}{1+t^2} \end{pmatrix}, \beta = 14.5 \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1}{2}.$$

Nous avons

$$\left\|P\left(t\right)\right\| \leq \frac{2}{1+t^2} \leq 2 \quad \text{et} \quad \gamma < \min\left\{0.153\,26, 8.800\,7 \times 10^{-4}, 1.057\,5\right\}.$$

Ainsi, toutes les conditions du Théorème 3.2 sont satisfaites.

Chapitre 3

Stabilité, bornitude et carré intégrabilité des solutions pour quelques équations différentielles vectorielles de troisième ordre

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier la stabilité uniforme asymptotique , la bornitude et le carré intégrabilité des solutions de l'équation vecteorielle non linéaire du troisième ordre de la forme

$$(\Omega(X(t)))X'(t))'' + \Psi(X'(t))X''(t) + G(X(t))X'(t) + cX(t) = P(t), \qquad (3.1)$$

où $X \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ et c est une constante positive, G, Ψ et $\Omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ et les matrices $G(X)$ et $\Psi(X)$ sont symétriques pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega(X)$ est symétrique inversible et deux fois differentiables pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue par rapport à t, soit

$$\Omega' = \Omega'(X(t)) = \frac{d}{dt}(\mu_{i,j}(X(t)), \text{et } G' = G'(X(t)) = \frac{d}{dt}(g_{i,j}(X(t)) \quad (i, j = 1, 2, ..., n),$$

où $\mu_{i,j}(X(t))$ et $g_{i,j}(X(t))$ sont les composantes de $\Omega(X)$ et $G(X)$ respectivement. D'autre part $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, $\Omega(X(t)))$, $G(X(t)))$ et $\Psi(X'(t)))$ sont, respectivement, notés X, Y, Z, Ω, G et Ψ dans ce chapitre. Aussi, le symbole $\langle X, Y\rangle$ correspondant à n'importe quel paire X et Y dans $\mathbb{R}^n$ représente le produit scalaire habituel $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, C'est que, $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, ainsi $\langle X, X\rangle = \|X\|^2$.
Nous allons reécrire l'équation (3.1) dans l'espace des phases sous forme du système

équivalent suivant

$$\begin{cases} X' = \Omega^{-1}(X)Y, \\ Y' = Z, \\ Z' = -\Psi\Omega^{-1}(X)Z - \Psi\theta Y - G\Omega^{-1}(X)Y - cX + P(t), \end{cases} \tag{3.2}$$

qui résulte des calculs suivants

$$\begin{aligned} X' &= \Omega^{-1}(X)Y, \\ X'' &= \theta(t)Y + \Omega^{-1}(X)Z, \end{aligned}$$

où

$$\theta(t) = \left(\Omega^{-1}(X)\right)' = -\Omega^{-1}(X)\Omega'(X)\Omega^{-1}(X). \tag{3.3}$$

3.2 Stabilité

Dans cette partie en se propose d'étudier l'équation (3.1). On considère le cas $P(t) = 0$, le Théorème suivant présente des critères asymptotiques uniformes pour raison de simplicité on adopte la notation suivante :

$$\delta(t) = \| \Omega'(X) + G'(X) \| . \tag{3.4}$$

Théorème 3.1. *Suite aux hypothèses de base, Ω, Ψ et G, on suppose qu'il existe des constantes positives β et δ_0 telles que*
i) $\dfrac{c}{b_0 a_0} < \beta < \dfrac{1}{\omega_1}$,

ii) $\int_0^{+\infty} \delta(s)ds \leq \delta_0 < \infty$.

Alors toutes les solutions de l'équation (3.1) sont uniformément stables et vérifient

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{t\to\infty} Z(t) = 0.$$

Démonstration. On considère la fonction $W = W(t, X, Y, Z)$ définie par

$$W = V \exp(-\mu(t)), \tag{3.5}$$

où

$$\mu(t) = \frac{1}{d}\int_0^t \delta(s)ds,$$

et

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\langle cX, cX\rangle + \frac{1}{2}\beta b_0 \left\langle Y, G\Omega^{-1}Y\right\rangle + \beta\frac{b_0}{2}\langle Z, Z\rangle + \langle c\Omega^{-1}Y, Z\rangle \\ &\quad +\beta\langle cX, b_0\, Y\rangle + \int_0^1 \sigma\langle c\Psi(\sigma\Omega^{-1}Y)\Omega^{-1}Y, \Omega^{-1}Y\rangle d\sigma, \end{aligned} \tag{3.6}$$

d est une constante positive qui sera déterminée plus tard. Il est claire de (3.6) que $W(t, 0, 0, 0) = 0$. Notons que $\omega_0 \leq \lambda_i(\Omega) \leq \omega_1$, implique que $\frac{1}{\omega_1} \leq \lambda_i(\Omega^{-1}) \leq \frac{1}{\omega_0}$. Alors, par la condition (i) de théorème (3.1), et les Lemmes .4 et .5, on a

$$c\int_0^1 \sigma\langle \Psi(\sigma\Omega^{-1}Y)\Omega^{-1}Y, \Omega^{-1}Y\rangle d\sigma \;\geq\; \frac{ca_0}{2\omega_1^2}\parallel Y\parallel^2,$$

et

$$\frac{1}{2}\beta b_0 \left\langle Y, G\Omega^{-1}Y\right\rangle \geq \frac{\beta b_0^2}{2\omega_1}\parallel Y\parallel^2 .$$

D'où

$$\begin{aligned} V &\geq \frac{c^2}{2}\parallel X\parallel^2 + \beta\langle cX, b_0 Y\rangle \\ &\quad + \beta\frac{b_0}{2}\parallel Z\parallel^2 + \langle c\Omega^{-1}Y, Z\rangle \\ &\quad + \Big(\frac{\beta b_0^2}{2\omega_1} + \frac{ca_0}{2\omega_1^2}\Big)\parallel Y\parallel^2 . \end{aligned}$$

Donc, il est claire que :

$$\frac{c^2}{2}\parallel X\parallel^2 + \beta\langle cX, b_0 Y\rangle = \frac{1}{2}\|cX + \beta b_0 Y\|^2 - \frac{\beta^2 b_0^2}{2}\parallel Y\parallel^2,$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{\beta b_0}{2}\parallel Z\parallel^2 + \langle c\Omega^{-1}Y, Z\rangle \\ &= \frac{\beta b_0}{2}\|Z + \frac{c}{\beta b_0}\Omega^{-1}Y\|^2 - \frac{c^2}{2\beta b_0}\langle \Omega^{-1}Y, \Omega^{-1}Y\rangle \\ &\geq \frac{\beta b_0}{2}\|Z + \frac{c}{\beta b_0}\Omega^{-1}Y\|^2 - \frac{c^2}{2\beta\omega_1^2 b_0}\parallel Y\parallel^2 . \end{aligned}$$

Combinons les estimations précédentes, on obtient

$$V \geq \frac{1}{2}\parallel cX + \beta b_0 Y\parallel^2 + \frac{\beta b_0}{2}\parallel Z + \frac{c}{\beta b_0}\Omega^{-1}Y\parallel^2 + \Delta\parallel Y\parallel^2,$$

où

$$\Delta = \frac{\beta b_0^2}{2\omega_1} + \frac{ca_0}{2\omega_1^2} - \frac{\beta^2 b_0^2}{2} - \frac{c^2}{2\beta\omega_1^2 b_0}.$$

La condition (i) de théorème (3.1) implique que

$$\Delta = c\frac{\beta\ a_0b_0 - c}{2\beta b_0\omega_1^2} + \beta b_0^2(\frac{1}{2\omega_1} - \frac{\beta}{2}) \geq \frac{c}{2\beta b_0\omega_1^2}(\beta\ a_0b_0 - c) > 0.$$

Nous pouvons donc trouver une constante $k_0 > 0$ telle que,

$$V \geq k_0\Big(\parallel X \parallel^2 + \parallel Y \parallel^2 + \parallel Z \parallel^2\Big). \tag{3.7}$$

De la condition (ii) de théorème (3.1) et la fonction (3.5) on a

$$W \geq K_0\Big(\parallel X \parallel^2 + \parallel Y \parallel^2 + \parallel Z \parallel^2, \tag{3.8}$$

où $K_0 = k_0 \exp(-\frac{\delta_0}{d})$.

Grâce au Lemmes .6, et (3.6) on a la dérivée suivante

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \sigma\langle c\Psi(\sigma\Omega^{-1}Y)\Omega^{-1}Y, \Omega^{-1}Y\rangle d\sigma = c\langle\Psi\Omega^{-1}Y, \theta Y + \Omega^{-1}Z\rangle.$$

Alors, la dérivée de V le long du système (3.2) est donnée par

$$V'_{(3.2)} = V_1 + V_2 + V_3,$$

où

$$\begin{aligned}
V_1 &= \beta cb_0\langle\Omega^{-1}Y, Y\rangle - c\Big\langle Y, G\Omega^{-2}Y\Big\rangle,\\
V_2 &= c\Big\langle\Omega^{-1}Z, Z\Big\rangle - \beta b_0\langle Z, \Psi\Omega^{-1}Z\rangle,\\
V_3 &= c\,\langle\theta Y, Z\rangle - \beta b_0\langle Z, \Psi\theta Y\rangle + \frac{1}{2}\beta b_0\,\langle Y, G\theta Y\rangle + \frac{1}{2}\beta b_0\Big\langle Y, G'\Omega^{-1}Y\Big\rangle.
\end{aligned}$$

du condition (i) du Théorème 3.1, Lemme .4 et Lemme .5 nous obtenons

$$\begin{aligned}
V_1 &= \Big\langle Y, (\beta cb_0 I - cG\Omega^{-1})\Omega^{-1}Y\Big\rangle \leq -\frac{cb_0}{\omega_0}(\frac{1}{\omega_1} - \beta) \parallel Y \parallel^2,\\
V_2 &= \Big\langle Z, (cI - \beta b_0\Psi)\Omega^{-1}Z\Big\rangle \leq -\frac{1}{\omega_0}(\beta a_0 b_0 - c) \parallel Z \parallel^2.
\end{aligned}$$

Finalement grâce au (3.3), Lemme 4.7 et l'inegalité ; $2 \parallel UV \parallel \leq \parallel U \parallel^2 + \parallel V \parallel^2$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\| \theta(t) \| &= \| \Omega^{-1}(X)\Omega'(X)\Omega^{-1}(X) \| \leq \frac{1}{\omega_0^2} \| \Omega'(X) \|, \qquad (3.9)\\
V_3 &= c\,\langle \theta Y, Z\rangle \ - \beta b_0 \langle Z, \Psi\theta Y\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta b_0 \,\langle Y, G\theta Y\rangle + \frac{1}{2}\beta b_0 \left\langle Y, G'\Omega^{-1} Y\right\rangle \\
&\leq \left[\frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{c}{2k_0} + \frac{\beta b_0 a_1}{2k_0} + \frac{1}{2k_0}\beta b_0 b_1\right) \| \Omega' \| + \frac{1}{2k_0}\beta b_0 \| G' \| \right] V \\
&\leq K_1 \delta(t) V,
\end{aligned}$$

où $K_1 = \max\left\{\dfrac{1}{2k_0\omega_0^2}\big(c + \beta b_0 a_1 + \beta b_0 b_1\big); \dfrac{\beta b_0}{2k_0}\right\}$. Donc, on conclu que

$$V'_{(3.2)} \leq -M \| Z \|^2 - N \| Y \|^2 + K_1\delta(t)V. \qquad (3.10)$$

Il est claire de condition (i) du théorème (3.1) que

$$N = \frac{cb_0}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - \beta\right) \ > 0 \ \text{ et } \quad M = \frac{1}{\omega_0}(\beta a_0 b_0 - c) > 0.$$

De relation (3.5) et (3.10) nous obtenons

$$\begin{aligned}
W'_{(3.2)} &= \left[V' - \frac{1}{d}\delta(t)V\right]\exp(-\mu(t)) \\
&\leq \left[-M \| Z \|^2 - N \| Y \|^2 + (K_1 - \frac{1}{d})\delta(t)V\right]\exp(-\mu(t)).
\end{aligned}$$

On prend $K_1 - \dfrac{1}{d} \ = 0$, la dernière estimation donne

$$W'_{(3.2)} \leq -C(\| Z \|^2 + \| Y \|^2), \qquad (3.11)$$

où

$$C = \exp\left(-\frac{\delta_0}{d}\right)\min\big\{M, \ N\big\}.$$

De (3.8) et (3.11), on obtient de $\big($[72], Théorèm 24.1.14 $\big)$ que la solution $\big(X(t), Y(t), Z(t)\big)$ de (3.2) est uniformément stable. Maintenant soit

$$E = \{(X, Y, Z) : \ W'_{(3.2)}(X, Y, Z) = 0\} = \{(X, 0, 0) : X \in \mathbb{R}^n\}.$$

