Table de matières

Introduction 2

1. Etat actuel de la recherche et des plans d'études 3

2. Cadre théorique 5

2.1 Le rapport au savoir. Comment le faire progresser 6

2.2 L'introduction de l'histoire des mathématiques en classe : les pour et les contre 8

2.3 Les "comment" : scenarios d'introduction de l'histoire des mathématiques en classe ... 11

3. Méthodologie 14

3.1 Séance historique 15

3.2 Questionnaire 18

4. Analyse des résultats 19

4.1 Analyse de la séance 20

4.2 Analyse des réponses aux questionnaires 21

4.3 Conclusions relatives aux questions de recherche 22

Conclusions 26

Bibliographie 29

Annexe 1 : Exposé historique 32

Annexe 2 : Activité historique 33

Annexe 3 : Questionnaire 36

Introduction

D'après certaines enquêtes internationales (PISA, 2003 ; PISA, 2015), un grand nombre d'élèves ont des difficultés en mathématiques et plusieurs d'entre eux adoptent des attitudes réfractaires face à cette discipline.
Nous constatons que, dans l'école post-obligatoire, une grande importance est justement accordée au respect du plan d'études, mais trop peu d'importance est accordée à la construction d'un rapport au savoir mathématique qui soit favorable à l'apprentissage.
L'objectif de notre mémoire est de montrer que l'introduction de l'histoire des mathématiques en classe peut faire évoluer favorablement le rapport au savoir mathématique et de déterminer les scenarios les plus efficaces.

La motivation qui nous a conduit à faire cette étude est double : d'un côté, l'intérêt personnel pour l'histoire des mathématiques; de l'autre côté, le fait que l'histoire des mathématiques a changé l'image que nous avions des mathématiques et le souhait que les élèves portent sur les mathématiques un autre regard.

Pour contextualiser notre étude, nous avons présenté l'état actuel de la recherche et nous avons comparé les contenus des plans d'études vaudois et québécois.
Le cadre théorique sur lequel s'est appuyé notre mémoire repose sur deux thèmes: rapport aux savoir et histoire des mathématiques. Nous avons d'abord défini le concept de rapport au savoir, explicité les liens entre le rapport au savoir et l'apprentissage et indiqué les expériences qui peuvent faire progresser le rapport au savoir. Ensuite nous avons présenté les réflexions des chercheurs et des enseignants sur les avantages et les inconvénients de l'introduction de l'histoire des mathématiques en classe et sur les scenarios possibles.
Pour ce qui concerne la méthodologie de recherche, nous avons opté pour une recherche qualitative: quinze élèves d'une classe de maturité professionnelle ont répondu à un questionnaire après une séance sur l'histoire des mathématiques, que nous appellerons "séance historique".
Nous avons analysé le déroulement en classe de cette séance historique, les réactions des élèves et les résultats du questionnaire et nous nous sommes appuyés sur les résultats théoriques, dans le but de tirer les conclusions de notre étude.

1. Etat actuel de la recherche et des plans d’études

Plusieurs études ont été publiées à partir des années septante, abordant le “pourquoi” et le “comment” de l’utilisation de l’histoire des mathématiques dans l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques.

Les associations les plus actives sur le sujet sont les IREM (Instituts de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques) en France.
A la fin des années septante, des enseignants en Mathématiques travaillant dans les IREM ont créé une structure nationale nommée Commission inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques. Le but de cette nouvelle Commission était de changer l’image des mathématiques, devenue trop dogmatique, et de recentrer les savoirs sur le sens. Cette commission organise des colloques et des universités d’été pluridisciplinaires sur l’histoire des mathématiques et a publié de nombreux ouvrages consacrés à l’histoire et à l’enseignement des mathématiques. On peut consulter ses publications en accédant au portail internet de la commission (http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique15).

Nous avons trouvé dans le panorama littéraire des publications ayant des objectifs différents.
Certaines publications analysent les différentes fonctions de l’histoire des mathématiques en classe, comme celles d’Evelyne Barbin (université de Nantes, responsable de la commission inter-IREM d’épistémologie) et celles de Louis Charbonneau (université du Québec) (voir section 2.2 pour les détails), mais sans en démontrer la réelle efficacité.
D’autres publications proposent un inventaire des scenarios possibles (contenus et activités) avec des exemples concrets mais non détaillés : les enseignants peuvent trouver des bonnes idées pour préparer les séances historiques (Desrochers, Tremblay, Mercier & Sassi, 2005; Dematté, 2006).
D’autres publications encore proposent une séance historique spécifique sur un sujet et en analysent les avantages et les inconvénients: ces séances sont prêtes pour être utilisées par les enseignants en classe (publications de la Commission inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques).
Enfin on trouve des publications qui ont pour objectif d’analyser l’efficacité de l’histoire des mathématiques en classe: il s’agit d’études empiriques, qui discutent et élaborent des conclusions à partir de données recueillies sur le terrain. A titre d’exemple, Smestad (2007) a

analysé 638 leçons filmées en classe de mathématiques de niveau secondaire provenant de 60 pays différents et il a conclu que l'histoire est très peu utilisée (dans seulement 3% des cas), souvent l'histoire est racontée de façon anecdotique, souvent il manque un lien entre l'histoire racontée et les concepts étudiés, si bien que l'histoire se trouve isolée du reste de la leçon. Dematté (2007) a utilisé les réponses de 60 élèves à un questionnaire pour conclure que les élèves ont des difficultés à voir les concepts dans un contexte autre que le cadre mathématique habituel et, par conséquent, il affirme l'importance d'introduire l'histoire des mathématiques pour développer le raisonnement chez l'élève. Jankvist (2010) a utilisé des sources diversifiées (observations directes, enregistrements audio et vidéo, productions des participants) pour conclure que les élèves qui avaient suivi un cours d'histoire des mathématiques avaient développé des capacités métacognitives sur l'activité spécifique et sur les mathématiques.

A partir des années 2000, plusieurs chercheurs (Siu, 2000; Bakker, 2004 ; Tzanakis, 2000 ; Schubring, 2007) ont commencé à mettre en doute la solidité de ces études empiriques: ils ont relevé des faiblesses du point de vue méthodologique (un seul outil de collecte de données dans la majorité des cas insuffisant et limité, absence d'un cadre d'analyse des résultats, etc.) et ils ont proposé que la recherche soit prise en charge au sein de la Science de l'Education pour qu'elle puisse bénéficier ainsi des cadres méthodologiques reconnus. Un didacticien des mathématiques (Jankvist, 2009) a commencé à faire un gros travail pour améliorer la méthodologie de recherche sur le sujet.

En tirant parti des faiblesses de la recherche empirique sur le sujet, certains auteurs ont publié leurs réticences à l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe, en dressant des listes de limites théoriques (Fried, 2001) et de difficultés pratiques (Siu, 2007). (Voir section 2.2 pour les détails).

Pour avoir une vision plus complète et détaillée de la recherche concernant l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques, on peut consulter l'article de Guillemette (2011), un doctorant québécois.

Quel est l'espace donné à l'histoire des mathématiques dans les plans d'études nationaux?

Dans le plan d'études des écoles de maturité en Suisse Romande (PER-MAT, 2015-2016) l'histoire des mathématiques n'est pas obligatoire mais souhaitable. On peut lire dans le programme : "Il est possible, et même souhaitable, d'incorporer des prolongements – au plan d'études obligatoire - selon les affinités du maître et des élèves, notamment des éléments d'histoire des mathématiques.".

Dans le plan d'études des écoles professionnelles en Suisse Romande (PER-MP, 2015-2016), l'histoire des mathématiques est proposée seulement dans le cadre des TIB (Travaux Interdisciplinaires par Branche), donc de façon optionnelle.

Au Québec l'enseignement de l'histoire des mathématiques dans le cycle secondaire a été rendu obligatoire par le Ministère de l'Education, du Loisirs et du Sport déjà à partir de 2003. On peut lire dans le programme : " La dimension épistémologique doit donc être présente dans les apprentissages et ouvrir des perspectives sur le passé, le présent et l'avenir. " (MELS, 2015-2016).

Le plan d'études québécois vise à placer les mathématiques dans un contexte sociohistorique et culturel plus large. Il vise à humaniser les mathématiques, en associant aux concepts mathématiques le visage de mathématiciens ayant œuvré à leurs développements.

Le plan d'études québécois fournit de nombreux repères culturels : activités à réaliser, problèmes à résoudre, anecdotes. L'enseignant est ainsi guidé dans la création de ses séances historiques.

2. Cadre théorique

Ce chapitre présente le cadre théorique sur lequel notre mémoire s'appuie.

La section 2.1 porte sur le concept de rapport au savoir et son importance pour l'apprentissage scolaire. Les deux types de rapports au savoir, la logique de cheminement et la logique d'apprentissage, sont exposés. Les expériences que l'élève doit faire afin que son rapport au savoir puisse progresser sont listées et analysées.

La section 2.2 porte sur l'introduction de l'histoire des mathématiques en classe. D'abord, les réticences des chercheurs et des enseignants sont exposées. Ensuite, les fonctions de l'histoire des mathématiques en classe et leurs avantages sont analysés.

Enfin, la section 2.3 porte sur les scenarios d'introduction de l'histoire des mathématiques en classe : les différents types de contenu et d'activité sont analysés.

2.1 Le rapport au savoir. Comment le faire progresser

Le rapport au savoir est l'ensemble des relations qu'un sujet entretient avec l'acte d'apprendre comme processus (connaître, comprendre, étudier), avec les savoirs comme produits (compétences acquises, objets institutionnels, culturels et sociaux) et avec les situations d'apprentissage (Charlot, 1997).

