Table des matières

Introduction

La logique floue est une extension de la logique classique qui permet la modélisation des imperfections des données et se rapproche dans une certaine mesure de la flexibilité du raisonnement humain ; La logique floue présente ainsi de nombreuses applications concrètes, allant des jeux vidéo (programmation des bots) aux pilotes automatiques en passant par le micro-onde ;La logique floue est créée par Lotfi Zadeh en 1965 en se basant sur sa théorie mathématique des ensembles flous, qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques. En introduisant la notion de degré dans la vérification d'une condition, nous permettons à une condition d'être dans un autre état que vrai ou faux. La logique floue confère ainsi une flexibilité très appréciable aux raisonnements qui l'utilisent, ce qui rend possible la prise en compte des imprécisions et des incertitudes. Le mémoire est subdivisé en trois chapitres :
Dans le première chapitre nous présentons la théorie des ensembles classiques .
Dans le deuxième chapitre ; nous présentons la théorie des ensembles flous, sa position par rapport à la théorie classique, ainsi que les concepts flous relatifs comme les relation floue, les quantités floues.
Dans le troisième chapitre, nous présentons le raisonnement en logique flou et ses utilité

Historique :

La genèse de la théorie du Flou prend ses racines dans le développement des logique multi values mené par Lukasiewicz, tête de file de l'école polonaise de logique des années 30 [Lukasiewicz,1920,1930]. Le logicien Bertrand Russel soulignera le fait que la logique binaire, héritée d'Aristote ,était mal adapté à la formalisation du langage naturel puisque ce dernier contenait bon nombre de termes vagues, mal définies [Russel,1923].Toutefois ces au philosophe Max Black que l'on doit en 1937 l'idée novatrice de formaliser le sens des prédicats vagues, utilisées dans le langage courant , par des fonctions numériques d'appartenance[Black,1937]. ET après Lotfi Zadeh a fait la jonction entre toute ces prémisses pour aboutir à la définition formelle de la logique Floue , logique nuancée qu'il voulait être proche d'une logique humaine.
-1965, naissance du concept flou avec le Pr. Zedeh Lofti (Californie).
- Un contrôleur électromécanique doté d'un raisonnement humain serait plus performant qu'un contrôleur classique.
-Théorie des « sous-ensembles flous ».
- 1970 : Premières applications : Systèmes experts, Aide à la décision en médecine, commerce
- 1973, Zadeh introduit la notion de variables linguistiques.
- 1974, Première application industrielle : Mamdani (Londres) réalise un contrôleur flou pour moteur à vapeur.
- Aujourd'hui, une vaste gamme de nouveaux produits ont une étiquète « Produit flou » (Fuzzy).

1
Rappels sur la théorie des ensembles classique

1.1 Les ensembles

***Définition* 1.1.1.**
Un ensemble est une collection d'éléments.

Exemples :
$\{0,1\}$; { rouge, noir} ;$\mathbb{N} = \{0, 12, 3, ...\}$.

Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté $\emptyset$ qui est l'ensemble ne contenant aucun élément.
On note $x \in E$ si x est un élément de E , et $x \notin E$ dans le cas contraire.

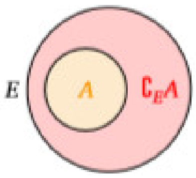
Remarque :
voici une autre façon de définir des ensembles : une collection d'éléments qui vérifient une propriété.

Exemples :
$\{x \in \mathbb{R} | \mid x - 2 \mid < 1\}, \{z \in \mathbb{C} \diagup z^5 = 1\}$

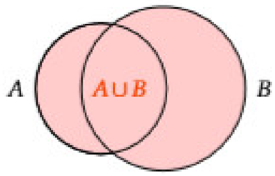
1.2 Inclusion, Union , Intersection, Complémentaire

L'inclusion : $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F. autrement dit : $\forall x \in E$; $x \in F$.
On dit alors que E est un sous-ensemble de F ou une partie de F.
L'égalité : E=F si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.
$\mathbb{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E.

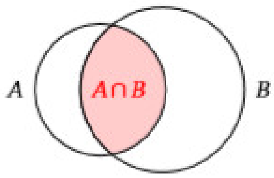
Exemples :
si $E = \{1, 2, 3\}$:
$\mathbb{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
Complémentaire : Si $A \subset E$. $C_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$.
on le note aussi $E \diagdown A$ ou $C_A \overline{A}$.



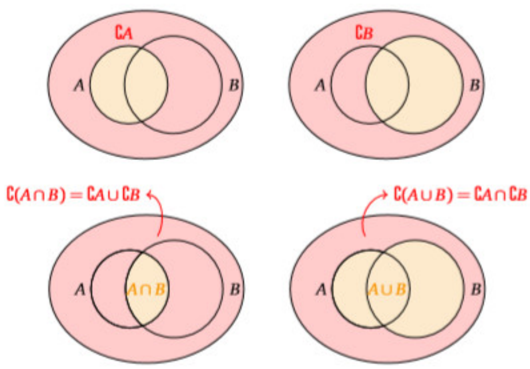
Union : pour$A, B \subset E, A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou} x \in B\}$.
Le ou n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B en meme temps.



intersection :$A \cap B = \{x \in A \text{ et} x \in B\}$.



Soient A, B, C des parties d'un ensemble de E :
$A \cap B = B \cap A$ (l'opérateur $\cap$ est commutative).
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (l'opérateur $\cap$ associative)
$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap A = A, A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
$A \cup = B \cup A$ (l'opérateur $\cup$ est commutative).
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (l'opérateur $\cup$ associative)
$A \cup \emptyset = A, A \cup A = A, A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
$A \cap (B \cup C) = ((A \cap B) \cup (A \cap C)$.
$A \cup (B \cap C) = ((A \cup B) \cap (A \cup C)$.
$(A^c)^c = A$ et donc $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
voici les dessins pour les dernières assertions.



Preuve

de $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$:
$x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A$ et$x \in (B \cup C) \iff x \in A$ et $(x \in B$ ou $x \in c) \iff (x \in A$ et $x \in B)$ ou $(x \in A$ et $x \in C) \iff (x \in A \cap B)$ ou $(x \in A \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

de $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$:
$x \in ((A \cap B)^c \iff x \notin (A \cap B) \iff$ non $(x \in A \cap B) \iff$ non $(x \in Aetx \in B) \iff$ non $(x \in A)$ ou non $(x \in B) \iff x \notin A$ ou $x \notin B \iff x \in A^c \cup B^c$.

1.3 Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x,y) où$x \in E$ et $y \in F$.

Exemples :
$\rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
$\rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$.

1.4 La théorie des ensemles classique

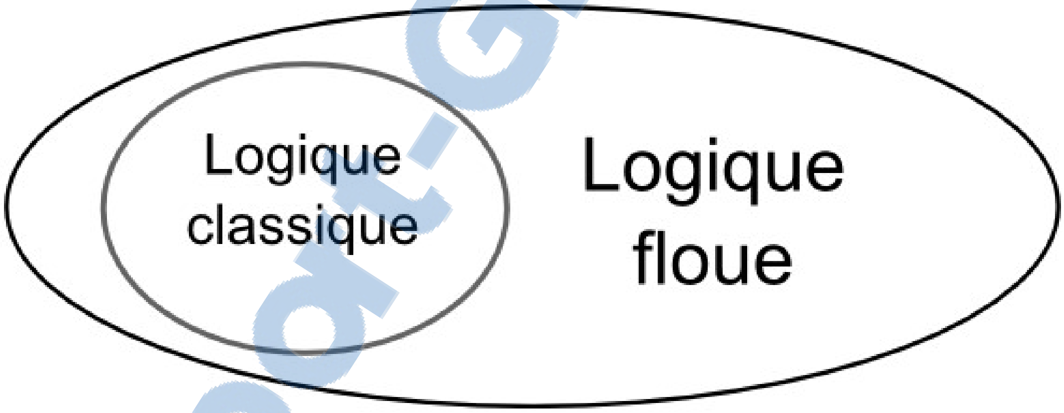
Dans la théorie des ensembles classiques consiste à avoir deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous-ensemble .
Soient X un ensemble et A un sous-ensemble de X la fonction qui caractériser cet ensemble est la fonction d'indicatrice :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

2

La théorie des ensembles flous

La logique floue repose sur la théorie des ensembles flous, qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques. Dire que la théorie des ensembles flous est une généralisation de la théorie des ensembles classiques signifie que cette dernière n'est qu'un cas particulier de la théorie des ensembles flous, la théorie des ensembles classiques n'est qu'un sous-ensemble de la théorie des ensembles flous.