Le plus large ensemble invariant contenu dans E est $F = \{(0, 0, 0)\}$. Du principe d'invariance de LaSalle (voir , par exemple, Haddock [20])

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{t\to\infty} Z(t) = 0.$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème 3.1. □

3.3 Bornitude

Dans le Théorème suivant on étudie le cas $P(t) \neq 0$ comme suit :

Théorème 3.2. *On suppose que toutes les conditions du Théorème 3.1 sont vérifiées et qu'il existe des constantes positives d_1 et D_1 telles que :*

$I_1)$ $\parallel P(t) \parallel \leq \lambda(t) < d_1$,

$I_2)$ $\int_0^t \lambda(s)ds < D_1$,

$I_3)$ $\lim\limits_{t\to\infty} \parallel \Omega'(X(t)) \parallel$ *existe.*

Alors il existe une constante positive D_5 lelle que toute solution $X(t)$ de (3.1) et ses derivées $X'(t)$, et $X''(t)$ vérifient

$$\parallel X(t) \parallel \leq D_5, \ \parallel X'(t) \parallel \leq D_5, \ \parallel X''(t) \parallel \leq D_5. \tag{3.12}$$

Démonstration. Pour le cas $P(t) \neq 0$, la dérivation de (3.6) le long du système (3.2) donne

$$\begin{aligned} V'_{(3.2)} &\leq -J + K_1\delta(t)V + c\langle \Omega^{-1}Y, P(t)\rangle + \langle \beta b_0 Z, P(t)\rangle \\ &\leq -J + K_1\delta(t)V + \lambda(t)\Big(c \parallel \Omega^{-1} \parallel \parallel Y \parallel + \beta b_0 \parallel Z \parallel\Big). \end{aligned}$$

Du Lemme .10 on a

$$V'_{(3.2)} \leq -J + K_1\delta(t)V + K_2\lambda(t)(\parallel Y \parallel + \parallel Z \parallel),$$

où $K_2 = \max\left\{\dfrac{c}{\omega_0}, \beta b_0\right\}$ et $J = M \parallel Z \parallel^2 + N \parallel Y \parallel^2$.

De l'inégalité $\parallel Y \parallel \leq \parallel Y \parallel^2 + 1$ et $\parallel Z \parallel \leq \parallel Z \parallel^2 + 1$, nous obtenons

$$V'_{(3.2)} \leq -J + K_1\delta(t)V + K_2\lambda(t)(\parallel Y \parallel^2 + \parallel Z \parallel^2 + 2). \tag{3.13}$$

De (3.5) on a

$$W'_{(3.2)} = \left[V' - \frac{1}{d}\delta(t)V\right]\exp(-\mu(t)). \tag{3.14}$$

Puisque $K_1 - \dfrac{1}{d} = 0$, alors

$$W'_{(3.2)} \le \left[-J + K_2\lambda(t)(\| Y \|^2 + \| Z \|^2 + 2)\right]\exp(-\mu(t)).$$

De (3.11) et (3.8), les estimations précédentes impliquent que

$$W'_{(3.2)} \le -C(\| Y \|^2 + \| Z \|^2) + \frac{K_2}{K_0}\lambda(t)\, W + K_3\lambda(t), \tag{3.15}$$

avec $K_3 = 2K_2$. L'intégration de (3.15) de 0 à t donne

$$W(t) - W(0) \le K_3\int_0^t \lambda(s)ds + \frac{K_2}{K_0}\int_0^t W(s)\lambda(s)ds.$$

Soit

$$D_2 = W(0) + K_3 D_1. \tag{3.16}$$

Alors

$$W(t) \le D_2 + \frac{K_2}{K_0}\int_0^t W(s)\lambda(s)ds.$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, on a

$$W(t) \le D_2\exp\left(\frac{K_2}{K_0}\int_0^t \lambda(s)ds\right) \le D_3, \tag{3.17}$$

où $D_3 = D_2\exp\left(\frac{K_2}{K_0}D_1\right)$. Ce résultat implique qu'il exist une constante D_4 telle que

$$\| X(t) \| \le D_4,\ \| Y(t) \| \le D_4, \| Z(t) \| \le D_4.$$

De (3.2) on a

$$\begin{aligned} \| X'(t) \| &= \| \Omega^{-1}Y(t) \| \\ &\le \left\|\Omega^{-1}\right\| \| Y(t) \| \\ &\le \frac{D_4}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{t\to\infty} \parallel \Omega'(X(t)) \parallel$ existe, on a

$$\parallel \Omega'\big(X(t)\big) \parallel < q_1, \tag{3.18}$$

pour une constante positive q_1, ce qui implique de (3.9) que

$$\parallel \theta(t) \parallel \leq \frac{q_1}{\omega_0^2}. \tag{3.19}$$

Alors

$$\begin{aligned}\parallel X^{''}(t) \parallel &= \parallel \theta(t)Y(t) + \Omega^{-1}Z(t) \parallel \\ &\leq \parallel \theta(t)Y(t) \parallel + \parallel \Omega^{-1}Z(t) \parallel \\ &\leq \big(\frac{q_1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0}\big)D_4.\end{aligned}$$

Donc, il existe constante positive D_5 telle

$$\parallel X(t) \parallel \leq D_5, \ \parallel X'(t) \parallel \leq D_5, \ \parallel X''(t) \parallel \leq D_5, \tag{3.20}$$

pour tout $t \geq 0$, où $D_5 = \max\Big\{\big(\frac{q_1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0}\big)D_4, \ D_4\Big\}$, ce qui termine la preuve du Théorème 3.2. □

3.4 Carré intégrabilité

Le résultat suivant concerne le carrée intégrabilité des solutions de l'équation (3.1).

Théorème 3.3. *En plus des hypothèses du Théorème 3.2, nous supposons que*

$I_4)$ $c - (\frac{a_1 + b_1}{2}) > 0.$

Alors, toutes les solutions de (3.1) ainsi que toutes leurs dérivées sont des éléments de $L^2[0, +\infty)$.

Démonstration. Définissons $H(t)$ par

$$H(t) = W(t) + \varepsilon \int_0^t (\parallel Z(s) \parallel^2 + \parallel Y(s) \parallel^2)ds. \tag{3.21}$$

où $\varepsilon > 0$ est une constante à préciser plus tard. En différenciant $H(t)$ et en utilisant

(3.15) nous obtenons

$$H'(t) \leq (\varepsilon - C)(\| Z(t) \|^2 + \| Y(t) \|^2) + \Big(K_2 W + K_3\Big)\lambda(t).$$

Si nous choisissons $\varepsilon - C < 0$, alors d'après (3.17) nous obtenons

$$H'(t) \leq K_4 \lambda(t), \tag{3.22}$$

où $K_4 = K_2 D_3 + K_3$. En intégrant (3.22) de 0 à t, $t \geq 0$, et en utilisant la condition (I_2) de Théorème 3.2 nous obtenons

$$H(t) - H(0) = \int_0^t H'(s)ds \leq K_4 D_1.$$

Utilisant (3.16) et le fait que $H(0) = W(0)$ nous obtenons

$$H(t) \leq K_4 D_1 + D_2 - K_3 D_1.$$

Nous pouvons conclure par (3.21) que

$$\int_0^t (\| Z(s) \|^2 + \| Y(s) \|^2)ds < \frac{K_4 D_1 + D_2 - K_3 D_1}{\varepsilon},$$

ce qui implique l'existence de deux constantes positives σ_1 et σ_2 telles que

$$\int_0^t \| Z(s) \|^2 \, ds \leq \sigma_2 \text{ et } \int_0^t \| Y(s) \|^2 \, ds \leq \sigma_1.$$

D'après (3.2) nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^t \| X'(s) \|^2 \, ds &= \int \| \Omega^{-1} Y(s) \|^2 \, ds \\ &\leq \int \left\| \Omega^{-1} \right\|^2 \| Y(s) \|^2 \, ds \\ &\leq \frac{\sigma_1}{\omega_0^2} = \beta_1. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Aussi

$$\begin{aligned} \int_0^t \| X''(s) \|^2 \, ds &= \int_0^t \Big(\| \theta(s) Y(s) + \Omega^{-1} Z(s) \|^2 \Big) ds \\ &\leq \int_0^t \Big(\| \theta(s) \|^2 + \| \theta(s) \| \, \| \Omega^{-1} \| \Big) \| Y(s) \|^2 \, ds \\ &\quad + \int_0^t \Big(\| \Omega^{-1} \|^2 + \| \theta(s) \| \, \| \Omega^{-1} \| \Big) \| Z(s) \|^2 \, ds. \end{aligned}$$

D'après (3.19) et (3.18) nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \Big(\parallel \theta(s) \parallel^2 + \parallel \theta(s) \parallel \parallel \Omega^{-1} \parallel \Big) \parallel Y(s) \parallel^2 ds \\
\leq\ & \frac{q_1}{\omega_0^2}\Big(\frac{q_1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0}\Big) \int_0^t \parallel Y(s) \parallel^2 ds \\
\leq\ & \frac{q_1}{\omega_0^2}\Big(\frac{q_1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0}\Big)\sigma_1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \Big(\parallel \Omega^{-1} \parallel^2 + \parallel \theta(s) \parallel \parallel \Omega^{-1} \parallel \Big) \parallel Z(s) \parallel^2 ds \\
\leq\ & \frac{1}{\omega_0}\Big(\frac{1}{\omega_0} + \frac{q_1}{\omega_0^2}\Big) \int_0^t \parallel Y(s) \parallel^2 ds \\
\leq\ & \frac{1}{\omega_0}\Big(\frac{1}{\omega_0} + \frac{q_1}{\omega_0^2}\Big)\sigma_2.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^t \parallel X''(s) \parallel^2 ds \leq \frac{q_1}{\omega_0^2}\Big(\frac{q_1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0}\Big)\sigma_1 + \frac{1}{\omega_0}\Big(\frac{1}{\omega_0} + \frac{q_1}{\omega_0^2}\Big)\sigma_2 \ = \beta_2. \tag{3.24}$$

Puis en multipliant (3.1) par $X(t)$, nous obtenons

$$\Big\langle \Big(\Omega(X)X'\Big)'', X \Big\rangle + \langle \Psi(X')X'', X\rangle + \langle G(X)X', X\rangle + c \parallel X \parallel^2 = \langle X, P(t)\rangle. \tag{3.25}$$

En intégrant (3.25) de 0 à t nous avons

$$c\int_0^t \parallel X(s) \parallel^2 ds = L_1(t) + L_2(t) + L_3(t), \tag{3.26}$$

où

$$\begin{aligned}
L_1(t) &= -\int_0^t \Big\langle \Big(\Omega(X(s))X'(s)\Big)'', X(s) \Big\rangle ds, \\
L_2(t) &= -\int_0^t \Big\langle \Big(\Psi(X'(s))X''(s) + G(X(s))X'(s)\Big), X(s) \Big\rangle ds, \\
L_3(t) &= \int_0^t \langle X(s), P(s)\rangle ds.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties et en utilisant (3.23) et (3.24), nous obtenons

$$\begin{aligned}
L_1(t) &= -\langle \Omega' X'(t), X(t)\rangle - \langle \Omega X''(t), X(t)\rangle + \langle \Omega X'(t), X'(t)\rangle \\
&\quad - \int_0^t \langle \Omega X'(s), X''(s)\rangle\, ds \\
&\leq | -\langle \Omega' X'(t), X(t)\rangle - \langle \Omega X''(t), X(t)\rangle + \langle \Omega X'(t), X'(t)\rangle \,| \\
&\quad + \int_0^t \frac{\omega_1}{2}\Big(\| X'(s) \|^2 + \| X''(s) \|^2\Big)\, ds \\
&\leq | -\langle \Omega' X'(t), X(t)\rangle - \langle \Omega X''(t), X(t)\rangle + \langle \Omega X'(t), X'(t)\rangle \,| \\
&\quad + \frac{\omega_1}{2}(\beta_1 + \beta_2).
\end{aligned}$$