Comme le dit Bautier (2000, p.180), le rapport au savoir " est une relation de sens et de valeur : l'individu valorise ou dévalorise les savoirs et les activités qui s'y rapportent en fonction du sens qu'il leur confère ".

En classe, écrire une équation est une action. Mais, pourquoi le fait-on ? Le fait-on parce qu'il faut le faire ? Ou plutôt parce que cela permet d'apprendre les mathématiques qui aideront à trouver un métier ? Ou encore parce que la classe est en train d'investiguer et de résoudre une problématique complexe, dont il faut être fiers?

Les élèves ont un rapport subjectif au travail qu'ils doivent faire. Ils ne vivent pas tous de la même façon le métier qu'ils doivent assumer.

Le rapport au savoir peut être de nature à favoriser ou à gêner l'appropriation des savoirs.

D'après la recherche de Bautier, Charlot & Rochex (1992), les élèves en difficulté ont un rapport au savoir qui suit une *logique de cheminement* tandis que les bons élèves ont un rapport au savoir qui suit une *logique d'apprentissage*.

L'élève qui suit une logique de cheminement ne valorise que les savoirs qui permettent de faire face aux situations de la vie quotidienne, il est soumis à l'enseignant qui dit ce qu'il faut faire. C'est le chemin de l'école, l'élève certifie ce qu'on lui demande. Il retient les aspects extérieurs des tâches et se concentre sur la procédure à suivre.

En mathématiques, la logique de cheminement est encore plus accentuée que dans les autres disciplines. " D'une part, il est particulièrement important de réussir en mathématiques pour "passer" dans la classe suivante. D'autre part, pour ces élèves, ce que l'on enseigne en mathématiques fait encore moins sens pour eux que ce que l'on enseigne dans d'autres disciplines " (Bautier & Charlot, 1993).

Pour la logique d'apprentissage, un savoir peut être important sans être utile. L'élève est autonome par rapport à l'enseignant. L'école est perçue comme un lieu d'apprentissage. L'élève est capable de mettre la tâche en lien avec les principes généraux de la discipline. Ainsi, les savoirs s'émancipent de la situation.

En mathématiques, l'élève qui suit la logique d'apprentissage reconnaît les enjeux de la réflexion, du questionnement, de la réécriture. Il reconnaît les sens et l'importance du savoir mathématique, " un champ de connaissances que l'homme, depuis l'Antiquité, cherche à élargir et à compléter par une recherche et une remise en cause continues " (PER-MAT).

Le rapport au savoir est fondamental pour l'apprentissage. Comme le dit Develay (1996) « [...] pour installer des apprentissages performants, l'enseignant se doit de mieux saisir la nature du rapport des élèves au savoir [...]. Un rapport au savoir, qui ne soit pas d'emblée un rapport de rejet mais un rapport d'adhésion, constitue un premier préalable pour apprendre ».

Le rapport au savoir initial de l'élève dépend de sa famille et de sa psychologie. Sur ces deux dimensions l'enseignant n'a pas de prise. Mais le rapport au savoir de l'élève peut évoluer grâce à son expérience (Bautier, Charlot & Rochez, 2000).

Nous disons que le rapport au savoir d'un élève évolue *favorablement* quand le savoir devient un enjeu pour l'élève: la logique de cheminement devient logique d'apprentissage.

Pour répondre à l'objectif de notre mémoire, nous analysons les expériences que l'élève doit vivre afin que son rapport au savoir puisse évoluer favorablement.

- Le savoir doit être un enjeu pour l'enseignant (Douady, 1994). Dans le cas contraire, l'enseignant se limitera à " proposer aux élèves d'exécuter des tâches, tâches qui sont parcellisées en sous tâches plus élémentaires algorithmisées selon les besoins des élèves ". Les conséquences d'un tel choix sont fort négatives : le sens et la valeur de l'activité mathématique sont sacrifiés, " la mémoire est de plus en plus sollicitée mais avec peu de possibilité de la structurer ".
- L'enseignant doit avoir à cœur l'apprentissage des élèves. Ses choix didactiques et pédagogiques doivent être pensés pour un apprentissage plein et durable sur plusieurs années. Les pratiques doivent englober des processus aussi bien que des contenus (autorégulation, métacognition) (Douady, 1994).
- L'enseignant doit faire attention à ne pas transmettre le savoir comme vérité : c'est normal pour un mathématicien de ne pas avoir une solution immédiate. L'enseignant doit apprendre aux élèves l'enjeu de la réflexion et du questionnement. Les erreurs doivent être acceptées comme des passages obligés pour apprendre. L'enseignant doit montrer

clairement aux élèves où les efforts doivent être entrepris dans sa discipline. C'est la vision socioconstructiviste inspirée par les travaux de Piaget et Vygotski.

- L'élève doit accepter de s'engager dans un rôle d'acteur et ne doit pas se réfugier dans l'unique rôle d'exécutant (Douady, 1994). L'enseignant peut mettre en place le *jeu de la dévolution* (Brousseau, 1990) pour responsabiliser l'élève : l'élève en situation d'apprentissage a-didactique doit faire des choix, en tester les effets, les contrôler, éventuellement revenir sur ses choix pour les modifier. Les conséquences d'un tel choix sont positives : l'expérience améliore l'estime que l'élève a en soi-même et dans ses capacités ; l'élève se rend compte du sens de l'activité, un sens qui n'est plus seulement scolaire, mais aussi social et culturel.
- L'élève doit construire le sens des notions mathématiques. Le sens peut être sémantique ou syntaxique (Douady, 1994). L'élève donne un sens sémantique aux concepts quand il les considère comme outils pour résoudre des problèmes. L'élève donne un sens syntaxique aux concepts quand il les considère comme objets en soi-même, éléments d'un corpus scientifiquement et socialement reconnu. Afin que l'élève puisse construire ce double sens, il faut faire un double travail de contextualisation et de décontextualisation : décontextualiser pour capitaliser le savoir (définitions, théorèmes, concepts abstraits) et contextualiser pour élargir le sens à travers le traitement des problèmes.
- L'enseignant doit faire attention à montrer l'enjeu de l'activité: la tâche n'est qu'un moyen pour accéder au savoir. Il ne doit pas se montrer trop soucieux " du respect formel des consignes de travail par les élèves " mais il doit se montrer soucieux plutôt de leur activité de pensée (Bautier, Charlot & Rochex, 1993). Cela aussi fait partie de la décontextualisation : donner du sens au savoir en tant que tel et non pas par référence à une situation.

2.2 L'introduction de l'histoire des mathématiques en classe : les pour et les contre

Quelles sont les limites que les auteurs voient dans l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe ?

Fried (2001) voit le risque que l'histoire ne soit pas prise au sérieux : très souvent, introduire l'histoire en classe signifie raconter des anecdotes ou lire les "capsules" historiques (courts résumés historiques) présentes sur les supports de cours de mathématiques. Fried met en relief

aussi le risque d'anachronisme : il est probable que les lectures de l'histoire soient contaminées par le présent et par le contenu mathématique moderne enseigné.
Les auteurs se demandent : " l'histoire et les mathématiques sont-elles conciliables ? ".

Quelles sont les limites et les difficultés que les enseignants invoquent pour ne pas introduire l'histoire des mathématiques en classe ?

- Les difficultés liées à la planification : " les programmes sont déjà assez chargés, on n'a pas le temps ".
- Le manque de pertinence : " l'histoire, ce n'est pas vraiment des mathématiques ", " il faut regarder en avant à l'avenir, c'est ridicule de regarder en arrière ".
- Le manque d'efficacité : " on risque de compliquer davantage la matière ", " les textes historiques sont compliqués à lire ", " les élèves n'aiment pas l'histoire en général ".
- Les difficultés liées à l'implémentation en classe : les enseignants se plaignent du manque de ressources et de formations, ils disent que c'est difficile d'évaluer les élèves sur leurs "compétences historiques".

Toutes ces raisons avancées par les enseignants sont répertoriées dans l'ouvrage de Siu (2007), lequel ajoute une dernière raison pour ne pas introduire l'histoire des mathématiques en classe : " Existe-t-il de véritables évidences empiriques montrant un meilleur apprentissage chez les étudiants lorsque l'histoire des mathématiques est introduite dans la classe ? " Cette question demeure encore ouverte.

Bien qu'il n'existe pas la preuve scientifique de l'efficacité d'introduire l'histoire des mathématiques en classe, de nombreux chercheurs ont dressé des listes de bénéfices.
L'histoire des mathématiques peut être utilisée par chercheurs, enseignants et élèves pour mieux comprendre les mathématiques ou pour les comprendre différemment.

D'après Barbin (1997a), l'histoire des mathématiques a une fonction dépaysante, vicariante et culturelle.
Elle permet à enseignants et élèves de comprendre les mathématiques comme une activité qui se déroule non seulement sur les bancs de l'école mais aussi à l'extérieur de l'école (fonction *vicariante)*. Les élèves peuvent contribuer à l'évolution de la société et des mathématiques et devenir fiers d'eux-mêmes (Charbonneau & Percival, 2003).

Elle rappelle aux élèves que les concepts mathématiques n'étaient pas déjà là mais qu'ils ont été inventés (fonction *dépaysante).* Il est normal que la compréhension des concepts exige beaucoup d'efforts, exactement comme la construction des concepts et la résolution des problèmes ont demandé l'effort de plusieurs mathématiciens pendant plusieurs milliers d'années (Charbonneau & Percival, 2003).
" Elle invite à situer la production mathématique dans la culture scientifique et technique d'une époque, dans l'histoire des idées et des sociétés, à étudier l'histoire de l'enseignement avec des préoccupations qui dépassent le cadre disciplinaire " (Barbin, 1997a) (fonction *culturelle).* Les concepts mathématiques naissent et évoluent pour résoudre les problématiques humaines.

