Table des matières

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à remercier le Professeur M.Hilali, mon encadrant, qui a proposé ce sujet, et qui a bien voulu encadrer ce modeste travail. Je lui exprime aussi ma gratitude pour son dévouement et le temps qu'il m'a consacré.

Je remercie également les membres de jury Pr.M.BEKKALI, Pr. F.EZZAKI, Pr.M.EL KHOMSSI, Pr.M.ALAMI, et Pr.Mme.I.ROUCHDI d'avoir accepter d'examiner notre modeste travail.

Mes remerciements vont également à tous mes professeurs de département mathématique.

Enfin, je remercie ma famille, et surtout mes parents, qui m'ont toujours soutenu durant mes études.

Chapitre 1

Premiers éléments

1.1 Introduction et motivations

La théorie des jeux existe depuis très longtemps, ses fondements sont décrits pour la première fois en 1928 dans une publication de John Neumann, son essor est dû pricipalement à John Nash, un économiste mathématicien qui a fait pas mal des études à propos de cette théorie, ses travaux ont été récompensées par le prix Nobel d'économie en 1994. Cette théorie a été mise en profit en plusieurs domaines à savoir : économie, biologie, et science politique...

On considère la situation suivante :

Deux individus arrêtés ensemble en possession d'armes à feu sont soupçonnées d'un délit fait en commun. Les policiers les mettent dans des cellules différentes et proposent à chacun d'entre eux le marché suivant :

- Si tu dénonces ton complice et qu'il ne te dénonce pas, tu seras remis en liberté et l'autre écopera de 10 ans de prison.
- Si tu le dénonces et lui aussi, vous écoperez tous les deux de 5 ans de prison.
- Si personne ne se dénonce, vous aurez tous deux 6 mois de prison.ă

La question qui se pose : qu'elle sera la décision à prendre.

Cette situation est largement connue sous le nom de " dilemme du prisonnier " .Des situations similaires sont souvent présents dans notre vie réelle où les gens interagissent entre eux et se trouvent dans des situations de conflit. Le but principal pour chaque individu consiste à savoir comment réagir, et quelle sera la décision à prendre pour satisfaire son intérêt personnel. Pour répondre à ces besoins, plusieurs études ont été entamées pour pouvoir analyser et résoudre ces conflits. Cette étude est appelée : Théorie des jeux, qui a comme but la modélisation des situations (des jeux) pour déterminer les stratégies que devraient adopter les décideurs pour mieux atteindre leurs objectifs.

La théorie des jeux est un outil mathématique qui étudie des situations où des individus (les joueurs) sont conduits à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles, et dans un cadre défini a l'avance (les règles du jeu), qui permet de déterminer qui peut faire quoi et quand. Les résultats de ces choix constituent une issue du jeu à laquelle est associe un gain pour chacun des participants. Ces résultats ne dépendent pas de la décision d'un seul joueur, mais également des décisions prises par d'autres participants.

La théorie des jeux, comme toute théorie, est formée par un ensemble d'**hypothèses** de bases :

1. Chaque joueur cherche à maximiser ses gains, le gain de chacun dépend autant des décisions des autres que de sa propre décision.
2. Les joueurs disposent d'une information complète, à savoir que chaque joueur connaît tous les détails du modèle et peut se mettre à la place du modélisateur.

1.2 Types de jeux

1.2.1 Jeux coopératifs et non coopératifs

Un jeu est dit coopératif lorsque les joueurs peuvent communiquer librement entre eux et passer des accords (par ex. sous forme d'un contrat). Ils forment alors une coalition et recherchent l'intérêt général suivi d'un partage des gains entre tous les joueurs. Dans un jeu non coopératif, les joueurs (qui ne communiquent pas ou ne peuvent pas communiquer entre eux) agissent selon le principe de rationalité économique : chacun cherche à prendre les meilleures décisions pour lui-même (c'est à dire cherche à maximiser égoïstement ses gains individuels). Ce dernier type de jeu fait intervenir les probabilités.

Exemple 1.2.1. *Le dilemme de prisonnier (DP) est un jeu non coopératif.*
Le dilemme du prisonnier est un exemple de jeu qui modélise bien par exemple les questions de politique tarifaire : Imaginons-nous un vendeur qui baisse ses prix pour conquérir des parts de marché et espère ainsi augmenter ses ventes et augmenter son bénéfice. Mais si son concurrent principal en fait de même, alors ils se neutralisent et peuvent chacun y perdre gros. Cet exemple est souvent utilisé pour montrer que la libre concurrence ne conduit pas forcément à une maximisation des bénéfices.

Le dilemme du prisonnier peut aussi s'appliquer en écologie si nous nous posons la question suivante : est-ce que deux espèces vivant sur un même territoire doivent plutôt cohabiter en paix ou se disputer la nourriture disponible.

Exemple 1.2.2. *Les jeux de négociation sont des jeux coopératifs :*
-Négociations salariales dans une entreprise.
-Négociations commerciales.
-Etablissement d'accords de coopération entre les entreprises.

1.2.2 Jeux simultanés et jeux séquentiels

Un jeu simultané est le modèle d'une situation où chaque joueur choisit son plan d'action complet une fois pour toutes au début du jeu .Par conséquent les choix de tous les joueurs sont simultanés . Ainsi ,au moment de faire son choix ,le joueur n'est pas informé des choix des autres .Un jeu séquentiel, au contraire spécifie le déroulement exacte du jeu , chaque joueur considère son plan d'action non seulement au début du jeu mais aussi chaque fois il doit effectivement prendre une décision pendant le déroulement du jeu.

Exemple 1.2.3. *Duopole du Cournot : situation de conflit entre deux entreprises .*

Exemple 1.2.4. *Les jeux d'échecs sont des jeux séquentiels car les joueurs jouent l'un après l'autre.*

1.3 Information dans les jeux

On distingue deux catégorisation d'information : la complétude et la perfection.

1.3.1 Jeux à information complète et incomplète

Définition 1.3.1. *On dit q'un jeu est à information incomplète si au moins un des joueurs ne connait parfaitement les données de jeu. Dans le cas contraire il est à information complète.*

Attention à ne pas confondre données du jeu et prise de décision ! Si je connais toutes les stratégies possibles d'un joueur, je ne connais pas pour autant celle qu'il va jouer. Ce problème peut apparaître dans les jeux simultanés où les décisions sont prises en même temps.