Dans la théorie des ensembles flous il n'y pas que deux situation appartenir ou ne pas il y a ce qu'on appelle le degré d'appartenance. le mérite de zadeh a été de tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée : permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble, c'est-à-dire d'autoriser un élément à appartenir plus, moins, fortement à ce sous-ensemble.

***Définition* 2.0.1.** *Soient X un ensemble et A est une sous-ensemble de X alors un sous-ensemble flou A de X est défini comme l'ensemble des couples :*
$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$
avec la fonction d'appartenance μ_A est défini par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin A \\ 0 < \mu(x) < 1 \text{ si } x \text{ a un degré d'appartenance à } A \\ 1 \text{ si } x \in A \end{cases}$$

2.1 Généralités :

***Définition* 2.1.1.**
Soit X un ensemble un sous-ensemble flou A de X est défini par une fonction d'appartenance f_A sur X à valeurs dans l'intervalle [0 ;1] ie

$$f_A : X \longrightarrow [0, 1]$$

Exemples :

Si le feu est rouge	si ma vitesse est élevée	et si le feu est proche	alors je freine fort.
Si le feu est rouge	si ma vitesse est faible	et si le feu est loin	alors je maintiens ma vitesse.
Si le feu est orange	si ma vitesse est moyenne	et si le feu est loin	alors je freine doucement.
Si le feu est vert	si ma vitesse est faible	si ma vitesse est faible	alors j'accélère.

.

Exemples :
Supposons que c'est un ensemble des températures.
en outre créer un sous-ensemble qui aura toutes les températures qui correspondront à un environnement chaud.
puis en utilisant la logique précédente, On pourrait dire que les températures chaudes sont toutes les températures supérieures à 25 degrés :
$chaud = \{temperatures|t > 25\}$
mais qu'en est-il une température de 24,99 degrés est-ce chaud ?

Évidemment c'est, mais pas si chaud que 25 degrés.
cela indique la nécessité de créer des ensembles $\{ensembles flous\}$ avec des éléments qui ne suivent pas la logique classique mais auront une fonction d'appartenance qui déterminera à quel point ils appartiennent à un ensemble par exemple la température 25 est chaud 100% , et 24 est 90% ,20 et 50% :

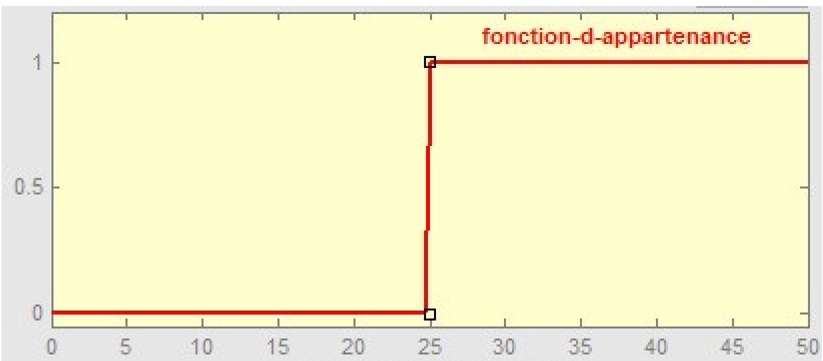


fig : la logique classique

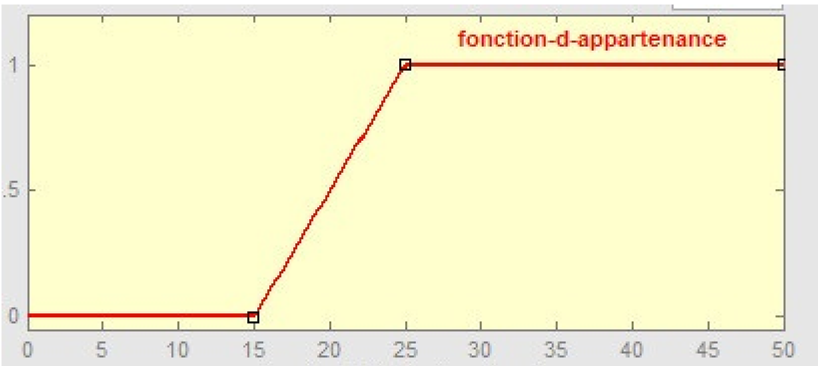


fig : la logique floue

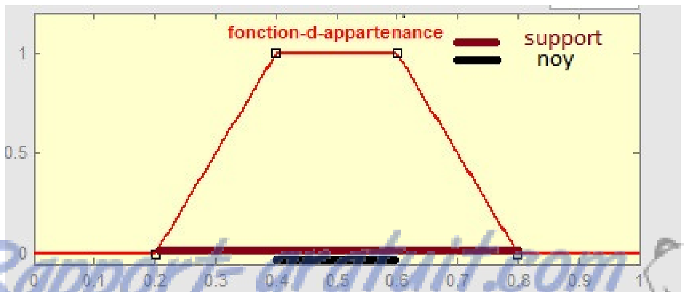
La fonction d'appartenance montrée dans fig n'est rien d'autre qu'une fonction qui montre à quel point un élément est membre ou non d'un ensemble flou . c'est-à-dire si t est la température alors sa fonction d'appartenance pour un ensemble spécifique est "" y (t) "dans le cas précédent pour t = 25, y (t) = 1, pour t = 24, y (t) = 0.9 et pour t = 15, y (t) =0 .

Par conséquent, pour définir complètement un ensemble flou, il ne suffit pas de dire qu'un élément s'y trouve ou non. Une paire est nécessaire qui définira l'élément et à quel point l'élément appartient ou non, c'est-à-dire, la fonction d'appartenance :$A = \{x, y(x)|x \in X\}$ cette expression dit que l'ensemble A a les éléments x avec la fonction d'appartenance y (x) lorsque x appartient à X. dans notre exemple de température, la fonction d'appartenance est définie par une ligne droite qui va de l'appartenance zéro (0) à l'appartenance complète (1); Cependant, il peut bien sûr y avoir d'autres formes. nous avons besoin de définir le degré d'appartenance de la valeur x à une valeur d'appartenance entre 0 et 1

2.2 Notions caractéristique

Soit A un sous-ensemble flou de X

***Définition* 2.2.1.**
Les notions suivantes sont caractéristiques de A :
→ support de A : $suppA = \{x \in X, f_A(x) \neq 0\}$
→ hauteur de A .$h(A) = \sup_{x \in X} f_A(x)$,
A est normalisé si h(A)=1.
Les sous-ensembles flous considérés seront tous supposés normalisés ie de hauteur égale à 1 .
→ noyau de A : $noyA = \{x \in X, f_A(x) = 1\}$
→ cardinalité : $| A |= \sum_{x \in X} f_A(x)$.



***Définition* 2.2.2.**
Si A et B sont deux sous-ensembles flous de l'ensemble X on dit que :
A est plus spécifique que B si noy A $\subsetneq$*noy B et*$suppA \subseteq suppB$.
A est plus précis que B si$noyA = noyB$, *et* $suppA \subsetneq suppB$.

Remarque :
si A est un sous-ensemble de X au sens classique alors A est normalisé,
$A = suppA, A = noyA$ et $\mid A \mid = cardA$.