En 2012, Barbin ajoute la fonction *épistémologique* de l'histoire.
L'histoire aide à comprendre pourquoi les concepts actuels sont faits comme cela ou pourquoi on utilise une certaine méthode plutôt qu'une autre pour résoudre des problèmes ou pour démontrer des propriétés. " Une des principales hypothèses [...] est bien celle qui dit que la signification d'un concept n'est pas totalement déterminée par sa définition actuelle mais elle est une résultante de l'histoire du concept et de ses diverses applications aussi bien dans le passé que dans le présent. On doit donc étudier l'histoire d'un concept pour pouvoir déterminer les conditions de sa compréhension, i.e. pour en élaborer une analyse épistémologique. " (Sierpinska, 1991, p. 85-86). La discussion fait partie de l'activité mathématique. D'après Charbonneau (2002) " Ainsi, l'on sait que l'on peut discuter les mathématiques ou que l'on doit discuter de mathématiques, car c'est comme cela qu'elles ont évolué. En fin de compte, sans discussion et droit à l'erreur, pas de mathématiques. "

L'histoire des mathématiques a une fonction d'*identification des obstacles épistémologiques*.
Barbin (1997b) souligne que l'histoire des mathématiques est un outil fondamental pour le chercheur en didactique qui, selon Guy Brousseau (1988), doit " a) trouver les erreurs récurrentes, montrer qu'elles se regroupent autour de conceptions, b) trouver des obstacles dans l'histoire des mathématiques, c) confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage et établir leur caractère épistémologique ". D'après Sierpinska (1991) " c'est parce que nous connaissons l'histoire que nous voyons plus, que nous comprenons plus de ce que les élèves font ou disent ". Cette fonction de l'histoire est importante pour contraster la vision que l'enseignant a de l'erreur : l'enseignant voit souvent dans l'erreur son origine

psychologique et il ne voit pas l'erreur comme faisant partie de l'objet de savoir (Astolfi, 2008).

L'histoire des mathématiques a une fonction de *développement de l'interdisciplinarité*. Les mathématiques vivantes de l'histoire sont un prétexte pour établir des ponts avec les autres disciplines (Charbonneau & Percival, 2003).

Barbin (1997a) signale encore que l'histoire peut résoudre certaines préoccupations didactiques et pédagogiques.
L'histoire peut être utilisée pour entamer une réflexion en profondeur sur les contenus enseignés et les programmes. Le savoir ne doit pas être abrégé, réduit à un minimum basique et simple, mais doit être *élémenté* à travers des mises en bouches efficaces, qui répondent aux questions vives des élèves et qui suscitent la curiosité pour le savoir (Astolfi, 2008).
Une bonne connaissance de l'histoire peut aider l'enseignant à répondre aux questions des élèves " À quoi cela sert-il ? ", " Pourquoi fait-on comme cela ? ".

Jankvist (2009), un chercheur danois, propose une classification des fonctions de l'histoire des mathématiques: l'histoire perçue comme un *outil*, pour motiver et intéresser les élèves, pour les aider dans l'apprentissage d'un concept et l'histoire perçue comme un *objectif en soi* car on apprend ce que sont les mathématiques, on leur donne du sens, on montre leurs évolutions constantes dans le temps et l'espace, on développe des réflexions métamathématiques.

2.3 Les "comment" : scenarios d'introduction de l'histoire des mathématiques en classe

Quels sont les différents scenarios d'introduction de l'histoire des mathématiques en classe ? Et comment les choisir ?

Quelle histoire ? Quels contenus ?
D'après Barbin (1997a), on peut envisager l'histoire des mathématiciens, l'histoire des savoirs mathématiques ou encore l'histoire des principes et des méthodes mathématiques.
L'histoire d'un mathématicien doit être située dans le temps et dans l'espace. Le mathématicien travaille à l'intérieur d'une communauté scientifique, qui se situe à l'intérieur

d'une époque historique et d'une région géographique. Ainsi les mathématiques s'humanisent parce que liées aux hommes qui les ont créées.

L'histoire des savoirs mathématiques est liée aux problèmes et aux problématiques de l'époque. Ce sont les problématiques qui déclenchent les idées qui à leur tour déclenchent la construction des savoirs. Ainsi les outils mathématiques et la façon dont ils sont faits prennent sens. Les enseignants des mathématiques peuvent collaborer avec les enseignants d'autres disciplines pour créer une culture interdisciplinaire à l'école.

L'évolution des principes mathématiques a eu un parcours lent et difficile: les idées de rigueur, d'évidence ou de démonstration ont changé au cours de l'histoire, suite à des débats et des controverses assez marqués. Ainsi l'élève comprend qu'on peut discuter les mathématiques.

Comment ? Quelles activités ?

D'après Barbin (1997a), l'histoire peut être utilisée d'une manière implicite ou explicite. L'enseignant pourrait utiliser l'histoire d'une manière implicite, pour concevoir son enseignement et pour faire une réflexion épistémologique sans l'expliciter aux élèves.

En ce qui concerne la manière explicite, Charbonneau (cours MAT6221 à l'UQAM, université du Québec) envisage treize types d'activités différentes, que l'enseignant peut utiliser soit de manière isolée, soit ensemble.

1. Capsule historique (anecdote ou court résumé historique)
2. Projet de recherche (recherche personnelle de l'élève sur un sujet historique)
3. Utilisation de sources primaires (images et textes originaux, lecture et interprétation)
4. Feuille de travail (exercices classiques, dans lesquels l'histoire est incluse)
5. Séquence historique (ensemble de deux à quatre périodes dédiées à un même sujet)
6. Tiré parti des erreurs, des conceptions alternatives, des changements de perspective, etc.
7. Problèmes historiques (problèmes sans solution, problèmes célèbres non résolus, problèmes ayant des solutions surprenantes, problèmes qui ont mené au développement d'un domaine des mathématiques, problèmes de nature récréative)
8. Instruments de mesure (utiliser la “règle à calculer”, calculer les distances avec un bâton et des miroirs ou avec un piquet et des cordeaux, mesurer les angles avec le graphomètre ou le sextant)
9. Activités mathématiques à caractère expérimental (activités qui font plonger les élèves dans une époque historique : l'élève doit résoudre les problèmes en ayant à disposition seulement les outils de l'époque)

10. Pièce de théâtre (exemple : la pièce de théâtre “Le sorcier matheux”)
11. Films et autres moyens visuels (exemple : les émissions de “C mathématiques”)
12. Activités à l’extérieur (visite d’un musée scientifique)
13. Activités faisant usage du web (plusieurs sites internet intéressants)

Jankvist (2009) propose de regrouper les “comment” en trois types d’approches : l’*approche anecdotique*, avec l’introduction de faits isolés, l’*approche par module d’apprentissage* avec des séquences d’enseignements basées sur l’histoire autour d’un thème mathématique précis avec des sources primaires ou secondaires et enfin l’*approche historique intégrée* se basant sur les développements historiques de l’objet mathématique étudié, pour l’élaboration d’une séquence complète d’enseignement.

Afin que le rapport au savoir de l’élève puisse progresser, nous pensons que l’enseignant doit bien choisir les activités, en pondérant avantages et désavantages. Après avoir lu plusieurs expériences en classe (publications de la commission inter-IREM d’épistémologie) et plusieurs articles théoriques, nous résumons, dans le tableau qui suit, les avantages et les désavantages des types d’activité les plus utilisés.

Activité	Objectifs / Avantages	Désavantages / Risques
Anecdotes / Capsules historiques / Exposés	Humanise les maths / Peu de temps requis en classe	Histoire non prise au sérieux / Il faut faire attention aux imprécisions historiques / Elève passif
Sources secondaires (lectures sur l’histoire des mathématiques)	Change la représentation que chacun a des maths : maths comme objet de recherches, de controverses, d’erreurs et de tâtonnements	Elève passif
Sources primaires (Lecture/Interprétation)	Contact direct avec le passé / Histoire plus concrète / Etonnement de l’élève	Difficulté linguistique pour l’élève / Difficulté à ses procurer les sources
Activité expérimentale (problème à résoudre avec les outils du passé et du présent)	Explique le sens et l’utilité d’un outil mathématique / Effort intellectuel élevé / Elève actif	Attention à l’habillage de la tâche
Séquence historique (Evolution d’un sujet dans l’histoire: 3/4 périodes)	Activité culturelle complète / Explique le sens et l’utilité d’un outil mathématique / Effort intellectuel élevé / Elève actif	Beaucoup de temps requis en classe / Beaucoup de temps requis de préparation

Les séquences historiques sont difficilement réalisables étant donné les plans d'études très chargés. On pourrait penser les réaliser dans un gymnase pour les options spécifiques maths-physique.

Il est à noter qu'il est possible de jumeler certaines activités afin d'enrichir l'enseignement et d'attirer davantage l'intérêt des élèves. Par exemple, l'enseignant pourrait proposer un exposé historique pour introduire un thème suivi par une activité expérimentale.

Quand ? A quel moment de la séquence d'apprentissage ?

On peut utiliser l'histoire au début de la séquence d'apprentissage, pour introduire un nouveau sujet (Barbin, 1997a) : l'enseignant propose à l'élève une problématique du passé qui ne peut pas être résolue avec un outil déjà connu et, par conséquent, un nouvel outil doit être introduit.

Autrement, on peut utiliser l'histoire à la fin de la séquence d'apprentissage, pour consolider un sujet qui vient d'être enseigné (Barbin, 1997a) : l'enseignant propose à l'élève une problématique du passé et lui demande de la résoudre de deux façons différentes, avec le nouvel outil ou sans le nouvel outil appris. L'élève se rend compte de l'efficacité et de la puissance du nouvel outil appris.