D'après (3.18) et (3.20) nous avons

$$|-\langle \Omega' X'(t), X(t)\rangle - \langle \Omega X''(t), X(t)\rangle + \langle \Omega X'(t), X'(t)\rangle| \leq D_5^2\big(q_1 + 2\omega_1\big),$$

pour tout $t \geq 0$. Par conséquent, il existe une constante l_1 telle que $L_1(t) < l_1$, avec
$l_1 = D_5^2\big(q_1 + 2\omega_1\big) + \frac{\omega_1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$. De même, nous avons

$$\begin{aligned}
L_2(t) &= -\int_0^t \Big\langle \big(\Psi X''(s) - G X'(s)\big), X(s)\Big\rangle\, ds \\
&\leq \int_0^t \Big(\| \Psi \| \, \| X''(s) \| + \| G \| \, \| X'(s) \| \Big) \| X(s) \| \, ds \\
&\leq \int_0^t \| \Psi \| \, \| X''(s) \| \, \| X(s) \| \, ds + \int_0^t \| G \| \, \| X'(s) \| \, \| X(s) \| \, ds \\
&\leq \frac{a_1}{2} \int_0^t \| X''(s) \|^2 \, ds + \big(\frac{a_1 + b_1}{2}\big) \int_0^t \| X(s) \|^2 \, ds \\
&\quad + \frac{b_1}{2} \int_0^t \| X'(s) \|^2 \, ds \\
&\leq \frac{a_1}{2}\beta_2 + \frac{b_1}{2}\beta_1 + \big(\frac{a_1 + b_1}{2}\big) \int_0^t \| X(s) \|^2 \, ds.
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
L_3(t) &\leq \int_0^t \| X(s) \| \, \| P(s) \| \, ds \\
&\leq D_5 \int_0^t \lambda(s) ds \\
&\leq D_1 D_5.
\end{aligned}$$

De (3.26) et la condition (I_4) de Théorème 3.3 nous obtenons

$$\Big(c - (\frac{a_1 + b_1}{2})\Big) \int_0^t \parallel X(s) \parallel^2 ds \leq K,$$

où $K = l_1 + \frac{a_1}{2}\beta_2 + \frac{b_1}{2}\beta_1 + D_1 D_5$. Ce qui achève la preuve du Théorème (3.3). $\square$

Chapitre 4

Bornitude et stabilité des solutions pour quelques équations différentielles vectorielles de troisième ordre avec retards multiples

4.1 Introduction

Récemment, Tunç [94] a adapté Tunç and Mohammed [98] et il a utilisé une fonction convenable de Lyapunov pour etablir un critère qui garanti la stabilité asymtotique de la solution de l'equation non autonome de troisième ordre avec retard suivante

$$X''' + H(X')X'' + G(X'(t-\tau)) + cX(t-\tau) = F(t, X, X', X''). \tag{4.1}$$

Nous allons étudier l'equation vectorielle avec retards multiples suivante

$$\begin{aligned}[H(X)X'']' \quad &+A(t)\Psi(X')X'' + B(t)\sum_{i=1}^{n} G_i(X'(t-r_i(t))) \\ &+C(t)\sum_{i=1}^{n} F_i(X(t-r_i(t))) = 0,\end{aligned} \tag{4.2}$$

et

$$\begin{aligned}[H(X)X'']' \quad &+A(t)\Psi(X')X'' + B(t)\sum_{i=1}^{n} G_i(X'(t-r_i(t))) \\ &+C(t)\sum_{i=1}^{n} F_i(X(t-r_i(t))) = P(t),\end{aligned} \tag{4.3}$$

avec $X \in \mathbb{R}^n$, $F_i, G_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $H, \Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $A, B, C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ et $P : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continuement differentiables avec $(F_i(0) = G_i(0) = 0)$ et H est deux fois dérivable où $0 \leq r_i(t) \leq \gamma$, $r_i'(t) \leq \omega_i$, $0 < \omega_i < 1$ pour tout i,

$(i = 1, 2, ..., n)$, ω_i et γ sont des constantes positives, nous allons determiner γ au cours de la preuve, et les primes dans (4.2) et (4.3) indiquent la differentiation par rapport t, $t \in \mathbb{R}^+$.
La continuité des functions $H, G_i, \Psi, F_i, P, A, B$ et C guaranti l'existence de la solution de (4.2) et (4.3). De plus, nous supposons que les fonctions H, G_i, Ψ et F_i vérifient la condition de Lipschitz par rapport à leurs arguments , comme X et X', dans ce cas, pour avoir l'unicité du solution de l'equation (4.3).

Notons que l'equation étudiée ici est plus generale que les equations étudiées dans [83] et [98] elle generalise aussi l'equation (4.1) et celle considérée dans Remili and Oudjedi [60].

4.2 Stabilité

Nous introduisons les notations suivantes qui seront utilisées par la suite

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{d}{dt}H^{-1}(X(t)) = -H^{-1}\big(X(t)\big)\Big[\frac{d}{dt}H\big(X(t)\big)\Big]H^{-1}\big(X(t)\big) \\
\Phi(t) &= \int_0^t \|\varphi(s)\|\, ds.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $P(.) = 0$, notre premier résultat est le Théorème suivant.

Théorème 4.1. *En plus des hypothèses de base imposées aux fonctions $A(t), B(t)$, $C(t), \Psi(X'), G_i(X'), H(X)$ et $F_i(X)$, supposons que les matrices A, B, C, H, Ψ et J_{F_i}, J_{G_i} (les matrices jacobiennes de $F_i(X)$ et $G_i(Y)$ respectivement) sont symétriques et définies positives, et qu'il existe des constantes positives telles que les conditions suivantes sont verifiées :*

i) $\quad 0 < \delta_{F_i} \leq \lambda_j\left(J_{F_i}(X)\right) \leq \Delta_{F_i}$,

ii) $\quad 0 < \delta_{G_i} \leq \lambda_j\left(J_{G_i}(Y)\right) \leq \Delta_{G_i}$,

iii) $\quad 1 \leq \lambda_j\left(\Psi(Y)\right) \leq \beta;\qquad 0 < \delta_H \leq \lambda_j\left(H(X)\right) \leq \Delta_H$,

iv) $\quad 0 < \delta_A \leq \lambda_j(A)\,;\qquad 0 < \delta_C \leq \lambda_j(C) \leq \lambda_j(B) \leq \Delta_B$,

v) $\quad \lambda_j(B') \leq \lambda_j(C') \leq 0;\qquad \dfrac{1}{2}\lambda_j(A') \leq \delta_2 < \dfrac{\delta_C(\upsilon\delta_{G_i} - \Delta_{F_i})}{\upsilon\beta}$, *vi)* $$\frac{\delta_{G_i}}{\Delta_{F_i}} > \frac{1}{\upsilon} > \frac{\Delta_H}{\delta_A},$$

vii) $$\int_0^{+\infty} \left\| \frac{d}{ds} H(X(s)) \right\| ds < +\infty.$$

Alors toute solution de (4.2) est uniformément asymptotiquement stable, pourvu que

$$\gamma < \min \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_C(\upsilon\delta_{G_i} - \Delta_{F_i}) - \upsilon\beta\delta_2}{\theta_i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_H^{-1}(\delta_A \Delta_H^{-1} - \upsilon)}{\rho_i} \right\},$$

où

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \frac{\Delta_B \Delta_{F_i}(\Delta_{H^{-1}} + \upsilon)}{2(1-\omega_i)} + \frac{\upsilon \Delta_B}{2}(\Delta_{F_i} + \Delta_{H^{-1}}\Delta_{G_i}), \\
\rho_i &= \frac{\Delta_B \Delta_{H^{-1}} \Delta_{G_i}(\Delta_{H^{-1}} + \upsilon)}{2(1-\omega_i)} + \frac{\Delta_B \Delta_{H^{-1}}}{2}(\Delta_{F_i} + \Delta_{H^{-1}}\Delta_{G_i}),
\end{aligned}$$

et γ est une borne superieure de $r_i(t)$.

Démonstration. Dans l'espace des phases l'équation (4.2) s'ecrit

$$\begin{cases}
X' = Y \\
\\
Y' = H^{-1}(X)Z \\
\\
Z' = -A(t)\Psi(Y)H^{-1}(X)Z - B(t)\sum_{i=1}^{n} G_i(Y) \\
\qquad +B(t)\sum_{i=1}^{n}\int_{t-r_i(t)}^{t} J_{G_i}(Y(s))H^{-1}(X(s))Z(s)ds \\
\qquad -C(t)\sum_{i=1}^{n} F_i(X) + C(t)\sum_{i=1}^{n}\int_{t-r_i(t)}^{t} J_{F_i}(X(s))\,Y(s)ds.
\end{cases} \tag{4.4}$$

Soient μ, η_i est χ_i des constantes positives qui seront spécifiées plus tard dans la preuve. Par souci de brièveté, nous définissons

$$\Delta(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-r_i(t)}^{0}\int_{t+s}^{t} \|Y(\xi)\|^2 d\xi ds + \sum_{i=1}^{n} \chi_i \int_{-r_i(t)}^{0}\int_{t+s}^{t} \|Z(\xi)\|^2 d\xi ds \geq 0. \tag{4.5}$$

Notre outil principal dans la démonstration du Théorème 4.1 mentionné ci-dessus est la fonction de Lyapunov $W = W(t, X_t, Y_t, Z_t)$ définie par

$$W(t, X_t, Y_t, Z_t) = e^{-\frac{1}{\mu}\|\Phi(t)\|} V(t, X_t, Y_t, Z_t) = e^{-\frac{1}{\mu}\|\Phi(t)\|} V, \tag{4.6}$$

où

$$\begin{aligned} V &= \upsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^n < C(t)F_i(\sigma X), X > d\sigma + \int_0^1 \sum_{i=1}^n < B(t)G_i(\sigma Y), Y > d\sigma \\ &+ < C(t)\sum_{i=1}^n F_i(X), Y > +\upsilon \int_0^1 \sigma < A(t)\Psi(\sigma Y)Y, Y > d\sigma \\ &+ \frac{1}{2} < H^{-1}(X)Z, Z > +\upsilon < Y, Z > +\Delta(t). \end{aligned} \tag{4.7}$$

d'après la definition de V dans (4.7) et en utilisant le Lemme .8, nous observons que la fonctionnelle ci-dessus peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} V &= \upsilon \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sigma < C(t)J_{F_i}(\tau\sigma X)X, X > d\tau d\sigma \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sigma < B(t)J_{G_i}(\tau\sigma Y)Y, Y > d\tau d\sigma \\ &+ < C(t)\sum_{i=1}^n F_i(X), Y > +\frac{1}{2}\|H^{-\frac{1}{2}}(X)Z + \upsilon H^{\frac{1}{2}}(X)Y\|^2 \\ &+ \upsilon \int_0^1 < A(t)\Big(\sigma\Psi(\sigma Y) - \frac{1}{2}\upsilon A^{-1}(t)H(X)\Big)Y, Y > d\sigma + \Delta(t). \end{aligned}$$

grâce aux conditions (i)-(iv) et (vi) du Théorème (4.1), la définition .9 et les Lemmes (.10, .5, .7) et (4.5), nous avons

$$\begin{aligned} V &\geq \upsilon \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sigma < C(t)J_{F_i}(\tau\sigma X)X, X > d\tau d\sigma \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{G_i}}{2} \left\| B^{\frac{1}{2}}(t)Y + \frac{1}{\delta_{G_i}} C(t)B^{-\frac{1}{2}}(t)F_i\left(X\right) \right\|^2 \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\delta_{G_i}} \Big\langle C(t)B^{-1}(t)F_i(X), C(t)F_i(X) \Big\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\upsilon\delta_A(1 - \upsilon\delta_A^{-1}\Delta_H)\|Y\|^2 + \frac{1}{2}\|H^{-\frac{1}{2}}(X)Z + \upsilon H^{\frac{1}{2}}(X)Y\|^2, \end{aligned}$$

car

$$\sum_{i=1}^n \frac{\delta_{G_i}}{2} \left\| B^{\frac{1}{2}}(t)Y + \frac{1}{\delta_{G_i}} C(t)B^{-\frac{1}{2}}(t)F_i\left(X\right) \right\|^2 \geq 0,$$

puis en utilisant le Lemme .7, l'estimation ci-dessus implique que

$$\begin{aligned} V &\geq \int_0^1\int_0^1 \sigma\left\langle\left[\upsilon C(t)-\frac{1}{\delta_{G_i}}C^2(t)B^{-1}(t)J_{F_i}(\sigma X)\right]J_{F_i}(\tau\sigma X)X, X\right\rangle d\tau d\sigma \\ &+ \frac{1}{2}\|H^{-\frac{1}{2}}(X)Z+\upsilon H^{\frac{1}{2}}(X)Y\|^2+\frac{1}{2}\upsilon\delta_A(1-\upsilon\delta_A^{-1}\Delta_H)\|Y\|^2 \\ &\geq \frac{\delta_3}{2}\|X\|^2+\frac{1}{2}\|H^{-\frac{1}{2}}(X)Z+\upsilon H^{\frac{1}{2}}(X)Y\|^2+\frac{1}{2}\upsilon\delta_A(1-\upsilon\delta_A^{-1}\Delta_H)\|Y\|^2, \end{aligned}$$

où

$$\delta_3=\sum_{i=1}^n \upsilon\delta_C\delta_{F_i}(1-\frac{\Delta_{F_i}}{\upsilon\delta_{G_i}})>\sum_{i=1}^n \upsilon\delta_C\delta_{F_i}(1-\frac{\upsilon}{\upsilon})=0.$$