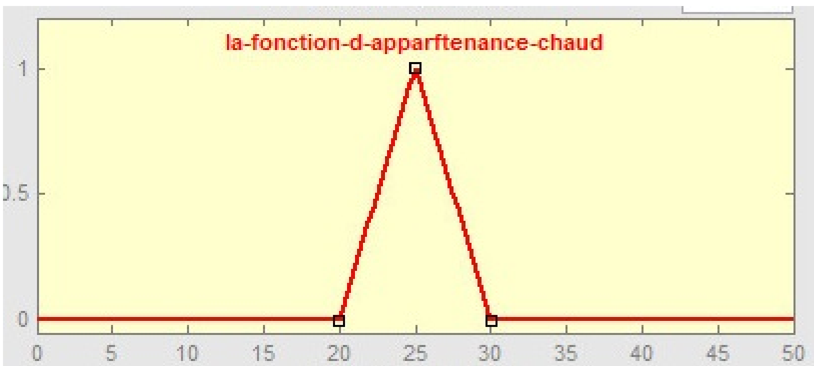
2.3 Opérations sur les sous-ensembles flous

***Proposition* 2.3.1.**
On définit en théorie des sous-ensembles flous les mêmes notions qu'en théorie des ensembles classique .pour deux sous-ensembles flous A et B de l'ensemble X :
Egalité :$A = B$ *ssi* $\forall x \in X, f_A(x) = f_B(x)$.
Inclusion :$A \subset B ssi \forall x \in X, f_A(x) \leq f_B(x)$.
on peut construire par leur fonction d'appartenance : $\cap$ *et* $\cup$
Intersection :$A \cap B$ *est défini par :* $f_{A\cap B} \longrightarrow min(f_A(x), f_B(x))$.
Union :$A \cup B est défini par : f_A(x) \longmapsto max(f_A(x), f_B(x))$.

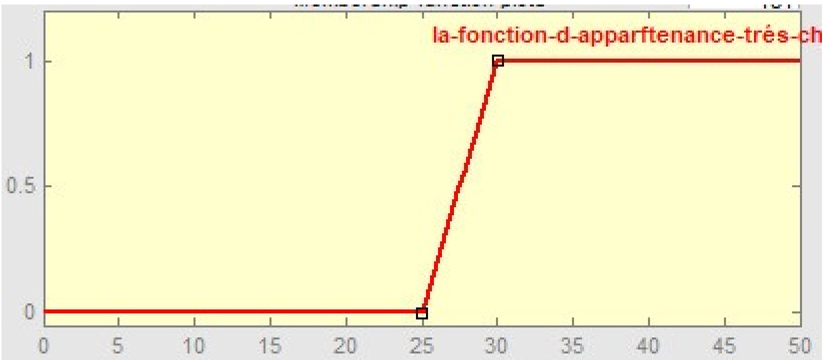
La façon dont cela est fait est de reconnaître que les ensembles booléens peuvent être considérés comme un cas particulier d'ensembles flous où les fonctions d'appartenance sont un et zéros et que l'opérateur et est le minimum de A et B et l'opérateur ou est le maximum de A et B comme indiqué dans ce tableau

A	B	min(A,B)	max(A,B)
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	1	1
0	0	0	0

Exemples :
Nous permet de considérer à nouveau notre exemple de température.
Qu'il y ait deux ensembles chauds et très chauds avec les fonctions d'appartenance ci-dessous

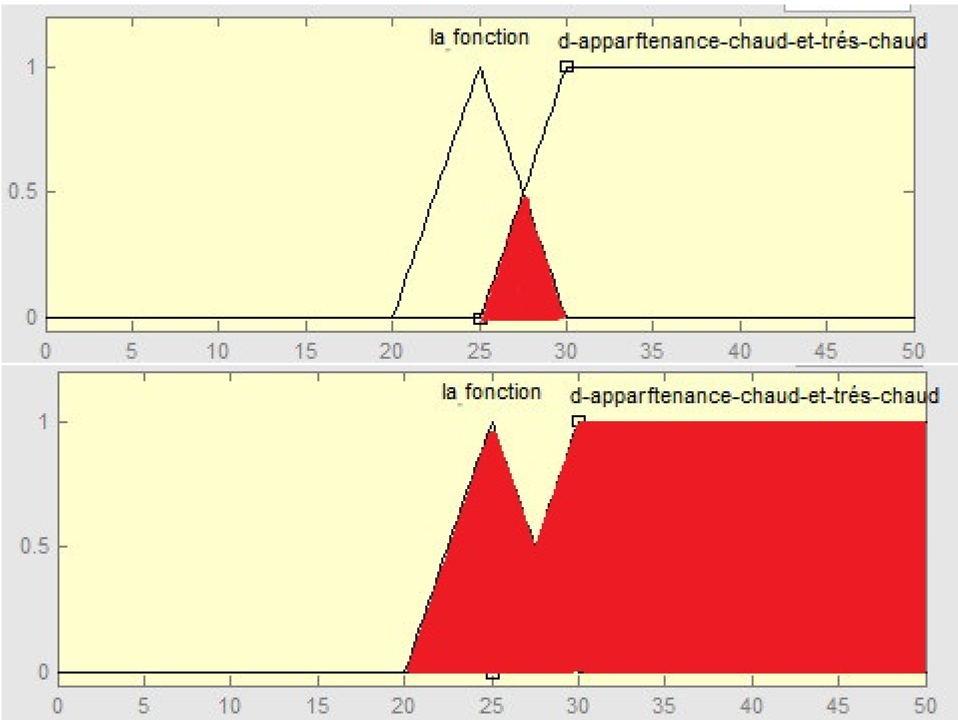


La fonction d'appartenance de température chaud



La fonction d'appartenance de température trés chaud

L'intersection et l'union de ces deux fonctions d'appartenance sont montrées ci-dessous



Donc l'intersection des ensembles une fonction d'appartenance avec des valeurs non nulles entre 25 et 30, surlignées en rouge et l'union des ensembles a des valeurs entre 20 et 40. Nous pouvons voir à partir de ces diagrammes que l'intersection des deux fonction d'appartenance est une fonction d'appartenance dont la valeur pour chaque valeur de température est le minimum des valeurs de chaque fonction d'appartenance à chaque température. De même, l'union de la fonction de deux membres est les valeurs de chaque fonction d'appartenance donc, résumant les opérateurs flous picturalement, nous avons :

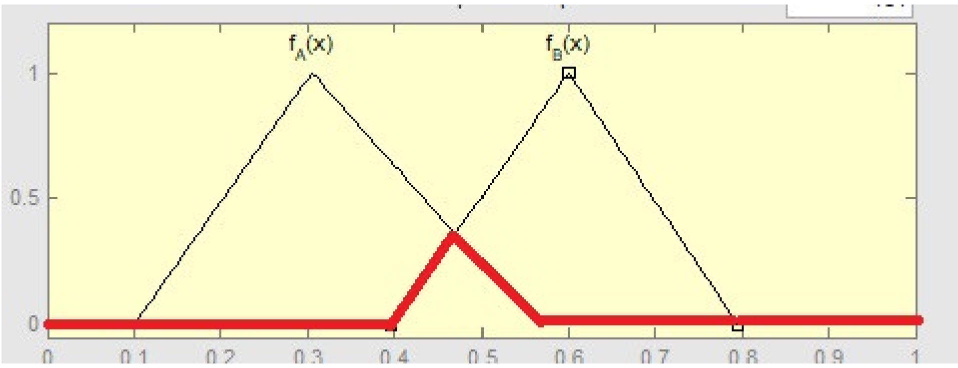


fig :la fonction d'appartenance de $min(f_A(x), f_B(x))$

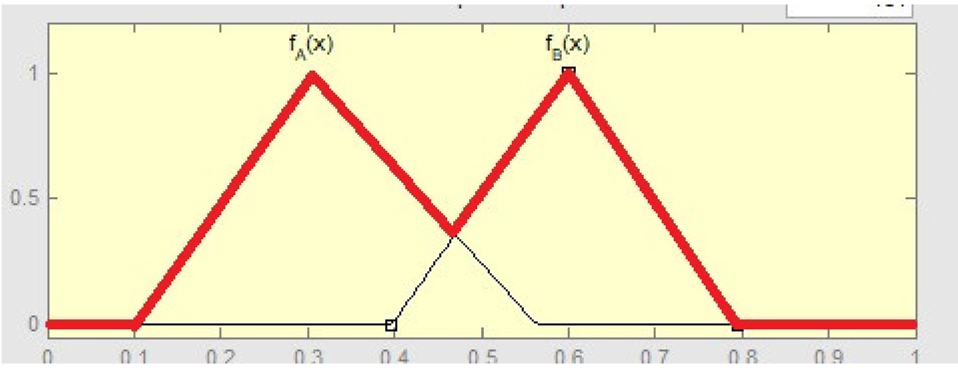


fig : La fonction d'appartenance de $max(f_A(x), f_B(x))$

***Proposition* 2.3.2.**
Comme en théorie des ensembles classique, on vérifie que :
$\longrightarrow$ *$\cap$ et $\cup$ sont associatives.*
$\longrightarrow$*$\cap$ et $\cup$ sont commutatives.*
$\longrightarrow$*$\cap$ et $\cup$ sont distributives l'une par rapport à l'autre.*
$\longrightarrow A \cup \emptyset = A et A \cup X = X.$
$\longrightarrow A \cap X = A et A \cap \emptyset = \emptyset.$
$\longrightarrow A \cap B \subset A \subset A \cup B.$
$\longrightarrow \mid A \mid + \mid B = \mid A \cap B \mid + \mid A \cup B \mid.$