1.3.2 Jeux à information parfaite et imparfaite

Définition 1.3.2. *On dit q'un jeu est à information parfaite si chaque joueur est parfaitement informé des actions passées des autres joueurs et de leurs conséquences. L'information est imparfaite quand le joueur ignore certains des choix qui ont été effectués avant le sien.*

Exemple 1.3.3. *Le dilemme du prisonnier qui est un jeu simultané n'est pas à information parfaite.*

1.4 Stratégies , représentation des situations d'interaction

1.4.1 Notion de stratégie

Une stratégie est un plan d'actions complet pour chaque joueur spécifiant ce que fera ce dernier a chaque étape du jeu et face à chaque situation pouvant survenir au cours du jeu. La stratégie décrit totalement le comportement d'un joueur. Ce genre des stratégies s'appelle : stratégies pures car elles ne contiennent aucune notion d'aléatoire et n'utilisent pas des fonctions de probabilité. Il existe un autre type de stratégies, dites stratégies mixtes, qui consiste à donner une distribution de probabilité sur les différentes actions possibles.

Par exemple, dans le dilemme itéré du prisonnier, chaque joueur peut choisir de dénoncer avec une probabilité p et nier avec une probabilité 1- p , à chaque étape du jeu, avec $0 \leq p \leq 1$. Notons que les stratégies pures peuvent être considérées comme étant un cas particulier des stratégies mixtes lorsque p = 1.

1.4.2 Représentation des jeux

La forme normale d'un jeu :

Un jeu en forme normale est décrit par les éléments suivants :

1. Ensemble de n joueurs : $I = \{1, 2, ..., n\}$.
2. Pour chaque joueur i , i∈ I , un ensemble de stratégies S_i qui contient toutes les stratégies possibles de ce joueur. $s_i \in S_i$ est une stratégie particulière du joueur i .Par conséquent $S_i = \{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^{k_i}\}$ si k_i stratégies sont disponibles pour le joueur i. Si chaque joueur i choisit une stratégie S_i ,nous pouvons représenter le résultat (ou profil de stratégie) du jeu par un vecteur contenant toutes ces stratégies : $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$.
3. Pour chaque joueur i ,une fonction d'utilité u_i telle que :

$$u_i : S = S_1 \times S_2 \times ...S_n \longmapsto \mathbb{R}$$
$$s \equiv (s_1, s_2, ..., s_n) \longmapsto u_i(s)$$

Exemple 1.4.1. *Dans le dilemme de prisonnier, chaque individu est interrogé séparément et il a le choix entre nier (stratégie N) , ou dénoncer son complice comme seul responsable (stratégie D).*

1. *Nous avons donc un jeu non coopératif avec n=2 joueurs,* $I = \{1, 2\} = \{J_1, J_2\}$
2. *L'ensemble des stratégies pour chaque joueur est* $S_1 = S_2 = \{D, N\}$.
   Chaque déroulement possible du ce jeu correspond au choix d'une stratégie par J_1 *et une stratégie par* J_2 *.il y a donc 4 résultats possibles du jeu :*
   $$S = \{(s_1 = N, s_2 = N), (s_1 = N, s_2 = D), (s_1 = D, s_2 = D), s_1 = D, s_2 = N)\}$$
3. *Les gains des individus représentent leurs situations qui résulte des années de prisons auxquelles ils sont condamnés en fonction de leurs déposition et ils sont négativement liés avec ces années :*
   - *Si les joueurs dénoncent tous les deux, ils sont condamnés à 8 ans de prison.*
   - *S'ils nient tous les deux, ils auront 1 année de prison du fait d'absence de preuves.*
   - *Si un seul dénonce il est relâché en récompense de sa coopération et l'autre est condamné à 10 ans de prison.*

   Nous avons donc les gains (symétriques) suivants :

$$u_1(N, N) = u_2(N, N) = -1$$
$$u_1(N, D) = u_2(D, N) = -10$$
$$u_1(D, N) = u_2(N, D) = 0$$
$$u_1(D, D) = u_2(D, D) = -8$$

Nous alons alors représenter ce jeu en forme normale,sous forme d'un tableau où nous mettons les stratégies de J_1*en ligne et celles de* J_2 *en colonne. Au croisement d'une stratégie de* J_1 *avec une stratégie de* J_2 *nous avons un résultat du jeu et les gains correspondants.*
Ces gains sont représentés par convention sous forme d'un vecteur (u_1, u_2) *où le gain du joueur qui est en ligne apparait en premier place. Nous obtenons alors la forme normale suivante :*

	N	*D*
N	*(-1,-1)*	*(-10,0)*
D	*(0,-10)*	*(-8,-8)*

Tableau 1.1 Dilemme de prisonnier.

Le vecteur de gain (-1 , -1) correspond a $(u_1(N, N), u_2(N, N))$

Remarque 1.4.2. *Il ne faut pas confondre la stratégie d'un joueur individuel* s_i *et le résultat s qui est une combinaison particulière des stratégies de tous les joueurs.*

La forme extensive d'un jeu :

La forme normale est surtout - mais pas exclusivement - adaptée à la représentation des jeux simultanés. Selten (1975) a popularisé une représentation arborescente et plus intuitive des jeux : la forme extensive. Nous pouvons alors représenter des jeux séquentiels où les décisions sont prises à des moments différents et où chaque joueur est amené à jouer plusieurs fois.

Exemple 1.4.3. *(Le problème de l'entrant potentiel)*
Considérons le problème d'entrée d'une nouvelle firme sur le marché d'un monopole .
1. L'entrant (E) doit choisir entre Entrer ou Ne pas entrer.
2. S'il entre, la firme installée (I) peut choisir de le combattre en cassant les prix ,ou de coopérer avec lui ,de manière à créer un monopole jointe.
Nous pouvons alors représenter ce jeu sous la forme d'un arbre :

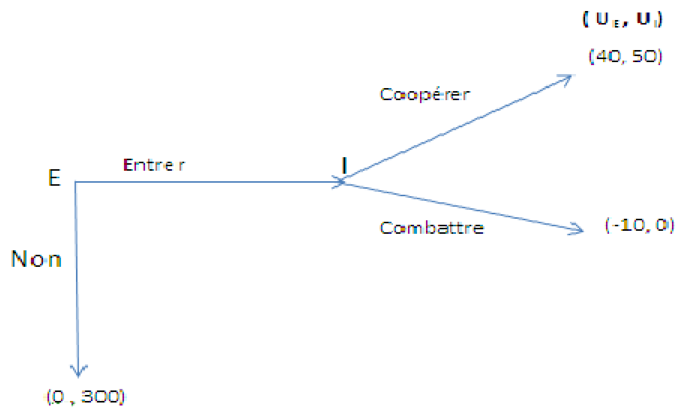

Figure 1.1 La forme extensive du jeu.