Ainsi, nous pouvons trouver une constante positive k, assez petite telle que

$$V\geq k\left(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2\right). \tag{4.8}$$

Il est facile de vérifier que par les conditions (iii) et (vii) du théorème (4.1), nous avons

$$\|\Phi(t)\|=\int_0^t\|\varphi(s)\|ds\leq\Delta_{H^{-1}}^2\int_0^t\left\|\frac{d}{ds}H\big(X(s)\big)\right\|ds\leq N<\infty,$$

et avec la relation (4.8) on obtient

$$W\geq ke^{-\frac{N}{\mu}}\left(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2\right).$$

Par conséquent, nous pouvons trouver une fonction continue $W_1(|\phi(0)|)$ avec

$$W_1(|\phi(0)|)\geq 0 \quad \text{et} \quad W_1(|\phi(0)|)\leq W(t,\phi).$$

et une fonction continue $W_2(|\phi(0)|)+W_3(\|\phi\|_2)$ qui vérifie l'inégalité
$W(t,\phi)\leq W_2(|\phi(0)|)+W_3(\|\phi\|_2)$.
Pour la dérivée temporelle de la fonctionnelle $V(t,X_t,Y_t,Z_t)$, le long des trajectoires du système (4.4), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V &= \upsilon\int_0^1\sum_{i=1}^n <C'(t)F_i(\sigma X),X>d\sigma+\int_0^1\sum_{i=1}^n <B'(t)G_i(\sigma Y),Y>d\sigma \\ &+ <C'(t)\sum_{i=1}^n F_i(X),Y>-<\Big(A(t)\Psi(Y)H^{-1}(X)-\upsilon I\Big)Z,H^{-1}(X)Z> \\ &+ <C(t)\sum_{i=1}^n J_{F_i}(X)Y,Y>+\upsilon\int_0^1\sigma<A'(t)\Psi(\sigma Y)Y,Y>d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad \frac{1}{2} < \varphi(t)Z, Z > -\upsilon < B(t)\sum_{i=1}^{n} G_i(Y), Y > -\sum_{i=1}^{n} \chi_i(1 - r_i'(t))\int_{t-r_i(t)}^{t} \|Z(\xi)\|^2 d\xi \\
&+ \quad \sum_{i=1}^{n} \chi_i r_i(t)\|Z\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \eta_i r_i(t)\|Y\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \eta_i(1 - r_i'(t)) \int_{t-r_i(t)}^{t} \|Y(\xi)\|^2 d\xi \\
&+ \quad S_1 + S_2 + S_3 + S_4,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t-r_i(t)}^{t} \langle \upsilon Y(t), C(t)J_{F_i}(X(s))\, Y(s)\rangle\, ds, \\
S_2 &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t-r_i(t)}^{t} \left\langle H^{-1}(X(t))Z(t), C(t)J_{F_i}(X(s))\, Y(s)\right\rangle ds, \\
S_3 &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t-r_i(t)}^{t} \left\langle \upsilon Y(t), B(t)J_{G_i}(Y(s))H^{-1}(X(s))Z(s)\right\rangle ds, \\
S_4 &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t-r_i(t)}^{t} \left\langle H^{-1}(X(t))Z(t), B(t)J_{G_i}(Y(s))H^{-1}(X(s))Z(s)\right\rangle ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'parès le Lemme .4, Lemme .7 et les conditions $(i) - (vi)$ du théorème (4.1) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V \quad &\le \quad \upsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} < C'(t)F_i(\sigma X), X > d\sigma + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{G_i}}{2} < B'(t)Y, Y > \\
&+ \quad < C'(t)\sum_{i=1}^{n} F_i(X), Y > -\Delta_H^{-1}(\delta_A \Delta_H^{-1} - \upsilon)\|Z\|^2 + \frac{1}{2} < \varphi(t)Z, Z > \\
&- \quad \left[\sum_{i=1}^{n} \delta_C(\upsilon\delta_{G_i} - \Delta_{F_i}) - \upsilon\beta\delta_2\right] \|Y\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \chi_i(1 - r_i'(t)) \int_{t-r_i(t)}^{t} \|Z(\xi)\|^2 d\xi \\
&+ \quad \sum_{i=1}^{n} \chi_i r_i(t)\|Z\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \eta_i r_i(t)\|Y\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \eta_i(1 - r_i'(t)) \int_{t-r_i(t)}^{t} \|Y(\xi)\|^2 d\xi \\
&+ \quad S_1 + S_2 + S_3 + S_4.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant le terme

$$\begin{aligned}
Q \quad &= \quad \upsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} < C'(t)F_i(\sigma X), X > d\sigma + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{G_i}}{2} < B'(t)Y, Y > \\
&\quad + < C'(t)\sum_{i=1}^{n} F_i(X), Y > \\
&= \quad \upsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} < C'(t)F_i(\sigma X), X > d\sigma + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{G_i}}{2} < B'(t)Y, Y > + \frac{1}{2} < C'(t)Y, Y > \\
&- \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left\| C'^{\frac{1}{2}}(t)Y - C'^{\frac{1}{2}}(t)F_i(X)\right\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} < C'(t)F_i(X), F_i(X) >,
\end{aligned}$$

par la condition (υ) du théorème (4.1), nous obtonons

$$\begin{aligned} Q &\leq \upsilon \int_0^1 \sum_{i=1}^n < C'(t) F_i(\sigma X), X > d\sigma \\ &\leq \upsilon \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sigma < C'(t) J_{F_i}(\tau\sigma X)X, X > d\tau d\sigma \\ &\leq \frac{\upsilon}{2} \sum_{i=1}^n \delta_{F_i} < C'(t)X, X > \leq 0. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz $2\left|\langle U, V\rangle\right| \leq \|U\|^2 + \|V\|^2$, nous obtenons

$$\begin{cases} S_1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{\upsilon\Delta_B\Delta_{F_i}}{2}\left[r_i(t)\|Y(t)\|^2 + \int_{t-r_i(t)}^t \|Y(s)\|^2 ds\right] \\ \\ S_2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_B\Delta_{H^{-1}}\Delta_{F_i}}{2}\left[r_i(t)\|Z(t)\|^2 + \int_{t-r_i(t)}^t \|Y(s)\|^2 ds\right] \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} S_3 \leq \sum_{i=1}^n \frac{\upsilon\Delta_B\Delta_{H^{-1}}\Delta_{G_i}}{2}\left[r_i(t)\|Y(t)\|^2 + \int_{t-r_i(t)}^t \|Z(s)\|^2 ds\right] \\ \\ S_4 \leq \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_B\Delta_{H^{-1}}^2\Delta_{G_i}}{2}\left[r_i(t)\|Z(t)\|^2 + \int_{t-r_i(t)}^t \|Z(s)\|^2 ds\right]. \end{cases}$$

En réorganisant les termes nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V &\leq -\Bigg[\sum_{i=1}^n \delta_C(\upsilon\delta_{G_i} - \Delta_{F_i}) - \upsilon\beta\delta_2 - \sum_{i=1}^n \Bigg(\eta_i + \frac{\upsilon\Delta_B}{2}(\Delta_{F_i} \\ &\quad + \Delta_{H^{-1}}\Delta_{G_i})\Bigg) r_i(t)\Bigg] \|Y\|^2 - \Bigg[\Delta_H^{-1}(\delta_A\Delta_H^{-1} - \upsilon) - \sum_{i=1}^n \Bigg(\chi_i \\ &\quad + \frac{\Delta_B\Delta_{H^{-1}}}{2}(\Delta_{F_i} + \Delta_{H^{-1}}\Delta_{G_i})\Bigg) r_i(t)\Bigg] \|Z\|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi(t)\|\|Z\|^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\Delta_B\Delta_{F_i}}{2}(\Delta_{H^{-1}} + \upsilon) - \eta_i(1-\omega_i)\right] \int_{t-r_i(t)}^t \|Y(\xi)\|^2 d\xi \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\Delta_B\Delta_{H^{-1}}\Delta_{G_i}}{2}(\Delta_{H^{-1}} + \upsilon) - \chi_i(1-\omega_i)\right] \int_{t-r_i(t)}^t \|Z(\xi)\|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Si nous prenons

$$\frac{\Delta_B\Delta_{F_i}(\Delta_{H^{-1}} + \upsilon)}{2(1-\omega_i)} = \eta_i > 0\ , \quad \frac{\Delta_B\Delta_{H^{-1}}\Delta_{G_i}(\Delta_{H^{-1}} + \upsilon)}{2(1-\omega_i)} = \chi_i > 0 \ \text{ et } \ r_i(t) \leq \gamma,$$

la dernière inégalité devient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V &\leq -\left[\sum_{i=1}^{n}\delta_C(\upsilon\delta_{G_i}-\Delta_{F_i})-\upsilon\beta\delta_2-\gamma\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right]\|Y\|^2 \\
&\quad -\left[\Delta_H^{-1}(\delta_A\Delta_H^{-1}-\upsilon)-\gamma\sum_{i=1}^{n}\rho_i\right]\|Z\|^2+\|\varphi(t)\|\|Z\|^2.
\end{aligned}$$

En utilisant (4.8), (4.6) et en prenant compte $\mu = k$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W &= e^{-\frac{1}{k}\|\Phi(t)\|}(\frac{d}{dt}V-\frac{1}{k}\|\varphi(t)\|V) \\
&\leq e^{-\frac{1}{k}\|\Phi(t)\|}[-\left[\sum_{i=1}^{n}\delta_C(\upsilon\delta_{G_i}-\Delta_{F_i})-\upsilon\beta\delta_2-\gamma\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right]\|Y\|^2 \\
&\quad -\left[\Delta_H^{-1}(\delta_A\Delta_H^{-1}-\upsilon)-\gamma\sum_{i=1}^{n}\rho_i\right]\|Z\|^2].
\end{aligned}\tag{4.9}$$

Par conséquent, si

$$\gamma < \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_C(\upsilon\delta_{G_i}-\Delta_{F_i})-\upsilon\beta\delta_2}{\theta_i},\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_H^{-1}(\delta_A\Delta_H^{-1}-\upsilon)}{\rho_i}\right\}.$$

l'inégalité (4.9) devient

$$\frac{d}{dt}W(t,X_t,Y_t,Z_t)\leq -W_4(X,Y,Z)$$

où $W_4(X,Y,Z) = N_1(\|Y\|^2+\|Z\|^2)$, pour un certain $N_1 > 0$. Il s'ensuit, par les conditions (i) et (iv) du théorème (4.1), que $W_4(X,Y,Z) = 0$ si et seulement si $X = Y = Z = 0$ dans le système (4.4), et $\frac{d}{dt}W(t,\phi) \leq -W_4(X,Y,Z) < 0$ pour $\phi \neq 0$. Ainsi, toutes les conditions de Théorème 1.38 sont verfiées. Ceci montre que toute solution de (4.2) est uniformément asymptotiquement stable, ce qui preuve le Théorème 4.1. □

Exemple 4.2. Considérons le cas particulier de l'équation (4.2) où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},\quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\Psi\big(Y\big) = \begin{pmatrix} 0.2\arctan y_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+y_2^2}+1 \end{pmatrix},$$

et pour un indice $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$F_\ell\big(X\left(t - r_\ell\left(t\right)\right)\big) = \begin{pmatrix} 2\ell x_1(t - r_\ell(t)) + \frac{\ell x_1(t - r_\ell(t))}{1 + \ell x_1^2(t - r_\ell(t))} \\ \ell x_2(t - r_\ell(t)) + \frac{\ell x_2(t - r_\ell(t))}{1 + |x_2(t - r_\ell(t))|} \end{pmatrix},$$

$$J_{F_\ell}\left(X\right) = \begin{pmatrix} 2\ell + \frac{\ell}{(1+\ell x_1)^2} & 0 \\ 0 & \ell + \frac{\ell}{(1+|x_2|)^2} \end{pmatrix},$$

$$G_\ell\left(Y\left(t - r_\ell\left(t\right)\right)\right) = \begin{pmatrix} \ell y_1\left(t - r_\ell\left(t\right)\right)\left[e^{1 - y_1^2(t - r_\ell(t))} + 3\right] \\ \ell y_2\left(t - r_\ell\left(t\right)\right)\left[e^{1 - y_2^2(t - r_\ell(t))} + 3\right] \end{pmatrix},$$

$$J_{G_\ell}\left(Y(t)\right) = \begin{pmatrix} g_{11}(y_1(t)) & 0 \\ 0 & g_{22}(y_2(t)) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} g_{11}(y_1(t)) &= 3\ell + \ell e^{1 - y_1^2(t)} - 2\ell y_1^2\left(t\right)e^{1 - y_1^2(t)}, \\ g_{22}(y_2(t)) &= 3\ell + \ell e^{1 - y_2^2(t)} - 2\ell y_2^2\left(t\right)e^{1 - y_2^2(t)}, \end{aligned}$$

et

$$H_t = \begin{pmatrix} h_{11}(x_1(t)) & 0 \\ 0 & h_{22}(x_2(t)) \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\sin t}}{10} + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9\cos t}{100} + \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t} + 5 & 0 \\ 0 & e^{-t} + 5 \end{pmatrix}, \qquad C(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t^2}+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} h_{11}(x_1(t)) &= 0.03\Big(\frac{\sin(x_1(t))}{(1 + x_1^2(t))} + \frac{3}{2}\Big), \\ h_{22}(x_2(t)) &= \frac{0.04}{9}\Big(\frac{\cos(x_2(t))}{(1 + x_2^2(t))} + \frac{7}{2}\Big). \end{aligned}$$