Si l'enseignant veut organiser une séance historique, comment doit-il choisir parmi les différents scenarios d'introduction de l'histoire des mathématiques ?

D'après Perrault (2012), l'enseignant doit d'abord se questionner sur le bénéfice attendu, le "pourquoi" (voir section 2.2) : il pourrait être indiqué dans le plan d'étude ou il pourrait être dicté par une exigence née sur le terrain.

Une fois défini le "pourquoi", il doit s'interroger sur le scenario le plus efficace pour atteindre l'objectif, c'est à dire choisir quelle histoire raconter, comment et quand.

3. Méthodologie

Ce chapitre présente les choix méthodologiques qui ont été faits pour mener notre recherche. D'abord nous présentons la séance historique réalisée en classe et ensuite nous présentons le questionnaire distribué aux élèves à la fin de la séance. L'analyse des réponses au questionnaire, l'analyse de la séance et les apports théoriques seront enfin utilisés dans le chapitre suivant pour répondre à la question de notre mémoire.

3.1 Séance historique

Nous avons réalisé la séance historique dans une classe de maturité professionnelle technique post CFC, constituée par 15 élèves âgés de 20 à 24 ans.
Les niveaux en mathématiques des élèves sont déjà très différents au début de l'année scolaire. Deux tiers de la classe ont des lacunes dans le calcul arithmétique et littéral. Nous pouvons parier que les écarts entre les élèves se creuseront toujours plus, parce que des difficultés nouvelles viendront s'ajouter à celles qui résultent de connaissances antérieures mal assimilées.
Les perspectives futures des élèves sont similaires : ils se destinent presque tous à continuer leurs études dans des domaines techniques dans les hautes écoles spécialisées.
Les élèves ont dix périodes de mathématiques par semaine. Le rythme des leçons est rapide par rapport aux capacités des élèves et il ne peut pas être ralenti à cause du plan d'études chargé et de la proximité de l'examen de maturité, prévu à fin janvier.

Lors des premières leçons dédiées à l'arithmétique, en septembre, nous avons présenté un exposé historique sur la naissance du zéro et un exposé sur les pythagoriciens et la découverte de la racine de deux, d'une durée d'environ quinze minutes chacun.
La modalité d'enseignement était l'exposé oral, en utilisant le tableau noir pour annoter quelques faits et les dates relatives. Certains élèves se sont montrés curieux, ont posé des questions et ont pris des notes.

La séance historique présentée dans notre mémoire s'est déroulée durant le mois d'octobre.
Le thème à aborder était les problèmes et leur modélisation mathématique à travers l'histoire.
La séance s'insérait dans l'alignement curriculaire : le chapitre sur les équations et sur la modélisation des problèmes venait d'être terminé.

D'abord, pourquoi avons-nous choisi de mettre en place une séance historique?
Si le plan d'étude ne le demandait pas, nous avons pris cette décision pour obtenir certains objectifs. L'objectif général de la séance était de contribuer à faire évoluer le rapport aux

savoirs des élèves. Les objectifs spécifiques étaient: faire comprendre la valeur et l'efficacité de deux outils mathématiques, les équations et le symbolisme, montrer l'évolution de ces deux outils dans l'espace et le temps, montrer le travail de recherche des mathématiciens.

Comment avons-nous réalisé la séance historique ?
Nous avons décidé d'organiser une période de séance historique, constituée par un exposé court (quinze minutes) et une activité de découverte plus longue (trente minutes).

Pour raconter aux élèves la naissance et l'évolution des problèmes et des équations, nous nous sommes basés sur l'article d'Elisabeth Busser (2007).
Nous avons organisé l'exposé d'une façon interactive, en proposant des questions assez intuitives pour faire accrocher les élèves et pour garder leur attention: " Est-ce que ce sont les problèmes qui sont nés d'abord ou bien les équations pour les résoudre ? ", " A votre avis, quand les problèmes sont-ils nés ? Et les équations ? "
Nous avons choisi d'annoter les informations au tableau noir en utilisant la méthode visuelle des cartes conceptuelles et en créant la carte pas à pas avec les élèves (Annexe 1), pour leur permettre d'organiser les connaissances dans leur mémoire.
Nous avons insisté sur le fait qu'il a fallu un travail de plusieurs siècles et de différentes civilisations humaines pour "inventer" les équations, équations qui, aujourd'hui, nous semblent si intuitives.
Travail, effort, temps, coopération, patience sont les ingrédients qui ont permis aux mathématiciens de créer les mathématiques au cours de l'histoire; travail, effort, temps, coopération, patience sont les ingrédients qui permettent aujourd'hui aux élèves d'aborder les mathématiques avec succès.
Et encore nous avons ajouté d'autres ingrédients comme les traductions d'une langue à l'autre, les voyages et les aventures des mathématiciens. Notre but était de faire évoluer l'image que les élèves avaient des mathématiques.

Après l'exposé, nous avons organisé une activité portant sur la méthode de la " fausse position " (Annexe 2). Nous nous sommes basés sur les articles d'Elisabeth Busser (2007) et de Jean-Paul Friedelmeyer (1993).
La méthode de la fausse position a été utilisée d'abord dans l'Egypte antique et jusqu'à la Renaissance. Après la Renaissance, cette méthode a disparu, substituée par les équations. La méthode de la fausse position permettait de résoudre un problème se traduisant par une

équation, sans utiliser les équations et en n'utilisant aucun symbolisme. Les élèves ne connaissaient pas cette méthode.
Nous avons donné une première feuille avec les consignes. Les élèves devaient résoudre le problème 26 du papyrus Rhind d'abord avec les équations.

On résout le problème 26 du papyrus Rhind avec l'algèbre actuelle :

Une quantité ajoutée à son quart donne 15.
Quelle est la quantité ?

Ensuite, ils devaient trouver une méthode de résolution pour le même problème, qui n'utilisait pas les équations, mais seulement l'arithmétique. Ils travaillaient par deux. C'est la méthode de la fausse position que les élèves devaient trouver.

On essaie de résoudre le même problème en utilisant uniquement l'arithmétique (opérations sur les nombres), sans inconnues et sans équations:

Le but cherché était de dépayser les élèves. Ne pouvant pas utiliser les équations, les élèves se sentent impuissants. Et c'est justement là qu'ils se rendent compte de la valeur et de la puissance des outils appris. L'outil change notre façon de penser et de regarder le monde (selon l'approche socioconstructiviste de Vygotski).

Ensuite nous avons donné une deuxième feuille avec les résolutions des deux consignes, la résolution avec les équations et l'autre avec la méthode de la fausse position. Nous avons fait lire cette deuxième résolution à haute voix à un élève. Avant de chercher à comprendre la résolution, nous avons demandé aux élèves leurs impressions et leurs remarques.

On essaie de comprendre la résolution, dite de la fausse position, du scribe Ahmès :

Calcule à partir de 4, le total est 5.
Calcule à partir de 5 pour trouver 15.
Il advient 3.
Multiplie 3 par 4. Il advient 12.
Le total est 15.
La quantité est 12. Son quart est 3. Le total est 15.

Le but cherché était encore une fois de dépayser les élèves. En n'ayant pas les symboles à disposition, les mathématiciens utilisaient les mots pour "faire" les mathématiques. On parle

de “mathématiques rhétoriques”, par contraste avec les “mathématiques symboliques” actuelles. Et c’est justement là que les élèves se rendent compte de la valeur et de la puissance du langage symbolique : il permet d’exprimer les concepts d’une façon claire, parlante et synthétique.
Ensuite nous avons guidé les élèves pas à pas à la compréhension de la solution donnée, en traduisant chaque phrase du français au langage symbolique et en expliquant les concepts à la base. L’effort de compréhension requis aux élèves est remarquable.

Enfin nous avons demandé aux élèves de résoudre un autre problème avec la même méthode et nous avons donné aux élèves une troisième feuille avec les solutions et les explications supplémentaires.

3.2 Questionnaire

Pendant la période suivant la séance, nous avons distribué aux élèves un questionnaire afin de connaître leur impression sur l’activité faite et leur opinion sur l’introduction des séances historiques en général.
Dans cette section, nous présentons et justifions les questions choisies et leur pertinence par rapport à l’objectif de recherche.

1) Est-ce que vous avez apprécié l’activité historique ? ………………………………………
Nous cherchons à savoir si ce type d’activité intéresse l’élève. Nous avons laissé l’espace libre afin que l’élève puisse exprimer la gradation de son appréciation.

2) Pour quelles raisons, n’avez-vous pas apprécié l’activité?

- *c’est ennuyant* ....☐
- *c’est de compréhension difficile* ....☐
- *c’est une perte de temps* ....☐
- *autres raisons* ………………………………………………………………..

Nous cherchons à savoir la raison pour laquelle l’élève n’a pas apprécié l’activité. Cela nous sert pour préparer la prochaine séance historique.

3) Pour quelles raisons, avez-vous apprécié l'activité?

- *c'est utile pour mes études*.. ☐
- *c'est intéressant, passionnant, nourrissant pour ma culture* .... ☐
- *autres raisons* ………………………………………………………………….............

Nous cherchons à savoir si l'élève voit l'histoire comme outil ou comme objectif en soi.

4) A votre avis, pourquoi l'activité historique est utile pour vos études?

- *on comprend mieux les concepts et les méthodes actuels*.................................... ☐
- *on a une vision d'ensemble et on crée des liens logiques*.................................... ☐
- *autres raisons* .... ☐

5) A votre avis, pourquoi l'activité historique est intéressante et passionnante?