Le premier noeud de cet arbre représente la décision du premier joueur. A la suite de chacun de ses choix , la possibilité est donnée au joueur suivant d'effectuer son choix. Une fois que tous les joueurs ont pris leurs décisions, on arrive à un résultat du jeu auquel les gains correspondants sont associés.

Définition 1.4.4. *Un jeu en forme extensive est donné par un arbre de jeu contenant un noeud initial, des noeuds de décisions, des noeuds terminaux et des branches reliant chaque noeud à ceux qui lui succèdent :*

- Un ensemble de $n \geq 1$ *joueurs, indexés par i=1,2,...,n .*

- Pour chaque noeud de décision, le nom du joueur qui a le droit de choisir une stratégie à ce noeud.

- Pour chaque joueur i , la spécification de l'ensemble des actions permises à chaque noeud où il est susceptible de prendre une décision.

- La spécification des gains de chaque joueur à chaque noeud terminal.

1.5 Solution d'un jeu

Pour chercher l'équilibre d'un jeu , on peut essayer de le simplifier en éliminant des stratégies redondantes. Ce type d'élimination simplifiera le jeu et facilitera la recherche de solutions , mais il ne faut pas oublier que toute élimination réduit nécessairement l'information qu'on représente dans le jeu.

1.5.1 Elimination des stratégies équivalentes

Notations 1.5.1. *Considérons le profil de stratégies qui contient les stratégies de tous les joueurs sauf le joueur i. Nous pouvons alors le noter de la manière suivante :* $S_{-i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$

Le profil des stratégies complet s correspond alors à $s = (s_i, s_{-i})$

Définition 1.5.2. *Deux stratégie* s_i *et* s'_i *sont équivalentes si et seulement si pour tout profil de stratégies donné des autres joueurs, tous les joueurs obtiennent la même utilité quand i joue* s_i *ou* s'_i.

$$\forall j \in I, \forall s_{-i} \in S_{-i} : u_j(s_i, s_{-i}) = u_j(s'_i, s_{-i})$$

1.5.2 Elimination des stratégies dominées

Certaines des stratégies des joueurs peuvent être plus mauvaises que d'autres. On pourrait s'attendre à ce que ces stratégies ne soient jamais choisies par des joueurs rationnels. On peut alors choisir de les éliminer.

Définition 1.5.3. *La stratégie* p_i *du joueur i est strictement dominée par la stratégie* p'_i *si et seulement si quelque soit le comportement des autres joueurs, le joueur i obtient avec* p_i *une utilité strictement inférieure à celle obtenue avec* p'_i *.*

$$\forall p_{-i} \in P_{-i} : u_i(p_i, p_{-i}) < u_i(p'_i, p_{-i})$$

La stratégie p_i *est faiblement dominée par* p'_i *si l'inégalité est faible pour toutes les stratégies des autres joueurs et qu'il existe au moins un profil de stratégies des autres joueurs pour lequel l'utilité avec* p_i *est strictement inférieure à celle avec* p'_i *.*

$$\forall p_{-i} \in P_{-i} : u_i(p_i, p_{-i}) \leq u_i(p'_i, p_{-i}) \text{ et}$$
$$\exists p_{-i} \in P_{-i} : u_i(p_i, p_{-i}) < u_i(p'_i, p_{-i})$$

Exemple 1.5.4. *Soit le jeu sous forme normale suivant :*

	a	*b*	*c*
d	*(4,3)*	*(5,1)*	*(6,2)*
e	*(2,1)*	*(8,4)*	*(3,6)*
f	*(3,0)*	*(9,6)*	*(2,8)*

Talbeau 1.2 La forme normale initiale.

La stratégie b est strictement dominée par c pour le joueur 2 , on peut donc l'éliminer. Le jeu devient :

	a	*c*
d	*(4,3)*	*(6,2)*
e	*(2,1)*	*(3,6)*
f	*(3,0)*	*(2,8)*

Tableau 1.3 La forme normale après l'élimination de b.

Les stratégies f et e sont strictement dominées par d pour le joueur 1, le jeu devient :

	a	*c*
d	*(4,3)*	*(6,2)*

Tableau 1.4 La forme normale après l'élimination de {e,f}.

La stratégie c est alors dominée par a pour le joueur 2, d'où la solution du jeu : ***(d , a)***

Exemple 1.5.5. *(Bataille des sexes) Deux personnes $J_1 et J_2$ doivent décider comment organiser leur soirée. Ils ont le choix entre deux endroits E_1 et E_2.Pour les deux, ce qui compte avant tout, c'est d'être ensemble. Néanmoins, J_1 a une préférence pour E_1 et J_2 pour E_2. Le tableau suivant représente ce jeu sous forme normale :*

J_1/J_2	E_1	E_2
E_1	*(2,1)*	*(0,0)*
E_2	*(0,0)*	*(1,2)*

Tableau 1.5 La bataille des sexes.

Ce jeu ne comporte pas des stratégies dominées, nous devons donc introduire un autre concept d'équilibre pour pouvoir prédire la solution de ce type de jeux.

Chapitre 2

Equilibre de Nash

2.1 Définition et exemples

L'idée de l'équilibre de Nash est extrêmement simple en soi et cohérent avec l'essence des jeux non coopératifs. Les jeux non coopératifs correspondent à des situations d'interaction entre individus libres dans leurs choix et poursuivant des objectifs propres et indépendants. Ces individus ne communiquent pas avant le jeu et n'ont pas nécessairement le moyen de s'engager à poursuivre une stratégie particulière. Dans ce context , l'équilibre de Nash cherche les résultats qui sont stables par rapport aux déviations individuels, donc unilatérales.

L'équilibre de Nash désigne une situation où chacun des joueurs maximise ses gains une fois connu le choix des autres. Plus précisément, un équilibre de Nash est une combinaison de stratégies, une par joueur, telle que personne n'aurait pu augmenter strictement son gain en retenant une stratégie différente de celle que lui attribue cette combinaison, une fois connues les stratégies des autres joueurs qui y figurent. Ceci peut être résumé, de façon un peu vague, en disant qu'un équilibre de Nash est une situation où aucun joueur n'a intérêt à changer sa stratégie, au vu du choix des autres. Cependant, selon Bernard Guerrien, la meilleur façon de caractériser l' équilibre de Nash consiste à voir en lui une situation de non regret : il y a équilibre de Nash si chaque joueur ne regrette pas le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.