Évidemment, $H\left(X\right), \Psi\left(Y\right), A, B, C$ et $J_{F_\ell}\left(X\right), J_{G_\ell}\left(Y\right)$ sont des matrices diagonales, donc elles sont symétriques et commutent deux à deux. Ensuite, par un calcul facile, nous obtenons les valeurs propres des matrices H, Ψ, A, B, C et

$J_{F_\ell}(X), J_{G_\ell}(Y)$ comme suit :

$$\begin{array}{rcl}
\delta_H &=& 0.015 \leq \lambda_1(H) = 0.03\Big(\dfrac{\sin x_1}{(1+x_1^2)} + \dfrac{3}{2}\Big), \\
\lambda_2(H) &=& \dfrac{0.04}{9}\Big(\dfrac{\cos x_2}{(1+x_2^2)} + \dfrac{7}{2}\Big) \leq 0.02 = \Delta_H, \\
\delta_B &=& 5 \leq \lambda_1(B(t)) = \dfrac{1}{1+t} + 5, \qquad\qquad \lambda_2(B(t)) = e^{-t} + 5 \leq 6 = \Delta_B, \\
\delta_C &=& 0.5 \leq \lambda_1(C(t)) = \dfrac{1}{2(1+t)} + \dfrac{1}{2}, \\
\lambda_2(C(t)) &=& \dfrac{e^{-t^2}}{2} + \dfrac{1}{2} \leq 1 = \Delta_C, \\
1 &\leq& \lambda_1(\Psi(Y)) = \dfrac{1}{1+y_2^2} + 1, \\
\lambda_2(\Psi(Y)) &=& 0.2 \arctan y_1 \leq \dfrac{\pi}{10} = \beta, \\
\delta_{F_\ell} &=& \ell \leq \lambda_1(J_{F_\ell}(X)) = \ell + \dfrac{\ell}{(1+|x_2|)^2}, \\
\lambda_2(J_{F_\ell}(X)) &=& 2\ell + \dfrac{\ell}{(1+\ell x_1)^2} \leq 3\ell = \Delta_{F_\ell}, \\
\delta_{G_\ell} &=& \ell \leq \lambda_1(J_{G_\ell}(Y)) = g_{11}(y_1(t)), \\
\lambda_2(J_{G_\ell}(Y)) &=& g_{22}(y_2(t)) \leq 6\ell = \Delta_{G_\ell}, \\
\delta_A &=& 0.24333 \leq \lambda_1(A(t)) = \dfrac{9}{100}\cos t + \dfrac{1}{3}.
\end{array}$$

Un calcul simple donne

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_1(A'(t)) &=& -\dfrac{9}{100}\sin t, \qquad\qquad \lambda_2(A'(t)) = \dfrac{\cos t}{10} e^{\sin t}, \\
\lambda_1(B'(t)) &=& -\dfrac{1}{(1+t)^2}, \qquad\qquad \lambda_2(B'(t)) = -e^{-t},
\end{array}$$

$$\lambda_1(C'(t)) = -\frac{1}{2(1+t)^2}, \qquad\qquad \lambda_2(C'(t)) = -te^{-t^2}.$$

Il est facile de voir qu'une vérification triviale montre que H est une matrice non singulière et nous avons

$$\frac{d}{dt}H_t = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}h_{11}(x_1(t)) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt}h_{22}(x_2(t)) \end{pmatrix},$$

où

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}h_{11}(x_1(t)) &= 0.03\Big(\frac{\cos(x_1(t))}{(1+x_1^2(t))} - \frac{2x_1(t)\sin(x_1(t))}{(1+x_1^2(t))^2}\Big)x_1'(t),\\
\frac{d}{dt}h_{22}(x_2(t)) &= \frac{0.04}{9}\Big(\frac{-\sin(x_2(t))}{(1+x_2^2(t))} - \frac{2x_2\cos(x_2(t))}{(1+x_2^2(t))^2}\Big)x_2'(t).
\end{aligned}
$$

Ainsi, en utilisant la définition .9 et le Lemme .10, nous obtenons

$$
\|\frac{d}{dt}H_t\| = \max\left\{\left|\frac{d}{dt}h_{11}(x_1(t))\right|, \left|\frac{d}{dt}h_{22}(x_2(t))\right|\right\} = D(t),
$$

et

$$
\| \varphi(t) \| \leq \frac{1}{\delta_H^2}D(t).
$$

Pour $t \in [0, +\infty)$,un calcul direct donne

$$
\begin{aligned}
\delta_H^2\int_0^t \| \varphi(s) \| \, ds &\leq 0.03\int_0^t \left|(\frac{\cos x_1}{1+x_1^2} - \frac{2x_1\sin x_1}{(1+x_1^2)^2})x_1'(s)\right| ds\\
&+ \frac{0.04}{9}\int_0^t \left|(\frac{-\sin x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_2\cos x_2}{(1+x_2^2)^2})x_2'(s)\right| ds\\
&\leq 0.03\int_{\omega_1(t)}^{\omega_2(t)} \left|(\frac{\cos u}{1+u^2} - \frac{2u\sin u}{(1+u^2)^2})\right| du\\
&+ \frac{0.04}{9}\int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left|(\frac{-\sin v}{1+v^2} - \frac{2v\cos v}{(1+v^2)^2})\right| dv\\
&< (0.03 + \frac{0.04}{9})\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1+u^2+2u}{(1+u^2)^2}\right| du\\
&= (0.03 + \frac{0.04}{9})\pi,
\end{aligned}
$$

où

$$
\omega_1(t) = \min\{x_1(0), x_1(t)\}, \qquad \omega_2(t) = \max\{x_1(0), x_1(t)\},
$$

et

$$
\varphi_1(t) = \min\{x_2(0), x_2(t)\}, \qquad \varphi_2(t) = \max\{x_2(0), x_2(t)\}.
$$

En prenant $\upsilon = 5$ il s'ensuit que

$$
\frac{1}{2}\lambda_j(A') \leq \delta_2 = 0,2 < \frac{\delta_C(\upsilon\delta_{G_\ell} - \Delta_{F_\ell})}{\upsilon\beta} = \frac{2\ell}{\pi},
$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\delta_{G_\ell}}{\Delta_{F_\ell}} > \frac{1}{\upsilon} > \frac{\Delta_H}{\delta_A} = 0,082.$$

Si nous prenons $r_\ell(t) = \exp\left(-\ell t^2\right)$, alors $0 \leq r_\ell(t) \leq \gamma$ et

$$r'_\ell(t) = -2\ell t \exp\left(-\ell t^2\right) \leq \omega_\ell \text{ pour } 0 < \omega_i < 1.$$

Ainsi, toutes les hypothèses (i) à (vii) sont satisfaites, nous pouvons conclure en utilisant le Théorème 4.1 que toute solution de (4.2) est uniformément asymptotiquement stable.

4.3 Bornitude

Dans le cas où $P(.) \neq 0$. Nous avons le Théorème suivant.

Théorème 4.3. *En plus des hypothèses du Théorème 4.1, si nous supposons que P est continue, et*

$$\|P(t)\| \leq |q(t)|,$$

où $q \in L^1(0,\infty)$, $L^1(0,\infty)$ est l'espace de fonctions intégrables de Lebesgue. ALors, toutes les solutions de l'équation perturbée (4.3) sont bornées.

Démonstration. Nous considérons le système équivalent de (4.3)

$$\begin{cases} X' = Y \\ \\ Y' = H^{-1}(X)Z \\ \\ Z' = -A(t)\Psi(Y)H^{-1}(X)Z - B(t)\sum_{i=1}^n G_i(Y) \\ \qquad +B(t)\sum_{i=1}^n \int_{t-r_i(t)}^t J_{G_i}(Y(s))H^{-1}(X(s))Z(s)ds \\ \qquad -C(t)\sum_{i=1}^n F_i(X) + C(t)\sum_{i=1}^n \int_{t-r_i(t)}^t J_{F_i}(X(s))\,Y(s)ds + P(t). \end{cases} \tag{4.10}$$

Grâce au (4.10) et (4.6) on a

$$\frac{d}{dt}W_{(4.10)} = \frac{d}{dt}W_{(4.4)} + < H^{-1}(X)Z + \upsilon Y, P(t) > .$$

Comme $\dfrac{d}{dt}W_{(4.4)} \leq 0$ et notons que $\|X\| \leq 1 + \|X\|^2$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W_{(4.10)} &\leq k_1(\|Z\| + \|Y\|)|q(t)| \\
&\leq k_1(2 + \|Z\|^2 + \|Y\|^2)|q(t)| \\
&\leq k_1(\|Z\|^2 + \|Y\|^2)|q(t)| + 2k_1|q(t)| \\
&\leq \frac{k_1}{ke^{-\frac{N}{\mu}}}|q(t)|W + 2k_1|q(t)|,
\end{aligned}$$

où $k_1 = \max\{\Delta_{H^{-1}}, \upsilon\}$. soit $\kappa = \max\{2k_1, \dfrac{k_1}{ke^{-\frac{N}{\mu}}}\}$, alors
$\frac{d}{dt}W_{(4.10)} \leq \kappa|q(t)| + \kappa|q(t)|W$.
Multipliant chaque membre de cette inégalité par $e^{-\kappa\int_0^t |q(s)|ds}$, nous avons
$e^{-\kappa\int_0^t |q(s)|ds}\dfrac{d}{dt}W_{(4.10)} \leq e^{-\kappa\int_0^t |q(s)|ds}\kappa|q(t)| + e^{-\kappa\int_0^t |q(s)|ds}\kappa|q(t)|W$.
nous intégrons par parties le membre gauche de cette inégalité de 0 à t, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left[e^{-\kappa\int_0^\tau |q(s)|ds}W(\tau)\right]_0^t + \int_0^t e^{-\kappa\int_0^\tau |q(s)|ds}\kappa|q(\tau)|W(\tau)d\tau \\
&\leq \int_0^t e^{-\kappa\int_0^\tau |q(s)|ds}\kappa|q(\tau)|d\tau + \int_0^t e^{-\kappa\int_0^\tau |q(s)|ds}\kappa|q(\tau)|W(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

ainsi

$$e^{-\kappa\int_0^t |q(s)|ds}W - W(0,\phi_0) \leq 1 - e^{-\kappa\int_0^t |q(s)|ds},$$

où $\phi_0 = (X(0), Y(0), Z(0))$. Comme $\int_0^t |q(s)|ds \leq L$ pour tout $t \geq 0$, nous avons

$$W(t, X_t, Y_t, Z_t) \leq W(0,\phi_0)e^{\kappa L} + [e^{\kappa L} - 1] \quad \text{pour} \quad t \geq 0.$$

Maintenant, puisque le membre droit est constant, et comme
$W(t, X_t, Y_t, Z_t) \to \infty$ quand $\|X\|^2 + \|Y\|^2 + \|Z\|^2 \to \infty$,
il s'ensuit qu'il existe $D > 0$ tel que

$$\|X(t)\| \leq D, \ \|Y(t)\| \leq D, \ \|Z(t)\| \leq D \quad \forall t \geq 0,$$

ainsi que grâce au système (4.10) on déduit

$$\|X(t)\| \leq C, \ \|X'(t)\| \leq C, \ \|X''(t)\| \leq C \quad \forall t \geq 0.$$

$\square$

Perspective

Il reste beaucoup de questions ouvertes comme perspectives de recherche. Parmi ces questions on peut notamment citer :

❶ Dans l'équation 2.1 si on suppose que la matrice G n'est pas inversible on se propose de voir si les solutions des équations précédentes preservent leurs comportements asymtotiques.