- *elle montre le sens et l'utilité des mathématiques* .... ☐
- *elle montre l'effort de la recherche mathématique*... ☐
- *elle humanise les mathématiques* .... ☐
- *autres raisons* .... ☐

Avec les questions 4 et 5, nous cherchons à savoir en détail les raisons de l'appréciation de l'élève.

6) L'histoire change-t-elle votre rapport aux mathématiques ?

- *non : je n'aime pas les maths et l'histoire ne m'intéresse pas* .... ☐
- *non : j'ai toujours aimé les maths* .... ☐
- *oui : je n'aime pas les maths, mais l'histoire m'aide à les apprécier* .... ☐
- *oui : j'aime les maths et je voudrais en approfondir l'histoire* .... ☐
- *autres raisons* .... ☐

Cette question nous semble la plus importante pour répondre à l'objectif de notre mémoire. A travers les quatre réponses alternatives nous cherchons à savoir quel est le rapport au savoir initial de l'élève et si l'introduction de l'histoire en classe peut le faire évoluer.

4. Analyse des résultats

Ce chapitre présente l'analyse de l'expérimentation. D'abord, le déroulement de la séance en classe est présenté. Ensuite, les réponses aux questionnaires sont présentées et analysées.

Enfin les résultats expérimentaux et le cadre théorique sont utilisés pour répondre aux questions de recherche.

4.1 Analyse de la séance

Pendant l'exposé historique, les élèves ont répondu à nos questions et ils en ont posées. Nous avons perçu l'intérêt des élèves.
Il nous semble important d'utiliser les cartes conceptuelles pour aider les élèves à visualiser et mémoriser les connaissances historiques. Nous pensons qu'on pourrait utiliser un vidéoprojecteur et un outil de présentation plutôt que le tableau noir, pour rendre plus dynamique la présentation des cartes conceptuelles.

L'activité expérimentale était constituée de plusieurs phases.
La première question posée aux élèves était de résoudre le problème 26 du Papyrus Rhind algébriquement avec mise en équation du problème.
Cette première phase a été réalisée assez facilement, puisque les élèves venaient de travailler sur la mise en équation des problèmes.
La deuxième question posée aux élèves était de résoudre le même problème arithmétiquement sans mise en équation. La méthode de résolution attendue des élèves était la méthode de la fausse position.
L'effort de raisonnement et de créativité demandé aux élèves était remarquable et le fait de pouvoir discuter avec le copain n'a pas beaucoup facilité le travail. La plupart des élèves sont arrivés à imaginer seulement une partie de la méthode de la fausse position : “ Si on ne peut pas utiliser les équations pour trouver la solution, on doit procéder par tentatives. Mais si on procède par tentatives, cela prends beaucoup de temps ”. Seul un élève est arrivé à imaginer la méthode au complet : “ Il faut procéder par tentatives et ensuite utiliser la proportionnalité ”.
La troisième phase prévoyait la lecture de la résolution originale du problème, sans symbolisme, écrite par le scribe Ahmès. Nous avons demandé aux élèves leurs remarques, nous avons traduit la résolution dans un langage symbolique et nous avons expliqué la résolution.
Les élèves, après les efforts peu fructueux pour construire la méthode de la fausse position, ont apprécié cette phase d'analyse de la méthode. Ils ont remarqué l'absence du symbolisme dans la solution : ils ont découvert que le symbolisme mathématique si détesté a beaucoup

d'avantages par rapport aux mathématiques rhétoriques. Ils ont remarqué que cette méthode est facile à comprendre (on procède par tentatives et on utilise la proportionnalité) mais elle est beaucoup moins efficace comparée aux équations.
La quatrième et dernière question posée aux élèves était de résoudre un autre problème avec la méthode de la fausse position qu'ils venaient d'apprendre.
Les élèves avaient déjà décroché ici, ils étaient fatigués et l'attention était diminuée.

Pour une prochaine fois, nous proposons d'éliminer cette quatrième question. En ce qui concerne la phase de construction de la méthode de la fausse position, nous proposons de mieux guider les élèves vers la découverte de cette méthode, à travers un questionnement adapté. Une alternative serait d'éliminer complétement cette phase de construction. Le risque de ce deuxième choix est que les élèves ne comprennent plus la résolution, qu'ils pensent qu'elle marche par hasard et qu'elle ne peut pas fonctionner de façon générale.

4.2 Analyse des réponses aux questionnaires

Tous les quinze élèves ont répondu au questionnaire, certains parmi eux ont ajouté des commentaires. En particulier, ils ont presque tous ajouté, dans la question six, s'ils aiment l'histoire ou s'ils ne l'aiment pas, bien que cela n'était pas demandé. Cela démontre que le rapport au savoir pour ces deux disciplines, les mathématiques et l'histoire, est très enraciné.

Sur quinze élèves, onze ont apprécié la séance historique, c'est à dire 73% des élèves.

Les quatre élèves (27%) qui n'ont pas apprécié la séance ont invoqué l'ennui et la perte de temps. Un élève écrit : “ Cela peut être intéressant mais il me semble que le programme est suffisamment chargé ”. Trois de ces élèves aiment les mathématiques mais n'aiment pas l'histoire. Un élève n'aime ni les mathématiques ni l'histoire.

Les autres onze élèves (73%) ont affirmé avoir apprécié la séance parce que “ c'est intéressant, passionnant, nourrissant pour ma culture ”. Sauf un élève, les autres n'ont pas relevé l'utilité de la séance pour l'apprentissage.
Parmi ces onze élèves, sept affirment qu'ils aiment déjà les mathématiques et que les séances historiques ne changent pas leur rapport au savoir. Les autres quatre (27%) déclarent que leur

rapport au savoir mathématique peut changer : deux affirment qu'ils n'aiment pas les mathématiques mais qu'ils aiment l'histoire et que les séances historiques les aident à apprécier les mathématiques aussi ; les deux restants affirment qu'ils aiment les mathématiques et l'histoire et que les séances historiques améliorent davantage leur rapport au savoir mathématique. Un élève écrit : " C'est presque dommage qu'on ne puisse pas aller encore un peu plus en profondeur ! ".

Pour résumer :

- 27% des élèves n'aiment pas l'histoire et préfèrent faire des activités classiques qui portent sur le plan d'études.
- 73% des élèves ont reconnu l'intérêt des séances historiques, parce qu'elles éclairent sur le sens et l'utilité des mathématiques, montrent l'effort de la recherche et humanisent les mathématiques.
- 27% des élèves ont reconnu non seulement l'intérêt des séances historiques mais ils ont aussi reconnu que l'activité historique leur a fait apprécier davantage les mathématiques. Ces élèves ont une caractéristique commune : ils aiment l'histoire.

À la suite de l'analyse des résultats, nous constatons que certains de nos choix n'étaient pas les meilleurs. Une seule séance historique dans une seule classe de quinze élèves ne peut pas être suffisante pour répondre à la question de recherche. Nos choix étaient dictés par le manque de temps et de possibilités.

Les questions posées dans le questionnaire ne nous permettent pas de répondre clairement à nos questions de recherche. Des entrevues individualisées auraient sûrement permis de préciser la pensée des élèves. Nous aurions alors pu faire une analyse plus en profondeur.

Notre méthodologie ne nous permet pas de déterminer si le changement du rapport au savoir est plus ou moins permanent. Il aurait fallu interviewer à nouveau ces élèves quelques semaines plus tard pour déterminer si l'activité a entrainé des changements temporaires ou un peu plus permanents.

4.3 Conclusions relatives aux questions de recherche

Après avoir posé le cadre théorique et avoir analysé les données expérimentales, nous tentons de répondre aux questions de notre recherche.

D’abord, nous répondons à la question principale : “ Est-ce que l’introduction de l’histoire des mathématiques en classe peut faire évoluer favorablement le rapport au savoir mathématique ? ”

Dans le cadre théorique, nous avons répertorié six *expériences favorables* que l’élève doit vivre afin que son rapport au savoir puisse évoluer (voir section 2.1). Maintenant nous vérifions si l’introduction de l’histoire en classe peut faire vivre à l’élève ces expériences favorables.

Il nous semble évident que l’introduction de l’histoire dans la classe est importante, même fondamentale, pour faire vivre à l’élève deux parmi les six expériences favorables : construire le sens des notions mathématiques et comprendre les enjeux du savoir mathématique.

Pour faire vivre l’expérience de la construction du sens sémantique d’un concept, l’enseignant peut proposer aux élèves une problématique qui a déterminé l’émergence du concept : par exemple, les logarithmes sont nés et ont évolué pour résoudre la problématique de rendre plus simples les calculs astronomiques.

Pour faire vivre l’expérience de la construction du sens syntaxique, l’enseignant peut montrer comment les concepts nés pour résoudre une problématique ont ensuite constitué un corpus à part entière fait de définitions et théorèmes. Par exemple, le calcul différentiel, né pour résoudre des problèmes de calcul d’aires et des problèmes de physique, a été réorganisé par étapes successives grâce au travail de plusieurs mathématiciens (Archimède, Cavalieri, Descartes, Fermat, Newton, Leibniz, Cauchy, Weierstrass, etc.).

Pour faire vivre l’expérience de comprendre les enjeux du savoir mathématique, l’enseignant peut montrer aux élèves que les concepts mathématiques sont nés et ont évolué dans les siècles à travers le questionnement, l’effort, les controverses, la coopération, les tâtonnements (par exemple la naissance du calcul différentiel avec la controverse entre Newton et Leibnitz).

Nous pensons que l’introduction de l’histoire peut faire vivre à l’élève une troisième expérience favorable : l’expérience d’être acteur de son apprentissage. L’enseignant doit choisir une activité historique expérimentale pour que l’élève puisse construire le savoir : par exemple, utiliser les tables logarithmiques pour faire construire aux élèves les règles de calcul des logarithmes.