On définit également le produit cartésien de sous-ensembles flous :

***Définition* 2.3.1.**
Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des ensembles, et $A_1 \in P(X_1), A_2 \in P(X_n), ..., A_n \in P(X_n)$, alors :
$f_{A_1 \times A_2 \times .... \times A_n} : x \longrightarrow min(f_{A_1}(x), f_{A_2}(x), ..., f_{A_n}(x)).$
Ainsi que le complémentaire :

***Définition* 2.3.2.**
Le complémentaire d'un sous-ensemble flou $A \in P(X)$ est défini par :
$f_{A^c} : x \longrightarrow 1 - f_A(x)$.
Exemples :
Pour l'exemple précèdent on f_{A^c} est :

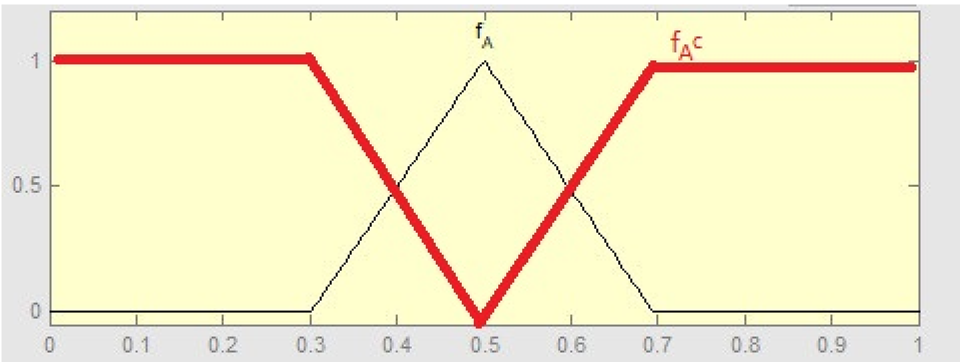


fig : La fonction d'appartenance de $1 - f_{A^c}(x)$

***Proposition* 2.3.3.** *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*
$\longrightarrow (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
$\longrightarrow (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
$\longrightarrow (A^c)^c = A$.
$\longrightarrow \mid A \mid + \mid A^c \mid = \mid X \mid$.
Mais contrairement à la théorie des ensembles :$A^c \cap A \neq \emptyset$.$A^c \cup A \neq X$.

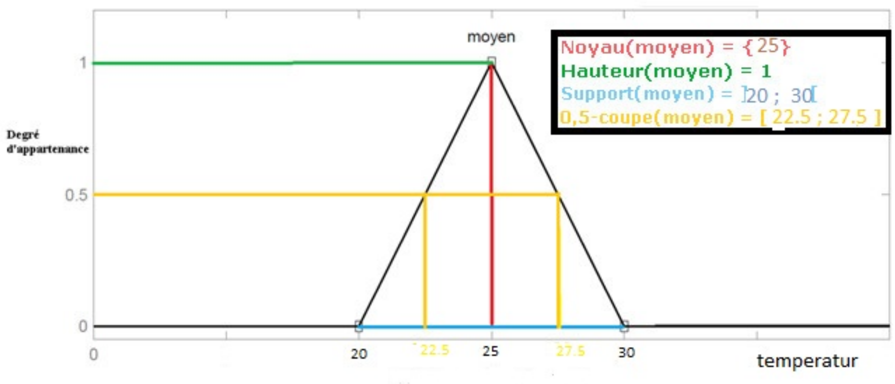
2.4 Les α-coupes

***Définition* 2.4.1.**
Soit A *un sous-ensemble floue de* X. *Une* α*-coupes* A_α *de* A *est un sous-ensemble (au sens classique) de* X *, défini par :*

$$A_\alpha = \{x \in X, f_A(x) \geq \alpha\}.$$

où $\alpha \in [0, 1]$ *est le seuil d'appartenance.*

Exemples :
Avec l'exemple précèdent on a :



***Proposition* 2.4.1.** *Les*α*-coupes vérifiant :*
$\longrightarrow (A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$.
$\longrightarrow (A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$.
$\longrightarrow A \subset B \Rightarrow A_\alpha \subset B_\alpha$.

***Théorème* 2.4.1.** *On peut décrire le sous-ensemble flou A à partir de ses α-coupes de la manière suivante :*
$\forall x \in X f_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} (\alpha.\chi_{A_\alpha})$.

2.5 Normes et co-normes triangulaires

***Définition* 2.5.1.**
Une norme triangulaire (t-norme) est une application
$T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *telle que :*
i)$T(x,y) = T(y,x)$ *(commutativité).*
ii)$T(x, T(y,z)) = T(T(x,y),z)$*(associativité).*
iii)$T(x,y) \leq T(z,t) si x \leq z et y \leq t$ *(monotonie).*
iv)$T(x,1) = x$*(1 est élément neutre).*

L'opérateur min satisfait ces propriétés. Toute t-norme est un opérateur d'intersection, ie on peut définir$A \cap_T B$ (en accord avec la proposition 2.3.1) par sa fonction d'appartenance de la manière suivante :
$\forall x \in X, f_{A \cap_T B}(x) = T(f_A(x), f_B(x))$.

***Définition* 2.5.2.**
Une conorme triangulaire (t-conorme) est une application
$\perp$: $[0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$*telle que :*
i) $\perp(x,y) = \perp(y,x)$*(commutativité).*
ii)$\perp(x, \perp(y,z)) = \perp(\perp(x,y),z)$*(associativité).*
iii)$\perp(x,y) \leq \perp(z,t)$ *si* $x \leq z$ *et* $y \leq t$ *(monotonie).*
iv)$\perp(x,0) = x$ *(0 est élément neutre).*

L'opérateur max satisfait ces propriétés. Toute t-conorme est un opérateur d'union, ie on peut définir$A \cup_\perp B$ (en accord avec la proposition 2.3.1) par sa fonction d'appartenance de la manière suivante :

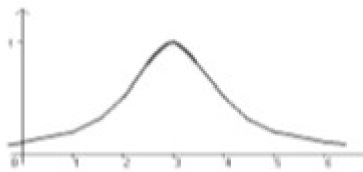
$\forall x \in X, f_{A \cup_\perp B}(x) = \perp(f_A(x), f_B(x))$.

***Proposition* 2.5.1.**
On peut passer d'une t-norme à une t-conorme (et vice versa) par une négation $n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *telle que* $n(0) = 1, n(1) = 0,$ *et* $n(x) \leq n(y)$ *si* $x \geq y,$*, de la façon suivante :* $n(T(x,y)) = \perp (n(x), n(y))$.

2.6 Relations floues

***Définition* 2.6.1.**
Une relation floue $\Re$ *entre deux ensemble* X *et* Y *est un sous-ensemble flou de*$X \times Y$.

Exemples :
La relation floue $\Re$: approximativement égale à : peut être définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la fonction d'appartenance : $f_{\Re}(x,y) = \dfrac{1}{1+(x-y)^2}$



approximativement égale à 3

***Définition* 2.6.2.**
On effectue les opérations :
- Inverse $\Re^{-1}$ d'une relation flou R entre X et Y :
$\forall\langle x,y\rangle \in X \times Y, f_{\Re^{-1}}(x,y)$.
-Compostions de deux relations floues $\Re_1$ (entre X et Y) et $\Re_2$(entre Y et Z) :
$\forall(x,y) \in X \times Z\ ,\ f_{\Re^{-1}\circ\Re_2}(x,y) = sup_{y\in Y}(min(f_{\Re_1}(x,y), f_{R_2}((y,z))$.

Remarque :
Cette définition correspond à celle classiquement utilisée, mais on peut remplacer min par t-norme quelconque.