❷ Quel est le comportement asymptotique des solutions de l'equation

$$\Big(G\big(X(t)\big)X''(t)\Big)' + AX''(t) + BX'(t) + H\Big(X\big(t - r(t)\big)\Big) = P\,(t)?$$

❸ Dans le cas de l'équation 3.1 on se propose de rempalcer $P(t)$ par $P(t, X, X', X'')$

❹ Est ce qu'on peut avoir des résultats sémilaires dans le cas neutral ? i.e l'equations

$$\Big(X(t) + \beta X(t - r(t))\Big)''' + AX''(t) + BX'(t) + H\Big(X\big(t - r(t)\big)\Big) = P\,(t)\,,$$

$$\Big(X(t) + \beta X(t - \rho(t))\Big)''' + AX''(t) + BX'(t) + H\Big(X\big(t - r(t)\big)\Big) = P\,(t)\,,$$

$$\Big(X(t) + \beta X(t - r(t))\Big)''' + A(X)X''(t) + B(X)X'(t) + H\Big(X\big(t - r(t)\big)\Big) = P\,(t)\,,$$

$$\Big(X(t) + \beta X(t - \rho(t))\Big)''' + A(X)X''(t) + B(X)X'(t) + H\Big(X\big(t - r(t)\big)\Big) = P\,(t)\,,$$

$$\Big(G\big(X(t)\big)X''(t)\Big)' + A(X)X''(t) + B(X)X'(t) + H\Big(X\big(t - r(t)\big)\Big) = P\,(t)\,.$$

Annexe

Lemme .4. *[4, 7, 75, 26, 76, 77] Soit $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie positive, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, nous avons*

$$\delta_d \parallel X \parallel^2 \leq \langle DX, X\rangle \leq \Delta_d \parallel X \parallel^2,$$

où δ_d, Δ_d sont la plus petite et la plus grande valeur propre de D, respectivement.

Preuve. Nous rappelons que le théorème spectral dans sa version matricielle nous garantie que pour toute matrice symétrique réelle D, il existe une matrice orthogonale P telle que la matrice $A = P^T DP$ soit diagonale, par suite il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale A telles que,

$$D = PAP^T.$$

Notons $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ l'ensemble des valeurs propres de D, elles sont toutes réelles et sans perte de généralité nous pouvons poser

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n,$$

nous avons,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Maintenant pour $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T \in \mathbb{R}^n$ on pose $Y = P^T X = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)^T$, comme P est une matrice orthogonale (i.e $PP^T = I$) nous avons,

$$\parallel Y \parallel^2 = \parallel P^T X \parallel^2 = \left(P^T X\right)^T P^T X = X^T PP^T X = X^T PP^T X = \parallel X \parallel^2 .$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \langle DX, X\rangle &= \left\langle PAP^TX, X\right\rangle \\ &= X^TPAP^TX \\ &= \left(P^TX\right)^T A\left(P^TX\right) = \langle A\left(P^TX\right), \left(P^TX\right)\rangle \\ &= \langle AY, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2, \end{aligned}$$

et nous obtenons

$$\lambda_1 \left\|X\right\|^2 = \lambda_1 \left\|Y\right\|^2 = \lambda_1\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2 \leq \lambda_n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_n \left\|X\right\|^2,$$

ce qui est bien

$$\delta_d \left\|X\right\|^2 \leq \langle DX, X\rangle \leq \Delta_d \left\|X\right\|^2$$

avec $\delta_d = \lambda_1$; $\Delta_d = \lambda_n$ et $\langle DX, X\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$. □

Lemme .5. *[4, 7, 75, 26, 76, 77] soit (Q, D) une paire de matrices $n \times n$ symétriques qui commutantent nous avons,*

(i) *les valeurs propres $\lambda_i(QD)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ du produit QD sont toutes reélles et satisfont*

$$\min_{1\leq j,k\leq n} \lambda_j(Q)\lambda_k(D) \leq \lambda_i(QD) \leq \max_{1\leq j,k\leq n} \lambda_j(Q)\lambda_k(D).$$

(ii) *les valeurs propres $\lambda_i(Q + D)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ de la somme $Q + D$ sont toutes reélles et satisfont.*

$$\left\{\min_{1\leq j\leq n} \lambda_j(Q) + \min_{1\leq k\leq n} \lambda_k(D)\right\} \leq \lambda_i(Q + D) \leq \left\{\max_{1\leq j\leq n} \lambda_j(Q) + \max_{1\leq k\leq n} \lambda_k(D)\right\}.$$

Preuve.

Q et D sont deux matrices symétriques qui commutent alors tout espace propre de Q est invariant par D et inversement. En effet si X est un vecteur propre de Q appartient à l'espace propre $E_\lambda = Ker\{Q - \lambda I\}$ pour une valeur λ de Q nous avons,

$$QX = \lambda X \qquad \Rightarrow \qquad QDX = DQX = \lambda DX.$$

Ou bien $DX = 0$, ou bien il est vecteur propre de Q. Dans les deux cas, il appartient à l'espace propre E_λ.

Dans le cas où toutes les valeurs propres de Q sont distinctes deux à deux, l'espace propre E_λ est de dimension 1 il sera donc engendré par un seul vecteur et tous ses vecteurs seront proportionels l'un à l'autre, par suite il existe une constante $\mu \in \mathbb{R}$ telle que

$$DX = \mu X$$

donc si $\{X_1, X_2 ... X_n\}$ est la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de Q qui est une base de vecteurs propres communs entre Q et D, on trouve une matrice orthogonale de passage P et deux matrices diagonales Q_0 et D_0 telles que

$$Q = PQ_0P^{-1} \quad \text{et} \quad D = PD_0P^{-1}$$

Dans le cas général nous supposons que la valeur propre λ n'est pas simple alors $\dim E_\lambda = k \neq 1$, soit $B = \{X_1, X_2 ... X_k\}$ une base de E_λ nous avons

$$X_i \in E_\lambda \Longrightarrow DX_i \in E_\lambda \Longrightarrow DX_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij} X_j \text{ pour tout } i \in \{1, 2, ..., k\}$$

Nous allons essayer de construire une combainaison des vecteurs qui sont propres à la fois pour D et pour Q.

La matrice $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ est une matrice symétrique car nous avons pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$

$$c_{ij} = \langle X_j, DX_i \rangle = \langle X_i, DX_j \rangle = c_{ji}$$

Considérons un vecteur quelconque $A = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i \in E_\lambda$.

$$\begin{aligned} DA &= D\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i DX_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\sum_{j=1}^{k} c_{ij} X_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k} a_i c_{ij} X_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} c_{ij} a_i X_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} c_{ij} a_i\right) X_j \end{aligned}$$

en posant $\Psi = [a_1, a_2, ... a_k]^T$, et en choisissant

$$\text{pour} \quad j \in \{1, 2, ..., k\}\,; \quad \sum_{i=1}^{k} c_{ij} a_i = \mu_1 a_j \Longrightarrow C\Psi = \mu_1 \Psi$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^{k} a_i X_i = [a_1, a_2, ..., a_k] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} = \Psi \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} \\
\text{et} \qquad DA &= \sum_{j=1}^{k} \mu_1 a_j X_j = \mu_1 \sum_{j=1}^{k} a_j X_j = \mu_1 A.
\end{aligned}$$

Donc le vecteur $A = \Psi \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de D et de Q (comme combainaison linéaire de l'espace de vecteurs propres E_λ) dés que le vecteur $\Psi = [a_1, a_2, ..., a_k]^T$ est un vecteur propre de C.

Or C est une matrice symétrique donc il existe une base orthonormée $B_\lambda = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ de E_λ et comme deux vecteurs X et Y propres de Q des valeurs propres distinctes $\lambda_X \neq \lambda_Y$ sont orthognaux car

$$(\lambda_X - \lambda_Y) \langle X, Y\rangle = \langle \lambda_X X, Y\rangle - \langle X, \lambda_Y Y\rangle = \langle QX, Y\rangle - \langle X, QY\rangle = 0 \Longrightarrow \langle X, Y\rangle = 0$$

nous trouvons que l'ensemble

$$B = \bigcup_{\lambda \in SpQ} B_\lambda$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de D et de Q au même temps.

Par suite il existe une matrice de passage P et deux matrices diagonales Q_0 et D_0 telles que

$$Q = PQ_0P^{-1} \quad \text{et} \quad D = PD_0P^{-1}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
QD &= PQ_0P^{-1}PD_0P^{-1} = PQ_0D_0P^{-1} \\
Q + D &= PQ_0P^{-1} + PD_0P^{-1} = P\left(Q_0P^{-1} + D_0P^{-1}\right) = P\left(Q_0 + D_0\right)P^{-1}
\end{aligned}$$

(Q_0D_0) et $(Q_0 + D_0)$ sont des matrices diagonales donc les valeurs propres de QD sont de la forme

$$\lambda_i (QD) = \lambda_j (Q) \lambda_k (D)$$

et les valeurs propres de $(Q+D)$ sont de la forme

$$\lambda_i (Q+D) = \lambda_j (Q) + \lambda_k (D) .$$

Ces formes de valeurs propres garantissent les inégalités,

$$\min_{1\leq j,k\leq n} \lambda_j (Q) \lambda_k (D) \leq \lambda_i (QD) \leq \max_{1\leq j,k\leq n} \lambda_j (Q) \lambda_k (D) .$$

et

$$\left\{ \min_{1\leq j\leq n} \lambda_j (Q) + \min_{1\leq k\leq n} \lambda_k (D) \right\} \leq \lambda_i (Q+D) \leq \left\{ \max_{1\leq j\leq n} \lambda_j (Q) + \max_{1\leq k\leq n} \lambda_k (D) \right\} .$$

□

Lemme .6. *[4, 7, 75, 26, 76, 77] Soit $H(X)$ une fonction vectorielle continue et differentiable telle que $H(0) = 0$ alors,*

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^1 \langle H(\sigma X), X \rangle \, d\sigma \right) = \langle H(X), X' \rangle .$$

Preuve.

Sous les hypothèses sur la matrice jacobienne $J_h(X)$ et la matrice H nous avons,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\int_0^1 \langle H(\sigma X), X \rangle \, d\sigma \right) &= \int_0^1 \langle \sigma J_h(\sigma X) X', X \rangle \, d\sigma + \int_0^1 \langle H(\sigma X), X' \rangle \, d\sigma \\
&= \int_0^1 \langle \sigma J_h(\sigma X) X, X' \rangle \, d\sigma + \int_0^1 \langle H(\sigma X), X' \rangle \, d\sigma \\
&= \int_0^1 \langle \sigma J_h(\sigma X) X + H(\sigma X), X' \rangle \, d\sigma \\
&= \int_0^1 \left\langle \frac{d}{d\sigma} (\sigma H(\sigma X)), X' \right\rangle d\sigma \\
&= \left\langle \int_0^1 \left[\frac{d}{d\sigma} (\sigma H(\sigma X)) \right] d\sigma, X' \right\rangle \\
&= \langle H(X), X' \rangle
\end{aligned}$$

□

Lemme .7. *Soit $H(X)$ une fonction vectorielle continue et differentiable telle que $H(0) = 0$. Alors,*

$$\delta_h \parallel X \parallel^2 \leq 2 \int_0^1 \langle H(\sigma X), X \rangle \, d\sigma \leq \Delta_h \parallel X \parallel^2 .$$

où δ_h, Δ_h sont la plus grande valeur propre et la plus petite valeur propre de $J_h(X)$ (matrice jacobienne de H), respectivement.

Preuve.

Supposons les hypothèses sur la matrice jacobienne $J_h(X)$ et la matrice H, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\left(H\left(\tau X\right)\right) = J_h\left(\tau X\right)X \quad &\Longrightarrow \quad H\left(X\right) = \int_0^1 J_h\left(\tau X\right)X d\tau \\ &\Longrightarrow \quad H\left(\sigma X\right) = \int_0^1 \sigma J_h\left(\tau\sigma X\right)X d\tau \end{aligned}$$

donc du lemme (.4) nous avons

$$\begin{aligned} \delta_h \left\|X\right\|^2 \quad &\leq \quad \left\langle J_h\left(\sigma\tau X\right)X, X\right\rangle \leq \Delta_h \left\|X\right\|^2 \\ &\Longrightarrow \quad \sigma\delta_h \left\|X\right\|^2 \leq \sigma\left\langle J_h\left(\sigma\tau X\right)X, X\right\rangle \leq \sigma\Delta_h\left\|X\right\|^2 \\ &\Longrightarrow \quad \int_0^1 \sigma\delta_h\left\|X\right\|^2 d\tau \leq \int_0^1 \sigma\left\langle J_h\left(\sigma\tau X\right)X, X\right\rangle d\tau \\ &\leq \quad \int_0^1 \sigma\Delta_h\left\|X\right\|^2 d\tau \\ &\Longrightarrow \quad \sigma\delta_h\left\|X\right\|^2 \leq \left\langle \int_0^1 \sigma J_h\left(\sigma\tau X\right)X d\tau, X\right\rangle \leq \sigma\Delta_h\left\|X\right\|^2 \\ &\Longrightarrow \quad \int_0^1 \sigma\delta_h\left\|X\right\|^2 d\sigma \leq \left\langle H\left(\sigma X\right), X\right\rangle d\sigma \\ &\leq \quad \int_0^1 \sigma\Delta_h\left\|X\right\|^2 d\sigma \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\delta_h\left\|X\right\|^2 \leq \left\langle H\left(\sigma X\right), X\right\rangle d\sigma \leq \frac{1}{2}\Delta_h\left\|X\right\|^2 \\ &\Longrightarrow \quad \delta_h\left\|X\right\|^2 \leq 2\left\langle H\left(\sigma X\right), X\right\rangle d\sigma \leq \Delta_h\left\|X\right\|^2 \end{aligned}$$

□

Lemme .8. *Soit $H(X)$ une fonction continue et differentiable sur $\mathbb{R}^n$ telle que $H(0) = 0$. Alors*

1. $\langle C(t)\,H(X), X\rangle = \int_0^1 \langle C(t)\,J_h(\sigma X)X, X\rangle d\sigma$
2. $\int_0^1 \langle C(t)\,H(\sigma X)X, X\rangle d\sigma = \int_0^1\int_0^1 \sigma\langle C(t)\,J_h(\sigma\tau X)X, X\rangle d\sigma d\tau$
3. $\langle H(X), H(X)\rangle = 2\int_0^1\int_0^1 \sigma\left\langle J_h\left(\sigma X\right)J_h\left(\tau\sigma X\right)X, X\right\rangle d\sigma d\tau.$

où on a supposé l'existence de $J_h(X)$ la matrice jacobienne de H.

