

Liste des notations

E : Module d'élasticité longitudinal ($E = 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa}$) ;

G : Module de cisaillement ($G = 81000 \text{MPa}$) ;

I_y : Moment d'inertie selon l'axe y ;

I_z : Moment d'inertie selon l'axe z ;

i_y, i_z : Rayon de giration suivant respectivement les axes yy et zz ;

I_t : Moment d'inertie de torsion ;

I_z : Moment d'inertie de gauchissement ;

I_w : Rayon d'inertie polaire ;

t : Epaisseur ;

t_w : Epaisseur de l'âme ;

t_f : Epaisseur de la semelle ;

H : Hauteur totale du profilé ;

h : Hauteur de la portion droite de l'âme ;

b : Largeur du profilé ;

A : Section du profilé ;

L : Longueur en générale ;

L_f : Longueur de flambement ;

N, N_{sd} : Effort normal ;

K : entier naturel strictement positif ;

N_{pl} : Effort normale plastique ;

N_{cr}, P_{cr} : Charge critique de flambement ;

$N_{b,rd}$: Valeur de calcul d'un élément comprimé au flambement ;

\bar{N} : La force portante relative.

e_0 : Excentricité initial ;

e_p : Excentricité de chargement ;

σ : Contrainte ;

σ_{cr} : Contrainte critique ;

σ_{max} : Contrainte maximum ;

M_{sd} : Moment fléchissant ;

M_{pl} : Moment plastique ;

f_y : Limite d'élasticité de l'acier ;

λ : Elancement ;

$\bar{\lambda}$: Elancement réduit ;

λ_1 Elancement limite ;

ε : Coefficient de réduction élastique de l'acier ;

χ : Coefficient de réduction du flambement ;

y : La flèche ;

$W_{el, z}$: d'inertie élastique du poteau ;

$W_{pl, z}$: d'inertie plastique du poteau ;

v : Demi-largeur du poteau ;

α : Coefficient d'imperfection par rapport à la section étudiée

a_m : Proportion du moment sollicitant par rapport au moment résistant élastique ;

a_v : Proportion de l'effort tranchant sollicitant par rapport à l'effort tranchant plastique résistant;

ΔU : Energie potentielle ;

ΔT : Le travail des forces extérieures ;

V : effort tranchant ;

$V_{pl,rd}$: effort tranchant plastique résistant ;

A_v : section réduit au cisaillement ;

τ : Taux de cisaillement ;

i : désigne le rayon de giration ;

σ_k : la contrainte de compression moyenne ;

N_k : L'effort critique ;

η : Paramètre représentant les imperfections de la poutre ;

f : Facteur de forme ;

$N_{c,Rd}$: Résistance plastique de la section brute ;

$M_{c,Rd}$: Moment résistance plastique ;

α : Facteur d'imperfection ;

Ratio : Rapport de résistance ;

La liste des figures

Chapitre 01

Figure 1.1. Les états d'équilibre d'un système mécanique.....	03
Figure 1.2. Le flambement par flexion.....	06
Figure 1.3. Les Coordonnées du centre de cisaillement S par rapport au centre de gravité G .	07
Figure 1.4. Le flambement par torsion.	08
Figure 1.5. Section transversale symétrique par rapport à l'axe y-y.....	09
Figure 1.6. Le flambement par flexion-torsion	10
Figure 1.7. La stabilité d'une colonne compressée.....	12
Figure 1.8 .Flambement avec point limite	13
Figure 1.9. Les causes de Flambement par divergence	14
Figure 1.10. Essai de flambement lors'que N est inférieur a N_C	15
Figure 1.11.Essai de flambement lors 'que N est égale à N_C	16
Figure 1.12. Essai de flambement lors 'que N est supérieur à N_C	16
Figure 1.13.Cas d'une poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre.....	20
Figure 1.14.Cas d'une poutre encastree à ses deux extrémités.....	21
Figure 1.15.Cas d'une poutre encastree à une extrémité et articulée à l'autre	21
Figure 1.16.L'imperfection initiale en arc.....	24
Figure 1.17.La courbe de flambement.....	25
Figure1.18.Ajout de plates soudes sur les âmes de profils métallique U, I.....	27
Figure1.19. Ajout de plats soudes sur les semelles.....	27
Figure1.20Ajout de plats soudes, semelles et âme.....	27
Figure1.21 Ajout d'un profil sous la semelle inferieure.....	28

Chapitre 02

Figure 2.1 : Courbe de flambement adimensionnelle \bar{N} $\bar{\lambda}$	30
Figure 2.2 : Données Exemple 2-2	31

Figure 2.3:La représentation des points sur la courbe adimensionnelle.....	32
Figure 2.4: Les imperfections géométriques initiales.....	33
Figure 2.5 : Notation des caractéristiques d'un profilé HEA.....	36
Figure 2.6: Courbes non-dimensionnelles de flambement du non linéarité initiale (HEA 200).	38
Figure 2.7:Courbes non-dimensionnelles de flambement du non linéarité initiale (HEA 300).....	38
Figure 2.8 :Courbes non-dimensionnelles de flambement du l'excentricité du chargement (HEA 200)	40
Figure2.9 : Courbes non-dimensionnelles de flambement du l'excentricité du chargement (HEA 300)	41
Figure2.10: Courbes non-dimensionnelles de flambement du l'effet combinés des imperfections (HEA 200)	43
Figure 2.11 : Courbes non-dimensionnelles de flambement du l'effet combinés des imperfections (HEA 300)	44
Figure 2.12 : Courbes non-dimensionnelles de flambement du l'effet combinés des imperfections (HEA 200)	45
Figure 2.13 : Courbes non-dimensionnelles de flambement du l'effet combinés des imperfections (HEA 300)	45

Chapitre 03

Figure 3.1 : Courbe d'interaction du moment fléchissant M-N en flambement (HEA200)	52
Figure 3.2 : Courbe d'interaction du moment fléchissant M-N en flambement (HEA300)	53
Figure3.3 : Courbe d'interaction de l'effort tranchant V-N en flambement (HEA200)	55
Figure 3.4 : Courbe d'interaction de l'effort tranchant V-N en flambement (HEA300)	55
Figure 3.5 :Courbe d'interaction de l'effort tranchant et moment fléchissant M-V-N en flambement (HEA200)	58
Figure 3.6: Courbe d'interaction de l'effort tranchant et moment fléchissant M-V-N en flambement (HEA300)	58
Figure 3.7 : Notation des caractéristiques d'un profilé HEA.....	59
Figure 3.8 : Courbe d'interaction de moment fléchissant M-N en flambement (HEA200)	64
Figure 3.9 : Courbe d'interaction de moment fléchissant M-N en flambement (HEA300) ...	64

Figure 3.10 : Courbe d'interaction de moment fléchissant M-N en flambement selon EC3 (HEA200)	67
Figure 3.11 : Courbe d'interaction de moment fléchissant M-N en flambement selon EC3 (HEA300)	67

La liste des tableaux

Chapitre 01

Tableau 1.1 : Formes de section et modes du flambement.....	10
Tableau 1.2 : Différentes configurations pour le calcul de la longueur libre.....	22
Tableau 1.3 : Les imperfections des éléments selon l'EC 03.....	24
Tableau 1.4:Les valeurs du facteur d'imperfection	25
Tableau 1.5 : Choix de la courbe de flambement correspondant à une section.....	26

Chapitre 02

Tableau 2.1 : Caractéristiques du tube a $\varnothing 42.4 \times 2.6$ mm.....	31
Tableau 2.2 : Résultats de l'exemple 2-2	32
Tableau 2.3:Les caractéristiques d'un HEA 200	36
Tableau 2.4: Les caractéristiques d'un HEA 300	36
Tableau 2.5 L'influence du non linéarité initial sur la résistance \bar{N} pour les deux profils....	39
Tableau 2.6 : L'influence de l'excentricité du chargement sur la résistance \bar{N} pour les deux profils.....	41
Tableau 2.7: L'influence d'effet combinée de l'imperfection sur la résistance \bar{N} pour les deux profils	44
Tableau 2.8 : L'influence d'effet combinée de l'imperfection sur la résistance \bar{N} pour les deux profils.....	46

Chapitre 03

Tableau 3.1 : L'influence de l'effort tranchante sur la résistance \bar{N} pour les deux profils...56	
Tableau 3.2 : Les caractéristiques d'un HEA 200	59
Tableau 3.3:Les caractéristiques d'un HEA 300	59
Tableau 3.4 : Etude comparative entre les résultats du ratio des contraintes ($\alpha_v=0$).....	68
Tableau 3.5 : Etude comparative entre les résultats du ratio des contraintes ($\alpha_v=0.2$).....	68

La liste des photos

Photo I.1 : L'effondrement du pont de Québec 1907.....14

Table de matière

Remerciement	
La Liste des figures et des tableaux	
Introduction générale	1
Chapitre 1 : Revue de littérature sur le flambement	
1.1 Introduction	2
1.2 Etats d'équilibre stable et instabl.....	2
1.3 Les origines des phénomènes d'instabilité élastique	4
1.4 Le flambement	4
1.4.1 Le Définition de flambe ment	4
1.4.2 Les types de flambement	5
1.4.2.1 Flambement par flexion	5
1.4.2.2 Flambement par torsion	6
1.4.2.3 Flambement par flexion-torsion	7
1.4.2.4 Flambement par bifurcation	10
1.4.2.5 Flambement avec point limite	11
1.4.2.6 Flambement par divergence	12
1.4.3 Les dangers du flambe ment	15
1.5 Mise en évidence du flambe ment	15
1.6 Charge critique d'Euler.....	16
1.7 Longueur de Flambe ment	18
1.8 Influence des conditions aux limites	19
1.9 Rayon de giration	21
1.10 Contrainte critique d'Euler	22
1.11 Les imperfections	22
1.11.1 Les imperfections d'éléments	13
1.12 Le facteur d'impe rfection	25
1.13 Améliorations de la résistance au flambement	26
1.14 Conclusion.....	28
Chapitre 2 : Effet des imperfections géométriques sur les barres comprimées	
2.1 Introduction	29
2.2 Courbe de résistance d'un barreau parfait.....	29
2.3 Résistance des barres réels	32
2.3.1 Impe rfection géométrique des barres réels.....	33
2.3.2 Non linéarité initiale	34
2.3.3 Résolution numérique sur ordinateur	36
2.3.4 Inte rprétation des courbes	39
2.4 Excentricité du chargement	40



2.5 Effets combinés des imperfections	42
2.6 Conclusion	47

chapitre 3 :

3.1 Introduction	48
3.2 Les Barres Comprimées Fléchies Examinées	48
3.2.1 Effet du moment fléchissant :.....	49
3.2.2 Simulations numériques :.....	50
3.3 Effet de l'effort tranchant :.....	53
3.4 Intégrant l'effet du moment fléchissant :.....	56
3.5 Application :	59
3.6 Etude comparative :.....	62
3.7 Conclusion :.....	69

Conclusion générale

Introduction générale

Dans le cadre de notre formation de master en génie civil, nous sommes amenés, à l'issue de notre cursus, à réaliser un projet de fin d'études, qui est le reflet de tout le savoir acquis durant la formation. Nous avons choisis d'améliorer nos connaissances sur les phénomènes d'instabilités qui ont une grande incidence dans le domaine de la construction métallique. Le présent document concerne principalement, le flambement des barres comprimées et des barres comprimées fléchies, avec effet de déformation initial et d'excentricité du chargement ; un domaine qui reste moins adapté par des règles précises.

Dans ce travail en étudiant l'application de la formule d'Euler au calcul d'une colonne, nous avons indiqué que la difficulté principale que l'on rencontrait dans cette méthode était le choix d'un facteur de sécurité convenable qui doit compenser les différentes imperfections. Dans ces conditions, au lieu de considérer un cas idéal, il semble logique de supposer, dès le début, que certaines imperfections existent et d'établir une formule qui contienne non seulement les dimensions de la colonne et les quantités définissant les propriétés mécaniques de la matière, mais aussi la valeur des imperfections supposées. Une fois ces dernières mises en évidence dans une formule, le choix d'un facteur de sécurité approprié peut s'appuyer sur une base plus certaine.

Les imperfections principales qui font que le comportement d'une colonne réelle est si différent de ce que suppose la théorie d'Euler sont :

- l'existence d'une excentricité, impossible à éviter, du point d'application de la charge,
- la courbure initiale de la colonne.

Notre mémoire est structuré en plusieurs chapitres. Après l'introduction, le premier chapitre définit le phénomène d'instabilité (flambement), leurs causes et leurs conséquences. Le deuxième chapitre définit les paramètres qui gouvernent le comportement élastique d'un barreau géométriquement parfait, Ensuite, on étudie tour à tour l'influence d'une imperfection géométrique et enfin, on analysera l'effet de toutes ces caractéristiques prises ensemble. Le troisième chapitre présentera des équations analytiques permettant de prendre en compte l'interaction dans les colonnes soumises à compression et flexion et l'effort tranchant avec imperfection géométrique dans les colonnes et poutres colonne.

Notre défi dans ce travail est de proposer un algorithme sur ordinateur qui définissent le comportement d'une barre imparfaite tout au long de sa mise en charge de toutes les caractéristiques de la barre comme le ferait une expérience réelle de laboratoire et estimer la capacité portante pour une colonne comprimée et fléchie.

1.1.Introduction

Les barres comprimées sont des éléments très répons dans les structures de génie civil. Bien que la barre constitue l'élément le plus simple, son étude permet d'obtenir des résultats d'une grande importance pratique qui peuvent servir de base pour le calcul des structures plus complexes. La vérification de la stabilité des éléments comprimés se présente très fréquemment en pratique. Ce phénomène est très multiforme et bien qu'il soit bien connu depuis environ deux siècles, il continue à faire l'objet de recherches au niveau des notions et de la technologie[1].

Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élanement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindriques. Normalement, on considère des systèmes avec un paramètre variable N qui représente classiquement la charge extérieure, mais qui peut aussi être la température (flambement thermique) ou d'autres phénomènes. Pour chaque valeur de N , il n'existe qu'une configuration hors flambement.

Dans les problèmes classiques de flambement, le système est stable si N est assez petit et devient instable quand N est grand. La valeur de N pour laquelle le système cesse d'être stable est appelée : valeur critique N_{cr} . Plus généralement, il faut déterminer[2]:

- Les configurations d'équilibre de la structure sous les chargements imposés.
- Celles parmi ces configurations qui sont stables.
- La valeur critique des chargements et les conséquences sur le comportement qu'ont ces niveaux de charge.

1.2.Etats d'équilibre stable et instable :

D'une manière générale, on peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement.

Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par Dirichlet : « L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles ».

Cette définition montre clairement que la stabilité détermine une qualité d'une solution (une solution d'équilibre) d'un système et que le problème de s'assurer de la stabilité d'une solution concerne le « voisinage » de cette solution particulière. Si on considère un système élastique conservatif, initialement en état d'équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, le système s'écartera de cet état d'équilibre seulement s'il subit une force perturbatrice temporaire. Si l'énergie fournie au système par cette force perturbatrice est W , on a alors : $W = T + V' = \text{constante}$

À cause du principe de conservation de l'énergie.

Dans cette relation T représente l'énergie cinétique du système et V' l'énergie potentielle.

Une faible augmentation de T s'accompagne d'une diminution faible identique de V' et vice versa. Si le système est initialement en configuration d'équilibre d'énergie potentielle minimale, alors l'énergie cinétique T du déplacement libre correspondant décroît dans la mesure où V' doit croître. Par conséquent, le déplacement depuis l'état initial restera faible et l'état d'équilibre est **stable**.

Pour des corps rigides, la stabilité peut être illustrée par l'exemple bien connu de la bille sur un support courbe. Si la bille repose sur une surface concave, l'équilibre est stable si l'on donne à la bille une vitesse initiale faible, elle commencera à osciller, mais restera à proximité de son état d'équilibre. D'un autre côté, si le système n'est pas dans une configuration de V' minimum (énergie potentielle), alors le fait de lui donner une impulsion va conduire très rapidement à de grands déplacements et vitesses et on dit que le système est instable. C'est le cas lorsque la bille repose au sommet d'une surface convexe ou au point d'inflexion horizontal d'une surface. Si la bille repose sur un plan horizontal, l'équilibre est dit « neutre » [3].

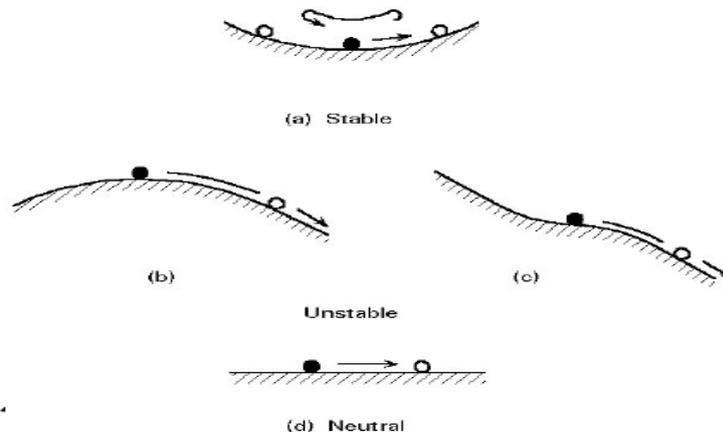


Figure I.1 : Les états d'équilibre d'un système mécanique

1.3 Les origines des phénomènes d'instabilité élastique :

Afin de garantir le degré de sécurité souhaité ou souhaitable, Il y a lieu de vérifier que les contraintes et les déformations restent en deçà des limites admissibles. Deux cas de figure se présentent :

- Le cas de petites déformations Tant que l'on reste dans le domaine des petites déformations, on admet que les sollicitations ne varient pas (ou peu) sous l'effet des déformations, ce qui conduit simplement à vérifier que les contraintes restent inférieures à la contrainte de ruine.
- Le cas des grandes déformations Dans ce cas, les déplacements modifient considérablement les sollicitations qui les ont initiées et nécessités des calculs spécifiques.

L'apparition de déformations importantes dans certaines pièces peut survenir :

- Dans le domaine élastique, lorsque la corrélation linéaire efforts /déformations n'est plus vérifiée, les déformations augmentant plus vite que les efforts appliqués ;
- Dans le domaine élasto-plastique, lorsqu'il y a écoulement plastique [1]

Les grandes déformations affectent les zones comprimées des pièces, qui peuvent présenter trois types de comportements caractéristiques, dénommés phénomènes d'instabilité qui sont :

- ❖ Le flambement qui affecte les barres simplement comprimées (flambement simple) ou comprimées et fléchies (flambement flexion) qui est très dangereux,
- ❖ Le déversement qui affecte les semelles comprimées des pièces fléchies,
- ❖ Le voilement qui affecte les âmes des pièces fléchies [4].

1.4Le flambement :

1.4.1 Définition de flambement :

L'une des hypothèses fondamentales dans le calcul élastique des poutres et des systèmes de poutres consiste à supposer de petites transformations (petits déplacements et petite déformations). En particulier on peut alors appliquer le principe de superposition d'états d'équilibre. En l'absence de cette hypothèse, les conditions d'équilibre doivent être écrites par rapport à la configuration déformée de la structure. Les déplacements ne restent plus proportionnels aux forces extérieures et il est même possible de voir les déplacements devenir très grands sous l'effet de ces forces extérieures.

Pour les structures élancées, on observe aussi des phénomènes d'instabilité, c'est à dire qu'il n'y a plus unicité de la déformée pour un chargement donné. Un exemple de ces phénomènes d'instabilité est celui du flambement d'une poutre élancée sous l'action d'un effort axial de compression. Cet effort est d'autant plus faible que l'élancement de la poutre est plus grand. Euler (1744) a été le premier à expliquer ce phénomène. Lorsqu'une tige mince rectiligne soumise à une force verticale N inférieure à la force critique N_{cr} une seule position d'équilibre stable existe : celle où la tige reste rectiligne. Lorsque N est supérieure à la force critique, deux positions d'équilibre existent : l'une où la tige est fléchie, l'autre où la tige reste rectiligne mais est alors instable. Le problème du flambement latéral des poutres, a été repris plus en détail par plusieurs auteurs (Mandel, 1936 ; Timoshenko, 1936 ; Hetenyi, 1946 Courbon, 1964, ...). Ainsi, Mandel (1936) définit le flambement comme un phénomène commun à tous les corps minces à deux dimensions. Les corps cylindriques à parois minces, par exemple, peuvent être instables et flamber pour des tensions relativement faibles si l'épaisseur des parois est très faible par rapport au diamètre. Le flambement d'un cylindre mince peut encore se produire sous l'effet de la compression axiale, de la torsion, de la flexion [5].