On dit que la relation floue $\Re$ sur X est :
- Symétrique si :$\forall(x,y) \in X \times X, f_{\Re}(x,y) = f_{\Re}(y,x)$,
- Antisymétrique si :$\forall(x,y) \in X \times X, \{f_{\Re}(x,y) > 0 et f_{\Re}(y,x) > 0 \Longrightarrow x = y\}$.
- Réflexive si : $\forall x \in X, f_R(x,x) = 1$.
- Transitive si :$\Re \circ \Re \subseteq \Re$ ie : $\forall(x,y) \in X \times X, f_{\Re\circ\Re}(x,y) \leq f_{\Re}(x,y)$.

***Définition* 2.6.3.**
Une relation d'ordre floue est une relation réflexive transitive antisymétrique, et une relation de similarité (équivalence) est une relation réflexive transitive symétrique.

2.7 Quantités floues sur R

***Définition* 2.7.1.**
On dit que F est un sous-ensemble flou convexe de $\mathbb{R}$ si :

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall z \in [x,y], f_F(z) \geqslant min(f_F(x), f_F(y)).$$

***Proposition* 2.7.1.** *Le sous-ensemble flou F est convexe si et seulement si toute $\alpha -$ coupe de F est une partie convexe de $\mathbb{R}$.*

***Définition* 2.7.2.**
une quantité floue Q est un sous-ensemble flou quelconque de la droit réele généralement normalisé ($\exists x \in X$ tel que $\mu_Q(x) = 1$).

Comme tous ensemble flou,une quantité floue peut se représenter soit par sa fonction d'appartenance μ_Q ou par ses $\alpha - coupes$, $Q_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu Q(x) \geqslant \alpha\}$ pour $\alpha \in [0, 1]$. Q est appelée quantité floue .Une quantité floue est souvent interprétée comme une distribution de possibilité sur les valeurs qu'une variable x peut prendre. Elle représente alors soit un ensemble des valeurs préférées pour x, soit un ensemble des valeurs plus ou moins plausibles, si la valeur de x est mal connue et non contrôlable. Une quantité floue peut présenter une, plusieurs, voire une infinité des valeurs modale. L'absence de normalisation de la distribution de possibilité signifierait que la variable x peut prendre des valeurs en dehors du domaine considéré, on peut ne pas avoir de valeur du tout

Exemples :

dans le cas où x représenterait la durée estimée d'un voyage qui ne sera peut-être pas entrepris. d'une manière générale , la hauteur d'une quantité floue est définie comme le maximum des degrés d'appartenance de cette quantité, $h(Q) = \sup_{x \in X} \mu_Q(x)$. Elle peut être vue comme une mesure de cohérence interne

***Définition* 2.7.3.**
Un intervalle flou de $\mathbb{R}$ est une quantité floue convexe de $\mathbb{R}$.
Un nombre flou est un intervalle flou de fonction d'appartenance semi-continue supérieurement et à support compact admettant une seule valeur modale.

Remarque :

une fonction est dite semi-continue supérieurement si :
$\forall a \in X \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\mid x - a \mid \overline{lim_{x\to a}} f(x) \subset f(a)$;
avec $\overline{lim_{x\to a}} f(x) = \in X \in \mathbb{P}(\mathbb{R}), \inf_{y \in O_\epsilon(f(x))} dist(y, f(x)) = 0\}$

***Définition* 2.7.4.**
Opérations arithmétique sur les quantités floues :
-Opération unaire Δ sur les quantités floues à partir d'une Opération unaire ϕ sur $\mathbb{R}$:
$\forall z \in \mathbb{R}, f_{\Delta Q}(z) = sup_{\{x \in \mathbb{R}, z = \phi(x)\}} f_Q(x)$.

-Opération binaire $\bigstar$ sur les quantités floues à partir d'une opération binaire ψ sur $\mathbb{R}$:
$\forall \in \mathbb{R}, f_{Q \star Q}(z) = sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, z = \psi(y)} min(f_Q(x), f_Q(y))$.

Exemples :

On peut, avec ce qu'on a introduit, sommer ou multiplier des nombres réels connus approximativement. Ce peut être un cadre pratique pour le calcul d'incertitudes.

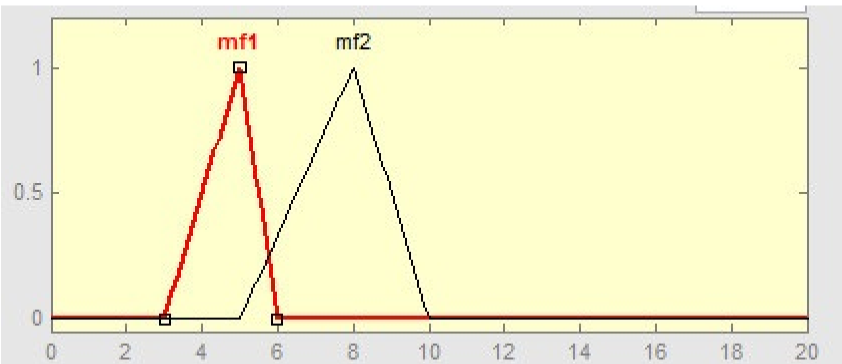
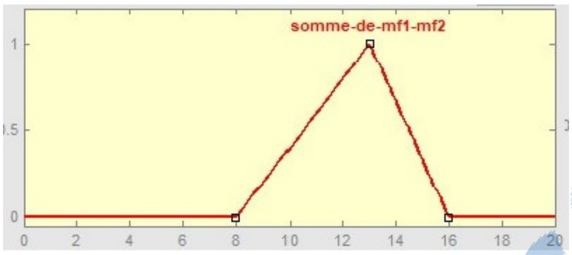
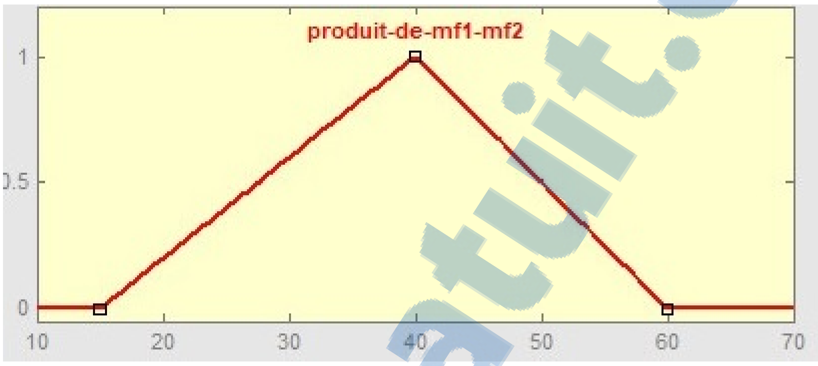


fig : La fonction d'appartenance de deux nombre floues



la somme de deux nombre floues



le produit de deux nombre floues

3

Le raisonnement en logique floue

3.1 Les implications floues

***Définition* 3.1.1.**
Une implication floue est une relation R entre les deux ensembles X et Y quantifiant le degré de vérité de la proposition :
SI $(x \in A) ALORS$ $(y \in B)$.

où A et B sont des sous-ensembles flous de X et Y respectivement la fonction d'appartenance $f_R$de cette relation dépend des fonctions d'appartenancef_R etf_B de A et B.
En logique classiquef_A etf_B ne prennent que les valeurs 0 et 1, et f_R est définie par :

$f_A(x)$	$f_B(y)$	$f_R(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

En logique floue, on peut définir plusieurs implications. On regroupe les principales sur le tableau suivant :

	valeurde vérité	Nom
f$_{R_R}(x,y)$	1-f$_A(x)f_B(y)$	Reichenbach
f$_{R_W}(x,y)$	max(1-f$_A(x), min(f_A(x), f_B(y)))$	Willmott
f$_{R_L}(x,y)$	min(1-f$_A(x) + f_B(y), 1)$	Lukasiewiez
f$_{R_M}(x,y)$	min (f$_A(x), f_B(y))$	Mamdani
f$_{R_L}(x,y)$	f$_A(x)f_B(y)$	Larsen

Les deux dernières implications floues (Mamdani et Larsen) ne généralisent pas l'implication classique, alors que c'est le cas des autres. Elles sont néanmoins les plus utilisées dans les commandes floues. comme on le verra plus loin.