Démonstration. 1. On a

$$H(X)=\int_0^1 J_h(\sigma X)Xd\sigma \implies \langle C(t)\,H(X),X\rangle=\langle C(t)\int_0^1 J_h(\sigma X)Xd\sigma,X\rangle$$
$$\implies \langle C(t)\,H(X),X\rangle=\int_0^1\langle C(t)\,J_h(\sigma X)X,X\rangle d\sigma$$

2. De la même façon on a

$$\begin{aligned} & H(\sigma X)=\int_0^1 \sigma J_h(\sigma\tau X)Xd\tau \\ \Rightarrow\ & \int_0^1\langle C(t)\,H(\sigma X)X,X\rangle d\sigma=\int_0^1\langle\int_0^1 \sigma C(t)\,J_h(\sigma\tau X)Xd\tau,X\rangle d\sigma \\ \Rightarrow\ & \int_0^1\langle C(t)\,H(\sigma X)X,X\rangle d\sigma=\int_0^1\int_0^1 \sigma\langle C(t)\,J_h(\sigma\tau X)X,X\rangle d\sigma d\tau \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma}\left[\langle H(\sigma X),H(\sigma X)\rangle\right] &= 2\langle H(\sigma X),J_h(\sigma X)\,X\rangle \\ &= 2\langle J_h(\sigma X)\,H(\sigma X),X\rangle \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle H(X),H(X)\rangle &= \|H(X)\|^2=\int_0^1\frac{d}{d\sigma}\langle H(\sigma X),H(\sigma X)\rangle\,d\sigma \\ &= 2\int_0^1\langle J_h(\sigma X)\,H(\sigma X),X\rangle\,d\sigma \\ &= 2\int_0^1\int_0^1\sigma\langle J_h(\sigma X)\,J_h(\tau\sigma X)\,X,X\rangle\,d\sigma d\tau \end{aligned}$$

□

Définition .9. Le rayon spectrale $\rho(A)$ d'une matrice A est défini par

$$\rho(A)=\max\{\lambda/\ \ \lambda \text{ est une valeur propre de } A\}.$$

Lemme .10. *Pour toute matrice $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, nous avons $\|A\|=\sqrt{\rho(A^TA)}$ de plus si A est symétrique alors*

$$\|A\|=\rho(A).$$

Preuve.

Pour une matrice réelle quelconque A la matrice A^TA est réelle et symétrique car

$$\left(A^TA\right)^T=A^T\left(A^T\right)^T=A^TA$$

nous appliqons le lemme (.4)

$$\delta_a \|X\|^2 \leq \left\langle A^T AX, X \right\rangle \leq \Delta_a \|X\|^2$$

où δ_a est la plus petite valeur propre de $A^T A$ et Δ_a est la plus grande valeur propre de $A^T A$, nous avons

$$\begin{aligned} \left\langle A^T AX, X \right\rangle &= \left(A^T AX\right)^T X = X^T A^T \left(A^T\right)^T X \\ &= X^T A^T AX = (AX)^T AX = \langle AX, AX \rangle \\ &= \|AX\|^2 \end{aligned}$$

et pour $X \neq 0$

$$\delta_a \|X\|^2 \leq \langle AX, AX \rangle \leq \Delta_a \|X\|^2 \Longrightarrow \delta_a \leq \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \leq \Delta_a = \rho\left(A^T A\right).$$

Nous obtenons

$$\frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \sqrt{\rho\left(A^T A\right)} \Longrightarrow \sup\left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|} / X \in \mathbb{R}^n - \{0\}\right\} = \|A\| \leq \sqrt{\rho\left(A^T A\right)}$$

Considérons à présent un vecteur propre X_a de la matrice $A^T A$ associé à la valeur propre la plus grande $\Delta_a = \rho\left(A^T A\right)$, nous avons,

$$\|AX_a\|^2 = \langle AX_a, AX_a \rangle = \left\langle A^T AX_a, X_a \right\rangle = \langle \Delta_a X_a, X_a \rangle = \Delta_a \|X_a\|^2$$

ce qui implique

$$\frac{\|AX_a\|^2}{\|X_a\|^2} = \Delta_a = \rho\left(A^T A\right)$$

nous avons donc

$$\sqrt{\rho\left(A^T A\right)} = \frac{\|AX_a\|}{\|X_a\|} \leq \sup\left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|} / X \in \mathbb{R}^n - \{0\}\right\} \leq \sqrt{\rho\left(A^T A\right)}$$

et

$$\sup\left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|} / X \in \mathbb{R}^n - \{0\}\right\} = \|A\| = \sqrt{\rho\left(A^T A\right)}.$$

Mainetnant dans le cas où A est une matrice symétrique il existe une matrice orthogonale de passage P et une matrice diagonale A_0 telles que

$$A = PA_0P^{-1} \Longrightarrow A^2 = D = PA_0P^{-1}PA_0P^{-1} = PA_0^2P^{-1}$$

et la plus grande valeur propre de $A^T A = A^2$ est bien le carré de la plus grande valeur propre de A donc,

$$\|A\| = \sqrt{\rho\left(A^T A\right)} = \sqrt{\rho\left(A^2\right)} = \sqrt{\left(\rho\left(A\right)\right)^2} = \rho\left(A\right)$$

$\square$

Lemme .11. *[72](Gronwall) Soient k un nombre réel positif et f, g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs positives telles que*

$$f(t) \leq k + \int_a^t f(s)g(s)ds \quad \textit{pour tout,} \quad t \in [a, b]$$

alors

$$f(t) \leq k e^{\int_a^t g(s)ds} \qquad \textit{pour tout,} \quad t \in [a, b].$$

Nous allons noter toutes les normes équivalentes d'un vecteur par $\|X\|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et toutes les normes équivalentes d'une matrice par $\|A\|$pour $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Bibliographie

[1] A.M.A. Abou-El-Ela. Boundedness of the solutions of certain third-order vector differential equations. *Ann. Differ. Equations*, 1 :127–139, 1985.

[2] AT Ademola. Uniform stability, boundedness and asymptotic behaviour of solutions of some third order nonlinear delay differential equations at ademola, po arawomo, 2 om ogunlaran3 and ea oyekan4 of mathematics university of ibadan, ibadan, nigeria. 2013.

[3] A.T. Ademola and P.O. Arawomo. Uniform stability and boundedness of solutions of nonlinear delay differential equations of the third order. *Math. J. Okayama Univ.*, 55 :157–166, 2013.

[4] A.U. Afuwape. Ultimate boundedness results for a certain system of third-order non- linear differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 97 :140–150, 1983.

[5] A.U. Afuwape and O.A. Adesina. On the bounds for mean-values of solutions to certain third-order nonlinear differential equations. *Fasc. Math.*, 36 :5–14, 2005.

[6] A.U. Afuwape and M. O. Omeike. On the stability and boubdedness of solutions of a kind of third order delay differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 200 :444–451, 2000.

[7] A.U. Afuwape and M. O. Omeike. Further ultimate boundedness of solutions of some system of third-order nonlinear ordinary differential equations. *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Math.*, 43 :7–20, 2004.

[8] Tunç Cemil. On the boundedness and periodicity of the solutions to a certain vector differential equation of third-order. *Appl. Math. Mech., Engl. Ed.*, 20(2) :163–170, 1999.

[9] Ethelberg N. Chukwu. On the boundedness and the existence of a periodic solution of some nonlinear third order delay differential equation. *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 64 :440–447, 1978.

[10] Ethelbert Nwakuche Chukwu. On the boundedness of solutions of third order differential equations. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 104 :123–149, 1975.

[11] J. O.C. Ezeilo and H.O. Tejumola. Boundedness theorems for certain third order differential equations. *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 55 :194–201, 1974.

[12] J.O.C. Ezeilo. A note on a boundedness theorem for some third order differential equations. *J. Lond. Math. Soc.*, 36 :439–444, 1961.

[13] J.O.C. Ezeilo. A stability result for solutions of a certain fourth order differential equation. *J. Lond. Math. Soc.*, 37 :28–32, 1962.

[14] J.O.C. Ezeilo. On the boundedness and the stability of solutions of some differential equations of the fourth order. *J. Math. Anal. Appl.*, 5 :136–146, 1962.

[15] J.O.C. Ezeilo. A boundedness theorem for a certain third-order differential equation. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 13 :99–124, 1963.

[16] J.O.C. Ezeilo. A generalization of some boundedness results by Reissig and Tejumola. *J. Math. Anal. Appl.*, 41 :411–419, 1973.

[17] Chunhua Feng. On the existence of almost periodic solutions of nonlinear third-order differential equation. *Ann. Differ. Equations*, 9(4) :420–424, 1993.

[18] John R. Graef, Djamila Beldjerd, and Moussadek Remili. On stability, ultimate boundedness, and existence of periodic solutions of certain third order differential equations with delay. *Panam. Math. J.*, 25(1) :82–94, 2015.

[19] John R. Graef, Lynda D. Oudjedi, and Moussadek Remili. Stability and square integrability of solutions of nonlinear third order differential equations. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, 22(4) :313–324, 2015.

[20] John R. Haddock. Stability theory for nonautonomous systems. Dyn. Syst., Vol. 2, int. Symp. Providence 1974, 271-274 (1976)., 1976.

[21] J. K. Hale. *Theory of Functional Differential Equations.* Springer Verlag, New York, 1977.

[22] J. K. Hale and S. Verduyn-Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer Verlag, New York, 1993.

[23] Tadayuki Hara. Remarks on the asymptotic behavior of the solutions of certain non- autonomous differential equations. *Proc. Japan Acad.*, 48 :549–552, 1972.

[24] Tadayuki Hara. On the asymptotic behavior of the solutions of some third and fourth order non-autonomous differential equations. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 9(3) :649–673, 1974.

[25] Tadayuki Hara. On the asymptotic behavior of solutions of certain non-autonomous differential equations. 1975.

[26] Ezeilo J.O.C. n-dimensional extensions of boundedness and stability theorems for some third order differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 18 :395–416, 1967.

[27] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Pearson, 3 edition, 2002.

[28] V. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999.

[29] Vladimir Borisovich Kolmanovskii and Valerij Romanovič Nosov. *Stability of functional differential equations*, volume 180. Elsevier, 1986.

[30] Nikolaj N Krasovskij. *Stability of motion : applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay*. University Press, 1963.

[31] Fatmi Larbi and Moussadek Remili. Stability and boundedness of solutions of some third-order nonlinear vector delay differential equation. *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, 55(2) :71–86, 2016.

[32] A.M. Lyapunov. Stability of motion. With a contribution by V.A. Pliss, and an introduction by V.P. Basov. Translated by Flavian Abramovici and Michael Shimshoni. (Mathematics in Science and Engineering. Vol. 30.) New York and London : Academic Press. XI, 203 p. (1966)., 1966.

[33] Ayman M Mahmoud and Cemil Tunç. Stability and boundedness of solutions of a certain n-dimensional nonlinear delay differential system of third-order. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, 7(1) :1–11, 2016.

[34] F. W. Meng. Ultimate boundedness results for a certain system of third-order nonlinear differential equations. *Ann. Math. Pura Appl.*, 177 :496–509, 1993.

[35] Babatunde Sunday Ogundare, Joseph Ayanrionla Ayanjinmi, and Olufemi Adeyinka Adesina. Bounded and l^2-solutions of certain third order non-linear differential equation with a square integrable forcing term. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 29(29) :151–156, 2006.