La théorie d'Euler, relative à des poutres de forme élancée, est restée longtemps sans application pratique. Les principaux matériaux de construction, à son époque, le bois et la pierre étaient utilisés dans des constructions massives où les phénomènes d'instabilité ne se posaient pas. Ce ne fut qu'au début de la construction des ponts en acier que la question du flambement des pièces minces prit une importance pratique. L'emploi de l'acier et des alliages à haute résistance pour toutes les constructions modernes et, en particulier pour les ponts, les navires et les avions, a fait de l'instabilité élastique un problème d'une importance considérable. L'expérience a prouvé que des constructions de ce type peuvent, dans certains cas, subir des dommages allant jusqu'à la rupture provoquée par l'instabilité élastique de pièces trop élancées ou de corps creux dont les parois sont très minces [6].

1.4.2 Les type de flambement :

1.4.2.1. Flambement par flexion :

A la charge critique, l'équilibre stable du poteau rectiligne se trouve à sa limite et il existe une configuration légèrement déformée du poteau qui peut aussi satisfaire l'équilibre. Pour cette configuration, le moment de flexion, à chaque position de la section droite et pour une barre

bi articulée, est donné par: $M = N y$

Un poteau idéal à section uniforme doublement symétrique et chargé axialement à ses extrémités en compression peut flamber par flexion autour de l'un des axes principaux de sa section transversale sous une charge critique élastique, dite aussi « charge critique d'Euler » :

$$N_c = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{\alpha L^2}$$

Avec :

- L** : Longueur du poteau
- EI** : Raideur flexionnelle mobilisée lors du flambement,
- α** : Facteur traduisant l'influence des conditions d'appui aux extrémités du poteau.

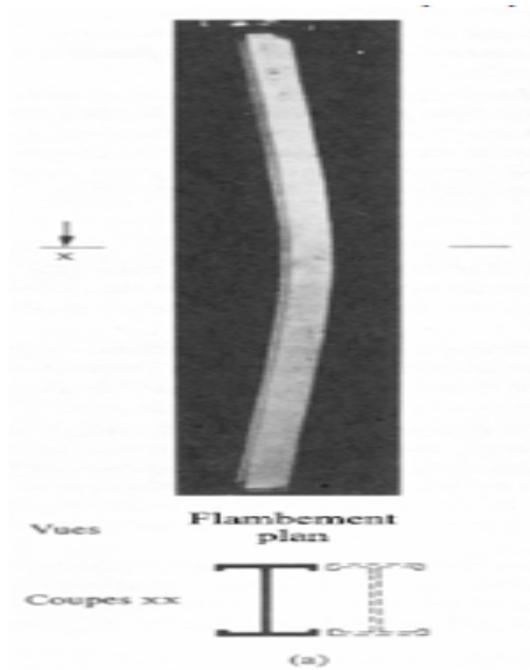


Figure 1.2 flambement par flexion

1.4.2.2 Flambement par torsion :

L'effort normal critique pour le mode de flambement par torsion, $N_{cr,T}$, peut être calculé à partir de :

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i^2} \left(GI_t + \frac{\pi^2 EI_w}{l^2_T} \right) \dots \dots \dots (1)$$

Avec :

$$i^2_0 = i^2_y + i^2_z + y^2_0 + z^2_0 \dots \dots \dots (2)$$

Où :

E : est le module d'élasticité ($E = 210000 \text{ N/mm}^2$).

G : est le module de cisaillement ($G = 80770 \text{ N/mm}^2$).

i_0 : rayon d'inertie polaire

i_y, i_z : rayon de giration suivant respectivement les axes yy et zz

y_0, z_0 : sont les coordonnées du centre de cisaillement de la section par rapport au centre de gravité.

i_t : est l'inertie de torsion.

i_w : est l'inertie de gauchissement.

L_T : est la longueur de flambement correspondant au mode de flambement par torsion. De manière générale, la longueur de la barre peut être considérée, sauf si un dispositif particulier empêche le gauchissement aux extrémités de l'élément.

y_0 et z_0 sont les coordonnées du centre de cisaillement par rapport au centre de gravité .

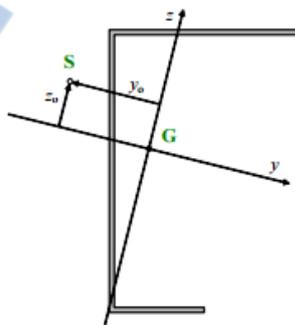


Figure I.3 : Coordonnées du centre de cisaillement S par rapport au centre de gravité G.

Dans le cas d'une section transversale doublement symétrique, le centre de cisaillement coïncide avec le centre de gravité ; par conséquent, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

i_y : est le rayon de giration de la section transversale par rapport à l'axe fort.

i_z : est le rayon de giration de la section transversale par rapport à l'axe faible.

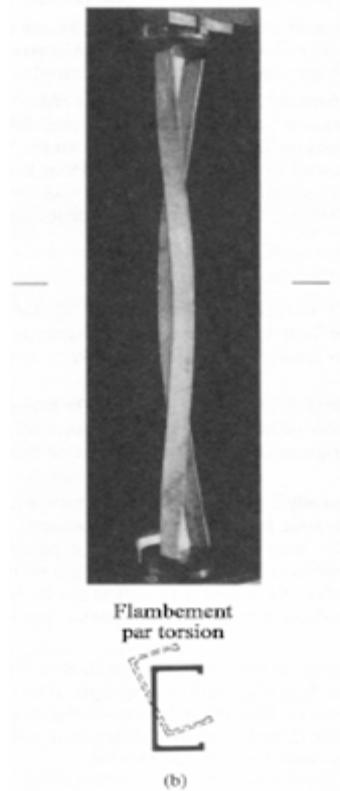


Figure 1.4 : Flambement par torsion.

1.2.4.3. Flambement par flexion-torsion :

Le mode de flambement par flexion-torsion ne devrait être considéré que si le centre de cisaillement ne coïncide pas avec le centre de gravité. L’effort normal critique $N_{cr,TF}$ pour le mode de flambement par flexion-torsion est la plus petite des racines de l’équation en N du troisième degré suivante :

$$i_0^2(N - N_{cr,y})(N - N_{cr,z})(N - N_{cr,T}) - N^2 y_0^2 (N - N_{cr,z}) - N^2 z_0^2 (N - N_{cr,y}) = 0 \dots\dots (3)$$

Où :

$N_{cr,y}$ et $N_{cr,z}$ sont les efforts normaux critiques pour le flambement par flexion par rapport aux axes yy et zz , respectivement. $N_{cr,T}$ est l’effort normal critique pour le mode de flambement par torsion, voir § 2. L’équation peut également s’écrire ainsi :

$$\left(\frac{i_y^2 + i_z^2}{i_0^2}\right) N^3 + \left[i_0^2 - \frac{1}{i^2} (N^2 z_0^2 + N^2 y_0^2) - (N_{cr,y} + N_{cr,z} + N_{cr,T}) \right] N^2 + (N_{cr,y} \cdot N_{cr,z} + N_{cr,z} \cdot N_{cr,T} + N_{cr,T} \cdot N_{cr,y}) N - N_{cr,y} N_{cr,z} N_{cr,T} = 0 \dots\dots (4)$$

Lorsque la section transversale est symétrique par rapport à l'axe $y-y$, l'effort normal critique peut s'obtenir à partir de :

$$\frac{i_0^2}{2(i_y^2 + i_z^2)} \left(N_{cr,y} + N_{cr,T} - \sqrt{(N_{cr,y} + N_{cr,T})^2 - 4 \cdot N_{cr,y} \cdot N_{cr,T} \frac{i_y^2 + i_z^2}{i_0^2}} \right)$$

$N_{cr,y}$: est l'effort normal critique pour le flambement par flexion / yy .

$N_{cr,z}$: est l'effort normal critique pour le flambement par flexion / zz .

$N_{cr,T}$: est calculé par l'expression (1) .

Lorsque la section transversale est symétrique par rapport à l'axe $z-z$, $N_{cr,y}$ doit être remplacé par $N_{cr,z}$ dans l'expression ci-dessus.

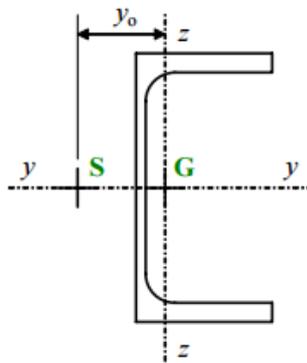


Figure I.5 : Section transversale symétrique par rapport à l'axe $y-y$.

Le flambement par torsion se manifeste dans les éléments à section doublement symétrique et présentant une grande raideur flexionnelle associée à une faible raideur torsionnelle.

Le flambement par flexion-torsion est déterminant dans le cas des barres à section ouverte et à parois minces "donc à faible raideur torsionnelle" présentant un centre de gravité nettement distinct du centre de cisaillement. Le tableau (I.1) présente le mode de flambement pour chaque type des sections et la contrainte critique à calculer.

Forme de section	Mode de flambement	Efforts normaux à calculer
 Le centre de cisaillement est confondu avec le centre de gravité.	Flambement par flexion Flambement par torsion	$N_{cr, y}$ $N_{cr, z}$ $N_{cr, T}$
 Sections asymétriques	Flambement par flexion-torsion	$N_{cr, y}$ $N_{cr, z}$ $N_{cr, T}$ $N_{cr, FT}$
 Section avec un plan de symétrie	Flambement par flexion dans le plan de symétrie Flambement par flexion-torsion	$N_{cr, y}$ $N_{cr, z}$ $N_{cr, T}$ $N_{cr, FT}$
 Section avec deux plans de symétrie	Flambement par flexion	$N_{cr, y}$ $N_{cr, z}$

Tableau I.1 : Formes de section et modes du flambement

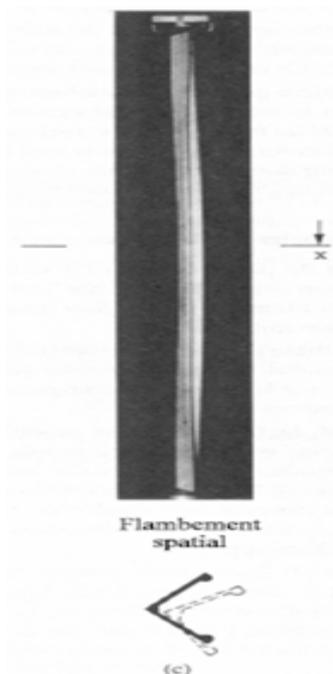


Figure I.6 : Flambement par flexion-torsion

I.2.4.4. Flambement par bifurcation :

On a vu que le concept de stabilité est en relation avec l'énergie potentielle d'un système. Cependant, la stabilité d'un système élastique statique ou d'une structure, peut aussi s'expliquer par des considérations de rigidité. Si l'on se réfère à la figure 1a, on peut voir que la dérivée de l'énergie potentielle par rapport au déplacement donne la rigidité du système.

De ce fait, une rigidité positive implique un état stable, tandis que, à la limite de la stabilité, la rigidité disparaît. Pour une structure, la rigidité est fournie sous forme matricielle qui, si elle est à la fois définie et positive, garantit à la structure un état stable. Le point auquel l'état d'un système change, pour passer d'un état d'équilibre stable à un état d'équilibre neutre est appelé « limite de stabilité ».

Le système de la bille sur un support courbe peut être comparé à une structure telle qu'un poteau en compression. Dans ce cas, le poteau peut être stable ou instable, selon la valeur de la charge axiale, paramètre de contrôle du système (**figure 1.7 a**). la structure sera en équilibre stable pour des valeurs de N faibles ; s'il y a des déflexions dues à des forces perturbatrices, le poteau reviendra à sa position rectiligne. Lorsque la charge atteint un certain niveau, appelé « charge critique », l'équilibre stable atteint une limite. Pour cette valeur N_{cr} de la charge, il existe une autre position d'équilibre, correspondant à une configuration légèrement déformée du poteau ; si, pour cette valeur, l'élément est déformé par une perturbation quelconque faible, il ne reviendra pas à sa configuration rectiligne.

Si la charge dépasse la valeur critique, la position rectiligne est instable et une perturbation légère conduit à de grands déplacements pour l'élément, puis, enfin, à l'effondrement du poteau par flambement. Le point critique, au-delà duquel les déplacements de l'élément deviennent très grands, est appelé « point de bifurcation » du système (**figure 1.7 b**).

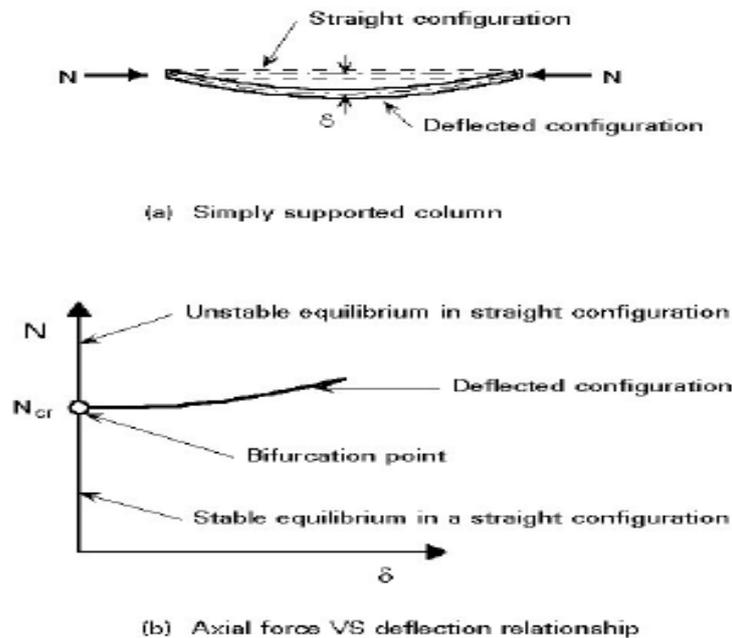
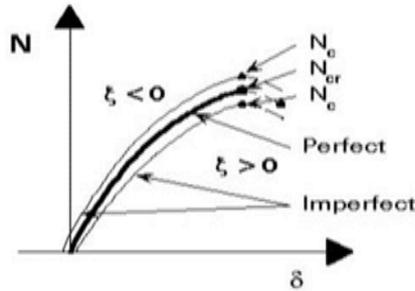


Figure 1.7: STABILITÉ D'UNE COLONNE COMPRESSÉE.

I.2.4.5. Flambement avec point limite :

Le flambement associé à une bifurcation d'équilibre n'est pas la seule forme d'instabilité que l'on peut rencontrer. Dans le cas des arcs, des treillis de faible hauteur et des dômes sphériques, par exemple, un flambement de changement de position d'équilibre, se produisant avec un claquement sec peut avoir lieu quand le trajet initialement stable perd sa stabilité dès que l'on atteint localement une valeur maximum de la charge, appelée « point limite » du système.

Ceci est représenté sur **la figure 1.8 a**, on peut voir aussi sur ce schéma que la réponse d'un système non-parfait est semblable à celle du système parfait correspondant.



(a) Limit point buckling of a perfect and of an imperfect system

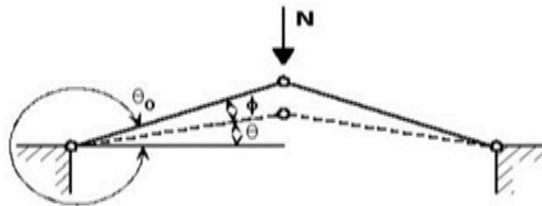


Figure I.8 : Flambement avec point limite

I.2.4.6. Le flambement par divergence :

Il est caractérisé par le fait essentiel que la poutre se dérobe à l'effort normal de compression en fléchissant transversalement. Il se déclenche à cause de la flexion initiale (courbure initiale (figure I.9 a), charge excentrée (figure I.9 b), charge transversale (figure I.9 c), l'effort normal de compression accentué, comme on s'en rend compte en se plaçant en configuration déformée [7].

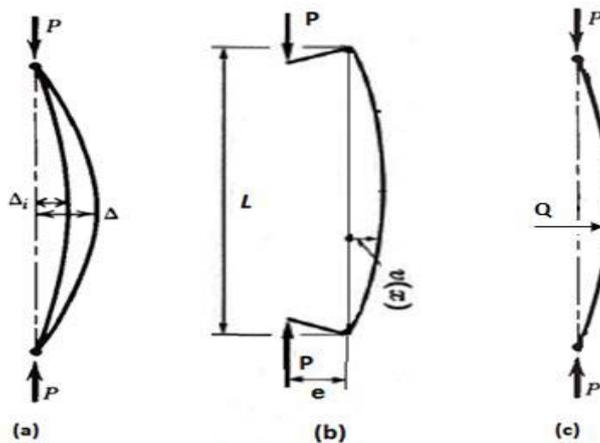


Figure I.9 : Les causes de Flambement par divergence.

I.4.3. Les dangers du flambement :

Le flambement est l'une des premières causes de sinistres des structures, parce qu'il affecte essentiellement les poteaux, l'élément porteur principal de bâtiment. Ces sinistres ont été à l'origine de grandes catastrophes comme l'effondrement du pont de Québec (1907, 74 mort, photo (I.1)).

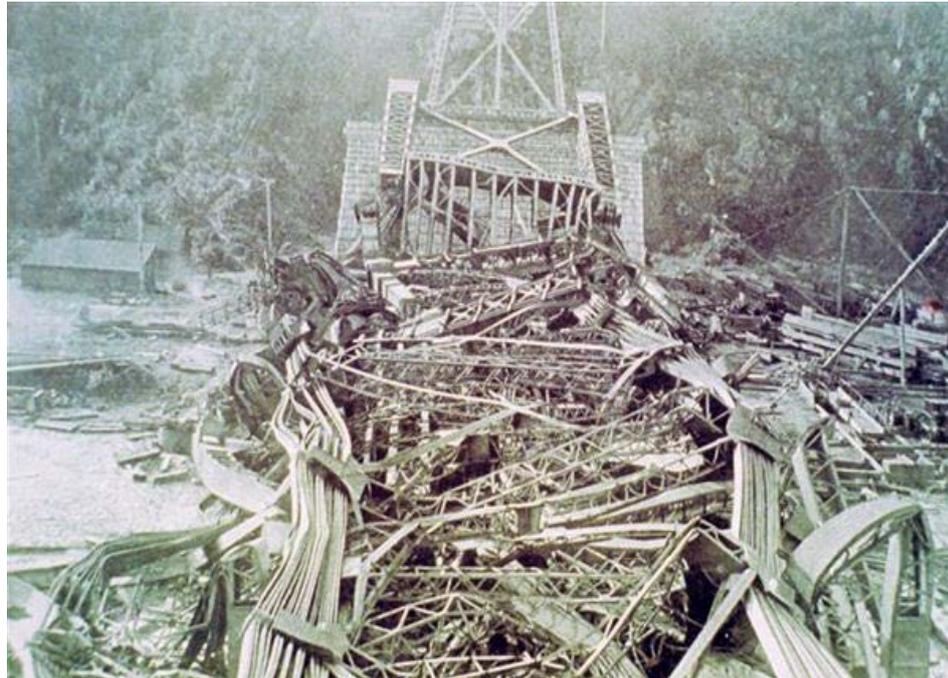


Photo I.1 : L'effondrement du pont de Québec 1907

Dans une structure, le flambement d'un élément comprimé provoque des grandes déformations dues à la non linéarité géométrique, et par conséquent, il engendre une chute de la force supportée. Cela modifie le cheminement des forces dans la structure et peut causer l'instabilité des autres éléments. Les contreventements sont les plus exposés à ce type de risque. Pour l'éviter soit on dimensionne les éléments comprimés pour résister, soit on considère que les éléments tractés participent à la résistance [8].

1.5 Mise en évidence du flambement :

Considérons une pièce élancée (telle que sa longueur soit très supérieure à sa plus grande dimension transversale), de ligne moyenne rectiligne, de section droite constante, articulée à ses deux extrémités, et soumettons-la à un effort normal de compression centré. On observe successivement deux types de sollicitation :

- pour un effort N inférieur à une limite N_c , la poutre est comprimée, elle reste rectiligne et se raccourcit.