3.2 Les propositions floues

Comme en logique classique, on peut effectuer des raisonnements sur les sous-ensembles flous, par exemple un raisonnement du type :
SI ($x \in A$) ET ($y \in B$) ALORS ($Z \in C$).
où A,B ,C sont des sous-ensembles flous. En logique classique, ce peut être :
SI($x > 5$) ET ($y > 7$) ALORS ($xy > 35$).
En logique floue , on aura une règle du genre :
SI (vitesse est grande) ET (obstacle est proche) ALORS (freinage est fort).
Tout le problème réside dans la détermination du sous-ensemble flou des z satisfaisant l'implication, connaissant x,y et les fonctions d'appartenance de A,B, et C . Le sous-ensemble des solutions est flou car un z donnée réalise l'implication avec un degré plus ou loins grand.

***Définition* 3.2.1.**
Le sous-ensemble flou solution S a pour fonction d'appartenance : $f_S(z) = f_R((f_A(x) \star f_B(y)), f_C(z))$*,* *Où* f_R *est la fonction d'appartenance d'une relation d'implication floue, et* $\star$ *une norme triangulaire (c'est un opérateur de conjonction traduit le ET).*

3.3 Conjonction de proposition floue

Le contrôle d'un processus par commande floue nécessite de considérer les différentes valeurs possibles pour les variables d'entrée, et donc différentes règles pour chaque situation envisagée.

Ainsi, on considéré un ensemble de propositions floues, du genre :

$$\begin{cases} SI(\text{x}\in A_1) \text{ ET } (y \in B_1) \text{ ALORS } (z \in C_1) P_1 \\ SI(\text{x}\in A_2) \text{ ET } (y \in B_2) \text{ ALORS } (z \in C_2) P_2 \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ SI\ (\text{x}\in A_n) \text{ ET } (y \in B_n) \text{ ALORS } (z \in C_n) P_n \end{cases}$$

Pour déterminer le sous-ensemble flou solution de la conjonction des n proposition, il faut utiliser un opérateur d'agrégation $\bigwedge$ permettant de faire la synthèse des solutions de chaque P_i.

***Définition* 3.3.1.**
Le sous-ensemble flou S des solutions du système de propositions floue est défini par la fonction d'appartenance :
$f_s(z) = \bigwedge(f_{s_1}(z), f_{s_2}(z), \cdots f_{s_n}(z))$.

Comme on le verra dans l'exemple , les règle qui ne sont pas concernées par l'observation (c'est à dire la $j^{éme}$ proposition si $f_{A_j}(x) = f_{B_j}(y) = 0$) ne doivent pas intervenir dans la synthèse.
Or :$f_{A_j}(x) = f_{B_j}(y) = 0$ implique : $f_{A_j}(x) \star f_{B_j}(y) = 0$ et donc : $f_{s_j}(z) = f_R(0, f_{c_j}(z))$ .Ainsi si $\Re estL'implicationdemamdanioudeLarsen$, f$_{s_j}(z) = 1$. Il convient alors d'utiliser comme opérateur d'agrégation $\bigwedge$ un opérateur admettant 0 comme élément neutre dans le premier cas et 1 dans les autres.
On peut utiliser respectivement les opérateurs max et min.

3.4 la méthode de mamdani

Examinons deux possibilités de choix pour$R, \star, et \bigwedge$,

méthode de :	Mamdani	Larsen
implication de flou R	R_M	R_L
Opérateur de conjonction $\star$	minimum	produit
opérateur d'agrégation $\bigwedge$	maximum	maximum

Remarque :
La méthode de Mamdani est aussi appelée méthode min-max, avec ces définitions la fonction d'appartenance du sous-ensemble flou des solutions de la proposition P_i :
SI (x$\in A_i$) ET ($y \in B_i$) ALORS ($z \in C_i$) est :
Mamdani :$f_{s_i}(z) = min(min(f_{A_i}(x), f_{B_i}(y)), f_{c_i}(z))$
Larsen : $f_{s_i}(z) = (f_{A_i}(x), f_{B_i}(y))f_{c_i}(z)$
et dans les deux cas les solutions sont agrégées par $\bigwedge = max$, ie le sous-ensemble flou S solution du système des n propositions a pour fonction d'appartenance
$f_s(z) = max(f_{s_1}, f_{s_2}, \cdots, f_{s_n}.$
où si $1 \leq i \leq n, S_i$ est le sous-ensemble flou solution de la proposition P_i.

3.5 Un exemple : le pendule inversé

On va étudier un processus de commande floue permettant de maintenir en position verticale un≪ pendule inversé≫ : une barre placée sur un chariot mobile pouvant être déplacé dans deux directions l'axe de rotation de la barre est solidaire du chariot.

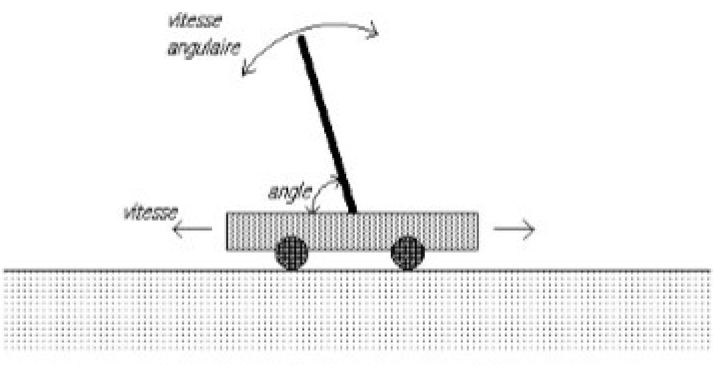


fig :le pendule inversé

Ce processus de commande 'effectue en temps réel : on mesure la vitesse angulaire ainsi que l'angle d'inclination de la barre. et on calcule à chaque instant la vitesse devant être appliquée au chariot pour rattraper le mouvement de rotation de la barre et la maintenir dans la position de plus verticale possible.
On suppose que l'on peut qualifier la vitesse angulaire et l'angle d'inclinaison de la barre ainsi que la vitesse du chariot par :
NG : négatif Grand
NF : Négatif faible

Z : zéro
PF : positif faible
PG : positif Grand.
On utilise les fonctions d'appartenance de la figure considérons par exemple que la barre est en position vertical et que sa vitesse angulaire est faible. D'où la règle floue : SI (angle est zéro) ET (vitesse angulaire est positive faible) ALORS (vitesse est positive faible).
On établit les règles de contrôle du mobile que l'on peut résumer dans le tableau suivant :

vitesse angulaire	angle	vitesse appliquée
NG	Z	NG
NF	Z	NF
NF	PF	Z
Z	NG	NG
Z	NF	NF
Z	Z	Z
Z	PF	PF
Z	PG	PG
PF	NF	Z
PF	Z	PF
PG	Z	PG

On utilisera la méthode min-max.
prenons un cas particulier : soit comme valeur d'angle celle de la figure et comme valeur de vitesse angulaire celle de la figure de angle

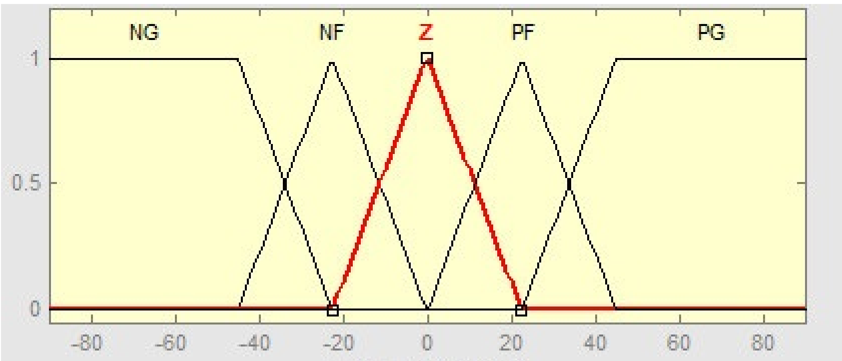


fig : la fonction d'appartenance d'angle

Comme on le lit sur le graphe, l'angle 7.3 considéré est zéro (Z) avec le degré 0,8 et est positive faible (PF) avec le degré 0,2. En ce qui concerne la vitesse angulaire -2.5, elle est zéro (Z) avec un degré de 0.3 et est négative faible (NF) avec un degré de 0.7