Une autre expérience favorable est que le savoir doit être un enjeu pour l’enseignant. Nous pensons que le fait que le savoir est un enjeu pour l’enseignant n’est pas donné. L’étude de l’histoire peut faire évoluer le rapport au savoir mathématique de l’enseignant (Barbin, 1997a), parce que l’histoire lui donne une occasion pour “penser les mathématiques”. L’enseignant ainsi motivé s’engagera pour proposer des séances intéressantes et variées. Une

formation initiale et continue sur l'histoire des mathématiques est souhaitable pour l'enseignant (Barbin, 1997a).
En ce qui concerne les deux dernières expériences favorables, " l'apprentissage des élèves est un enjeu pour l'enseignant " et la " décontextualisation de la tâche ", il nous semble évident que l'introduction de l'histoire n'a pas d'impact et que l'enseignant revêt un rôle fondamental.

En conclusion, d'après les apports théoriques, l'introduction de l'histoire peut faire vivre à l'élève quatre parmi les six expériences favorables à la progression de son rapport au savoir. En outre, d'après notre expérience dans la classe de maturité professionnelle, 73% des élèves ont perçu les fonctions de l'histoire et ont manifesté leur intérêt pour les séances historiques et 27% des élèves ont déclaré que l'histoire les aide à apprécier davantage les mathématiques.

Ensuite, nous tentons de répondre à la deuxième question: " Quels sont les scenarios les plus efficaces ? ".
Ces scenarios doivent faire évoluer le rapport au savoir des élèves et ils doivent aussi tenir compte des soucis des élèves et des difficultés avancées par les enseignants (voir section 2.2).
Il nous semble convenable que la séance historique soit courte, une période ou deux au maximum: ce choix veut répondre aux difficultés liées à la planification, " les programmes sont déjà trop chargés ", et au souci de certains élèves, " c'est ennuyant, c'est une perte de temps ".
Le choix des contenus dépend de l'objectif spécifique de la séance.
Pour choisir le type d'activité (exposé, activité, lecture, recherche, etc.), l'enseignant doit pondérer les avantages et les limites (voir section 2.3). Il nous semble évident que l'exposé ou la lecture d'un texte n'est pas suffisant pour faire évoluer le rapport au savoir des élèves, parce que l'élève reste passif. Il faut jumeler l'exposé ou la lecture à une activité expérimentale.
Nous donnons ici quelques indications à suivre pour la préparation d'un exposé historique et d'une activité expérimentale.
L'exposé doit remplir la fonction pédagogique de susciter l'intérêt auprès des élèves, de les dépayser et de les ouvrir à la culture. Un exposé peut aider l'élève à s'accrocher à un thème nouveau (par exemple, raconter l'histoire de la machine Enigma pour introduire la cryptographie). Nous pensons que l'exposé historique doit être synthétique et interactif. L'enseignant peut utiliser les cartes conceptuelles, une présentation ou une vidéo pour dynamiser l'exposé. Ces solutions répondent au souci de certains élèves : " c'est ennuyant ".

L'activité expérimentale doit remplir la fonction pédagogique de dépayser les élèves et de les motiver à faire un travail de recherche et de découverte. L'élève expérimente des outils mathématiques du passé et du présent, il en compare l'efficacité, il comprend la valeur et le sens des outils du présent. L'élève soumis à une activité inusuelle est amené à faire un effort intellectuel important, à se questionner, à collaborer avec ses copains. Nous pensons que l'activité expérimentale doit être d'accès facile et ses consignes doivent être claires. Ce choix veut répondre à la crainte du manque d'efficacité : " c'est plus difficile qu'une leçon traditionnelle ".

L'objectif final visé est pouvoir entendre l'élève s'exprimer comme cela : " j'ai compris pourquoi on étudie les maths ", " les maths sont vivantes, elles ont une âme et une histoire ", " les maths, c'est cool, elles ne sont pas qu'une succession de formules et de théorèmes " et encore " j'ai le droit de me tromper ", " je suis fier des résultats obtenus ".

Et si l'enseignant a bien choisi le scenario et a bien planifié sa séance historique, est-ce que les élèves répondront tous de la même manière à cette séance? Est-ce que leur rapport au savoir évoluera pour tous de la même manière ?
Suite à l'analyse des réponses au questionnaire, il nous semble que le rapport au savoir mathématique initial de l'élève et son rapport au savoir historique jouent un rôle important dans la réponse de l'élève à la séance et en conséquence dans l'évolution de son rapport au savoir mathématique. Dans le tableau qui suit nous résumons les différents impacts.

Rapport aux savoir mathématique initial	Rapport au savoir historique	Réponse des élèves à la séance	Impacts sur le rapport au savoir
Cheminement	Cheminement	C'est une perte de temps	Impact faible
Cheminement	Apprentissage	On apprend la nature et l'essence des maths	Impact élevé
Apprentissage	Cheminement	On comprend mieux les maths	Impact moyen
Apprentissage	Apprentissage	On apprend la nature et l'essence des maths	Impact élevé

L'impact de la séance historique semble plus fort sur les élèves qui ont un bon rapport au savoir historique.

Conclusions

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la place de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques; plus précisément, à la capacité de l'histoire à faire progresser le rapport au savoir mathématique des élèves de l'école post-obligatoire.

Les recherches de Bautier, Charlot & Rochez et de Develay (voir section 2.1) nous ont éclairé sur la notion de rapport au savoir et sur son importance pour l'apprentissage. Un rapport au savoir qui suit la *logique d'apprentissage* constitue un premier préalable pour apprendre. Un élève qui valorise les savoirs est plus prédisposé à apprendre qu'un élève qui les dévalorise.
Ensuite nous avons réfléchi sur les expériences que l'élève doit vivre afin que son rapport au savoir puisse progresser vers la logique d'apprentissage, en nous appuyant notamment sur les recherches de Douady et sur l'approche socioconstructiviste. Nous avons répertorié six expériences favorables (voir section 2.1): le rapport au savoir évoluera seulement si les deux acteurs principaux, l'enseignant et l'élève, s'investissent ensemble dans un même parcours, qui consiste dans la prise de conscience de la valeur du savoir et des apprentissages.

Nous avons analysé les pour et les contre de l'introduction de l'histoire des mathématiques en classe (voir section 2.2).
Pour analyser les contre, nous nous sommes appuyés sur les articles de Siu et de Fried. L'histoire est perçue comme un travail en plus pour enseignants et élèves et comme une perte de temps, sans bénéfice tangible pour la classe. Sans une formation spécifique pour les enseignants, il est fort probable que l'histoire ne soit pas prise au sérieux et qu'elle soit mal interprétée.
Pour analyser les avantages, nous nous sommes appuyés sur les articles de Barbin, Charbonneau & Percival, Sierpinska et Jankvist. L'histoire remplit de multiples fonctions: dépaysante, vicariante, culturelle, épistémologique, d'identification des obstacles épistémologiques et interdisciplinaire. L'histoire peut être perçue comme un outil, pour motiver, intéresser et aider les élèves à comprendre, ou comme un objectif en soi même, car elle éclaire la vraie nature des mathématiques.
Il n'existe pas encore des recherches empiriques qui démontrent l'efficacité ou la non efficacité de l'histoire des mathématiques en classe, à cause du cadre méthodologique utilisé par ces recherches, qui est considéré trop faible (voir section 1).

Nous avons analysé les scenarios d'introduction de l'histoire des mathématiques en classe, en nous appuyant sur les études de Barbin, Charbonneau et Jankvist (voir section 2.3). Plusieurs types de contenus et d'activités sont possibles. Pour construire sa séquence d'enseignement, l'enseignant doit s'interroger d'abord sur les "pourquoi", c'est à dire sur les objectifs visés par l'introduction de l'histoire des mathématiques en classe. Suivant les "pourquoi", l'enseignant peut ensuite choisir le "comment" (contenu, type d'activité). Il n'y a pas de "recettes miracles", mais certaines catégories de "comment" et de "pourquoi" s'agencent mieux que d'autres. Plusieurs publications sont à disposition des enseignants qui veulent préparer des séances historiques, notamment les publications de la commission inter-IREM d'épistémologie (voir section 1).

Pour répondre à la question de recherche, nous avons mis en place une séance historique dans une classe de maturité professionnelle technique (voir section 3.1). Le thème de la séance était les problèmes et leur modélisation à travers l'histoire. A travers cette séance historique nous visions à faire progresser le rapport au savoir des élèves et, plus spécifiquement, à faire comprendre le sens et la valeur des équations et du symbolisme, en utilisant les fonctions dépaysante, vicariante et culturelle de l'histoire.

Nous avons fait des propositions pour améliorer la séance historique, pour la rendre plus intéressante et accessible aux élèves (voir section 4.1): dynamiser l'exposé en utilisant des vidéos ou des présentations ; rendre plus facile la phase de construction de la méthode de la fausse position.

Suite à l'interprétation des réponses des élèves à un questionnaire dédié, nous avons pu tirer des conclusions sur l'expérimentation (voir section 4.2).

L'expérience a été jugée positivement par onze élèves sur quinze (73%). Ils ont vu des côtés des mathématiques souvent cachés: le côté culturel, le côté humain et le côté pratique, concrètement lié aux besoins de l'humanité. Parmi ces onze élèves, quatre élèves (27%) ont affirmé que l'histoire les a aidés a apprécier davantage les mathématiques et ces élèves sont ceux qui aiment l'histoire.