Définition 2.1.1. *Un profil de stratégie* $p^* = (P_1^*, ..., p_n^*)$ *avec* $p_i^* \in P_i$, $i = 1, ..., n$ *est un équilibre de Nash si aucun joueur n'a intérêt a dévier unilatéralement de sa stratégie* P_i^* *quand les autres joueurs continuent à jouer le profil* p_{-i}^* *.Par conséquent, nous devons avoir :*

$$u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq u_i(p_i, p_{-i}^*), \forall p_i \in P_i, \forall i = 1, ..., n$$

p est un équilibre de Nash strict si :*

$$u_i(p_i^*, p_{-i}^*) > u_i(p_i, p_{-i}^*), \forall p_i \in P_i, \forall i = 1, ..., n$$

Pour tester si un résultat p est un équilibre de Nash , nous devons vérifier si un des joueurs au moins n'a pas intérêt à choisir une autre stratégie. Si ce n'est pas le cas alors p est un équilibre de Nash .

Exemple 2.1.2. *Reprenons l'exemple du dilemme du prisonniers :*

	N	*D*
N	*(-1,-1)*	*(-10,0)*
D	*(0,-10)*	*(-8,-8)*

Tableau 2.1 Dilemme de prisonnier(reprise)

(N,N) n'est pas un équilibre de Nash car :

$$u_2(N, N) = -1 < 0 = u_2(N, D)$$

et donc le deuxième joueur choisira de jouer D au lieu de N.

Nous avons déja vu que (D,D) est une solution qui apparait après l'élimination des stratégies dominées. Cela implique qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier de D quel que soit le choix de l'autre et donc , en particulier ,si l'autre choisit D .Par conséquent , c'est aussi un équilibre de Nash :

$$u_1(D, D) = -8 > -10 = u_1(N, D)$$
$$u_2(D, D) = -8 > -10 = u_2(D, N)$$

Donc ni J_1, ni J_2 n'ont intérêt à dévier de D si l'autre joue D. Q'en est-il des stratégies mixtes ?

Notons les stratégies mixtes des deux joueurs par $p_1 = (q, 1-q)$ et $p_2 = (t, 1-t)$ avec $q, t \in [0, 1]$. q est la fréquence du choix de la stratégie N par J_1 et t est la fréquence du choix de N par J_2.L'équilibre que nous venons de calculer correspond donc aux stratégies mixtes : $p_1^* = (0, 1)$ et $p_2^* = (0, 1)$ où les deux joueurs choisissent toujours D. Nous pouvons représenter les stratégies mixtes des joueurs dans la forme normale du jeu pour faciliter leur compréhension :

		t *N*	*1-t* *D*
q	*N*	*(-1,-1)*	*(-10,0)*
1-q	*D*	*(0,-10)*	*(-8,-8)*

Tableau 2.2 Dilemme de prisonnier et stratégies mixtes.

Peut-il y avoir d'autre équilibre en stratégies mixtes ? Etant donné que les stratégies mixtes (et donc les évènement correspondant au choix de D ou de N) ,sont indépendantes entre les deux joueurs, nous pouvons calculer la probabilités jointe de réalisation de chaque profil de stratégie :

		t *N*	*1-t* *D*
q	*N*	$q \times t$	$q \times (1-t)$
1-q	*D*	$(1-q) \times t$	$(1-q) \times (1-t)$

Tableau 2.3 Probabilités jointes des profils de stratégies.

Les gains espérés des deux joueurs sont alors donnés :

$$U_i(p_1, p_2) \equiv \mathrm{E}u_i(p_1, p_2) \equiv \mathrm{E}u_i(q, t)$$
$$U_i(p_1, p_2) = qtu_i(N, N) + q(1-t)u_i(N, D) + (1-q)tu_i(D, N) + (1-q)(1-t)u_i(D, D)$$

Avec les valeurs numériques , le gain espéré du jourue 1 devient :

$$U_1(q, t) = qt(-1) + q(1-t)(-10) + (1-q)t(0) + (1-q)(1-t)(-8) = q(t-2) + 8(t-1)$$

Par conséquent

$$\frac{dU_1}{dq} = t - 2 < 0 \Longrightarrow q^* = 0$$

Le même raisonnemen pour le second joueur implique $t^* = 0$.

Le seul équilibre de Nash est donc $p^* = (0, 0)$. Cela n'est pas suprenant dans la mesure où la stratégie pure N est strictement dominée par D et donc toute stratégie mixte qui accorderait un poids strictement positifs (q>0) à N ferait moins bien que la stratégie pure D .

Exemple 2.1.3. *Prenons l'exemple de l'affrontement entre les 2 géants du fast food, McDonald's et Quick, et modélisons le avec la forme normale suivante :*

MD et QK	*Prix bas (LP)*	*Publicité forte (HA)*
Prix bas (LP)	*(60,35)*	*(55,45)*
Publicité forte (HA)	*(55,50)*	*(60,40)*

Tableau 2.4 La forme normale du jeu.

Ce jeu n'admet pas d'équilibre de Nash en stratégie pure.
En stratégies mixte, on introduit les probabilités p_M que McDonald's joue prix bas et p_Q que Quick joue prix bas. Pour McDonald's il faut maximiser le profit espéré :

$$\mathrm{E}_M = p_M(60p_Q + 55(1 - p_Q)) + (1 - p_M(55p_Q + 60(1 - p_Q)) = 10p_Mp_Q - 5p_M - 5p_Q + 60.$$

Pour maximiser, il faut :

$$\frac{\partial \mathrm{E_M}}{\partial p_M} = \frac{\partial \mathrm{E_M}}{\partial p_Q} = 0 \Rightarrow p_M = p_Q = 0,5$$

Pour Quick, il faut maximiser le profit espéré :

$$\mathrm{E}_Q = p_Q(35p_M + 50(1 - p_M)) + (1 - p_Q(45p_M + 40(1 - p_M)) = -20p_Mp_Q + 10p_Q + 5p_M + 60.$$

Pour maximiser, il faut :

$$\frac{\partial \mathrm{E_Q}}{\partial p_M} = \frac{\partial \mathrm{E_Q}}{\partial p_Q} = 0 \Rightarrow p_Q = 0,5etp_M = 0,5$$

La stratégie optimale pour les 2 entreprises est donc de jouer chaque stratégie avec une probabilité de 50

2.2 Fonctions de meilleures réponses

Etant données la structure du jeu et donc celle des gains, nous pouvons déterminer pour chaque joueur i les stratégies qui correspondent à la plus grande satisfaction qu'il peut obtenir face à chaque p_{-i} .Alors ces stratégies correspondent à la meilleure situation que i peut obtenir face à p_{-i}. Le concept de meilleure réponse généralise cette idée.