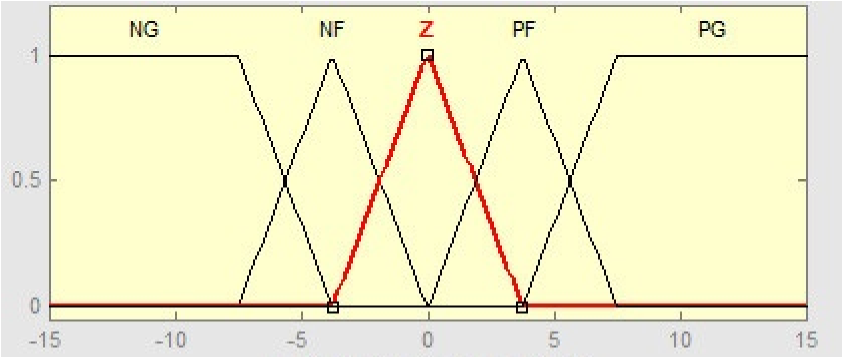


fig :la fonction d'appartenance vitesse angulaire

Rappelons que le degré de vérité de l'implication floue :
SI $(x \in A)$ ET $(y \in B)$ ALORS $(z \in C)$
selon la méthode de mamdani est :
$f_S(z) = max(min(f_A(x), f_B(y)), f_C(z))$.
—- où x est la valeur mesurée de l'angle entre la barre et l'horizontale, y celle de la vitesse angulaire de rotation de la barre, et z est une vitesse pouvant être appliquée —
on applique les quatre règles concernées en utilisons logiciel Matlab :
1. SI (angle Z) ET(vitesse angulaire Z) ALORS (vitesse Z).
L'angle est zéro avec un degré de 0.8 correspondant à un angle 7.3 et la vitesse angulaire est zéro avec un degré de 0.3 correspondant à une vitesse angulaire 2.2 . on déduit la fonction d'appartenance des vitesse solutions de l'implication floue sur la figure suivant : (min(0.8 ;0.3)=0.3).

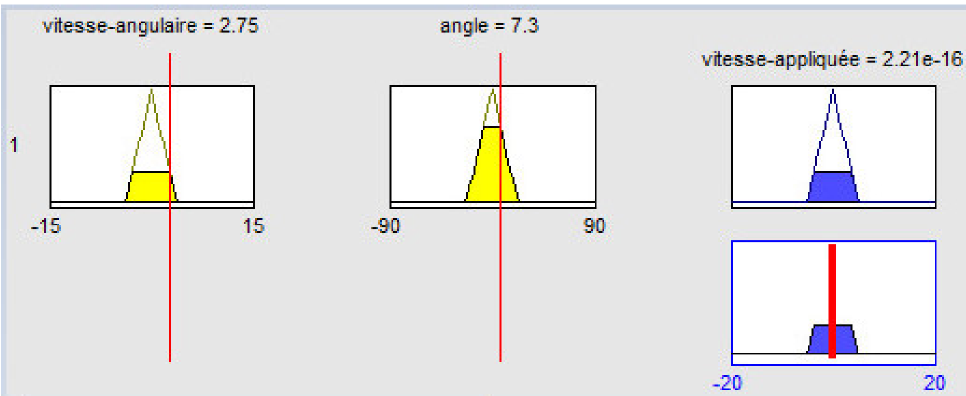


fig : la fonction d'appartenance des vitesse solutions de l'implication floue

2- SI (angle Z) ET (vitesse angulaire NF) ALORS (vitesse NF)
l'angle est zéro avec un degré de 0.8 et la vitesse angulaire est négative faible avec un degré de 0.7 . On déduit la fonction d'appartenance de vitesse solution sur la figure suivant : (min(0.8 ;0.7)=0.7)

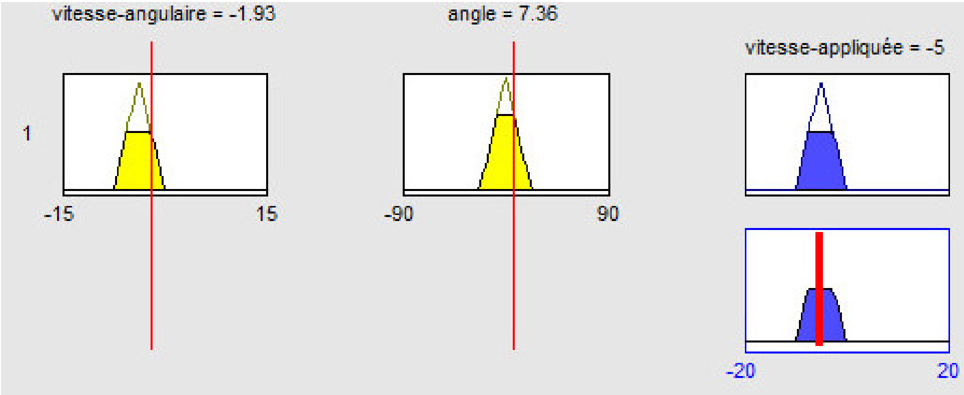


fig : la fonction d'appartenance des vitesse solutions de l'implication floue

3.SI (angle PF) ET (vitesse angulaire NF) ALORS (vitesse appliquée Z)
L'angle est positif faible avec un degré de 0.2 et vitesse angulaire est négative faible avec un degré de 0.7. On déduit la fonction d'appartenance de vitesse solution sur la figure suivant (min(0.2 ;0.7)=0.2)

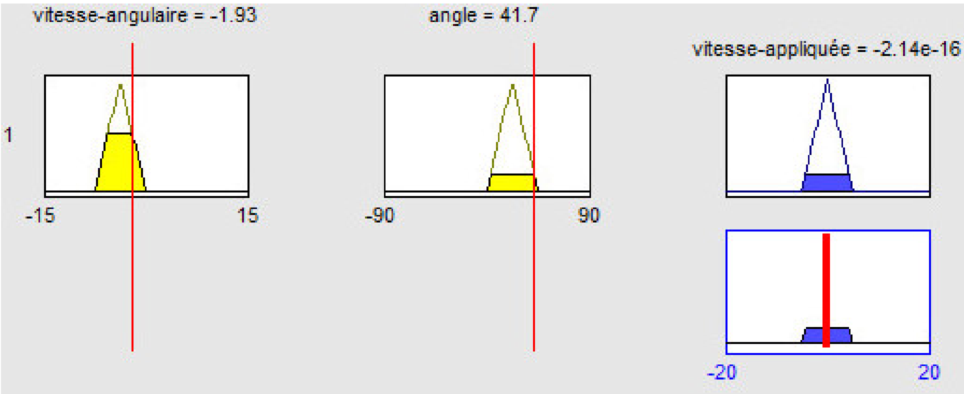


fig : la fonction d'appartenance des vitesse solutions de l'implication floue

4.SI (angle PF) ET (vitesse angulaire Z) ALORS (vitesse PF)
L'angle est positif faible avec un degré de 0.2 et la vitesse angulaire est zéro avec un degré de 0.3, On déduit la fonction d'appartenance de vitesse solution sur la figure suivant (min(0.2 ;0.3)=0.2)

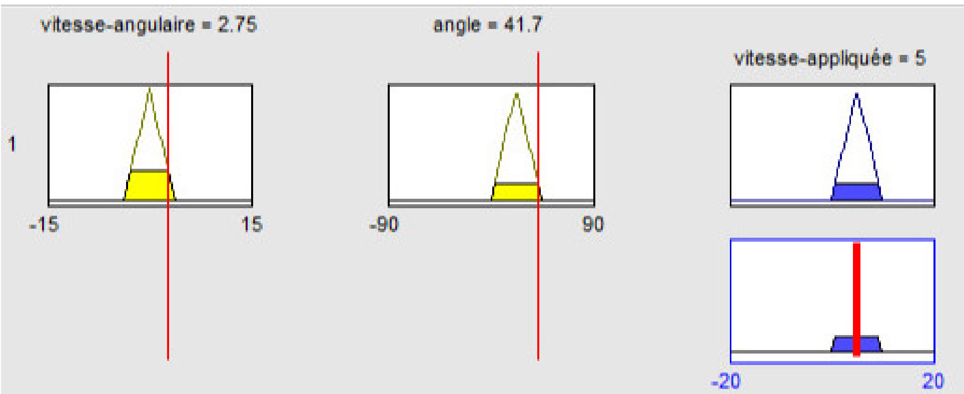


fig : la fonction d'appartenance de vitesse solutions de l'implication floue 4

Maintenant que l'on a déterminé les fonctions d'appartenance du sous-ensemble flou solution d chaque règle, on détermine le sous-ensemble solution du système en agrégeant les résultats avec l'opérateur max :