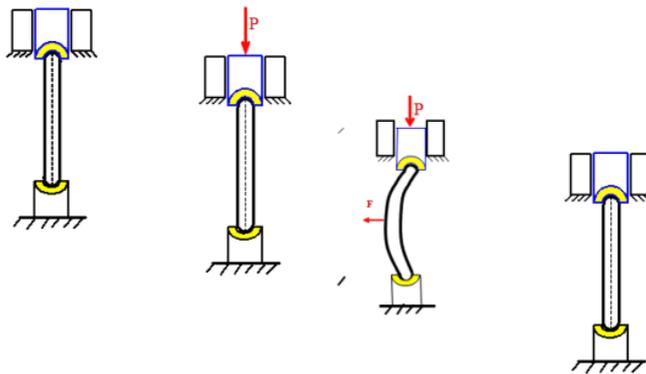


Figure I.10 Essai de flambement lors 'que N est inférieure a N_c

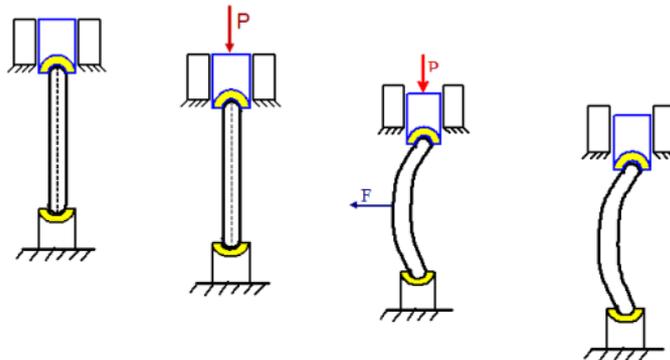


Figure I.11 :Essai de flambement lors 'que N est égale à N_c

La poutre conserve la déformée qui lui a été conférée par la perturbation.

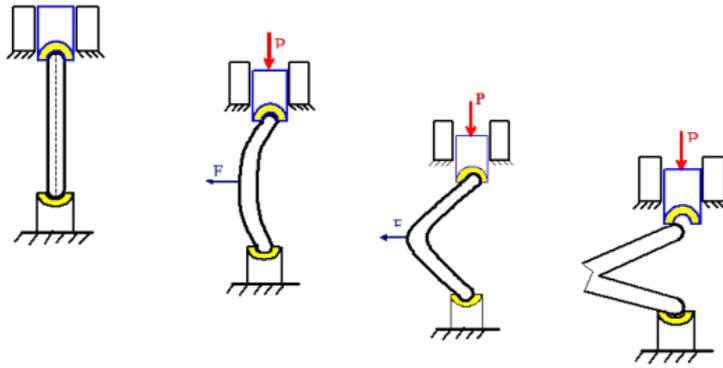


Figure I.12 : Essai de flambement lors que N est supérieur à N_c

La déformée créée par la perturbation va en s'accroissant, jusqu'à la ruine de la poutre.

- Lorsque N atteint N_c , la poutre fléchit brusquement et se rompt très vite. On observe que la flexion se produit dans le plan perpendiculaire à la direction de plus faible moment quadratique de la section de la poutre. Pour le schéma ci-contre par exemple, la flexion se produit dans le plan (A, x, y) , perpendiculaire à (G, z) (rotation de la poutre autour de l'axe z).

La valeur N_c (ou F_c) de l'effort de compression à partir de laquelle se produit le flambement s'appelle **charge critique d'Euler**.

1.6 Charge critique d'Euler N_C :

La poutre par sa ligne moyenne AB et supposons que sous l'influence des efforts en A et B , cette ligne moyenne prenne une très légère courbure (accentuée sur le schéma ci-contre)

Si x et y sont les coordonnées d'un point courant G de la fibre moyenne, y est la déformée de cette fibre.

Habituellement, en ce qui concerne l'équilibre statique, on considère que les déformations sont petites et que la fibre moyenne n'a pas bougé après déformation. Dans ce qui suit, nous allons au contraire prendre en compte l'influence des déformations sur l'équilibre statique et considérer le moment secondaire qu'elles provoquent. Ce moment de flexion dans la section vaut :

$$M_z(x) = -N \cdot y$$

La formule de déformation est donnée par la relation :

$$E I_{Gz} y'' = M_z(x) \Rightarrow E I_{Gz} y'' - M_z(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow E I_{Gz} y''(x) + N \cdot y = 0$$

$$y''(x) + \frac{N_c}{E.I} \cdot y(x) = 0 \text{ Équation différentielle du } 2^{\text{ème}} \text{ ordre.}$$

On a donc une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants, sans second membre. Equation d'un oscillateur de pulsation ω :

$$y'' + \omega^2 \cdot y = 0$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{\frac{N}{E.I}}$$

Sa solution générale

$$y = f(x) = A \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x)$$

Avec A et B constantes d'intégration.

Conditions aux limites :

$$y = f(x) = 0 \dots\dots\dots A = 0.$$

$$y = f(x = L) = 0 \dots\dots\dots B \cdot \sin(\omega x) = 0$$

Dans $B \cdot \sin(\omega L) = 0$ la solution $B=0$ est à rejeter car (avec $A=0$), il n'y aura pas de déformation.

Pour vérifier les conditions aux limites, on doit avoir :

$$B \cdot \sin(\omega x) = 0$$

Soit $\omega \cdot L = k \cdot \pi$ avec k un entier naturel et

$$K = 1 \dots 1^{\text{er}} \text{ mode de flambement}$$

$$\omega = \frac{k \cdot \pi}{L} = \sqrt{\frac{N_c}{E.I}} \Rightarrow N_c = k^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{E.I}{L^2}$$

N_c désigne la charge critique d'EULER, avec :

- **K** entier naturel
- **E** : module de Young du matériau,
- **I** : le plus petit moment d'inertie de la section droite,
- **L** : la longueur de la poutre bi-articulée à ses extrémités.

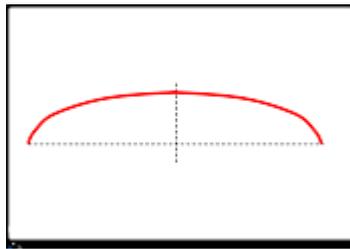
Valeurs de k :

K est un entier naturel strictement positif (k=0 donne une charge critique nulle).

K=1 donne une charge critique N_{c1} qui provoque une flexion. La charge correspondante ou charge critique d'EULER vaut alors :

$$N_{c1} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$$

La déformée associée à la forme suivante :

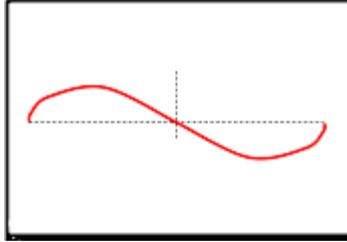


k=2 donne une charge critique N_{c2} qui provoque une flexion. La charge correspondante vaut alors :

$$N_{c2} = 2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$$

Cette charge représente le double de la charge N_{c1} .

La déformée associée à la forme suivante :



On remarque que aussi bien la forme de la déformée que la charge N_{C2} n'ont de sens physique.

En effet si la charge critique est atteinte pour $k=1$ (charge N_{C1}), la poutre sera déjà ruinée avant que la charge n'atteigne $N_{C2}=2.N_{C1}$.

De même la forme de la déformée est peu plausible.

Les autres solutions pour $k \geq 2$ sont exclues pour les mêmes raisons

1.7 Longueur de Flambement :

Dans le cas général d'une barre appartenant à une structure et liée à elle par des liaisons quelconques la résolution du problème de flambement devient rapidement très complexe. Pour "simplifier" le problème on va le ramener au problème de base de la barre bi articulée et pour ce faire on déplace la difficulté vers la recherche de la barre équivalente de longueur l_f : dite longueur de flambement, distance entre deux points de moment nul réels ou fictifs (situés à l'extérieur de la barre). Ces points pourront être soit des articulations soit des points d'inflexion de la déformée.

1.8 Influence des conditions aux limites :

Considérons une poutre parfaitement rectiligne et chargée rigoureusement en compression suivant son axe par une charge N , mais avec des liaisons aux extrémités ne permettant plus des déformations libres.

Par application de la théorie d'EULER, on montre que la charge critique dans ces cas peut se mettre sous la forme :

$$N_c = \pi^2 \cdot \frac{E.I}{(L')^2}$$

Avec $L' = \alpha \cdot L$ « longueurs de flambement ».

Cette longueur L' dépend des liaisons aux extrémités.

- **Encastrée-libre :**

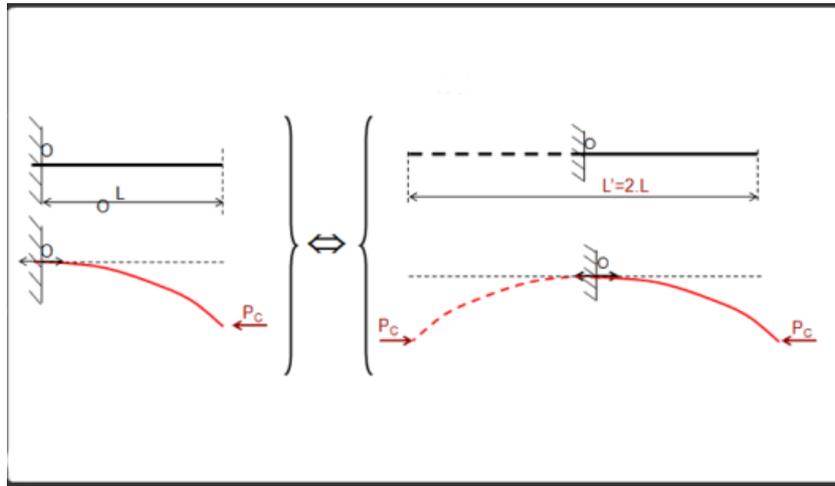


Figure I.13 : Cas d'une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre

La section en $x=0$ est encastrée, l'angle de rotation de cette section est nul. La déformée est identique à celle d'une poutre de longueur $L'=2 \cdot L$ articulée à ces extrémités est soumise à un effort P .

La charge critique d'EULER dans ce cas vaut :

$$P_c = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{(L')^2} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{4 \cdot L^2}$$

La longueur de flambement est : **$L'=2 \cdot L$**

- **Encastrée-encastrée :**

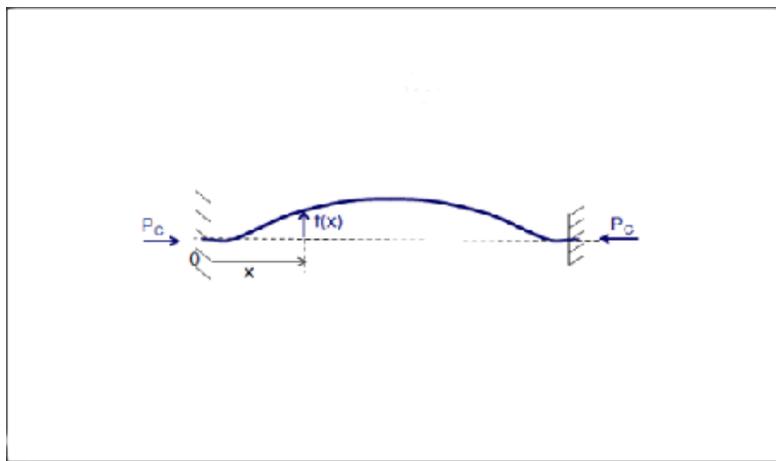


Figure I.14: Cas d'une poutre encastrée à ses deux extrémités

On montre dans ce cas que la longueur de flambement est : $L' = L/2$

$$\text{La charge critique } P_C = \pi^2 \cdot \frac{E.I}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \pi^2 \cdot \frac{E.I}{(L')^2}$$

La charge critique est donc quatre fois supérieure à celle d'une poutre de même longueur et articulée à ses extrémités. Le risque de flambement est donc beaucoup moindre avec deux encastremets.

- **Encastrée-articulée :**

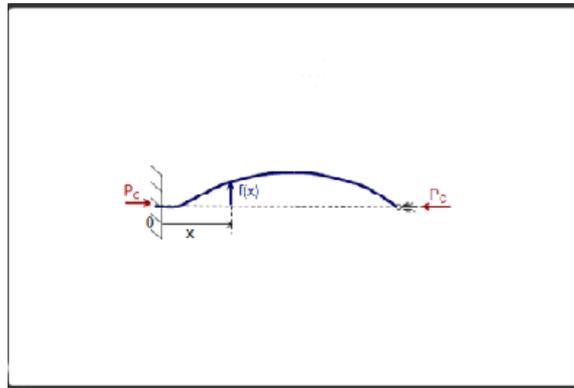


Figure 1.15 : Cas d'une poutre encastree à une extrémité et articulée à l'autre

Le même raisonnement conduit à une charge critique égale à :

$$P_C = 2,046 \cdot \pi^2 \cdot \frac{E.I}{L^2} \approx 2\pi^2 \cdot \frac{E.I}{L^2}$$

La longueur libre de flambement $L' = 0,7 \cdot L$

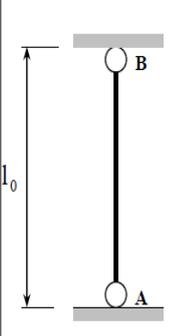
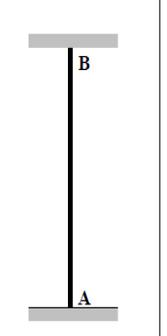
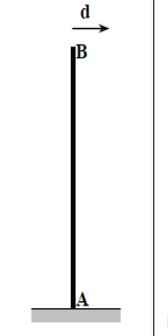
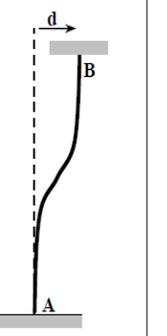
Longueur de flambement l_f en fonction des liaisons aux appuis				
A et B sont sur la même verticale			Déplacement de B en tête de poteau	
				
$l_f = l_0$	$l_f = \frac{\sqrt{2}}{2} l_0$	$l_f = \frac{l_0}{2}$	$l_f = 2l_0$	$l_f = l_0$

Tableau I.2 : Différentes configurations pour le calcul de la longueur libre

1.9 Rayon de giration :

Il est noté i . Le rayon de giration est calculé par :

$$i = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}}$$

S : la surface de la section droite de l'élément et I_{min} : moment d'inertie minimum.

Le flambement aura lieu autour de l'axe de plus faible inertie.

1.10 Contrainte critique d'Euler :

A la force critique d'Euler N_c correspond une contrainte critique, qui peut prendre le nom de contrainte critique limite ou admissible, donnant un élément de sécurité vis-à-vis du flambement.

Pour une poutre comprimée de section S , la contrainte critique σ_c est définie par la relation

$$\sigma_c = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_f^2 \cdot S}$$

on sait que : $i = \frac{\sqrt{I_{Gz \text{ ou } y}}}{s}$ le rayon de giration,

et on définit une nouvelle grandeur $\lambda = L_f \text{ ou } y / i \text{ ou } y$ l'élanement (sans unité)

La contrainte critique s'exprime alors sous la forme :

$$\sigma_c = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2}$$

Supposons que la poutre soit parfaitement rectiligne, que l'effort N soit centré et que le matériau soit parfaitement homogène. Soit $\sigma = N/S$ contrainte dans la poutre :

- si $\sigma < \sigma_e$ (limite élastique) : il y aura ruine par flambement dès que σ atteindra la valeur σ_c .
- si $\sigma > \sigma_e$: la poutre périra par écrasement (ou compression simple sans flambement) dès que σ atteindra la valeur σ_e . Dans ce cas, il n'y a aucun risque de flambement. Le dimensionnement se fait en compression simple.

Attention : ce raisonnement n'est plus valable en flexion composée (si la poutre a un défaut de rectitude ou si N n'est pas bien centré...). Le flambement surviendra dans ce cas avant que σ n'atteigne σ_c [9].

1.11 Les imperfections :

Les effets des imperfections (contraintes résiduelles, défauts de verticalité, de rectitude, de planéité, défauts d'ajustage et excentricités mineures dans les assemblages, ...) doivent être pris en compte, de façon appropriée, dans l'analyse d'une structure et de ses éléments.

Il y a lieu de prendre en compte :

- Les imperfections globales pour les ossatures, qui correspondent aux effets (P- Δ) et affectent l'instabilité globale de la structure ;
- Les imperfections locales pour les barres, qui correspondent aux effets (P- δ) et affectent l'instabilité locale des éléments poutres et colonnes ;
- Les imperfections pour les systèmes de contreventements.

1.11.1 Les imperfections d'éléments

L'imperfection locale d'élément à utiliser pour prendre en compte les défauts géométriques et structuraux des barres réelles, est représentée par une cambrure comme indiquée dans la figure ci-dessous. On peut observer que son effet est identique à celui provoqué par la flèche réelle de l'élément lui-même, résultant de la charge axiale et de la flexion, c'est-à-dire que l'élément est soumis à un effet (P- δ).

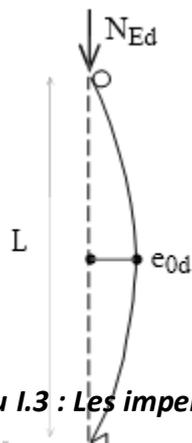


Tableau I.3 : Les imperfections des éléments selon l'EC 03

Courbe de flambement selon Tableau 6.1	Analyse élastique	Analyse plastique
	e_0 / L	e_0 / L
a ₀	1 / 350	1 / 300
a	1 / 300	1 / 250
b	1 / 250	1 / 200
c	1 / 200	1 / 150
d	1 / 150	1 / 100

Figure I.16 L'imperfection initiale en arc

Equivalente pour un élément dont dépend de la courbe de flambement concernée, de la méthode d'analyse et du type de vérification de section transversale utilisés. Les valeurs e_{0d} / L à prendre en compte selon l'Eurocode sont mentionnées au tableau ci-dessus. Il peut être envisagé, lors de la modélisation d'une structure, de représenter l'élément initialement intréprouvé par plusieurs tronçons d'éléments rectilignes.

Les effets des imperfections locales d'éléments peuvent généralement être négligés lorsqu'on effectue l'analyse globale des ossatures, sauf dans certains cas spécifiques d'ossatures souples aux effets de second ordre, constituées d'éléments particulièrement élancés.

Les cas dans lesquels ces effets doivent être pris en compte sont les éléments d'ossatures souples, soumis à une compression axiale, à au moins une extrémité (assemblage transmettant un moment), et pour lesquels :

$$\bar{\lambda} \geq 0.5 \cdot \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{Ed}}}$$

Ou : $N_{Ed} > 0.25 N_{Cr}$ en tenant compte que $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_e}$

Avec : N_{Ed} : valeur de calcul de la force de compression ;

N_{Cr} : charge critique d'Euler de l'élément, calculée au moyen d'une longueur de flambement égale à sa longueur d'épure.