Définition 2.2.1. *Dans un jeu à n joueurs , la fonction de meilleure réponse du joueur i, $\mathcal{R}_i(p_{-i})$ associe à chaque combinaison de stratégies des autres joueurs p_{-i} ,la stratégie du joueur i qui maximise son gain :*

$$u_i(\mathcal{R}_i(p_{-i}), p_{-i}) \geq u_i(p_i, p_{-i}), \forall p_i \in P_i, p_{-i} \in P_{-i}.$$

2.2.1 En stratégies pures

Exemple 2.2.2. *Considèrons le jeu ci-sessous :*

Joueur 1 / Joueur 2	*X*	*Y*	*Z*
X	*0,3*	*3,0*	*4,2*
Y	*3,0*	*0,3*	*4,2*
Z	*2,4*	*2,4*	*5,5*

Tableau 2.4 La forme normale.

Soit $\mathcal{R}_1(resp.\mathcal{R}2)$ la fonction de meilleure réponse du joueur 1 (resp. joueur 2).

Si le joueur 2 joue X, la meilleure réponse du joueur 1 est de jouer Y .
Si le joueur 2 joue Y, la meilleure réponse du joueur 1 est de jouer X .
Si le joueur 2 joue Z, la meilleure réponse du joueur 1 est de jouer Z .

Nous écrivons les fonctions de meilleure réponse comme suivante :

$$\mathcal{R}_1(X) = Y$$
$$\mathcal{R}_1(Y) = X$$
$$\mathcal{R}_1(Z) = Z$$

Maintenant ,nous trouvons les meilleures réponses du joueur 2 :

Si le joueur 1 joue X, la meilleure réponse du joueur 2 est de jouer X .
Si le joueur 1 joue Y, la meilleure réponse du joueur 2 est de jouer Y .
Si le joueur 1 joue Z, la meilleure réponse du joueur 2 est de jouer Z .

$$\mathcal{R}_2(X) = X$$
$$\mathcal{R}_2(Y) = Y$$
$$\mathcal{R}_2(Z) = Z$$

Dans le tableau, On dessine un cercle bleu autour de meilleures réponses du joueur 1 selon les choix du joueur 2 et un cercle rouge à celles du joueur 2. Donc, on note que les meilleurs choix s'intérséctent en (Z,Z) qui est l'équilibre de Nash de ce jeu avec le gain (5,5). On le note NE = (Z,Z).

Joueur 2

Joueur 1		X	Y	Z
	X	0 , 3	3 , 0	4 , 2
	Y	3 , 0	0 , 3	4 , 2
	Z	2 , 4	2 , 4	5 , 5

Equilibre de Nash

Tableau 2.5 Equilibre de Nash et fonctions de meilleures réponses.

Exemple 2.2.3. *(Duopole de Cournot)*
Dans le duopole de Cournot, on a deux entreprises (joueurs), chaque entreprise choisit sa production indépendamment et le marché détermine le prix auquel il est vendu.

- *Les joueurs : 2 entreprises (Nokia, Samsung)*
- *Les stratégies : les quantités d'un produit identique qu'ils produisent.*
  q_1 : quantité de Nokia, q_2 : quantité de Samsung, $q = q_1 + q_2$:quantité totale.
- *Le cout de production : cq où q est la quantité totale et c est constante du cout marginale.*
- *Le prix : Soient a et b constants, on montre le prix de la manière suivante $p = a - b(q_1 + q_2)$. Cette équation nous montre que plus ces entreprises produisent, moins les produits coutent. Voyons sur le figure :*

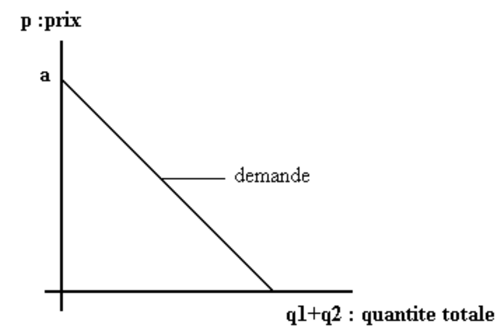

Figure 2.1 La quantité totale en fonction de prix.

- *Les gains : les profits u_1, u_2.*
  Le but des entreprises est de les maximiser.

$$u_1(q_1,q_2) = pq_1 - cq_1$$
$$u_2(q_1,q_2) = pq_2 - cq_2$$

Dans ce problème, on va essayer de trouver la quantité de meilleure réponse de Samsung par rapport à chaque choix possible de Nokia, et vice versa. Après on verra où elles s'interséchent sur le dessin.

Premièrement, on remplace la fonction du prix p dans la fonction u_1 *par* $a - b(q_1 + q_2)$ *, on obtient :*

$$u_1(q_1,q_2) = aq_1 - 2bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1$$

Afin de trouver le maximum nous la différentions par rapport à q_1 *:* $a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0$
Redifférentiant, il devient -2b < 0 donc on trouve bien un maximum à la place d'un minimum. Alors :

$$\mathcal{R}_1(q_2) = q_1^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{q_2}{2}$$
$$\mathcal{R}_2(q_1) = q_2^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{q_1}{2}$$

sont de meilleures réponses de Nokia et Samsung respectivement. Avant de décrire le figure, on trouve les points critiques :

$$q_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{MR}_1(0) = q_1^* = \frac{(a-c)}{2b}$$
$$q_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{MR}_1(0) = q_2^* = \frac{(a-c)}{2b}$$

Pour trouver où ces deux fonctions de meilleure réponse coincident, on résoudre l'égalité suivante : $\mathcal{R}_1(q_2) = \mathcal{R}_2(q_1)$
On trouve :

$$q_1^* = \frac{a-c}{b} - q_2^*$$
$$q_2^* = \frac{a-c}{b} - q_1^*$$

D'où :

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{2b}$$

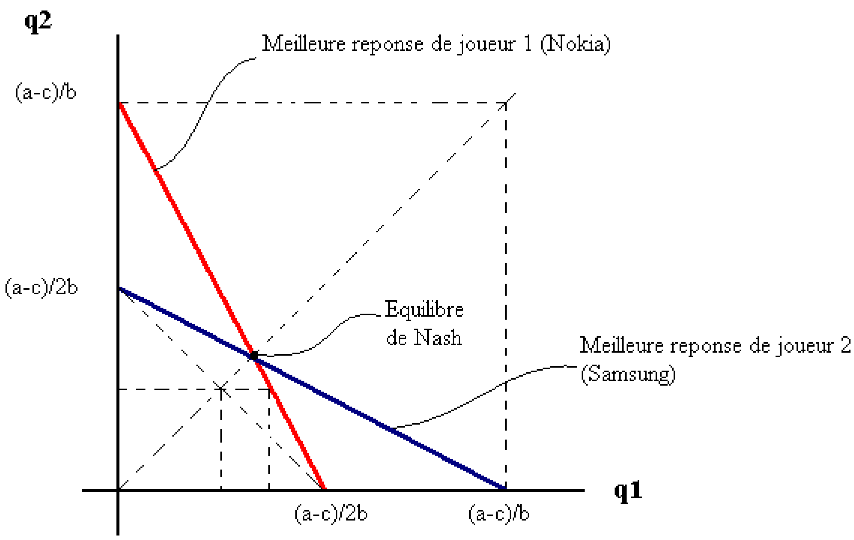

Figure 2.2 Fonctions de meilleures réponses.