Nous avons souligné les limites de la méthodologie utilisée (voir section 4.2): une seule expérimentation dans une seule classe, certaines questions à améliorer ; nous avons proposé d'interviewer les élèves pour avoir davantage d'informations.

Enfin nous avons essayé de donner une réponse aux questions de recherche (voir section 4.3). Nous avons démontré que l'introduction de l'histoire en classe, grâce à ses multiples fonctions, permet à l'élève de vivre quatre parmi les six expériences favorables à l'évolution du rapport au savoir, les deux autres expériences dépendant uniquement de l'enseignant. Donc, sur la base de la théorie et de l'expérience en classe, nous pouvons conclure que l'introduction de l'histoire en classe peut faire évoluer favorablement le rapport au savoir des élèves, que la plupart des élèves sont intéressés par les séances historiques mais que l'impact sur le rapport au savoir mathématique sera plus important pour les élèves qui ont un bon rapport à l'histoire.

Nous avons donné des indications sur les scenarios les plus efficaces pour faire évoluer le rapport au savoir des élèves. Il ne suffit pas de faire un exposé (raconter des anecdotes, lire un texte) mais il est nécessaire de rendre les élèves actifs, en leur proposant des activités expérimentales. L'enseignant doit tenir compte des possibles inconvénients et chercher à les limiter : manque de temps, ennui, accès difficile à l'activité. Les fonctions de l'histoire doivent être bien perçues par les élèves afin que la séance soit efficace.

L'expérience en classe et les recherches théoriques nous encouragent à continuer de proposer l'histoire des mathématiques, dans le but de renouveler l'image que les élèves ont des mathématiques et dans l'espoir que les élèves adoptent des attitudes moins réfractaires et plus positives face à cette discipline.

Bibliographie

Astolfi, J.-P. (2008). *La saveur des savoirs. Discipline et plaisir d'apprendre*. Paris, France : presses universitaires de France

Bakker, A. (2004). Design research in statistics education—on symbolizing and computer tools Ph.D. Thesis, Freudenthal Institute, Utrecht University.

Barbin, E. (1997a). Histoire et enseignement des mathématiques: pourquoi? comment? Bulletin de l'AMQ 37(1), 20-25.

Barbin, E. (1997b). Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique. Repères-IREM, n. 27.

Barbin, E. (2012). L'histoire des mathématiques dans la formation. Une perspective historique (1975-2010). Actes du colloque EMF2012 (GT4, pp. 546–554).

Bautier, E. ; Charlot, B. & Rochex, J.-Y. (2000). Entre apprentissages et métier d'élève : le rapport au savoir, in : Van Zanten, A. (dir.). *L'école. L'état des savoirs*. Paris, La Découverte, p.179-188.

Bautier, E. ; Charlot, B. & Rochex, J.-Y. (1992). *École et savoir dans les banlieues et ailleurs*, Paris, Armand Colin.

Bautier, E. & Charlot, B. (1993, janvier). Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques. Repères-IREM, n. 10.

Brousseau, G. (1988). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Colloque international de Montréal, constructions des savoirs.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu: Dévolution. In Revue « Recherches en didactique des Mathématiques » Vol 9.3 .pp 309-336. (Actes de la Vème Ecole d'été de Didactique des mathématiques, Plestin les grèves). La pensée sauvage. Grenoble.

Busser, E. (2007). Ecrire les mathématiques, in : Busser, E. (dir.). *L'histoire des mathématiques de l'Antiquité à l'an Mil*. Tangente Hors-série n.30. Paris, Editions Pole, p. 98-103.

Charlot, B. (1997). Du rapport au savoir, Eléments pour une théorie, Anthropos.

Conférence inter cantonale de l'instruction publique de la Suisse Romande et du Tessin (CIIP). (2015-2016). Plan d'études romand-Maturité professionnelle (PER-MP)

Charbonneau, L. (2002). Histoire des mathématiques et enseignement des mathématiques au primaire. Instantanées Mathématiques 29(1), 21-36.

Charbonneau, L. & Percival, I. (2003). L'histoire des mathématiques en tant que levier pédagogique au primaire et au secondaire. *Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques, Actes, 2003 Annual Meeting*, Acadia university, May 30 – June 3, 2003, Edmonton : CMESG / GCEDM, 2004, p. 39-54.

Desrochers, J., Tremblay, K., Mercier, E. & Sassi, M. (2005). L'histoire dans l'enseignement des mathématiques. Présentation d'un outil pédagogique.

Dematté, A. (2006). *Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la scuola secondaria di primo e secondo grado. Volume per l'insegnante*. Editore Provincia Autonoma di Trento. IPRASE del Trentino.

Dematté, A. (2007). A Questionnaire for Discussing the 'Strong' Role of the History of Mathematics in the Classroom. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, Proceedings HPM2004 & ESU4 (revised edition) (pp. 218-228). Uppsala: Uppsala Universitet.

Direction générale de l'enseignement postobligatoire (DGEP). (2015/2016). Ecole de maturité. Répartition horaire des disciplines, plan d'études et listes des examens écrits et oraux pour l'année scolaire 2015-2016 (PER-MAT)

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. Une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde. *IREM Paris-VII* In *Repères IREM n° 15, avril 1994, Topiques Éditions*

Fried, M. N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? Science & Education, 10, 391-408.

Friedelmeyer, J-P. (1993). Recherche Inconnue désespérément, in Commission inter-IREM *Histoire de problèmes histoire des mathématiques*. Edition ellipses p. 299-326.

Guillemette, D. (2011). L'histoire dans l'enseignement des mathématiques : sur la méthodologie de recherche. Petit x n.86, 5-26.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, vol 71, no. 3, pp. 235-261

Jankvist, U. T. (2010). An empirical study of using history as a 'goal'. Educational Studies in Mathematics, 74(1), 53-74.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (MELS). (2015). Programme de formation de l'école québécoise: Enseignement secondaire. Québec: Les publications du Québec.

Perrault, M. (2012). Ancrer l'enseignement des mathématiques dans une perspective historique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012 (SPE1, pp. 1649–1661).

Piaget, J. (1935). *Psychologie et pédagogie*, Denoël / Gonthier, (rééd. Gallimard, coll. « Folio Essais », 1988).

PISA, 2003. L'apprentissage des élèves : attitudes, engagement et stratégies. Apprendre aujourd'hui, réussir demain – Premiers résultats de PISA 2003 © OCDE 2004

PISA, 2015. Quelle confiance les élèves ont-ils en leur capacité à résoudre des problèmes de mathématiques ? *PISA à la loupe* – 2015/10 (octobre) © OCDE 2015

Schubring, G. (2007). Ontogeny and phylogeny—categories for cognitive development. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & Tzanakis, Proceedings HPM2004 & ESU4 (revised edition) (pp. 329-339). Uppsala: Uppsala Universitet.

Sierpinska, A. (1991). Quelques idées sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques liée à la notion d'obstacle épistémologique. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 7, pp. 85-86. Institut Français de Thessalonique.

Siu, M. (2000). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. In V. Katz, Using history to teach mathematics—an international perspective, MAA notes (Vol. 51, pp. 3–9). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

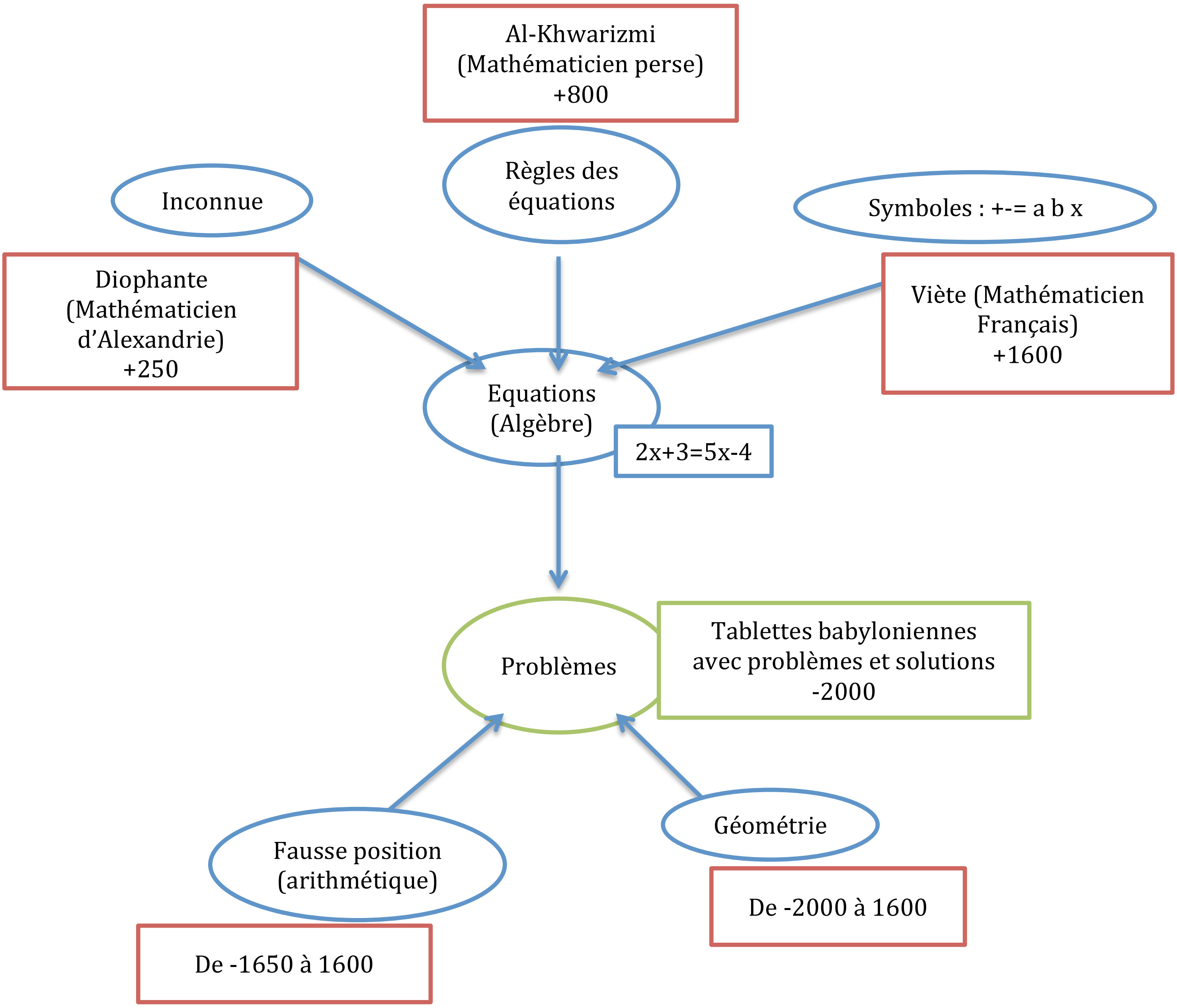
Siu, M. (2007). "No, I don't use history of mathematics in my class. Why?". In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, Proceedings HPM2004 &ESU4 (revised edition) (pp. 368-382). Uppsala: Uppsala Universitet.