1.12 Le facteur d'imperfection

Prise en compte des imperfections : il est nécessaire de prendre en compte sous forme chiffrée les imperfections réelles comme celles de rectitude ou de centrage, qui font que l'on n'a pas une bifurcation d'équilibre, mais bien une divergence de plus en plus prononcée qui va conduire la pièce à la ruine dès atteinte d'un effort normal plus ou moins éloigné de la valeur critique d'Euler, mais toujours inférieur à celui-ci.:

Courbe de flambement	a0	a	b	c	d
Facteur d'imperfection	0.13	0.21	0.34	0.49	0.76

Tableau I.4 : Les valeurs du facteur d'imperfection :

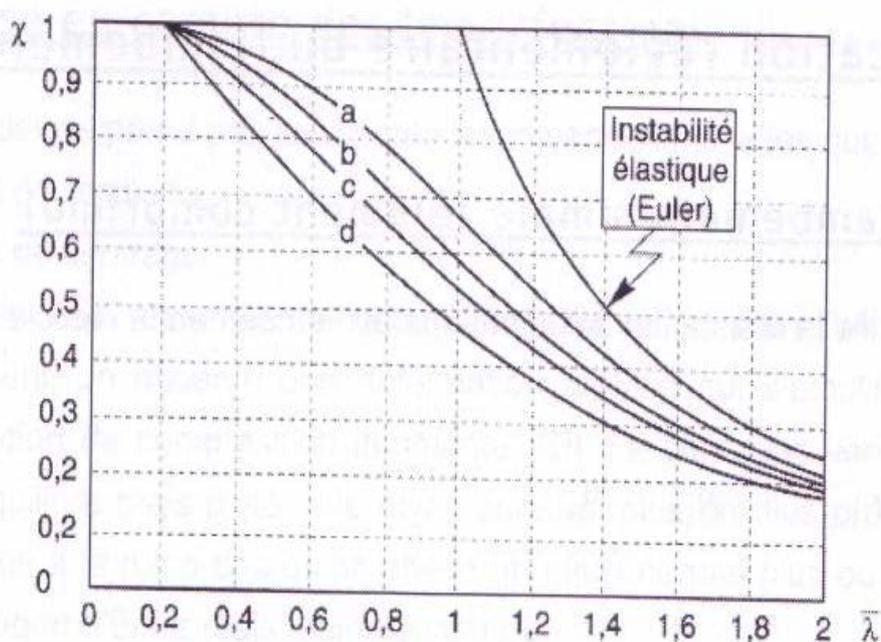


Figure1.17. La courbe de flambement

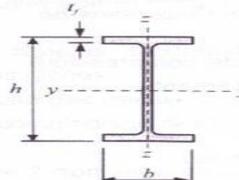
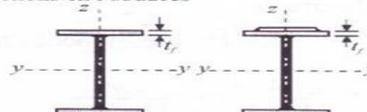
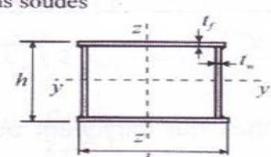
Type de section	limites	axe de flambement	courbe de flambement
Sections en I laminées 	$h / b > 1,2$; $t_f \leq 40 \text{ mm}$	$y - y'$ $z - z'$	a b
	$40 \text{ mm} < t_f \leq 100 \text{ mm}$	$y - y'$ $z - z'$	b c
	$h / b \leq 1,2$; $t_f \leq 100 \text{ mm}$	$y - y'$ $z - z'$	b c
Sections en I soudées 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	$y - y'$ $z - z'$	b c
	$t_f > 40 \text{ mm}$	$y - y'$ $z - z'$	c d
Sections creuses 	laminées à chaud	quel qu'il soit	a
	formées à froid - en utilisant f_{yb} ¹	quel qu'il soit	b
	formées à froid - en utilisant f_{ya} ¹	quel qu'il soit	c
Caissons soudés 	d'une manière générale (sauf ci-dessous)	quel qu'il soit	b
	Soudures épaisses et $b / t_f < 30$ $h / t_w < 30$	$y - y'$ $z - z'$	c c
Sections en U, L, T et sections pleines 		quel qu'il soit	c

Tableau 1.5. Choix de la courbe de flambement correspondant à une section

Pour le déterminer on passe par les 4 courbes de flambement correspondant à une graduation des imperfections présentées par les barres réelles ; les courbes de flambement dépendent du type de section, des caractéristiques géométriques ainsi que de l'axe de flambement [10].

1.13 Améliorations de la résistance au flambement :

La résistance au flambement d'un élément ou d'un composant de section, peut être améliorée de plusieurs façons.

- Les manières les plus efficaces d'améliorer la résistance au flambement consistent à accroître les dimensions de la section droite ou d'utiliser un contreventement et des maintiens de manière à modifier le mode de flambement.
- Consolidation de profils métalliques existants par adjonction de plats ou de profils soudés.

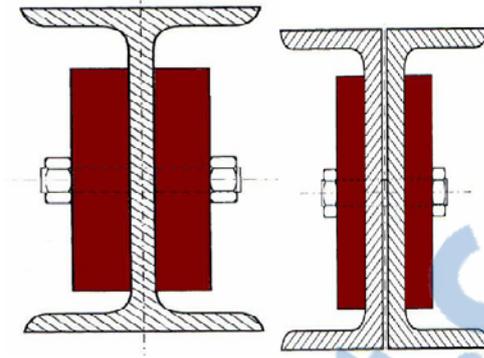


Figure. 1.18 Ajout de plates soudées sur les âmes de profils métallique U, I.

En général, les faiblesses de rigidité des poutres sont compensées en ajoutant des plats sur les semelles qui permettent d'accroître au maximum l'inertie de la nouvelle section ainsi constituée. Les faiblesses au cisaillement sont-elles réparées en ajoutant des renforts sur des âmes dans les zones d'effort tranchants importants comme les appuis. Ces ajouts de composants métalliques doivent tenir compte des compatibilités métallurgiques entre les matériaux en particulier si on souhaite faire appel au soudage.

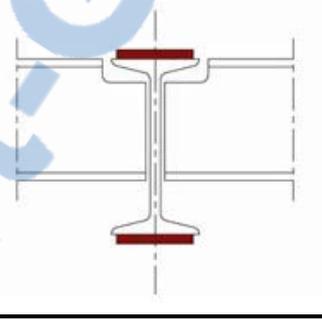


Figure.1.19. Ajout de plats soudés sur les semelles.

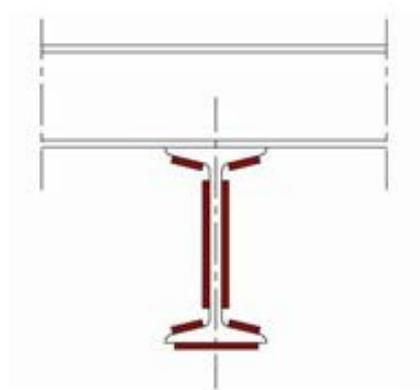


Figure.1.20. Ajout de plats soudés, semelles et âme.

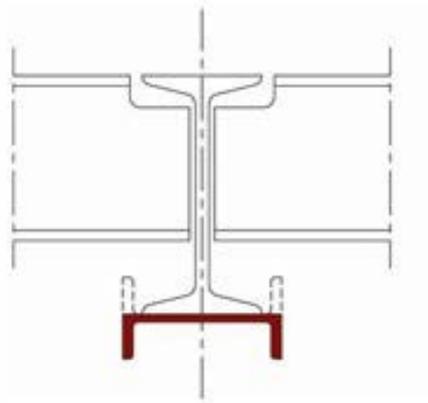


Fig.1.21. Ajout d'un profil sous la semelle inférieure.

Une autre manière d'améliorer la résistance au flambement d'un élément est de lui fournir des maintiens de meilleure qualité ou supplémentaires, afin de modifier le mode de flambement. La charge critique élastique d'un poteau en compression axiale bi articulé, par exemple, est augmentée si on ajoute un appui simple à mi-hauteur, de telle sorte que le poteau flambe dans un mode en deux demi-ondes sinusoïdales.

- De la même manière une poutre simplement appuyée, soumise à de la flexion par rapport à son axe le plus fort, est renforcée vis-à-vis du déversement en empêchant les rotations de flexion et/ou de torsion à ses supports d'extrémités, ou, plus simplement, en mettant un obstacle à tout déplacement latéral de la semelle en compression au moyen d'un entretoisement adéquat.

1.14. Conclusion :

Il n'est pas exagéré de dire que la majeure partie des écroulements des constructions est due à des phénomènes d'instabilités, plutôt qu'à une sollicitation excessive des matériaux.

C'est ce qui justifie l'importance sans cesse croissante réservée à l'étude des phénomènes d'instabilité.

Les charges critiques théoriques des différents phénomènes d'instabilité sont établies sur la base d'hypothèse d'élasticité et l'absence de tout défaut. En réalité le comportement des éléments comprimés est influé par la présence des imperfections, la plasticité de la section critique avant la ruine et l'interaction des différents modes d'instabilité. Cela nécessite le recours aux méthodes expérimentales et numériques pour l'étude de la résistance.

2.1 Introduction :

L'expérimentation démontre que l'effort de compression n'est jamais idéalement appliqué suivant l'axe moyen de la section. En effet, les pièces ne sont jamais rigoureusement rectilignes de par les diverses manutentions et transports, voire dès la sortie des laminoirs. Sur chantier, les poteaux ne sont jamais parfaitement verticaux. Et si l'on rajoute à cela les tolérances de laminage (inerties variables) ainsi que les défauts d'homogénéité (module d'élasticité E variable) on comprend aisément que la charge initialement appliquée à l'axe de la pièce se trouve inévitablement décalée, générant par la même occasion un petit moment de flexion parasite suffisamment important, mais réel est inévitable, et majorant considérablement la contrainte de compression. La pièce prend alors la forme d'une flamme ondulée, d'où le nom de flambage [11].

Les éléments de structure réels ne se comportent pas exactement comme le prédit la théorie de la bifurcation élastique. Tout d'abord, le matériau n'est pas infiniment élastique le résultat est que l'on a un comportement élasto-plastique et un flambement inélastique. Puis, les éléments de structure sont affectés de plusieurs types d'imperfections (principalement de nature géométrique et/ou mécanique) qui peuvent affaiblir sérieusement leur capacité de charge. La modification rapide de la déformation lorsque la charge appliquée augmente (caractéristique du phénomène de flambement), donne aussi lieu à des effets d'ordre second qui, lorsqu'ils sont combinés avec un comportement du matériau inélastique, ont pour résultat un comportement non-linéaire global de la structure [2].

Ce chapitre a défini les paramètres qui gouvernent le comportement élastique d'un barreau géométriquement parfait, c'est-à-dire sans défaut de linéarité initiale, ni excentricité de chargement. La présente leçon examine les effets d'un comportement inélastique du matériau, en l'absence de tout type d'imperfection. Ensuite, on étudiera tour à tour l'influence d'une imperfection géométrique. Enfin, on analysera l'effet de toutes ces caractéristiques prises ensemble.

2.2 Courbe de résistance d'une barre parfait :

L'analyse du flambement d'un poteau élastique fait ressortir l'influence de l'élanement, $\lambda = l_f/i$, sur la résistance ; l_f désigne la longueur de flambement du barreau, égale à la longueur de l'élément lorsque la barre est bi articulée et $i = \sqrt{I/A}$ désigne le rayon de giration pour le plan de flambement de flexion considéré. Si l'on représente sur une courbe la contrainte de

compression moyenne, σ_k , à la ruine, par rapport à l'élancement λ , on peut comprendre clairement la relation entre les deux types de comportement.

Le flambement critique élastique est représenté par l'hyperbole $\sigma = \sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2$; sa gamme d'application est limitée par la ligne d'écrasement plastique $\sigma = f_y$. Les deux lignes se coupent à la valeur λ_1 de l'élancement, appelée élancement de référence, tel que :

$$\pi^2 E/\lambda_1^2 = f_y, \text{ ce qui donne } \lambda_1 = \pi\sqrt{E/f_y} \quad [12]$$

L'effondrement se produit alors par écrasement plastique pour $\lambda < \lambda_1$ et par flambement élastique quand $\lambda > \lambda_1$. D'habitude on dessine la courbe sous une forme normalisée (figure 2-1), où $\bar{N} = \sigma_k/f_y$ est représenté par rapport à $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_1$, de telle sorte que l'écrasement plastique ($\bar{N} = 1$) et le flambement élastique $\bar{N} = 1/\bar{\lambda}^2$ se coupent pour $\bar{\lambda} = 1$.

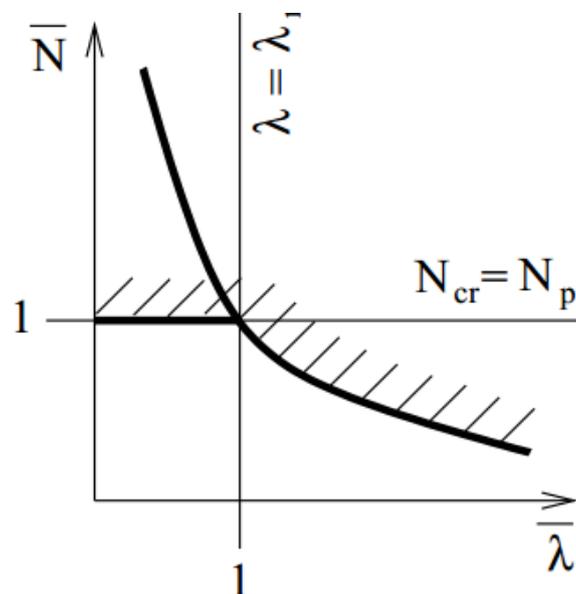


Figure 2-1 Courbe de flambement adimensionnelle \bar{N} en fonction de $\bar{\lambda}$.

La limite du flambement est la frontière de la zone hachurée. Tout point \bar{N} , $\bar{\lambda}$ au-dessus de cette limite est impossible. Pour tout point en deçà il n'y a pas de risque de flambement ni de plastification en compression simple.

Pour $0 \leq \bar{\lambda} < \infty$ alors $0 \leq \bar{N} < 1$.

Exemple :

On charge axialement 3 tubes fins à froid conforme à la norme NF A 49541 $\varnothing 42.4 \times 2.6 \text{ mm}$ de caractéristiques :

Module de Young	E	210 000	MPa
Limite élastique	σ_e	235	MPa
Section	A	325.1	mm^2
Moment quadratique	I	64 640	mm^4
Module élastique	W_{el}	3 049	mm^3
Rayon de giration	i	14.1	mm
Effort normal plastique	N_p	76 398.5	N

Tableau. 2.1- Caractéristiques du tube NF A 49 541 ϕ 42.4 \times 2.6 mm

3 barres bi articulées soumises à un chargement axial.

$$\lambda_e = \pi \sqrt{E/\sigma_e} \approx 93.91$$

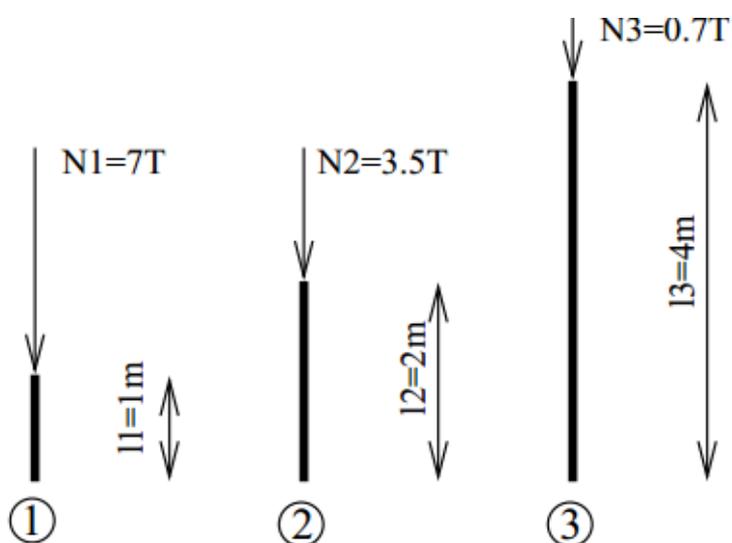


Fig. 2.2 - Données Exemple 2-2

Soit les valeurs :

$N_{appliqu}$	N	$N_1 = 70\ 000$	$N_2 = 35\ 000$	$N_3 = 7\ 000$
$\bar{N}_{appliqu} = \frac{N_{appliqu}}{N_p}$		$\bar{N}_1 = 0.916$	$\bar{N}_2 = 0.458$	$\bar{N}_3 = 0.1$
l	mm	$l_1 = 1\ 000$	$l_2 = 2\ 000$	$l_3 = 4\ 000$
$\lambda = \frac{l}{i}$		$\lambda_1 = 70.92$	$\lambda_2 = 141.84$	$\lambda_3 = 283.69$
$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_e}$		$\bar{\lambda}_1 = 0.755$	$\bar{\lambda}_2 = 1.510$	$\bar{\lambda}_3 = 3.021$
N_{cr}	N	133 973, 96	33 493, 49	8 373, 37
$\bar{N}_{maxi} = \frac{N_{cr}}{N_p} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$		$\frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} = 1.753$	$\frac{1}{\bar{\lambda}_2^2} = 0.438$	$\frac{1}{\bar{\lambda}_3^2} = 0.11$
$\bar{N}_{appliqu} \leq \bar{N}_{maxi}$		OK	Danger	Juste

Tableau 2-2 : Résultats de l'exemple 2-2

La représentation des points sur la courbe adimensionnelle est :

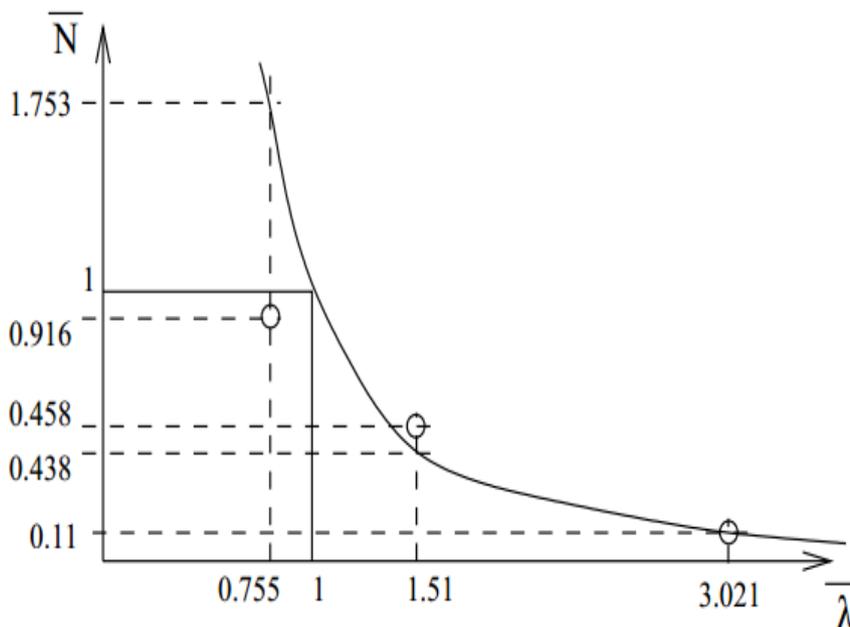


Figure 2.3 : La représentation des points sur la courbe adimensionnelle

On remarquera que pour la barre 1 il n'y a pas de risque de flambement.

2.3 Résistance des barres réelles :

Les paragraphes précédents considéraient des modèles de barreaux hautement idéalisés qui ne représentent pas la réponse réelle qu'auraient des éléments en compression, en raison des imperfections inévitables dues au procédé de fabrication. Les paragraphes suivants prennent en compte l'effet de ces imperfections sur la réponse des structures réelles ; on va considérer tout

d'abord les imperfections prises séparément, puis combinées comme cela peut être le cas dans des structures réelles.

2.3.1 Imperfection géométrique :

Le flambement se caractérise par un champ de déplacement prédominant associé à la configuration après flambement de l'élément ; tout déplacement initial influera donc sur l'instabilité, de même que toute excentricité de la charge appliquée. Les effets secondaires de déstabilisation qui en résultent réduisent la capacité de charge, par rapport à celle d'un Élément parfait.

Les imperfections géométriques correspondent soit à un non linéarité de l'élément de structure (figure 2-4 a), soit à une excentricité de la charge appliquée (figure 2-4 b). En raison du fait que ces imperfections sont dans la gamme des tolérances normales de fabrication, elles ne sont généralement pas visibles et ne peuvent pas être quantifiées de manière précise à l'avance ; elles peuvent cependant être prises en compte, de manière appropriée, dans le calcul. Considérons maintenant les deux types d'imperfections géométriques représentées sur la figure 2-4:

- non linéarité initiale du barre dans le plan de flambement.
- Excentricité accidentelle de la charge supposée axiale

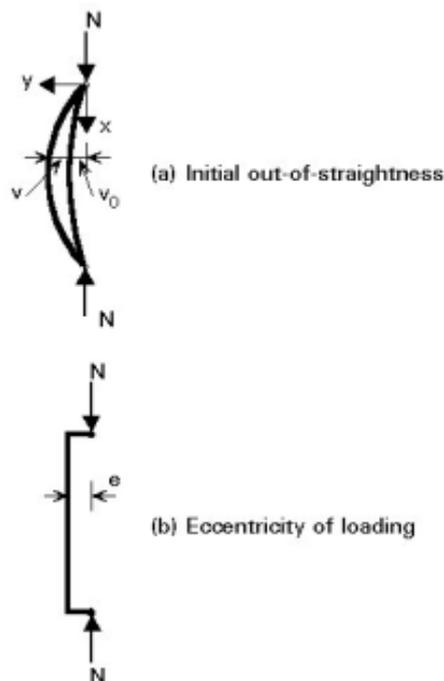


Figure 2-4: Les imperfections géométriques initiales

Le type le plus important de ces imperfections est la courbure de l'axe de la colonne. Cet axe est une courbe irrégulière quelconque, ordinairement située d'un seul côté de la droite joignant les extrémités de la barre [13].