2.2.2 En stratégies mixtes

La prise en compte des stratégies mixtes pourrait faire apparaitre d'autres possibilités de meilleure réponse.Pour observer cela, reprenons la bataille des sexes :

	E_1	E_2
E_1	(2,1)	(0,0)
E_2	(0,0)	(1,2)

Tableau 2.6 La batailles des sexes(reprise).

Notons les stratégies mixtes des deux joueurs par $p_1 = (q, 1-q)$ et $p_2 = (t, 1-t)$ avec $q, t \in [0, 1]$. Nous obtenons alors le tableau suivant :

			joueur 2 t E_1	joueur 2 1-t E_2
joueur 1	q	E_1	(2,1)	(0,0)
joueur 1	1-q	E_2	(0,0)	(1,2)

Tableau 2.7 Bataille des sexes et stratégies mixtes.

Comparons alors l'espérance d'utilité du joueur 1 pour ses deux stratégies pures :

$$E_1 : U_1(p_1, p_2) = \mathrm{E}u_1(p_1, p_2) = 2t + 0(1-t) = 2t$$
$$E_2 : U_1(p_1, p_2) = \mathrm{E}u_1(p_1, p_2) = 0t + 1(1-t) = 1-t$$

Face à la stratégie mixte p_2 du joueur 2 , le joueur 1 choisira E_1 si :

$$2t > 1 - t \Rightarrow t > \frac{1}{3}$$

le joueur J_1 choisira tout le temps E_1 (q=1) si le deuxième choisit E_1 plus d'une soirée sur trois (t > 1/3). Il choisira tout le temps E_2 (q=0) si J_2 va choisit E_2 plus de deux soirée sur trois ($t < 1/3 \Rightarrow 1-t > 2/3$) .Si t=1/3 , J_1 est indifférent entre E_1 et E_2 . En fait dans ce cas , toute combinaison de ces stratégies est équivalente pour lui.

Par conséquent , sa fonction de meilleure réponse est :

$$\mathcal{R}_1(t) = q^*(t) = \begin{cases} 1 & Si \quad t > 1/3 \\ [0,1] & Si \quad t = 1/3 \\ 0 & Si \quad t < 1/3. \end{cases}$$

De même pour le deuxième joueur , nous avons :

$$\mathrm{O} : U_2(p_1, p_2) = \mathrm{E}u_2(p_1, p_2) = 1q + 0(1-q) = q$$
$$\mathrm{F} : U_2(p_1, p_2) = \mathrm{E}u_2(p_1, p_2) = 0q + 2(1-q) = 2 - 2q$$

Face à la stratégie mixte p_1 du joueur 1, le joueur 2 choisira O (t=1) si :

$$q > 2 - 2q \Rightarrow q > \frac{2}{3}$$

donc seulement si le joueur 1 va à l'Opera plus de deux soirées sur trois. Par conséquent, la fonction de meilleure réponse de J_2 est :

$$\mathcal{R}_2(q) = t^*(q) = \begin{cases} 1 & Si \quad q > 1/3 \\ [0,1] & Si \quad q = 1/3 \\ 0 & Si \quad q < 1/3. \end{cases}$$

Nous pouvons représenter ces fonctions de réaction sur un graphique :

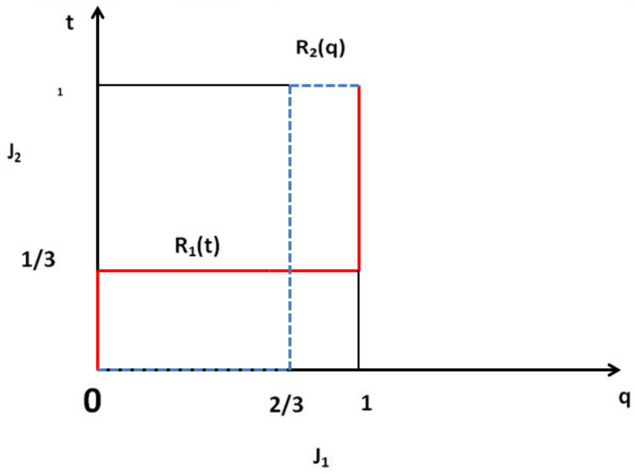

Figure 2.3 Fonctions de meilleures réponses.

Ce graphique fait apparaitre trois points d'intersection entre les courbes de réaction. Les deux équilibre en stratégies pures (O,O) et (F,F) apparaissent aux extrêmes (respectivement (1,1) et (0,0)) .Un nouvel équilibre en stratégies mixtes apparait :$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Dans cet équilibre, le premier joueur va à l'Opera deux soirées sur trois , et le deuxième, une soirée sur trois. Leur gain espéré est alors :$Eu_i = 2/3, i = 1, 2$.

2.3 Pas d'équilibre , trop d'équilibre

Il est important de noter que tous les jeux n'ont pas d'équilibres qui peuvent être déterminés par une simple exploration de la matrice des gains. De plus, certains jeux sont caractérisés par des équilibres multiples, c'est-à-dire de multiples combinaisons de choix stratégiques satisfaisant à la définition d'un équilibre de Nash.

On considère l'exemple de pile ou face suivant : Le prisonnier a le choix entre prendre la clé qui est à la main droite du policier ou celle qui se trouve à sa main gauche. Nous considérons que si le prisonnier trouve la bonne clé il sera satisfait tandis que le policier ne le sera pas. La satisfaction du prisonnier sera représentée par un gain de 1 tandis que la déception du policier sera représentée par une perte de 1. Ce jeu peut être représenté par la matrice des gains du tableau suivant :

Prisonnier \ policier	Mettre la bonne clé dans la main droite	Mettre la bonne clé dans la main gauche
Choisir la main droite	(1 , -1)	(-1 , 1)
Choisir la main gauche	(-1 , 1)	(1 , -1)

Tableau 2.8 Jeu à somme nulle.