[36] BS Ogundare. On boundedness and stability of solutions of certain third order delay differential equation. *J. Nigerian Math. Soc*, 31 :55–68, 2012.

[37] AL Olutimo. Stability and ultimate boundedness of solutions of a certain third order nonlinear vector differential equation. *J. Nigerian Math. Soc*, 31 :69–80, 2012.

[38] M. O. Omeike. Ultimate boundedness results for a certain third order nonlinear matrix differential equations. *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, 46(1) :65–73, 2007.

[39] M. O Omeike. Stability and boundedness of solutions of a certain system of third-order nonlinear delay differential equations. *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, 35(1) :109–119, 2015.

[40] M. O. Omeike. Stability and boundedness of solutions of a certain system of third-order nonlinear delay differential equations. *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Math.*, 54, 1 :109–119, 2015.

[41] M.O. Omeike. New result on the ultimate boundedness of solutions of certain third-order vector differential equations. *Differential Equations and Control Processes*, (3) :26–38, 2008.

[42] M.O. Omeike and A.U. Afuape. New result on the ultimate boundedness of solutions of certain third-order vector differential equations. *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math.*, 49(1) :55–61, 2010.

[43] Lynda D. Oudjedi and Moussadek Remili. Boundedness and stability in third order nonlinear vector differential equations with multiple deviating arguments. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 2017.

[44] Chuanxi Qian. On global stability of third-order nonlinear differential equations. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 42(4) :651–661, 2000.

[45] M. Rahmane, L. Fatmi, and M. Remili. On stability and boundedness of solutions of fourth-order differential equations with multiple delays. pages 376–383, 2017.

[46] Lawrence Lee Rauch. Ii. oscillation of a third order nonlinear autonomous system. *Contributions to the theory of nonlinear oscillations*, 1 :39, 1950.

[47] Rolf Reissig, Giovanni Sansone, and Roberto Conti. Non-linear differential equations of higher order. 1974.

[48] M. Remili and D. Beldjerd. Stability and ultimate boundedness of solutions of some third order differential equations with delay. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 23(Supplement C) :90 – 95, 2017.

[49] M Remili and DL Oudjedi. Uniform stability and boundedness of a kind of third order delay differential equations. *Bull. Comput. Appl. Math*, 2(1) :25–35, 2014.

[50] Moussadek Remili and Djamila Beldjerd. On the asymptotic behavior of the solutions of third order delay differential equations. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 63(3) :447–455, 2014.

[51] Moussadek Remili and Djamila Beldjerd. A boundedness and stability results for a kind of third order delay differential equations. *Appl. Appl. Math.*, 10(2) :772–782, 2015.

[52] Moussadek Remili and Djamila Beldjerd. On ultimate boundedness and existence of periodic solutions of kind of third order delay differential equations. *Acta Univ. M. Belii, Ser. Math.*, 24 :43–57, 2016.

[53] Moussadek Remili and Oudjedi Lynda D. Boundedness and stability in third order nonlinear differential equations with multiple deviating arguments. *Archivum Mathematicum*, 53(2) :79–90, 2016.

[54] Moussadek Remili and Oudjedi Lynda Damerdji. Stability and boundednessof the solutions of non autonomous third order differential equations with delay. *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, 53(2) :139–147, 2014.

[55] Moussadek Remili and Lynda Damerdji Oudjedi. Stability of the solutions of nonlinear third order differential equations with multiple deviating arguments. *Acta Univ. Sapientiae, Math.*, 8(1) :150–165, 2016.

[56] MOUSSADEK REMILI and LYNDA D OUDJEDI. Boundedness and stability in third order nonlinear differential equations with bounded delay. *Analele Universităţii Oradea Fasc Matematica*, 1 :135–143, 2016.

[57] Moussadek Remili and Lynda D. Oudjedi. On asymptotic stability of solutions to third order nonlinear delay differential equation. *Filomat*, 30(12) :3217–3226, 2016.

[58] MOUSSADEK REMILI, LYNDA D. OUDJEDI, and DJAMILA BELDJERD.

[59] Moussadek Remili, Lynda D. Oudjedi, and Djamila Beldjerd. On the qualitative behaviors of solutions to a kind of nonlinear third-order differential equation with delay. *Commun. Appl. Anal.*, 20(1) :53–64, 2016.

[60] Oudjedi Lynda D. Remili, Moussadek. Boundedness and stability in third order nonlinear differential equations with multiple deviating arguments. *Archivum Mathematicum*, 53(2) :79–90, 2016.

[61] N. Rouche, P. Habets, and M. Laloy. Stability theory by Liapunov's direct method. Applied Mathematical Sciences. 22. New York - Heidelberg - Berlin : Springer-Verlag. XII, 396 p. DM 33.60 ; $ 14.80 (1977)., 1977.

[62] Zhang S. and Burton T. A. Unified boundedness, periodicity and stability in ordinary and functional differential equations. *Ann. Math. Pura Appl.*, 145 :129–158, 1986.

[63] A. I. Sadek. Stability and boundedness of a kind of third-order delay differential system. *Applied Mathematics Letters*, 16 :657–662, 2003.

[64] A. I. Sadek. On the stability of solutions of certain fourth order delay differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 148 :587–597, 2004.

[65] A.I. Sadek. On the asymptotic behaviour of solutions of certain fifth-order ordinary differential equations. *Appl. Math. Comput.*, 131(1) :1–13, 2002.

[66] A.I. Sadek. Stability and boundedness of a kind of third-order delay differential system. *Appl. Math. Lett.*, 16(5) :657–662, 2003.

[67] A.I. Sadek. On the stability of solutions of some non-autonomous delay differential equations of the third order. *Asymptotic Anal.*, 43(1-2) :1–7, 2005.

[68] A.S.C. Sinha. On stability of solutions of some third and fourth order delay-differential equations. *Inf. Control*, 23 :165–172, 1973.

[69] Hal Smith. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, volume 57. Springer Science & Business Media, 2010.

[70] K. Swick. On the boundedness and the stability of solutions of some non-autonomous differential equations of the third order. *J. Lond. Math. Soc.*, 44 :347–359, 1969.

[71] KE Swick. Asymptotic behavior of the solutions of certain third order differential equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 19(1) :96–102, 1970.

[72] Burton T.A. *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations.* Academic Press, Orlando, 1985.

[73] Burton T.A. *Volterra Integral and Differential Equations*, volume 202. Mathematics In Science And Engineering, 2 nd edition, 2005.

[74] HO Tejumola and B Tchegnani. Stability, boundedness and existence of periodic solutions of some third and fourth order nonlinear delay differential equations. *J. Nigerian Math. Soc*, 19 :9–19, 2000.

[75] Ezeilo J.O.C. Tejumola H. O. Boundedness and periodicity of solutions of a certain system of third-order nonlinear differential equations. *Ann. Math. Pura Appl.*, 74 :283–316, 1966.

[76] Ezeilo J.O.C. Tejumola H. O. Further results for a system of third-order ordinary differential equations. *Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 58 :143–151. 283–316, 1975.

[77] A. Tiryaki. Boundedness and periodicity results for a certain system of third-order nonlinear differential equations. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 30(4) :361–372, 1999.

[78] Cemil Tunc. Boundedness of solutions of a third-order nonlinear differential equation. *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math*, 6(1) :1–6, 2005.

[79] Cemil Tunç. On the asymptotic behavior of solutions of certain third-order nonlinear differential equations. *International Journal of Stochastic Analysis*, 2005(1) :29–35, 2005.

[80] CEMIL Tunç. Uniform ultimate boundedness of the solutions of third-order nonlinear differential equations. *Kuwait J. Sci. Engrg*, 32(1) :39–48, 2005.

[81] Cemil Tunc. New results about stability and boundedness of solutions of certain non-linear third-order delay differential equations. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 31(2) :185–196, 2006.

[82] Cemil Tunç. On the boundedness of solutions of certain nonlinear vector differential equations of third order. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 49 (97)(3) :291–300, 2006.

[83] Cemil Tunç. On the stability and boundedness of solutions of nonlinear vector differential equations of third order. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 70(6) :2232–2236, 2009.

[84] Cemil Tunç. On the stability and boundedness of solutions to third order nonlinear differential equations with retarded argument. *Nonlinear Dynamics*, 57(1) :97–106, 2009.

[85] Cemil Tunç. On some qualitative behaviors of solutions to a kind of third order nonlinear delay differential equations. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2010(12) :1–19, 2010.

[86] Cemil Tunç. On the stability and boundedness of solutions of nonlinear third order differential equations with delay. *Filomat*, 24(3) :1–10, 2010.

[87] Cemil Tunç. Stability and bounded of solutions to non-autonomous delay differential equations of third order. *Nonlinear Dynamics*, 62(4) :945–953, 2010.

[88] Cemil Tunç. Stability and boundedness for a kind of non-autonomous differential equations with constant delay. *Appl. Math. Inf. Sci*, 7(1) :355–361, 2013.

[89] Cemil Tunç. On the qualitative behaviors of solutions of some differential equations of higher order with multiple deviating arguments. *Journal of the Franklin Institute*, 351(2) :643–655, 2014.

[90] Cemil Tunc. Global stability and boundedness of solutions to differential equations of third order with multiple delays. *Dynamic Systems and Applications*, 24(4) :467–479, 2015.

[91] Cemil Tunc. On the stability and boundedness of certain third order non-autonomous differential equations of retarded type. *Proyecciones (Antofagasta)*, 34(2) :147–159, 2015.

[92] Cemil Tunç. Boundedness of solutions to a certain system of differential equations with multiple delays. In *Mathematical Modeling and Applications in Nonlinear Dynamics*, pages 109–123. Springer, 2016.

[93] Cemil Tunç. On the qualitative behaviors of nonlinear functional differential systems of third order. In *Advances in Nonlinear Analysis via the Concept of Measure of Noncompactness*, pages 421–439. Springer, 2017.

[94] Cemil Tunc. Stability and boundedness in delay system of differential equations of third order. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 22 :76–82, 2017.

[95] Cemil Tunç and Muzaffer Ateş. Stability and boundedness results for solutions of certain third order nonlinear vector differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 45(3) :273–281, 2006.

[96] Cemil Tunç et al. Bounded solutions to nonlinear delay differential equations of third order. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 34(1) :131–139, 2009.

[97] Cemil Tunç and Melek Gözen. Stability and uniform boundedness in multi-delay functional differential equations of third order. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2013. Hindawi Publishing Corporation, 2013.

[98] Cemil Tunç and Sizar Abid Mohammed. On the qualitative properties of differential equations of third order with retarded argument. *Proyecciones (Antofagasta)*, 33(3) :325–347, 2014.

[99] Cemil Tunc and Ercan Tunc. New ultimate boundedness and periodicity results for certain third-order nonlinear vector differential equations. *Mathematical Journal of Okayama University*, 48(1), 2006.

[100] Ercan Tunç. Instability of solutions of certain nonlinear vector differential equations of third order. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only]*, 2005 :Paper–No, 2005.

[101] Cemil Tunç. On asymptotic stability of solutions to third order nonlinear differential equations with retarded argument. *Commun. Appl. Anal.*, 11(3-4) :515–528, 2007.

[102] M. TunçConvergence of solutions to a certain vector differential equation of third order. *Abstract and Applied Analysis*, page 6, 2014. Article ID 424512.

[103] Lian Wang and Mu qiu Wang. On the construction of global asymptotically stable Lyapunov's functions of a type of nonlinear third-order systems. *Acta Math. Appl. Sin.*, 6 :309–323, 1983.

[104] T. Yoshizawa. Stability theory by Ljapunov's second method. Publications of the Mathematical Society of Japan. Vol. 9. Tokyo : The Mathematical Society of Japan. VIII, 223 p. (1966)., 1966.

[105] Lijuan Zhang and Lixin Yu. Global asymptotic stability of certain third-order nonlinear differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36(14) :1845–1850, 2013.

[106] YF Zhu. On stability, boundedness and existence of periodic solution of a kind of third order nonlinear delay differential system. *Ann. Differential Equations*, 8(2) :249–259, 1992.

Index

RESUME

Dans le cadre de l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires nous allons établir des notions telles que la stabilité, la bornitude, l'ulitimate bornitude et le carré intégrabilité pour la solution nulle ou bien toute les solutions de certaines équations différentielles vectorielles non linéaires de troisième ordre ; par donner des conditions suffisantes en utilisant l'approche de la fonction de Lyapunov- Krasovski.

Mots clés :
Fonction de Lyapunov- Krasovski; Stabilité; Bornitude; Ulitimate bornitude; Carré intégrabilité; Équations différentielles vectorielles non linéaires de troisième ordre; Stabilité asymptotique; Stabilité exponentielle; Stabilité asymptotique uniforme; Dérivation le long des trajectoires d’un système.