2.3.2 Non linéarité initiale :

La non linéarité initiale d'un barre bi articulé (figure 2-4 a) est aussi appelé « irrégularité initiale » ou « courbure initiale ». Elle crée un moment de flexion secondaire dès l'application de l'effort de compression qui à son tour conduit à une déformation de flexion plus importante et une augmentation de l'amplitude du bras de levier des forces de compression appliquées au bord extérieur. Une configuration déformée stable est possible aussi longtemps que le moment extérieur, c'est-à-dire le produit de la charge par le déplacement latéral, ne dépasse pas la résistance du moment intérieur de la section. Le flambement du poteau en présence d'une courbure initiale se fait donc par divergence d'équilibre, en opposition au type d'instabilité par bifurcation typique des éléments en compression [14].

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \cdot V \quad \text{Avec} \quad M = N \cdot f = N \cdot e_0 \cdot \frac{Nk}{Nk-N} \quad (\text{déformation initial})$$

Si on note N_r l'effort normal à la ruine

$$\sigma_{max} = f_y \Rightarrow \frac{N}{A} + \frac{\frac{Nk}{Nk-N} \cdot e_0 \cdot N}{\frac{I}{V}} = f_y$$

$$\Rightarrow N + \frac{Nk}{Nk-N} \cdot N \cdot \frac{e_0 \cdot A}{V} = f_y \cdot A$$

$$\Rightarrow \frac{Nk}{Nk-N} \cdot N \cdot \frac{e_0 \cdot A}{V} = f_y \cdot A - N$$

$$(f_y \cdot A - N) \cdot (Nk - N) = Nk \cdot N \cdot \frac{e_0 \cdot A}{V} \dots\dots\dots (1).$$

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{E/f_y}$$

Où λ_1 est l'élancement limitant la validité de la formule d'Euler, c'est-à-dire celui qui fournit dans la formule d'Euler une contrainte critique valant la limite élastique :

$$Nk = \pi^2 \frac{E \cdot A}{\lambda^2}$$

$$\frac{Nk}{f_y \cdot A} = \pi^2 \frac{E}{f_y \cdot \lambda^2} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$$

Soit $\bar{N} = \frac{N}{f_y \cdot A}$

\bar{N} Est la force portante relative, c'est-à-dire le rapport de la force portante réelle (ou « charge critique ») à l'effort normal plastique du profil

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \lambda = \frac{Lf}{i}$$

$\bar{\lambda}$: Est l'élanement relatif, c'est-à-dire le rapport de l'élanement réel à l'élanement limite λ_1

$$(1) \rightarrow \left(\frac{f_y \cdot A}{f_y \cdot A} - \frac{N}{f_y \cdot A} \right) \cdot \left(\frac{Nk}{f_y \cdot A} - \frac{N}{f_y \cdot A} \right) = \frac{Nk}{f_y \cdot A} \cdot \frac{N}{f_y \cdot A} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}}$$

$$\Rightarrow (1 - \bar{N}) \cdot \left(\frac{1}{\bar{\lambda}^2} - \bar{N} \right) = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}}$$

$$\Rightarrow (1 - \bar{N}) \cdot \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \cdot \bar{N} \right) = \bar{N} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}}$$

$$\Rightarrow (1 - \bar{N}) \cdot \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \cdot \bar{N} \right) = \bar{N} \cdot \eta$$

$$\eta = \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}}$$

η : Paramètre représentant les imperfections de la poutre

Application : on prend deux profils HEA

- HEA 200 de classe 1 (domaine plastique) des caractéristiques suivent :

$I_{yy}=3,69143. 10^7 \text{ mm}^4$	$I_{zz}=1,3358219. 10^7 \text{ mm}^4$	$i_{zz}=82.8104 \text{ mm}$	$A=5383 \text{ mm}^2$
$H=190 \text{ mm}$	$b=200 \text{ mm}$	$v=100 \text{ mm}$	$L=5000 \text{ mm}$
$f_y=235 \text{ N/mm}^2$	$E=210000 \text{ N/mm}^2$		

Tableau 2- 3 : Les caractéristiques d'un HEA 200

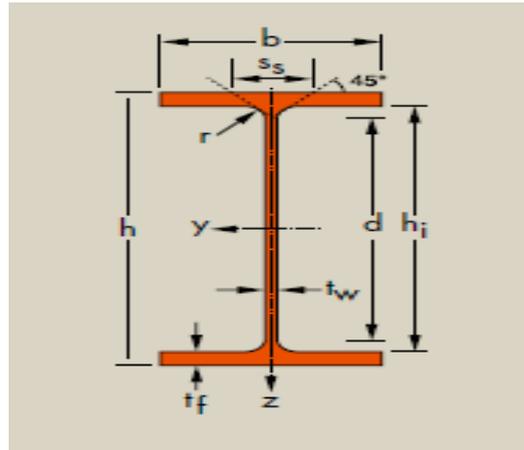


Figure2- 5 : Notation des caractéristiques d'un profilé HEA.

HEA 300 de classe 3 (domaine élastique)des caractéristiques suivent :

$I_{yy}=18.26. 10^7 \text{ mm}^4$	$I_{zz}=6.310. 10^7 \text{ mm}^4$	$i_{zz}=74.9 \text{ mm}$	$A=11250 \text{ mm}^2$
$H=290 \text{ mm}$	$b=300 \text{ mm}$	$v=150 \text{ mm}$	$L=5000 \text{ mm}$
$f_y=275 \text{ N/mm}^2$	$E=210000 \text{ N/mm}^2$		

Tableau 2- 4 : Les caractéristiques d'un HEA 300

2.3.3 Résolution numérique sur ordinateur :

Les calculs sur ordinateur définissent le comportement d'une barre imparfaite tout au long de sa mise en charge Ils donnent l'évolution de l'effort \bar{N} de compression en fonction de $\bar{\lambda}$ de toutes les caractéristiques de la barre comme le ferait une expérience réelle de laboratoire, et s'appellent pour cette raison « calculs de Simulation » [15]; La méthode numérique résoudre le problème par approximations successives. Sur **MATLAB** sous l'algorithme suivent :

```

clc; format short; clear all;
options = optimset ('Algorithm', 'Levenberg-Marquardt', 'TolX', 1e-
20, 'TolFun', 1e-20);
a=5383;           % Aire de la section du poteau HEA200
iz=13358219;     % Moment d'inertie du poteau HEA200
rz=(iz/a)^0.5;   % Rayon de giration du poteau HEA200
welz=133582;     % Module d'inertie élastique du poteau HEA200
wplz=203800;     % Module d'inertie élastique du poteau HEA200
wlz=wplz;
v=100;           % Demi largeur du poteau
alfa=0.49;       % Coefficient d'imperfection par rapport à la
section étudiée
% Courbe de flambement (c) : e0=L/200 (Elastique); e0=L/150
(Plastique);
e0=0;           % Excentricité géométrique initiale du poteau
ep=0;           % Excentricité maximale de l'effort de compression
sur le poteau
am=0;           % Proportion du moment sollicitant par rapport au
moment résistant élastique
av=0;           % Proportion de l'effort tranchant sollicitant par
rapport à l'effort tranchant plastique résistant
result=zeros(80,7);
for j=0:5
for i=0:79
lambdab=(0.1*i)+0.000001;
    result(i+1,1)=lambdab;
    Lf=lambdab*93.9*rz;
    e0= j*0.2*Lf/200;
ep=1*Lf/750;
% x est l'effort = N/(fy.A) est fonction de lambdab=lambda/lambdab1;

    y=@(x) ( (1-x)*((1/lambdab^2)-x) -(x*e0*a/(wlz*lambdab^2)) -
((1/lambdab^2)-x)*x*ep*a/(wlz*cos(0.5*pi*lambdab*sqrt(x)))) -
((1/lambdab^2)-x)*am) - (((1/lambdab^2)-x)*(1-(1-av^2)^0.5)) );
x0 = 0;
    result(i+1,2+j) = fsolve(y,x0,options);
end;
end;

disp(result);
% Courbe de Flambement
set(0, 'DefaultAxesLineStyleOrder', {'-'});
plot(result(1:80,1),result(1:80,2:7));
grid on;
title('Nb = f(Lambdab)');

```

Chaque courbe de flambement est obtenue par la détermination numérique de \bar{N} en fonction de $\bar{\lambda}$; Les courbes théoriques seront obtenues en simulant au mieux les caractéristiques des barres

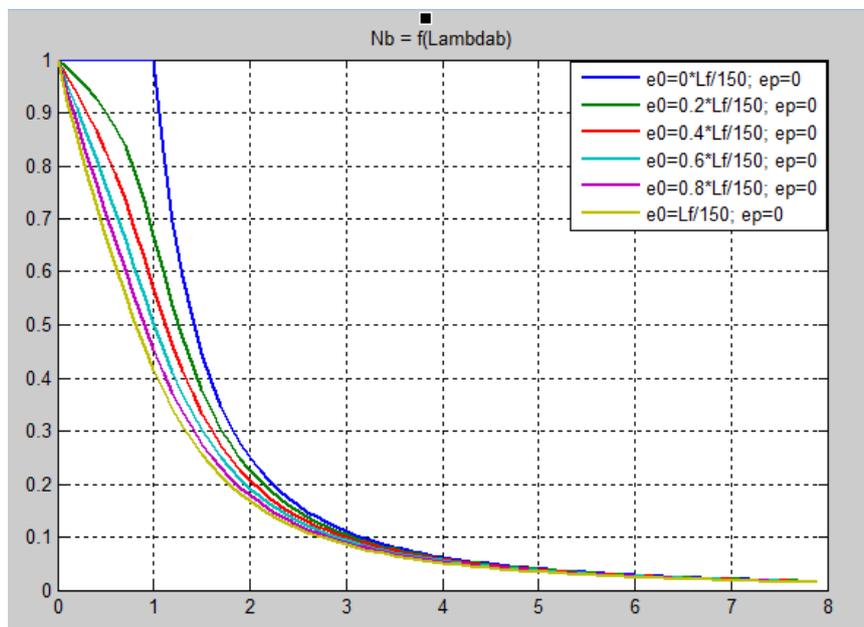


Fig. 2-6 Courbes non-dimensionnelles de flambement de la non linéarité initiale (HEA 200)

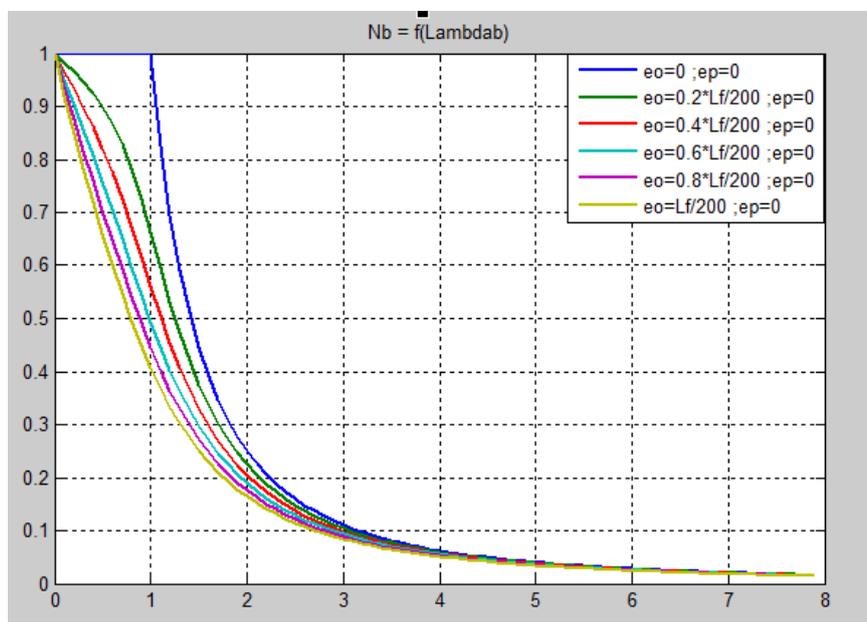


Fig. 2-7 Courbes non-dimensionnelles de flambement de la non linéarité initiale (HEA 300)

2.3.4 Interprétation des courbes :

Pour les deux profils la première courbe, qui représente $e_0=0$ et $e_p=0$ il est divisé en deux phases.

La première étape : dans laquelle la courbe est fixe selon l'équation $(1 - \bar{N}) = 0$

Et la deuxième phase : de la courbe diminue de la valeur la plus élevée jusqu'à ce qu'elle devienne nulle selon l'équation $(1 - \bar{\lambda}^2 \cdot \bar{N}) = 0$

Si en supposant que l'imperfection de non linéarité initiale En l'absence de l'excentricité du chargement ; et plus que la valeur de e_0 augment, La courbe diminue à partir du point de départ selon un ajustement inverse entre \bar{N} et $\bar{\lambda}$ tel que :

Pour $\bar{\lambda} = 1$

	HEA 200			HEA 300		
	e_0	e_p	\bar{N}	e_0	e_p	\bar{N}
Courbe 1	0	0	1	0	0	1
Courbe 2	$e_0 = 20 \%L/150$	0	0.6682	$e_0 = 20 \%L/200$	0	0.6610
Courbe 3	$e_0 = 40 \%L/150$	0	0.5676	$e_0 = 40 \%L/200$	0	0.5591
Courbe 4	$e_0 = 60 \%L/150$	0	0.5019	$e_0 = 60 \%L/200$	0	0.4930
Courbe 5	$e_0 = 80 \%L/150$	0	0.4534	$e_0 = 80 \%L/200$	0	0.4442
Courbe 6	$e_0 = L/150$	0	0.4152	$e_0 = L/200$	0	0.4060

Tableau 2-5 : L'influence du non linéarité initial sur la résistance \bar{N} pour les deux profils

En remarque une diminution de la résistance de 33.18% (HEA 200) et 33.9% (HEA 300) avec effet d'imperfection (non linéarité initial); a ca résistance globale de la barre sans effet d'imperfection, en suite la valeur de \bar{N} elle va affaibli progressivement par l'influence de la non linéarité initial pour un élancement réduit égale à 1

Se Conduisant à un rétrécissement de la zone de la plasticitéet augmentant ainsi la probabilité d'instabilité par flambement.

2.4 Excentricité du chargement :

Une charge de compression N , appliquée enextrémité avec une excentricité e_p à un barreau initialement rectiligne, bi articulé vaintroduire un moment de flexion du premierordre dans le barreau qui va commencer à ledéformer latéralement de la même manière quele barreau avec irrégularité initiale que l'on aétudié précédemment.

A la différence de la courbure initiale qui dépend fortement de la longueur du barreau, l'excentricité duchargement est plus liée à la taille de la section. De plus, la flexion du premier ordre est constant surtout la longueur de l'élément, de telle sorte que la flexion va avoir probablement pour effet de rendre larésistance ultime d'éléments très massifs plus faible que la charge plastique d'écrasement.

Exemple :

En reprenant les données de l'exemple précédant et en fait la même résolution sur ordinateur pour le cas d'excentricité de chargement sur les deux profils :

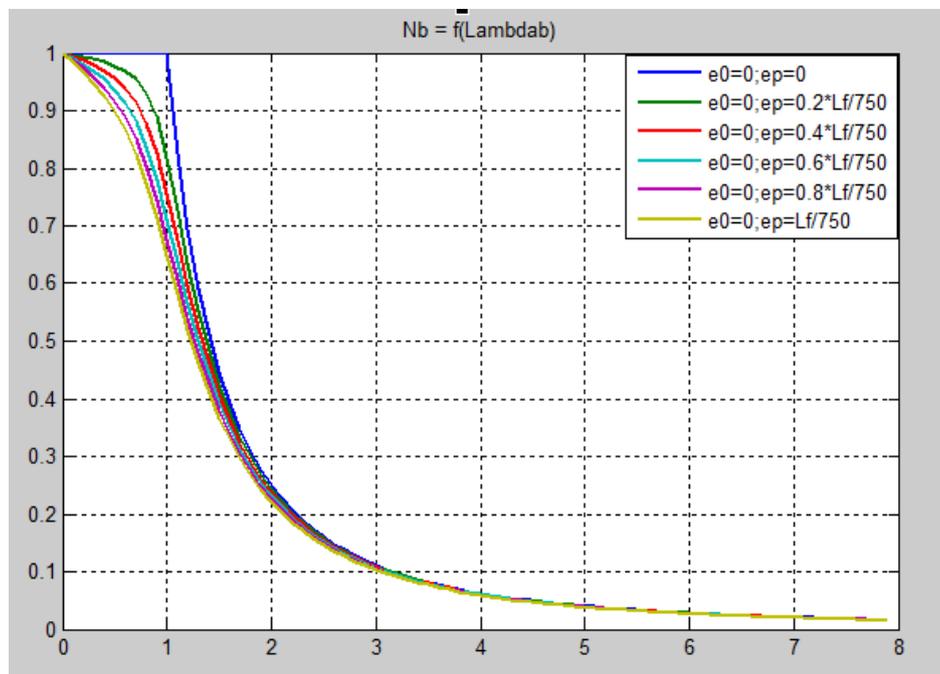


Fig. 2-8 Courbes non-dimensionnelles de flambement du l'excentricité du chargement (HEA 200)

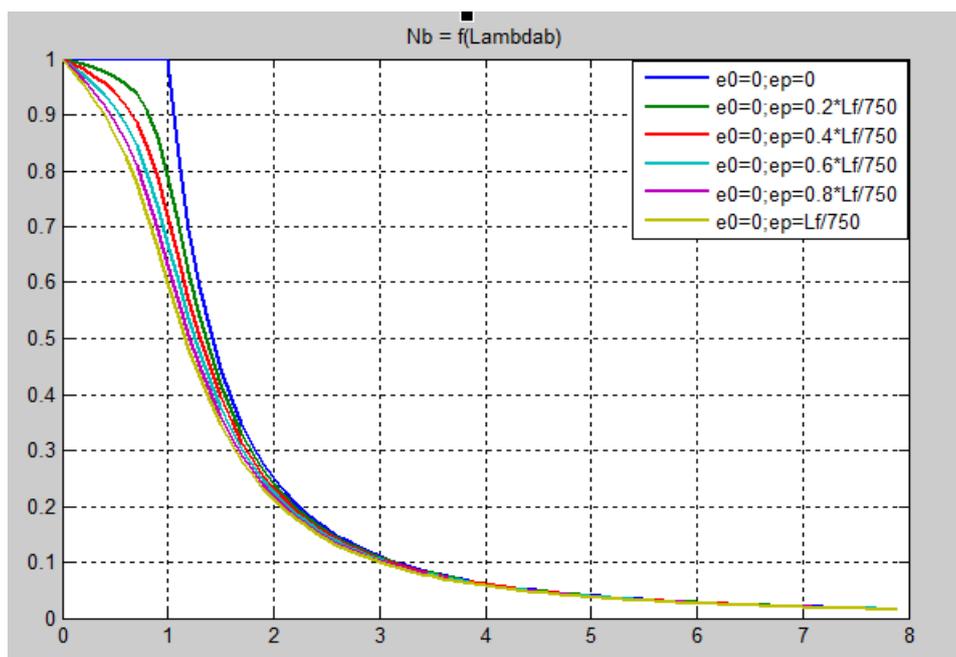


Fig. 2-9 Courbes non-dimensionnelles de flambement du l'excentricité du chargement (HEA 300)

Pour $\bar{\lambda} = 1$

	HEA 200			HEA 300		
	e0	ep	\bar{N}	e0	ep	\bar{N}
Courbe 1	0	0	1	0	0	1
Courbe 2	0	ep = 20 %L/750	0.8188	0	ep = 20 %L/750	0.7897
Courbe 3	0	ep = 40 %L/750	0.7557	0	ep = 40 %L/750	0.7187
Courbe 4	0	ep = 60 %L/750	0.7113	0	ep = 60 %L/750	0.6695
Courbe 5	0	ep = 80 %L/750	0.6763	0	ep = 80 %L/750	0.6312
Courbe 6	0	ep = 100%L/750	0.6472	0	ep = 100%L/750	0.5996

Tableau 2-6 : L'influence de l'excentricité du chargement sur la résistance \bar{N} pour les deux profils

Dans ce cas, on suppose que l'excentricité de chargement e_p va changer progressif bien que e_0 il reste nulle ; On remarque les mêmes résultats de la courbe précédent et par conséquent, l'impact de e_p est un peu moins que l'effet de e_0 , donnant ainsi la même note en ce qui concerne le rétrécissement de la zone de la plasticité et augmentant ainsi la probabilité d'instabilité par flambement .