Dans ce jeu, nous remarquons que les intérêts des deux joueurs sont totalement opposés, ce type de jeu est connu sous le nom de jeu à somme nulle. Il est clair dans ce jeu qu'il n'y a aucun équilibre de Nash en stratégies pures puisque aucun couple de stratégie ne peut définir une situation d'équilibre pour les deux joueurs. Ainsi se trouve posé le problème même de l'existence d'équilibre pour certains jeux.

Un jeu peut aussi avoir plusieurs équilibres en stratégies pures. Considérons, par exemple, le jeu du " Monopole-Nouveau Venu " représenté par le tableau suivant :

Nouveau venu \ Monopole	Cède	Ne cède pas
Entre	(4 , 4)	(-3 , -2)
N'entre pas la	(0 , 10)	(0 , 10)

Tableau 2.9 Forme normale du jeu Monopole-Nouveau Venu.

Ce jeu comporte deux équilibres de Nash, auxquels sont associés les vecteurs de gains (4 , 4) et (0 , 10). Le fait qu'il y ait plusieurs équilibres est une source importante d'indétermination qui nous conduit toujours à se poser la question suivante : lequel des équilibres sera atteint ? .

Comme nous venons de le constater, des jeux, même très simples, peuvent ne pas avoir d'équilibre de Nash, ou même en avoir plusieurs. Dans ces deux types de situations, qui n'ont rien d'exceptionnelles, il y a donc une indétermination : les données du modèle ne permettent pas de donner un rôle privilégié à certaines issues. Afin de contourner la difficulté, les théoriciens des jeux ont proposé de faire intervenir des probabilités au moment de la prise de décision. Dans ce cas, plutôt que de retenir une action ou une suite d'actions, les joueurs affectent des probabilités aux choix des actions qu'ils doivent adopter. Nous disons alors qu'ils font appel à des stratégies mixtes, plutôt qu'à des stratégies pures.

Chapitre 3

Application

3.1 Le modèle de Hotelling

Le modèle de Hotelling est un modèle de différentiation des biens dans un duopole.

Ona a deux vendeurs localisés sue une plage linéaire où les consommateurs sont uniformément distribués. Chaque consommateur achéte au plus une unité du produit. Représentions dans la figure cette plage par ligne de longueur L et les localisations des deux firmes par les points A et B.

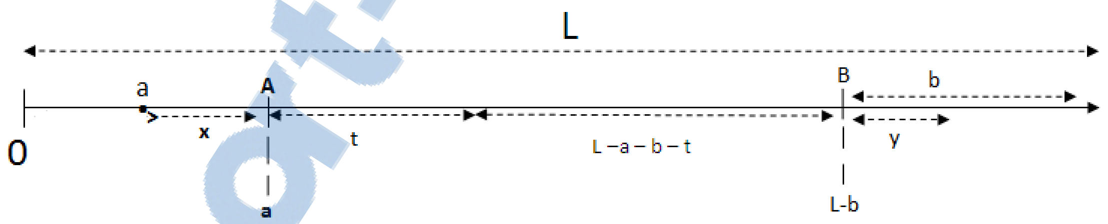

Figure 3.1 La cité linéaire de Hotelling.

Il existe un coût de transport unitaire c pour les consommateurs. Un consommateur qui achète une unité de production au prix p à un vendeur qui est à la distance d a l'utilité suivante :

$$u\ (\ p\ ,\ d\ ) = u_0 \text{ -p - cd}$$

Nous posons $u_0 = 0$ sans perte de généralité.

Pour décider chez qui ils vont acheter , les consommateurs comparent donc le prix et la distance correspondant à chaque vendeur. Regardons les consommateurs localisés sur les différents segments du marché.

A gauche de A : Le consommateur qui est à la distance x de A achètera chez A si et seulement si :

$$p_A + cx < p_B + c(L - a - b) + cx$$
$$p_A < p_B + c(L - a - b)$$

Donc la variable x n'intervient pas dans cette condition et dès qu'elle est vérifiée, tous les consommateurs à gauche de A achètent chez lui, sinon ils vont tous chez B.

A droite de B : Le consommateur qui est à la distance y de B achètera chez B si et seulement si :

$$p_A + c(L-a-b) + cy > p_B + cy$$
$$p_A > p_B - c(L-a-b)$$

Entre A et B : En fonction des prix, il y aura un consommateur limite sui sera indifférent entre les deux vendeurs. Ce consommateur sera à distance t de A si :

$$p_A + ct = p_B + c(L-a-b-t)$$
$$t = \frac{1}{2c}[p_B - p_A + c(L-a-b)]$$

et la demande qui s'adresse à A sera a + t.
Etant donné p_B , nous avons donc trois zones pour p_A :

$$p_A < p_B - c(L-a-b) = p_B^- \qquad \text{Zone (I)}$$
$$|p_A - p_B| \leq c(L-a-b) \qquad \text{Zone (II)}$$
$$p_A > p_B + c(L-a-b) = p_B^+ \qquad \text{Zone (III)}$$

Nous pouvons alors construire la fonction de demande de A étant donné p_B :

$$D_A(p_A, p_B) = \begin{cases} L & (I) \\ a + \frac{1}{2c}[p_B - p_A + c(L-a-b)] & (II) \\ 0 & (III) \end{cases}$$

Nous représentons cette fonction de demande dans la figure suivante :

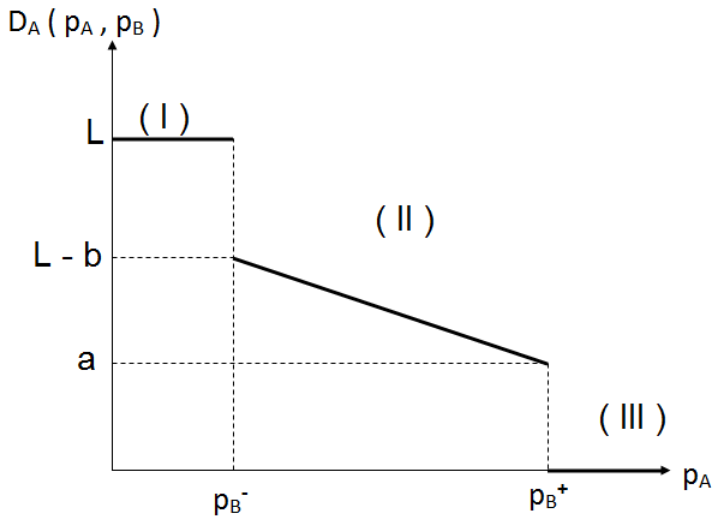

Figure 3.2 La fonction de demande.