Smestad, B. (2007). History of mathematics in the TIMSS 1999 video study. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, Proceedings HPM2004 & ESU4 (revised edition) (pp. 278-283). Uppsala: Uppsala Universitet.

Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen, History in mathematics education-The ICMI Study (pp. 201-241). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vygotski, L. S. (1934). *Pensée et langage*, (trad. franç., Éditions sociales / Messidor, 1985).

Annexe 1 : Exposé historique



Annexe 2 : Activité historique

En Egypte, l'algèbre par les fausses positions (1/3)

Le **papyrus Rhind** est un célèbre papyrus datant environs de -1650, découvert sur le site de la ville de Thèbes.

Il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie e d'arpentage, sur plus de 5 mètres de longueur et 32 centimètres de large.

Enoncé du problème 26 du papyrus Rhind :

Une quantité ajoutée à son quart donne 15.
Quelle est la quantité ?

1) On résout le problème avec l'algèbre actuelle :

La résolution ne pose aucun problème dans la symbolique algébrique d'aujourd'hui. Les Egyptiens n'en disposant pas, ils ont tiré parti de leur pratique habituelle.

2) On essaie de résoudre le problème en utilisant uniquement l'arithmétique (opérations sur les nombres), sans inconnues et sans équations:

En Egypte, l'algèbre par les fausses positions (2/3)

Le **papyrus Rhind** est un célèbre papyrus datant environs de -1650, découvert sur le site de la ville de Thèbes.

Il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie e d'arpentage, sur plus de 5 mètres de longueur et 32 centimètres de large.

Enoncé du problème 26 du papyrus Rhind :

Une quantité ajoutée à son quart donne 15.
Quelle est la quantité ?

1) On résout le problème à l'aide de l'algèbre actuelle :

$$x+\frac{x}{4}=15 \qquad \frac{5}{4}x=15 \qquad x=15\cdot\frac{4}{5} \qquad x=12$$

La résolution ne pose aucun problème dans la symbolique algébrique d'aujourd'hui. Les Egyptiens n'en disposant pas, ils ont tiré parti de leur pratique habituelle.

2) On essaie de comprendre la résolution, dite de la *fausse position,* du scribe Ahmès :

Calcule à partir de 4, le total est 5.
Calcule à partir de 5 pour trouver 15.
Il advient 3.
Multiplie 3 par 4. Il advient 12.
Le total est 15.
La quantité est 12. Son quart est 3. Le total est 15.

Qu'est-ce qu'on peut remarquer ?

3) On résout le problème suivant (F. Ghaligai (1552)), à l'aide de la *fausse position*:

Trouve un nombre tel que,
si on soustrait le $\frac{2}{3}$ ***de ce nombre, il reste*** $\frac{3}{4}$

En Egypte, l'algèbre par les fausses positions (3/3)

Remarques sur le problème 26 du papyrus Rhind

Le choix de 4 supprime évidemment la fraction de dénominateur 4.
Il reste donc au scribe de multiplier 4 par le quotient de 15 par 5 pour obtenir la vraie solution, 12, puis à vérifier que sa réponse est correcte.
Tout s'est passé sans recours à aucun symbole, uniquement sur des opérations connues de tous : addition et multiplication.

Solution du problème de F. Ghaligai, à l'aide de la *fausse position*

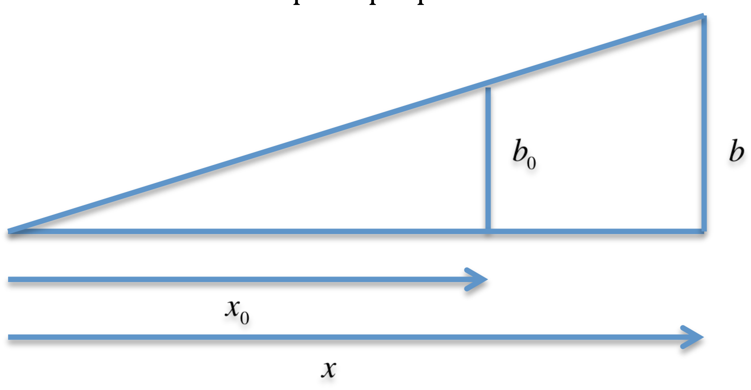
Fausse position $x_0 = 6$ (à cause de la fraction)

$$x_0 - \frac{2}{3}x_0 = 6 - \frac{2}{3}\cdot 2 = 2 \qquad \text{donc} \qquad x = 6\cdot\frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Pourquoi la méthode de la fausse position marche bien ?

La méthode de la fausse position peut être utilisée chaque fois qu'on est en présence d'un problème qui se traduirait en algèbre par une équation du type $ax = b$.

Cette méthode est basée sur le concept de proportionnalité.



A partir de la fausse position x_0, on obtient b_0.

Du fait de la proportionnalité $\frac{x}{b} = \frac{x_0}{b_0}$ et donc on obtient $x = \frac{x_0}{b_0}\cdot b$

Annexe 3 : QUESTIONNAIRE

Le but de ce questionnaire est de connaître votre opinion sur l'introduction des activités historiques pendant les leçons de mathématiques.

1) Est-ce que vous avez apprécié l'activité historique ? ....

2) Pour quelles raisons, n'avez-vous pas apprécié l'activité?

- c'est ennuyant .... ☐
- c'est de compréhension difficile .... ☐
- c'est une perte de temps .... ☐
- autres raisons ....

3) Pour quelles raisons, avez-vous apprécié l'activité?

- c'est utile pour mes études .... ☐
- c'est intéressant, passionnant, nourrissant pour ma culture .... ☐
- autres raisons ....

4) A votre avis, pourquoi l'activité historique est utile pour vos études?

- on comprend mieux les concepts et les méthodes actuels .... ☐
- on a une vision d'ensemble et on crée des liens logiques .... ☐
- autres raisons .... ☐

5) A votre avis, pourquoi l'activité historique est intéressante et passionnante?

- elle montre le sens et l'utilité des mathématiques .... ☐
- elle montre l'effort de la recherche mathématique .... ☐
- elle humanise les mathématiques .... ☐
- autres raisons .... ☐

6) L'histoire change-t-elle votre rapport aux mathématiques ?

- non : je n'aime pas les maths et l'histoire ne m'intéresse pas .... ☐
- non : J'ai toujours aimé les maths .... ☐
- oui : je n'aime pas les maths, mais l'histoire m'aide à les apprécier .... ☐
- oui : j'aime les maths et j'en voudrais approfondir l'histoire .... ☐
- autre ....

Commentaires :

....

....

....

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la place de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques; plus précisément, à la capacité de l'histoire à faire progresser le rapport au savoir mathématique des élèves de l'école post-obligatoire. Pour répondre à la question de recherche, nous avons réalisé une séance historique dans une classe de maturité professionnelle. La séance portait sur les problèmes et leur modélisation à travers l'histoire ; en particulier, les équations (outil actuel de modélisation) et la méthode de la fausse position (outil ancien de modélisation) étaient appliquées et comparées. L'analyse du déroulement de la séance, l'analyse des réponses des élèves à un questionnaire dédié et les apports théoriques nous ont conduit à affirmer que l'histoire peut changer le rapport au savoir des élèves. L'histoire, grâce à ses fonctions vicariante, dépaysante, culturelle, épistémologique et interdisciplinaire, peut faire vivre à l'élève des expériences qui sont favorables à l'évolution de son rapport au savoir mathématique, notamment la construction du sens et de la valeur des notions mathématiques (ici, les équations et le symbolisme) et la pratique des enjeux du savoir mathématique (effort, discussion, raisonnement, questionnement). Environ trois quarts des élèves ont confirmé l'intérêt pour les séances historiques et ont perçu les différentes fonctions de l'histoire ; en particulier, les élèves qui aiment l'histoire, environ un quart des élèves, ont affirmé que, non seulement ils apprécient les séances historiques, mais que l'histoire leur fait apprécier davantage les mathématiques. Enfin nous avons donné des indications aux enseignants pour concevoir une séance historique qui puisse faire évoluer le rapport au savoir des élèves: la séance doit être dynamique, courte et d'accès facile, les fonctions de l'histoire doivent ressortir et surtout l'élève doit être acteur de son apprentissage.

Mots-clés

Histoire des mathématiques, rapport au savoir, séance historique, fausse position, équation, symbolisme