2.5 Effets combinés des imperfections :

Une courbure initiale, une excentricité initiale de la charge, ou un manque de clarté dans la définition du point d'écoulement plastique diminuent la résistance du poteau dans toute la gamme de l'élancement ou une partie, bien qu'il n'affecte que la gamme des élancements faibles [16]. L'effet bénéfique ainsi obtenu fait en général plus que compenser la perte de résistance due aux excentricités accidentelles ; dans tous les cas la courbe de résistance du poteau est considérée comme tronquée, $\sigma = f_y$ de telle sorte que l'on ignore la réserve de résistance.

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \cdot V$$

$$\text{Avec } M = N \cdot f = N \cdot \left(e_0 \cdot \frac{Nk}{Nk-N} + e' \cdot \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \right)$$

Le même développement peut être repris :

$$\sigma_{\max} = f_y \Rightarrow \frac{N}{A} + \frac{1}{I} \cdot N \cdot e_0 \cdot \frac{Nk}{Nk-N} + \frac{1}{I} \cdot N \cdot e' \cdot \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} = f_y$$

$$\Rightarrow N + \frac{Nk}{Nk-N} \cdot N \cdot \frac{e_0 \cdot A}{I} + \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot N \cdot \frac{e' \cdot A}{I} = f_y \cdot A$$

$$\Rightarrow \frac{Nk}{Nk-N} \cdot N \cdot \frac{e_0 \cdot A}{I} + \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot N \cdot \frac{e' \cdot A}{I} = f_y \cdot A - N$$

$$\Rightarrow (f_y \cdot A - N) \cdot (Nk - N) = Nk \cdot N \cdot \frac{e_0 \cdot A}{I} + \frac{Nk-N}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot N \cdot \frac{e' \cdot A}{I}$$

$$\Rightarrow (1 - \bar{N}) \cdot \left(\frac{1}{\lambda^2} - \bar{N} \right) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \bar{N} \right) \cdot \bar{N} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}} \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot \frac{e' \cdot A}{\frac{I}{v}} \dots (2)$$

$$\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right) = \cos\left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\frac{N}{(fy \cdot A)}}{\frac{Nk}{(fy \cdot A)}}\right]$$

$$\cos\left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\bar{N}}{\frac{1}{\lambda^2}}\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \bar{\lambda} \cdot \sqrt{\bar{N}}\right)$$

$$(1 - \bar{N}) \cdot \left(\frac{1}{\lambda^2} - \bar{N} \right) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \bar{N} \right) \cdot \bar{N} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \bar{\lambda} \cdot \sqrt{\bar{N}}\right)} \cdot \frac{e' \cdot A}{\frac{I}{v}} \dots (**)$$

Exemple :

En reprenant les mêmes données de l'exemple précédent pour un effet combiné des imperfections :

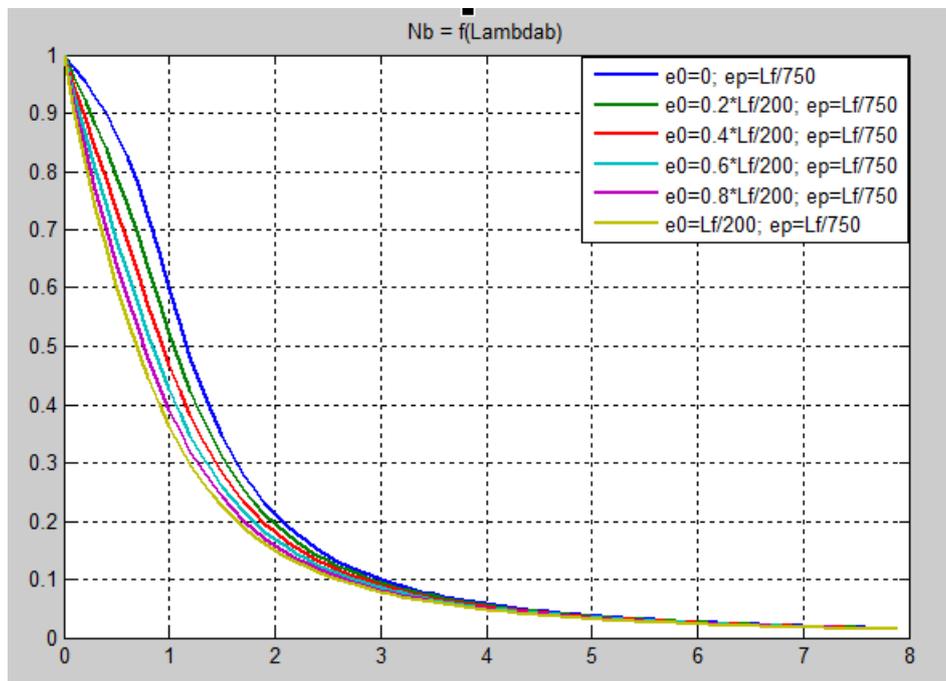


Fig. 2-10: Courbes non-dimensionnelles de flambement de l'effet combiné des imperfections (HEA 200)

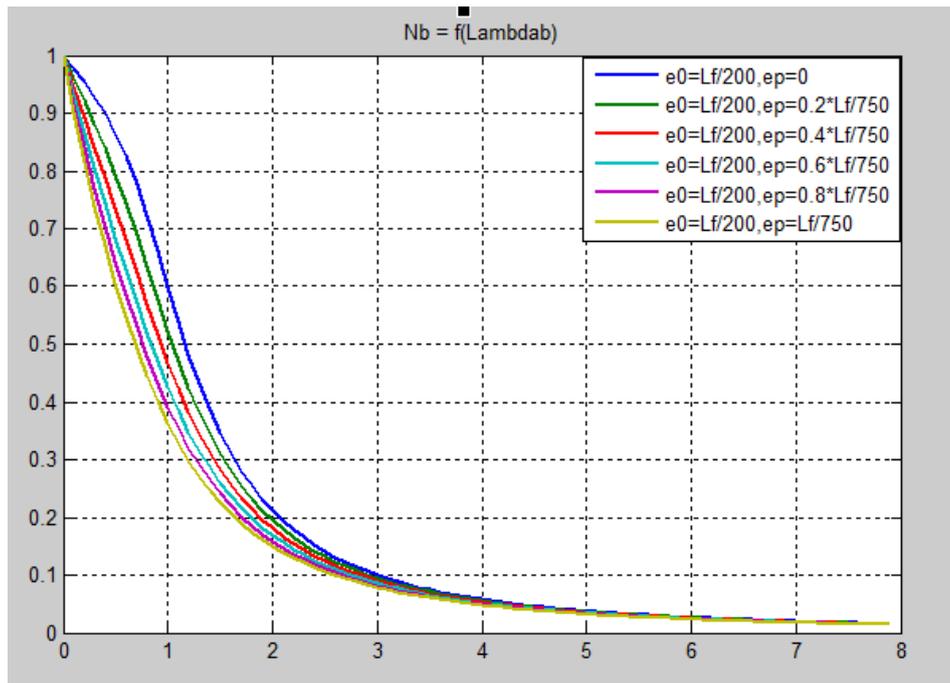


Fig. 2-11 Courbes non-dimensionnelles de flambement du l'effet combinés des imperfections (HEA 300)

Pour $\bar{\lambda} = 1$

	HEA 200			HEA 300		
	e0	ep	\bar{N}	e0	ep	\bar{N}
Courbe 1	0	L/750	0.6472	0	0	0.5996
Courbe 2	20 %L/150	L/750	0.5568	20 %L/200	L/750	0.5226
Courbe 3	40 %L/150	L/750	0.4951	40 %L/200	L/750	0.4675
Courbe 4	60 %L/150	L/750	0.4487	60 %L/200	L/750	0.4250
Courbe 5	80 %L/150	L/750	0.4117	80 %L/200	L/750	0.3908
Courbe 6	100%L/150	L/750	0.3813	100%L/200	L/750	0.3624

Tableau 2-7 : L'influence d'effet combinée de l'imperfection sur la résistance \bar{N} pour les deux profils

Lorsque ont fixée la valeur de $e_{pa}l/750$ et de modifier la valeur du e_0 à double effet de l'imperfection réduit la résistance de la colonne de manière proportionnelle pour tous les courbe

Chapitre 2 : Influence des imperfections géométrique sur des barres comprimées

et donc elle augmente la proportion de rétrécissement la zone de plasticité et donc le risque de déformation plus (déformation plastique ou bien instabilité élastique par flambement).

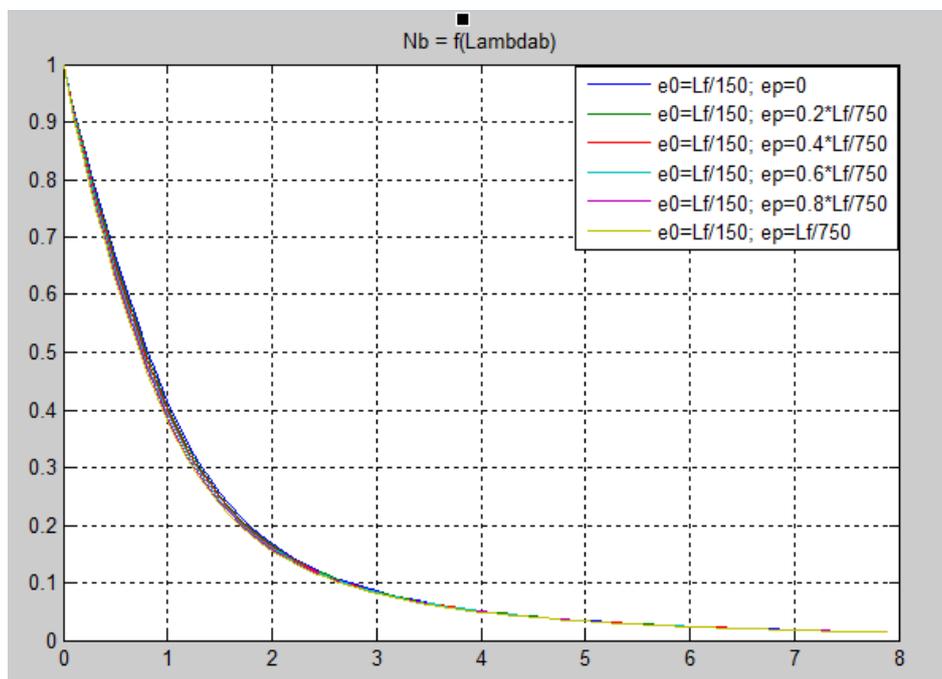


Fig. 2-12 Courbes non-dimensionnelles de flambement de l'effet combinés des imperfections (HEA 200)

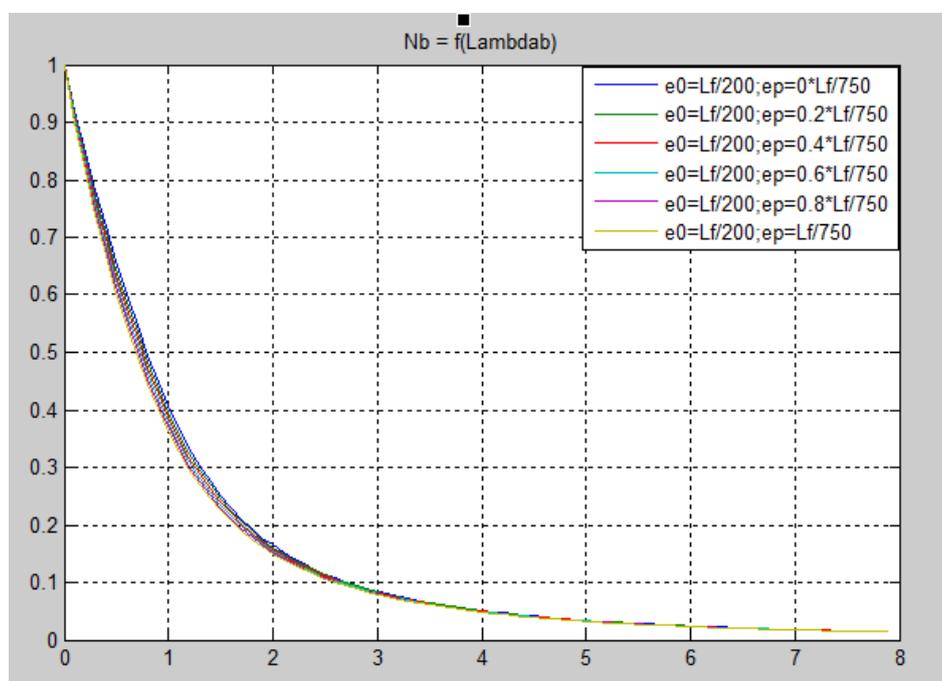


Fig. 2-13 Courbes non-dimensionnelles de flambement de l'effet combinés des imperfections (HEA 300)

Pour $\bar{\lambda} = 1$

	HEA 200			HEA 300		
	e0	ep	\bar{N}	e0	ep	\bar{N}
Courbe 1	L/150	0	0.4152	L/200	0	0.4060
Courbe 2	L/150	20 %L/750	0.4078	L/200	20 %L/750	0.3962
Courbe 3	L/150	40 %L/750	0.4007	L/200	40 %L/750	0.3871
Courbe 4	L/150	60 %L/750	0.3940	L/200	60 %L/750	0.3784
Courbe 5	L/150	80 %L/750	0.3875	L/200	80 %L/750	0.3702
Courbe 6	L/150	100%L/750	0.3813	L/200	100%L/750	0.3624

Tableau 2-8: L'influence d'effet combinée de l'imperfection sur la résistance \bar{N} pour les deux profils

Lorsque vous installez la valeur de e_0 à $l/150$ et changer e_p , on constate une diminution de la valeur principale des courbes par rapport à la précédente **figure 2-9** En conséquence, la sphère privée de la zone de plasticité est diminuée, ce qui augmente également le risque de flambage

2.6 Conclusion :

Possédant les imperfections à introduire pour le calcul des charges de ruine, on peut passer à la détermination de ces dernières. On a calculé électroniquement 24 courbes de flambement, pour un profil de HEA 200 de classe 1 et un profil de HEA 300 de classe 3, dont on ne donnera ici que les résultats importants.

- Un barreau initialement droit chargé en compression, constitué d'un matériau élasto-plastique parfait, en l'absence de contraintes résiduelles, peut s'effondrer soit par écrasement plastique pour $\lambda < \lambda_1$ (HEA200), soit par flambement élastique de poteau pour $\lambda > \lambda_1$ (HEA300).
- Cette résistance « idéale » (résistance) est en pratique inférieure, en raison d'imperfections géométriques telles qu'irrégularité initiale, excentricité du chargement, et manque de définition précise du point d'écoulement plastique.
- Les imperfections ont pour effet de diminuer la résistance pour des valeurs intermédiaires de l'élanement ; la perte de résistance la plus importante est obtenue pour le domaine des valeurs d'élanements $\lambda \approx \lambda_1$, pour lesquelles les charges plastiques d'écrasement et les charges critiques de flambement élastique coïncident presque et donc interagissent le plus.
- L'effet des imperfections est faible dans la gamme des valeurs d'élanements très grands et la charge ultime est proche de la charge critique de flambement élastique.
- Le rapport d'élanement est le paramètre géométrique sur lequel on devrait baser la détermination de la nature du comportement et du mode d'effondrement.

3.1 Introduction

L'influence des imperfections sur la résistance ultime a été analysée en détail dans le chapitre précédent, en faisant référence au flambement de flexion d'un poteau. C'est la forme d'instabilité d'élément qui a été le plus étudiée et l'on a une compréhension presque complète du phénomène.

La plupart des conclusions tirées du chapitre précédent sont encore valables, en des termes généraux, pour d'autres formes d'instabilité. Ces formes d'instabilité sont, toutefois, caractérisées par différentes sortes de déformations, de telle sorte que la nature des imperfections qui affectent le plus la résistance ultime crée des effets différents de ceux créés par le flambement de flexion ; pour mieux comprendre la résistance des poteaux au flambement réel, il faut analyser l'effet des imperfections sur ces différentes formes d'instabilité [2].

Les ossatures des bâtiments en acier sont normalement constituées de poutres soumises principalement à une flexion de poteaux sollicités en flexion et compression combinées. Ces derniers sont souvent désignés de ce fait sous le vocable de barre comprimée fléchie [17]. De nombreux travaux de recherche ont été consacrés dans le passé à l'étude du comportement de la barre comprimée fléchie et à l'évaluation de sa capacité portante. Ils ont conduit à de multiples formules d'interaction entre la compression et la flexion, dont certaines se sont trouvées introduites d'abord, dans les codes nationaux, plus tard, dans les recommandations de la Convention Européenne de la construction Métallique [16] et enfin, plus récemment, dans le projet d'Eurocode 3, Partie 1.1 [18], consacré aux constructions en acier à usage de bâtiment.

On peut presque affirmer qu'il y a autant de types de formules d'interaction des barres comprimées fléchies qu'il y a de chercheurs qui se sont attaqués au sujet. Ceci n'a rien de surprenant si l'on sait que l'étude rigoureuse de la barre comprimée fléchie est d'une très grande complexité et que toute formule d'interaction de barre comprimée fléchie n'est que le résultat d'un certain nombre de simplifications et d'approximations d'ingénieur.

3.2 Les Barres Comprimées Fléchies Examinées

Pour la présente étude, deux types de section ont été examinés : section laminée à chaud en double T de type HEA200 et l'autre de type HEA300.

Les barres comprimées fléchies faisant usage de ces sections sont comprimées axialement et soumises en outre, soit à flexion mono-axiale, autour de l'axe fort ou de l'axe faible, soit à flexion bi-axiale, c'est-à-dire à flexions simultanées autour des deux axes principaux d'inertie.

Afin de ne pas encore compliquer le problème, on se borne à n'examiner que les sections soumises à flexion mono-axiale autour de l'axe faible d'inertie.

Les extrémités de la barre comprimée fléchie sont supposées articulées, ne pouvant subir de déplacement transversal, perpendiculairement à l'axe longitudinal de l'élément; ceci revient à dire que la barre comprimée fléchie appartient à une ossature à nœuds non déplaçables.

3.2.1 Effet du moment fléchissant :

La distribution des moments de premier ordre le long de la barre comprimée fléchie est supposée linéaire

$$\sigma_{max} = f_y \Rightarrow \frac{N}{A} + \frac{N \cdot f}{I} \cdot V + \frac{M}{I} \cdot V = f_y$$

$$\frac{N}{A} + N \cdot \frac{1}{\frac{I}{V}} \cdot \left(e_0 \cdot \frac{Nk}{Nk - N} + e' \cdot \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \right) + \frac{1}{\frac{I}{V}} \cdot M = f_y$$

$$\Rightarrow \frac{N}{A} + \frac{1}{\frac{I}{V}} \cdot N \cdot e_0 \cdot \frac{Nk}{Nk - N} + \frac{1}{\frac{I}{V}} \cdot N \cdot e' \cdot \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} + \frac{1}{\frac{I}{V}} \cdot M = f_y$$

$$\Rightarrow N + \frac{Nk}{Nk - N} \cdot N \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{V}} + \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot N \cdot \frac{e' \cdot A}{\frac{I}{V}} + \frac{A}{\frac{I}{V}} \cdot M = f_y \cdot A$$

$$\Rightarrow (f_y \cdot A - N) \cdot (Nk - N) = Nk \cdot N \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{V}} + \frac{(Nk - N)}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot N \cdot \frac{e' \cdot A}{\frac{I}{V}} + \frac{M \cdot A \cdot (Nk - N)}{\frac{I}{V}}$$

Soit :

$$\bar{N} = \frac{N}{f_y \cdot A}$$

$$Nk = \pi^2 \frac{E \cdot A}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$(1 - \bar{N}) f_y \cdot A (Nk - N) f_y \cdot A = Nk \cdot N \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{V}} + \frac{(Nk - N)}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot N \cdot \frac{e' \cdot A}{\frac{I}{V}} + \frac{M \cdot A \cdot (Nk - N)}{\frac{I}{V}}$$

$$\frac{Nk}{f_y \cdot A} = \pi^2 \frac{E}{f_y \cdot \lambda^2} = \left(\frac{\lambda 1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \bar{N}\right) \cdot \left(\frac{1}{\bar{\lambda}^2} - \bar{N}\right) \\
 &= \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}} + \left(\frac{1}{\bar{\lambda}^2} - \bar{N}\right) \cdot \bar{N} \cdot \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot \frac{e' \cdot A}{\frac{I}{v}} + \left(\frac{1}{\bar{\lambda}^2} - \bar{N}\right) \cdot \frac{M \cdot A}{\frac{I}{v} f_y \cdot A} \\
 & \cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right) = \cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\frac{N}{(f_y \cdot A)}}{Nk}}\right) \\
 & \cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{Nb}{\lambda^2}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \bar{\lambda} \cdot \sqrt{\bar{N}}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \bar{N}\right) \cdot \left(\frac{1}{\bar{\lambda}^2} - \bar{N}\right) \\
 &= \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}} + \left(\frac{1}{\bar{\lambda}^2} - \bar{N}\right) \cdot \bar{N} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \bar{\lambda} \cdot \sqrt{\bar{N}}\right)} \left(\frac{1}{\bar{\lambda}^2} \cdot \bar{N}\right) \frac{Msd}{Mrd.z}
 \end{aligned}$$

$$am = \frac{Msd}{Mrd.z}$$

am : Proportion du moment sollicitant par rapport au moment résistant élastique

3.2.2 Simulations numériques :

Après avoir vérifié le bon comportement du modèle théorique, nous avons établi un plan de Simulation numérique sous **MATLAB** pour l'étude des barres comprimées fléchies. L'objectif de cette étude était de déterminer la force portante relative d'une barre en fonction ; des grandeurs a_m (Proportion du moment sollicitant par rapport au moment résistant élastique) et av (Proportion de l'effort tranchant sollicitant par rapport à l'effort tranchant plastique résistant) et des imperfections géométrique (e_0 et e_p).