La firme fait donc face à une demande qui n'est pas continue , cette discontinuité va aussi apparaître au niveau du profit :

$$\pi_A(p_A, p_B) = p_A \cdot D_A(p_A, p_B)$$

$$\pi_A(p_A, p_B) = \begin{cases} p_A L & (I) \\ \frac{p_A}{2}(L+a-b) + \frac{p_A p_B}{2c} - \frac{p_A^2}{2c} & (II) \\ 0 & (III) \end{cases}$$

Cette fonction de profit est strictement concave uniquement sur la zone (II). Dans les zones (I) et (III) , elle est linéaire donc concave et convexe. De plus, elle n'est pas continue. Nous représentons cette fonction de profit dans la figure suivante :

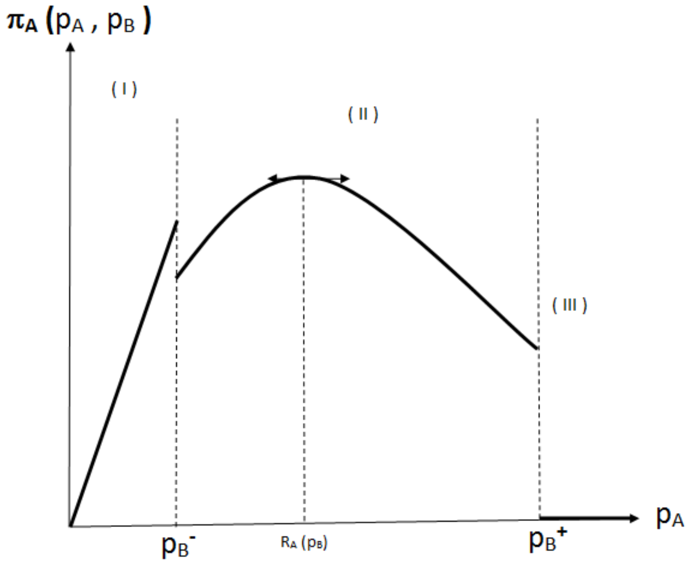

Figure 3.3 La fonction de profit.

La fonction de meilleure réponse de A va résulter de la maximisation de son profit étant donné p_B :

$$\mathcal{R}_A(p_B) = \arg\max_{p_A} \pi_A(p_A, p_B)$$

Dans la zone (I) : $\mathcal{R}_A(p_B) = p_B - c(L - a - b)$.

Dans la zone (II) : Nous avons une fonction de profit concave et donc nous pouvons déterminer $\mathcal{R}$ par :

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = \frac{1}{2}(L + a - b)\frac{1}{2c}p_B - \frac{1}{c}p_A \Rightarrow \mathcal{R}_A(p_B) = \frac{1}{2}p_B + \frac{c}{2}(L + a - b)$$

Dans la zone (III) : $\mathcal{R}_A(p_B) = p_A$ est quelconque avec $p_A \geq p_B + c(L - a - b)$.

Nous avons donc une fonction de réaction discontinue. Par symétrie, nous avons la fonction de réaction de B :

$$\mathcal{R}_B(p_A) = \begin{cases} p_A - c(L - a - b) & (I) \\ \frac{1}{2}p_A + \frac{c}{2}(L + a - b) & (II) \\ p_B \geq p_A + c(L - a - b) & (III) \end{cases}$$

Si l'équilibre a lieu dans la zone (II) pour les deux firmes alors il va correspondre à l'intersection de la seconde partie à chaque courbe de réaction .

$$\begin{cases} p_A^* = \frac{1}{2}p_B^* + \frac{c}{2}(L + a - b) \\ \\ p_B^* = \frac{1}{2}p_A^* + \frac{c}{2}(L + b - a) \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} p_A^* = c(L + \frac{a-b}{3}) \\ \\ p_B^* = c(L - \frac{a-b}{3}) \end{cases}$$

Et les profits d'équilibre sont donnés dans cette zone par :

$$\begin{cases} \pi_A^* = \frac{c}{2}(L + \frac{a-b}{3})^2, \frac{\partial \pi_A^*}{\partial a} \geq 0 \\ \\ \pi_B^* = \frac{c}{2}(L - \frac{a-b}{3})^2, \frac{\partial \pi_B^*}{\partial b} \geq 0 \end{cases}$$

Donc en ce qui concerne les localisations, A a intérêt à augmenter a , et B , b. Les deux firmes vont donc se rapprocher : c'est le principe de différentiation minimale de Hotelling .

Mais la zone de concavité II disparaît dès que nous avons a + b = L : les deux firmes sont localisées au même endroit sur la ligne et il n'y a plus de différentiation. Cela correspond alors au duopole de de Bertrand avec $p_A = p_B = 0$ et $\pi_i = 0, \forall i$.

L'équilibre de Nash obtenu dans la zone concave est donc très fragile dans ce cas par rapport à la localisations des firmes. En fait, dans le cas d'une localisation symétrique (a = b) , cet équilibre n'existe que si et seulement si $a, b \leq L/4$(les firmes doivent se localiser en dehors des quartiles).

Cet exemple illustre donc le problème de non-existence de l'équilibre de Nash quand les fonctions de gains sont discontinues. Par exemple si les coût de transport étaient quadratiques (de type cx^2) , les fonctions de gains auraient les bonnes propriétés pour que l'équilibre de Nash soit assurée.

Conclusion

Dans ce rapport nous avons présenté les notions de base de la théorie des jeux classique. L'intérêt principal de cette théorie consiste à étudier les différentes situations de conflit entre les individus en prenant comme hypothèse de base le comportement rationnel des individus dans le sens où chaque individu cherche à maximiser son gain personnel. Nous avons constaté tout au long de ce rapport que l'analyse des jeux est basée sur la notion d'équilibre et en particulier d'équilibre de Nash qui permet de définir une situation de non regret pour les joueurs. Cependant, nous avons aussi constaté qu'il existe des jeux sans ou avec plusieurs équilibres de Nash ce qui conduit à une situation d'indétermination.

Bibliographie

[1] J. VON NEUMANN et O.MORGENSTERN : La théorie des jeux et le comportement économique.

[2] JOHN F. NASH JR : Non Cooperatif Games.

[3] MURAT YILDIZOGLU : Introduction à la théorie des jeux (2^e édition).

[4] SEBASTIEN KONIECZNY : Introduction à la théorie des jeux .Universite d'Artois - Lens