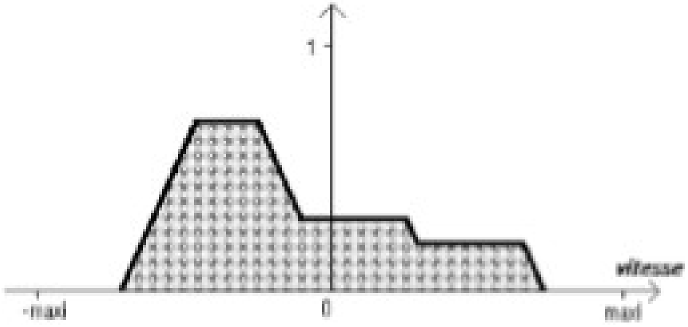


fig : la fonction d'appartenance de sous-ensemble solution du système en agrégeant les résultats avec l'opérateur max

On a donc obtenu le sous-ensemble flou solution : pour une vitesse donnée, On sait à quel degré elle satisfait les règles de la commande, Mais pour utiliser pratiquement ce résultat, il faut donner une valeur numérique comme solution : de l'exploitation de la figure précédant on déduit une valeur de vitesse devant être donnée au chariot pour qu'il puisse rattraper la rotation de la barre. Cette étape est la défuzzification.
en généralement on peut obtenir le graphe tout les valeur vitesse ,avec l'utilisation de matlab ,

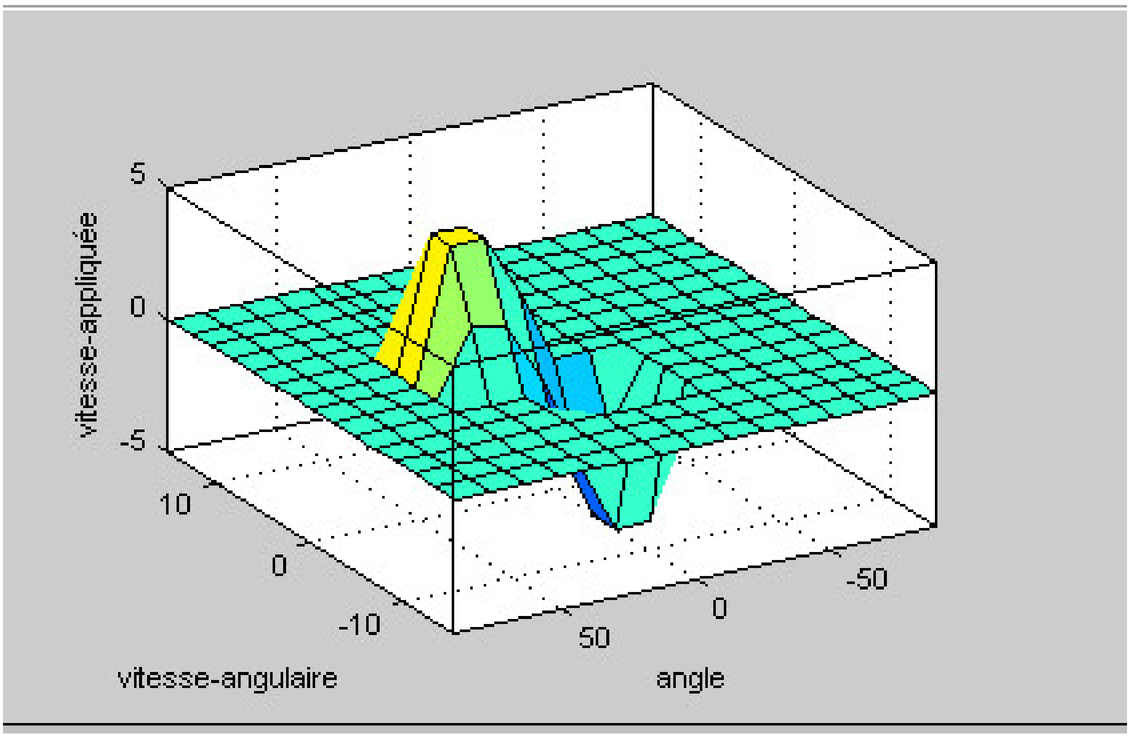


fig :le graphe des soulution de tout les règle possible

Conclusion

En introduisant la théorie des sous-ensembles flous, Zadeh a offert un outil puissant pour la modélisation des systèmes complexes, pour lesquels on ne dispose que d'une spécification approximative ou imprécise. Le but d'un modèle est de capturer la relation entre les entrées et les sorties d'un système. A l'encontre d'un modèle conventionnel qui décrit cette relation par une loi mathématique, un modèle flou là décrit linguistiquement. De façon générale, les ensembles flous peuvent intervenir efficacement dans la modélisation des systèmes complexes, principalement en raison de leur capacité à synthétiser des informations, à permettre une approche globale de certaines caractéristiques du système grâce à la gradualité qui leur est inhérente, et également, bien sur, en raison de leur aptitude à traiter des connaissances imparfaites, c'est-à-dire par exemple incomplètes, approximatives, vagues, soumises à des erreurs de mesure, ... Les modèles flous ont deux propriétés essentielles :

- le traitement se fait au niveau symbolique. En fait, ces modèles sont conçus pour manipuler des valeurs linguistiques, comme c'est le cas chez l'homme. Ceci est devenu possible grâce aux variables linguistiques et à la représentation des spécifications des valeurs linguistiques par des ensembles flous.

- Ils sont capables de représenter l'imprécision et l'incertitude d'un expert humain. Cette propriété est particulièrement intéressante, car les modèles flous sont souvent inspirés de la connaissance humaine. Il est donc nécessaire d'inclure l'imprécision et l'incertitude que contient cette connaissance dans le modèle flou.

Les domaines d'application de la logique floue se sont multipliés depuis la fin des années soixante. Les domaines d'application dans lesquels il existe des utilisations de la logique floue sont très variés : médecine et biologie, génie industrielle, technique, économie, défense, écologie, sciences humaines, recherche scientifique, ...

Au-delà de l'intérêt mathématique suscité par la logique floue et de la mise en évidence d'applications commerciales, il faut considérer la logique floue avec la même objectivité que celle accordée à toute méthodologie ou technique actuellement considérée comme classique, comme l'automatique ou la théorie des probabilités par exemple. La logique floue a presque quarante ans, elle entre dans sa maturité et ne doit plus être regardée comme une science balbutiante.

Elle repose sur des fondements théoriques établis dans de multiples publications internationales par des chercheurs de la plus haute compétence ; elle n'est pas isolée dans sa recherche, mais des liaisons ont été établies avec d'autres axes tels que les logiques non classiques, la théorie des probabilités, automatique classique, pour n'en citer que quelques uns. Ses applications touchent tous les domaines parce qu'elle s'efforce d'apporter des solutions à des situations réelles où le flou est présent, d'autant plus que, nous le voulions ou non, nous vivons dans un monde flou...

Bibliographie

[1] Bernadette Bouchon-Meunier, ► *La logique floue et ses applications, Collection Vie Artificielle, Addison-Weiley, 1995.*

[2] Didier Dubois, Henri Prade, ► *Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1, Fuzzy Sets and Systems 40, pp. 143-202, North-Holland, 1991.*

[3] Jang , J- S. R., Chuen-Tsai Sun, ► *Neuro-fuzzy modeling and Control, Proc. Of the IEEE, March 95.*

[4] L.A. Zadeh.► *A theory of approximate reasoning. In J.E. Hayes, D. Michie and L.I. Mikulich, ed. Machine Intelligence, Vol. 9, pp. 149-194. Elsevier, Amsterdam, 1979.*

[5] Leekwijck and Kerre,► *Leekwijck, W. V. and Kerre, E. E. (1999).*

[6] Madau D., D. F ► *Inuence value defuzzification method. Fuzzy Systems, Proceedings of the Fifth IEEE International Conference, 3 :1819 -1824.*

[7] Zadeh, L. (1965 ► *Fuzzy sets. Information and Control, 8(3) :338 - 353.*

[8] Robert Babuska : ►*Fuzzy Systems, Modeling and Identification,pub 1998. .*