Nous avons partiellement pris en compte leurs suggestions et, à l'aide d'une étude préliminaire, nous avons défini un plan de Simulation définitif où intervenaient les paramètres suivants :

- 2 type de section transversale ; (HEA200, HEA300) de longueur 5m
- 2 modèles d'imperfections (non linéarité initiale ; excentricité du chargement)
- condition aux appuis : Article-Articule
- 100 rapports compris les cas de flexion mono axiale : $am = Msd/Mrd.z = 0.01 : 1$
- 100 rapports compris les cas de la sollicitation par effort tranchant : $av = V/Vpl.rd = 0.1 : 10$

En combinant ces paramètres sous l'algorithme suivant :

```

clc; format short; clear all;
options = optimset('Algorithm','Levenberg-Marquardt','TolX',1e-20,'TolFun',1e-20);
a=5383; % Aire de la section du poteau HEA200
iz=13358219; % Moment d'inertie du poteau HEA200
rz=(iz/a)^0.5; % Rayon de giration du poteau HEA200
welz=133582; % Module d'inertie élastique du poteau HEA200
wplz=203800; % Module d'inertie élastique du poteau HEA200
wlz=wplz;
v=100; % Demi largeur du poteau
Lf=5000; % Longueur de flambement du poteau
alfa=0.49; % Coefficient d'imperfection par rapport à la section étudiée
% Courbe de flambement (c) : e0=L/200 (Elastique); e0=L/150 (Plastique);
e0=0; % Excentricité géométrique initiale du poteau
ep=Lf/750; % Excentricité maximale de l'effort de compression sur le poteau
am=0; % Proportion du moment sollicitant par rapport au moment résistant élastique
av=0; % Proportion de l'effort tranchant sollicitant par rapport à l'effort tranchant plastique résistant
lambdab=(Lf/rz)/93.9;
result=zeros(101,12);
for j=0:10
e0=j*0.1*Lf/150;
av=0;
for i=0:10;
am=0.01*i;
result(i+1,1)=am;
% x est l'effort = N/(fy.A) est fonction de lambdab=lambda/lambdal;
y=@(x)((1-x)*((1/lambdab^2)-x) - (x*e0*a/(wlz*lambdab^2)) -
(((1/lambdab^2)-x)*x*ep*a/(wlz*cos(0.5*pi*lambdab*sqrt(x)))) -
(((1/lambdab^2)-x)*am) - (((1/lambdab^2)-x)*(1-(1-av^2)^0.5)) );
x0 = 0;
zeroy=fsolve(y,x0,options);
if zeroy>=0
result(i+1,j+2) = zeroy;
end;
end;
end;
disp(result);
% Courbe de Flambement
set(0,'DefaultAxesLineStyleOrder',{'-'});
plot(result(1:101,1),result(1:101,2:12));
grid on;
title('Courbe Interaction M-N en Flambement');

```

Dans ce chapitre on essaye d'évaluer l'ordre de grandeur des imperfections dans les colonnes réelles en analysant tous les résultats numériques sur lesquels on pouvait tabler avec certitude et qui concernaient la flexion des colonnes soumis à une charge de compression,

Ces Calculs admettant en générale une excentricité aux deux extrémités de la colonne ; la valeur de cette excentricité est calculés d'après un pourcentage de 10 % à 100% de la grandeur: $e_0=Lf/200$ (élastique), $e_0=Lf/150$ (plastique)

La question de la courbure initial a également fait l'objet d'une étude numérique ; les résultats obtenu son constate sur certain valeur de cette courbure $e_p= Lf /750$.

Tous les résultats ont été donnes dans un rapport intermédiaire [19]. Ils permettent de tracer des courbes d'interaction \bar{N} — m — a_v pour les différents cas étudiés, telle celle présentée sur les figures suivent :

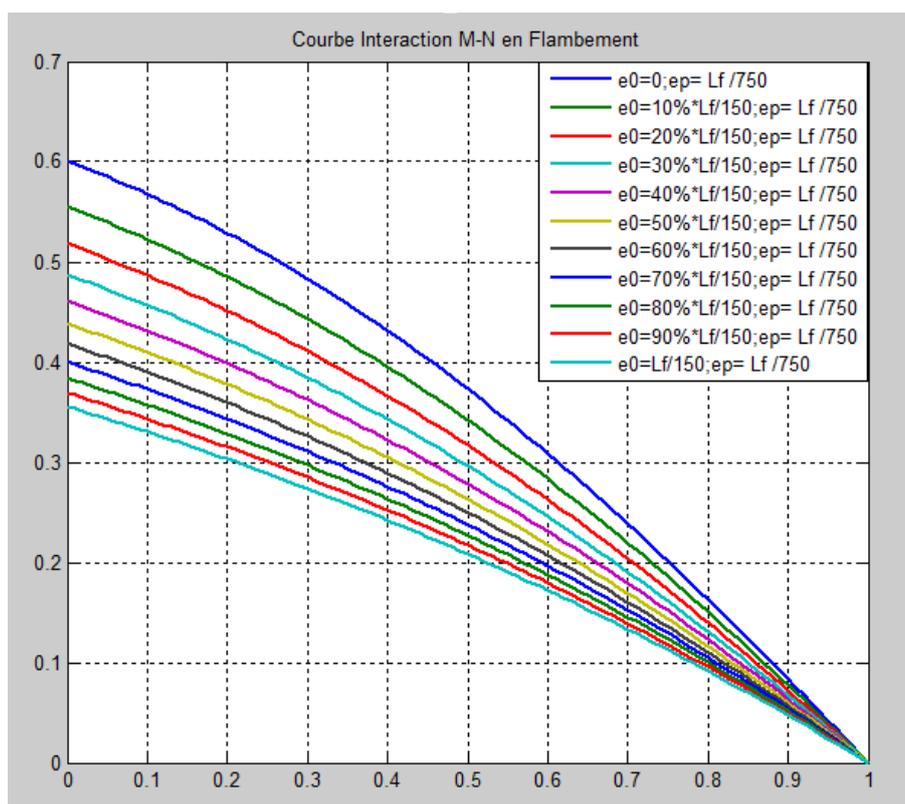


Fig. 3-1 Courbe d'interaction du moment fléchissant M-N en flambement (HEA200)

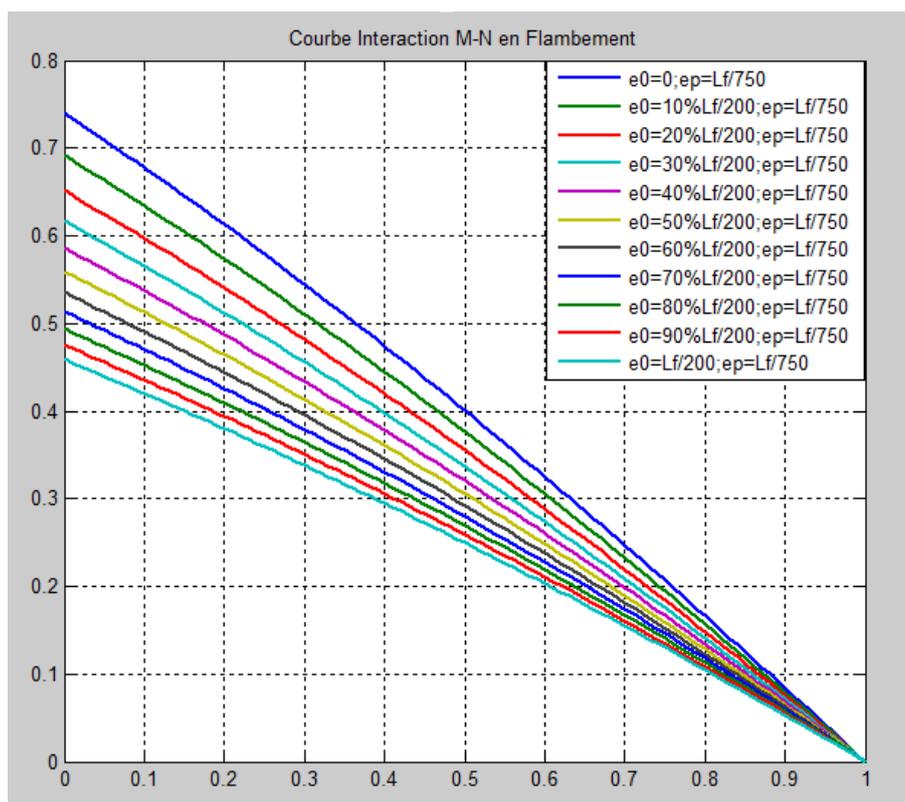


Fig. 3-2 Courbe d'interaction du moment fléchissant M-N en flambement (HEA300)

La figure 3-1 et 3-2 est représentative d'une barre comprimée fléchie soumise la flexion mono-axiale autour de l'axe de faible inertie.

L'instabilité dans le plan de sollicitation de flexion, sous l'effet conjugué de la compression et de la flexion, est déterminante pour des valeurs élevées et intermédiaires de l'effort de compression réduit; en présence de compression modérée, la ruine survient par excès de plastification et donc par épuisement de la résistance de section.

3.3 Effet de l'effort tranchant :

La résistance à l'effort tranchant est vérifiée en considérant le mode de ruine correspondant à la résistance plastique.

L'effort tranchant est supposé réparti à parts égales entre les deux tés. Ainsi, chaque Té reprend un effort tranchant sollicitant égal à $VEd/2$.

La répartition de l'effort tranchant dans chaque membrure peut se faire au prorata des aires de cisaillement des deux membrures. La résistance plastique à l'effort tranchant de la section est donnée par le principe de plasticité de Van Mises :

$$\sigma_{max}^2 + 3.\tau^2 = f_y^2$$

$$\left(\frac{N}{A} + \frac{N.f}{I}.V\right)^2 + 3.\tau^2 = f_y^2$$

$$\tau = \frac{V}{A_v}$$

V : effort tranchant

A_v : section réduit au cisaillement

$$\left[\frac{N}{A} + N \cdot \frac{1}{I} \cdot \left(e_0 \cdot \frac{Nk}{Nk - N} + e' \cdot \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \right) \right]^2 + 3 \cdot \left(\frac{V}{A_v} \right)^2 = f_y^2$$

$$\left[N + \frac{Nk}{Nk - N} \cdot N \cdot \frac{e_0 \cdot A}{I} + \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot N \cdot \frac{e' \cdot A}{I} \right]^2 + 3 \cdot \left[\frac{A}{A_v} \cdot V \right]^2 = f_y^2 A^2$$

$$\bar{N} = \frac{N}{f_y \cdot A}$$

$$\left[\bar{N} + \frac{Nk}{Nk - N} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{I} + \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e' \cdot A}{I} \right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3} A}{A_v \cdot f_y \cdot A} \cdot V \right]^2 = 1$$

$$\frac{V}{A_v \cdot f_y} = \frac{V}{V_{pl,Rd}}$$

$$\left[\bar{N} + \frac{Nk}{Nk - N} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{I} + \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e' \cdot A}{I} \right]^2 + \left[\frac{V}{V_{pl,Rd}} \right]^2 = 1$$

$$av = \frac{V}{V_{pl,Rd}}$$

av : Proportion de l'effort tranchant sollicitant par rapport à l'effort tranchant plastique résistant

Le calcul numérique montre que les subdivisions offrent une précision tout à fait suffisante pour un temps de calcul modère.

Chaque courbe de flambement est obtenue par la détermination numérique de \bar{N} en fonction de \bar{M} ; Les courbes théoriques seront obtenues en simulant au mieux les caractéristiques des barres :

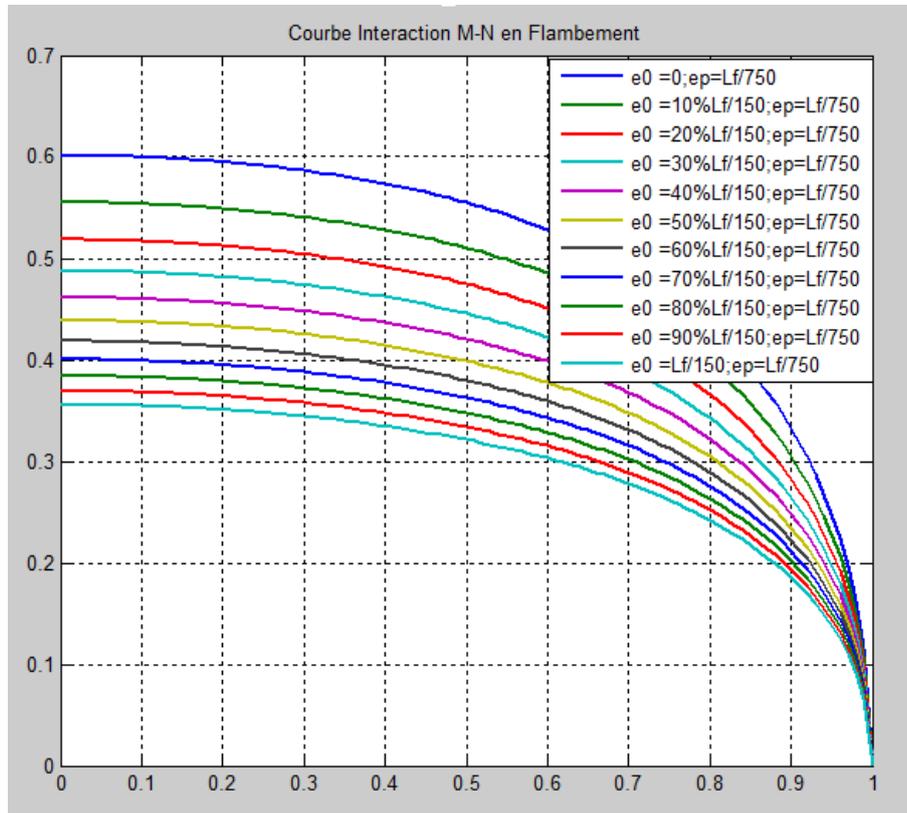


Fig. 3-3 Courbe d'interaction de l'effort tranchant V-N en flambement (HEA200)

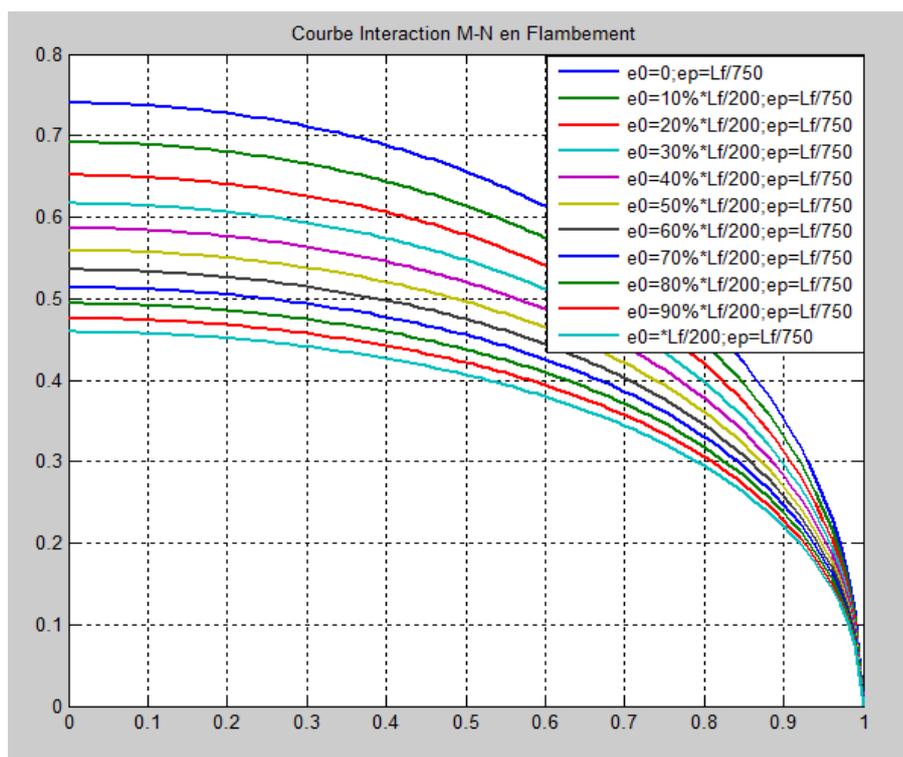


Fig. 3-4 Courbe d'interaction de l'effort tranchant V-N en flambement (HEA300)

Grâce à notre comparaison de la première courbe dans les deux profils, qui représente l'effet de l'imperfection géométrique e_0 et l'excentricité e du chargement e_p plus de l'effet de la Proportion de l'effort tranchant sollicitant par rapport à l'effort tranchant plastique résistant av , avec les autres courbes lorsque la valeur de $V = 0,5 \cdot V_{pl,rd}$; Nous notons une décroissance de la valeur de \bar{N} de 8.05% (HEA200) et de 6.43 % (HEA300), mais quand on augmente la valeur de V on a un plus impact sur la valeur de \bar{N} Comme le montrent les résultats suivants:

Pour $av=0.5$	HEA 200			HEA 300		
	e_0	e_p	\bar{N}	e_0	e_p	\bar{N}
Courbe 1	0	Lf/750	0.5551	0	Lf/750	0.6562
Courbe 2	$e_0 = 10 \% L/150$	Lf/750	0.5104	$e_0 = 10 \% L/200$	Lf/750	0.6140
Courbe 5	$e_0 = 40 \% L/150$	Lf/750	0.4207	$e_0 = 40 \% L/200$	Lf/750	0.5205
Courbe 9	$e_0 = 80 \% L/150$	Lf/750	0.3472	$e_0 = 80 \% L/200$	Lf/750	0.4378
Courbe 11	$e_0 = 100 \% L/150$	Lf/750	0.3214	$e_0 = 100 \% L/200$	Lf/750	0.4067

Tableau 3.1 : L'influence de l'effort tranchant sur la résistance \bar{N} pour les deux profils.

En remarque une diminution de la résistance portante relative \bar{N} de façon importante en et avant la valeur de $0,5 \cdot V_{pl,rd}$.

3.4 Intégrant l'effet du moment fléchissant :

Le mode de ruine d'une barre comprimée fléchie est largement dépendant du type de sollicitation et du fait que la barre est ou n'est pas tenue latéralement (sans déversement) [20]. Les modes de ruine possibles doivent être couverts par les formules d'interaction développées à des fins pratiques. Ils sont repris aux formulations auxquelles il a été décidé de se référer :

$$\left[\bar{N} + \frac{Nk}{Nk - N} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}} + \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e' \cdot A}{\frac{I}{v}} + \frac{M_{Sd}}{M_{el,Rd}} \right]^2 + \left[\frac{V}{V_{pl,Rd}} \right]^2 = 1$$

$$\bar{N} + \frac{Nk}{Nk - N} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}} + \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e' \cdot A}{\frac{I}{v}} + \frac{M_{Sd}}{M_{el,Rd}} = \left[1 - \left(\frac{V}{V_{pl,Rd}} \right)^2 \right]^{0.5}$$

$$1 - \bar{N} = \frac{Nk}{Nk - N} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}} + \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)} \cdot \bar{N} \cdot \frac{e' \cdot A}{\frac{I}{v}} + \frac{M_{Sd}}{M_{el,Rd}} + \left(1 - \left[1 - \left(\frac{V}{V_{pl,Rd}} \right)^2 \right]^{0.5} \right) = 0$$

$$\frac{Nk}{Nk - N} = \frac{1}{1 - \lambda^2 \bar{N}} = \frac{1}{\lambda^2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda^2} - \bar{N} \right)} ; \quad \frac{N}{Nk} = \lambda^2 \cdot \bar{N}$$

$$\left(1 - \bar{N} \right) \left(\frac{1}{\lambda^2} - \bar{N} \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \cdot \bar{N} \frac{e_0 \cdot A}{\frac{I}{v}} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \bar{N} \right) \cdot \bar{N} \cdot \frac{e' \cdot A}{\frac{I}{v}} \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{N}{Nk}}\right)}$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda^2} - \bar{N} \right) \frac{M_{Sd}}{M_{el,Rd}} + \left(1 - \left[1 - \left(\frac{V}{V_{pl,Rd}} \right)^2 \right]^{0.5} \right)$$

$$am = \frac{M_{Sd}}{M_{el,Rd}}$$

$$am = \frac{M_{Sd}}{M_{el,Rd}} = \frac{M_{Sd}}{M_{pl,Rd}} f$$

f : Facteur de forme

$$av = \frac{V}{V_{Pl,Rd}}$$

L'application des formules d'interaction existantes à des cas de référence, pour lesquels on dispose de résultats d'essais, fournit des valeurs de la capacité portante qui peuvent différer, parfois très substantiellement, des valeurs relevées expérimentalement. Cette même divergence s'observe lorsque l'on confronte les valeurs calculées sur la base des courbes d'interaction et celles obtenues par simulations numériques des cas correspondants.

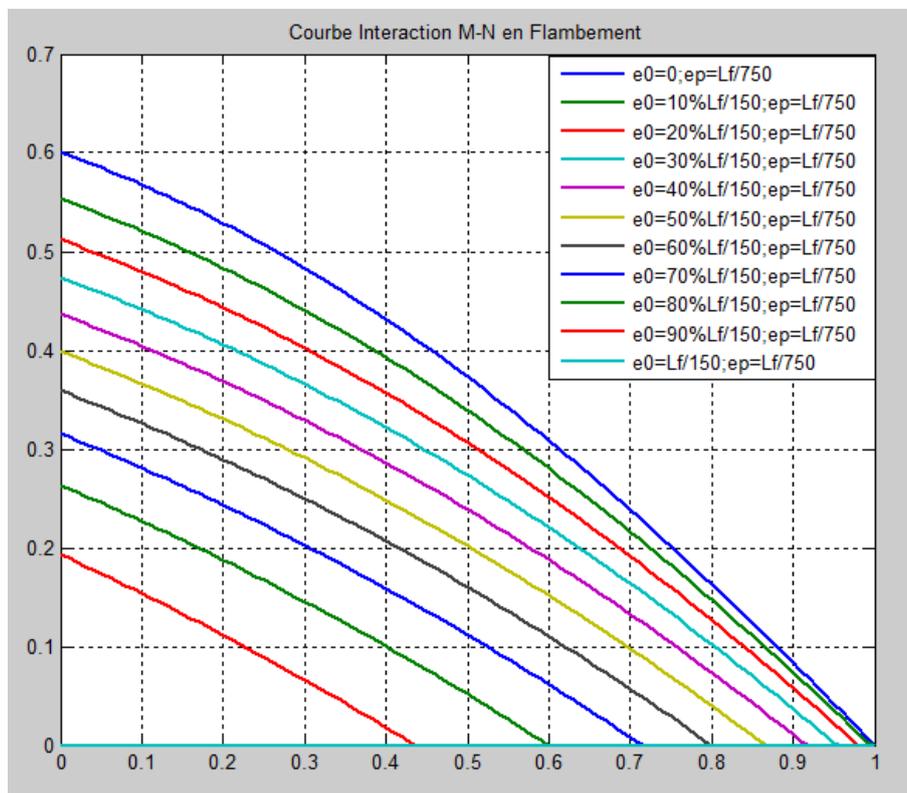


Fig. 3-5 Courbe d'interaction de l'effort tranchant et moment fléchissant M-V-N en flambement (HEA200)

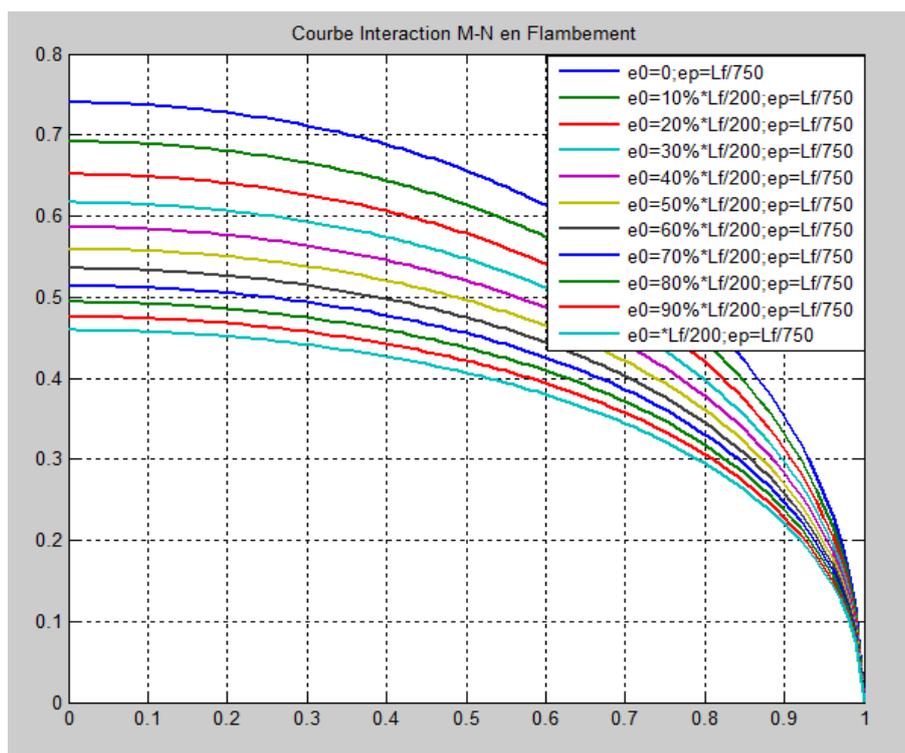


Fig. 3-6 Courbe d'interaction de l'effort tranchant et moment fléchissant M-V-N en flambement (HEA300)

En étudiant ici le double impact de la Proportion du moment sollicitant par rapport au moment résistant élastique et la Proportion de l'effort tranchant sollicitant par rapport à l'effort tranchant plastique résistant et en prise en compte l'imperfection géométrique de la barre ;en remarque que le montant de l'influence sur \bar{N} Lorsque la valeur de α_m égale à 0.2 était plus grande que les deux cas précédents avec une diminution de la résistance portante relatif de 9.08% pour une HEA200 et de 6.96% pour HEA300 et donc elle augmente la proportion de rétrécissement la zone de plasticité et le risque de déformation plus.

3.5 Application :

Soit deux barres constituent d'un profilé laminé HEA 200 et HEA 300 en acier S235 et S275 et sollicitent par :

- Effort axial de compression $N_{sd} = 300 \text{ KN}$.
- Un moment $M_{y,sd} = M_{z,sd} = 10 \text{ KN.m}$

Un effort tranchant $V_{sd} = 100 \text{ KN}$. Pour le HEA 200 :

$I_{yy} = 3,69143 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$	$I_{zz} = 1,3358219 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$	$i_{zz} = 82.8104 \text{ mm}$	$A = 5383 \text{ mm}^2$
$W_{el,y} = 388,6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$	$W_{pl,y} = 429.5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$	$W_{el,z} = 133582 \text{ mm}^3$	$W_{pl,z} = 203800 \text{ mm}^3$
$H = 190 \text{ mm}$	$b = 200 \text{ mm}$	$v = 100 \text{ mm}$	$L = 5000 \text{ mm}$

$f_y=275 \text{ N/mm}^2$	$E=210000 \text{ N/mm}^2$	Facteur de sécurité utilisé : $\gamma_{M0}=1.00$
--------------------------	---------------------------	--

Tableau 3.2 : Les caractéristiques d'un HEA 200.

Pour le HEA 300 :

$I_{yy}=18.26 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$	$I_{zz}=6.310 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$	$i_{zz}=74.9 \text{ mm}$	$A=11250 \text{ mm}^2$
$W_{el,y}=12600 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$	$W_{pl,y}=1383 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$	$W_{el,z}=420.610^3 \text{ mm}^3$	$W_{pl,z}=641.210^3 \text{ mm}^3$
$H=290 \text{ mm}$	$b=300 \text{ mm}$	$v=150 \text{ mm}$	$L=5000 \text{ mm}$
$f_y=275 \text{ N/mm}^2$	$E=210000 \text{ N/mm}^2$	Facteur de sécurité utilisé : $\gamma_{M0}=1.00$	

Tableau 3.3 : Les caractéristiques d'un HEA 300

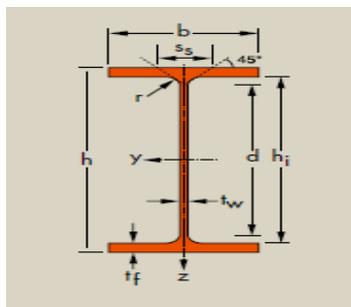


Figure3-7: Notation des caractéristiques d'un profilé HEA

Résistance de la section HEA 200 sans effet d'instabilités :

HEA 200 est de classe 1.

$$N_{c.Rd} = N_{pl.Rd} = A \cdot f_y = N_{c.Rd} = 5383 \cdot 235 = 1265,005 \text{ KN} .$$

$$M_{c.Rd} = M_{pl.Rd} = W_{pl.z} \cdot f_y = M_{c.Rd} = 203800 \cdot 235 = 47.89 \text{ KN.m}$$

$$V_{pl.Rd} = 0,58 f_y \cdot A_V = 0,58 \cdot 235 \cdot 18.08 \cdot 100 = 246.43 \text{ KN}$$

Résistance de la section HEA 200 avec effet d'instabilités :

$$\bar{\lambda}_{\square} = [\beta_A \cdot A \cdot \frac{f_y}{N_{cr}}]^{0.5} = \frac{f_y}{N_{cr}} \cdot \beta_A^{0.5}$$

$\beta_A = 1$ Section de classe 3.

$$\frac{l_f}{i} = \frac{5000}{49.82} = 100.36$$

$$\pi \left[\frac{E}{f_y} \right]^{0.5} = 93.9$$

$$\bar{\lambda}_z = 1,27 > 0,2 \rightarrow \text{Risque de flambement.}$$

Elément comprimée et fléchiée sans risque de déversement :

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{min} \cdot A \cdot f_y} + \frac{K_z \cdot M_{z,sd}}{W_{z,sd} \cdot f_y} \leq 1$$

$$\chi_{min} = \min[\chi_y; \chi_z] = \min[0,65; 0,55] = 0,55$$

$$K_z = 1 - \frac{\mu_z \cdot N_{sd}}{\chi_z \cdot A \cdot f_y}$$

$$\mu_z = \bar{\lambda}_z (2 \cdot \beta_{My} - 4) + \frac{W_{pl,z} - W_{el,z}}{W_{el,z}}$$

$$\mu_z = -0,97$$

$$K_z = 1,35$$

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{min} \cdot A \cdot f_y} + \frac{K_z \cdot M_{z,sd}}{W_{z,pl} \cdot f_y} = 0,713 \leq 1 \quad \text{C V}$$

Résistance de la section HEA 300 sans effet d'instabilités :

HEA 300 est de classe 3.

$$N_{c.Rd} = N_{pl.Rd} = A \cdot f_y = 112.5 \cdot 100 \cdot 275 = 3093.75 \text{ KN} .$$

$$M_{c.Rd} = M_{pl.Rd} = W_{pl.z} \cdot f_y = 115,67 \text{ KN.m}$$

$$V_{pl.Rd} = 0,58 f_y \cdot A_v = 594.616 \text{ KN}$$

Résistance de la section HEA 300 avec effet d'instabilités :

$$\bar{\lambda} = \left[\beta_A \cdot A \cdot \frac{f_y}{N_{cr}} \right]^{0.5} = \frac{f_y}{N_{cr}} \cdot \beta_A^{0.5}$$

$\beta_A = 1$ Section de classe 3.

$$\frac{l_f}{i} = \frac{5000}{74.89} = 66.76$$

$$\pi \left[\frac{E}{f_y} \right]^{0.5} = 86.77$$

$\bar{\lambda}_z = 0.769 > 0.2 \rightarrow$ Risque de flambement

Elément comprimée et fléchié sans risque de déversement :

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{min} \cdot A \cdot f_y} + \frac{K_z \cdot M_{z.sd}}{W_{z.sd} \cdot f_y} \leq 1$$

$$\chi_{min} = \min[\chi_y; \chi_z] = \min[0.89; 0.68] = 0.68$$

$$K_z = 1 - \frac{\mu_z \cdot N_{sd}}{\chi_z \cdot A \cdot f_y}$$

$$\mu_z = \bar{\lambda}_z (2 \cdot \beta_{My} - 4) + \frac{W_{pl,z} - W_{el,z}}{W_{el,z}}$$

$$\mu_z = -0.55$$

$$K_z = 1.07$$

$$\frac{N_{sd}}{\chi_{min} \cdot A \cdot f_y} + \frac{K_z \cdot M_{z.sd}}{W_{z.el} \cdot f_y} = 0.20 \leq 1 \quad \text{C V}$$

3.6 Etude comparative :

Afin de pouvoir comparer les résultats de l'étude paramétrique de poutres-colonnes avec ceux dérivant d'un calcul numérique, il est indispensable de connaître précisément les caractéristiques et les imperfections de la barre étudiée:

- Pour l'étude de simulation sous matlab $e_0=L_f/150$ (sections de classe 1 et 2) ou $L_f/200$ (sections de classe 3), et $e_p=L_f/750$ (les figures3-7 et 3-8).

- Selon l'Eurocode 3, e_0 est intégrée par la formule suivante englobant l'imperfection géométrique, l'excentricité de la charge et les contraintes résiduelles :

$$e_0 = \frac{W}{A} \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) \quad (\text{Les figures 3-9 et 3-10})$$

- Selon CCM97/EC3, les imperfections sont intégrés à la formule de α (voir l'application)

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1$$

$$\text{Ou : } \phi = 0.5(1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2)) + \bar{\lambda}^2$$

3.6.1 Effet combinée du moment fléchissant et l'effort axial :

Les simulations numériques conduites pour chacune des sections (HEA200 et HEA300) visent à donner l'évolution de la charge de compression réduite en fonction du rapport M_{sd}/M_{rd} entre moment sollicitant et le moment résistant.

```

clc; format short; clear all;

options = optimset('Algorithm','Levenberg-Marquardt','TolX',1e-20,'TolFun',1e-20);

a=11250;           % Aire de la section du poteau
i0=63100000;      % Moment d'inertie du poteau
r=(i0/a)^0.5;     % Rayon de giration du poteau
wel=420600;       % Module d'inertie élastique du poteau
wl=wl;
Lf=5000;          % Longueur de flambement du poteau
fy=275;           % Limite d'élasticité de l'acier
alfa=0.49;        % Coefficient d'imperfection par rapport à la section étudiée
lambdab=(Lf/r)/86.77;
    
```

Chapitre03 : Effet des imperfections géométriques sur les barres comprimées et fléchies

```

e0=Lf/150;          % Imperfection géométrique initiale du poteau
ep=Lf/750;         % Excentricité maximale de l'effort de compression sur le
poteau

% Sollicitations appliquées à la section du poteau (kN,m)
nsd=400;
msd=202.5;

an0=1000*(nsd+0.000001)/(fy*a);
am0=1000000*(msd+0.000001)/(fy*wl);
av0=0.0;          % Taux de cisaillement de la section
result=zeros(101,3);

for j=0:1
    av=j*av0;

for i=0:100
    am=0.01*i;
    result(i+1,1)=am;
% x est l'effort = N/(fy.A) est fonction de lambdab=lambda/lambda1;

y=@(x)((1-x)*((1/lambdab^2)-x) - (x*e0*a/(wl*lambdab^2)) -
((1/lambdab^2)-x)*x*ep*a/(wl*cos(0.5*pi*lambdab*sqrt(x)))) -
(((1/lambdab^2)-x)*am) - ((1/lambdab^2)-x)*(1-(1-av^2)^0.5));

    x0 = 0;
    zeroy=fsolve(y,x0,options);

if zeroy>=0
    result(i+1,j+2) = zeroy;
end;
end;
end;
pp = interp1(result(1:101,1),result(1:101,2),'cubic','pp');

% Courbe de Flambement
set(0,'DefaultAxesLineStyleOrder',{'-'});
plot(result(1:101,1),result(1:101,2:3));
grid on;
title('Courbe Interaction M-N en Flambement');
hold on;
plot(am0,an0,'r.','MarkerSize',30);
line([0 am0],[0 an0],'LineStyle','-');
hold off;
l0=(am0^2+an0^2)^0.5;
pente=an0/am0;
i=1; y1=0; y2=0;
while y2-y1 >= 0
    x0=0.0001*i;
    y1=pente*x0;
    y2=ppval(pp,x0);
    i=i+1;
end;
l1=(x0^2+ppval(pp,x0)^2)^0.5;
ratio=l0/l1;
clc;
disp('Rapport Résistance : ');

```

disp(ratio);

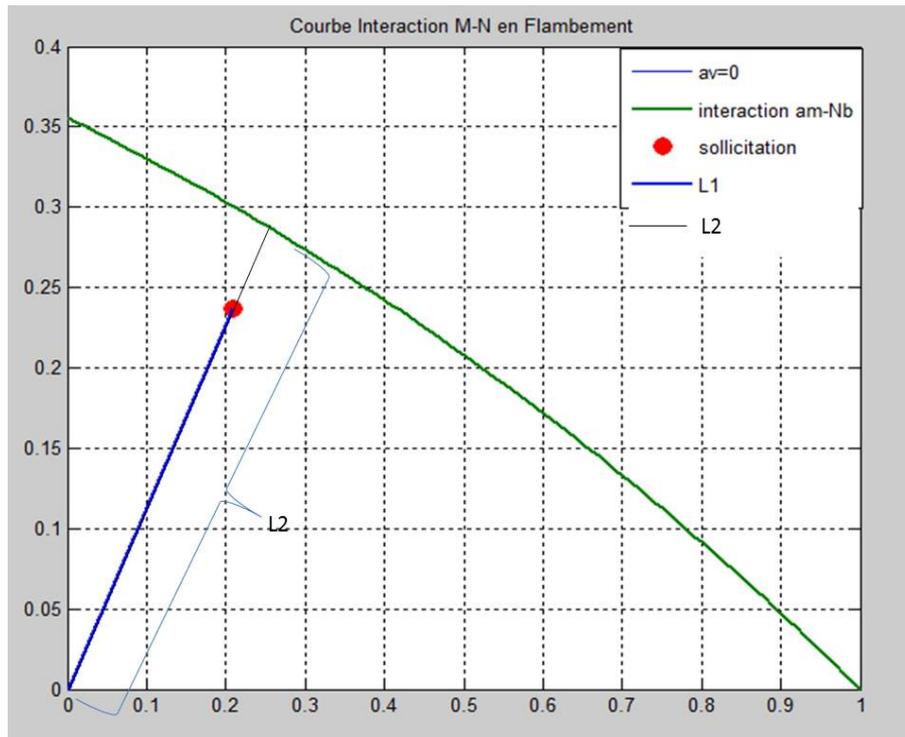


Fig. 3-8 Courbe d'interaction de moment fléchissant M-N en flambement (HEA200)

Ratio= $l_1/l_2=0.8242$ > Rapport de résistance qui égale à 0.713 (CCM97)

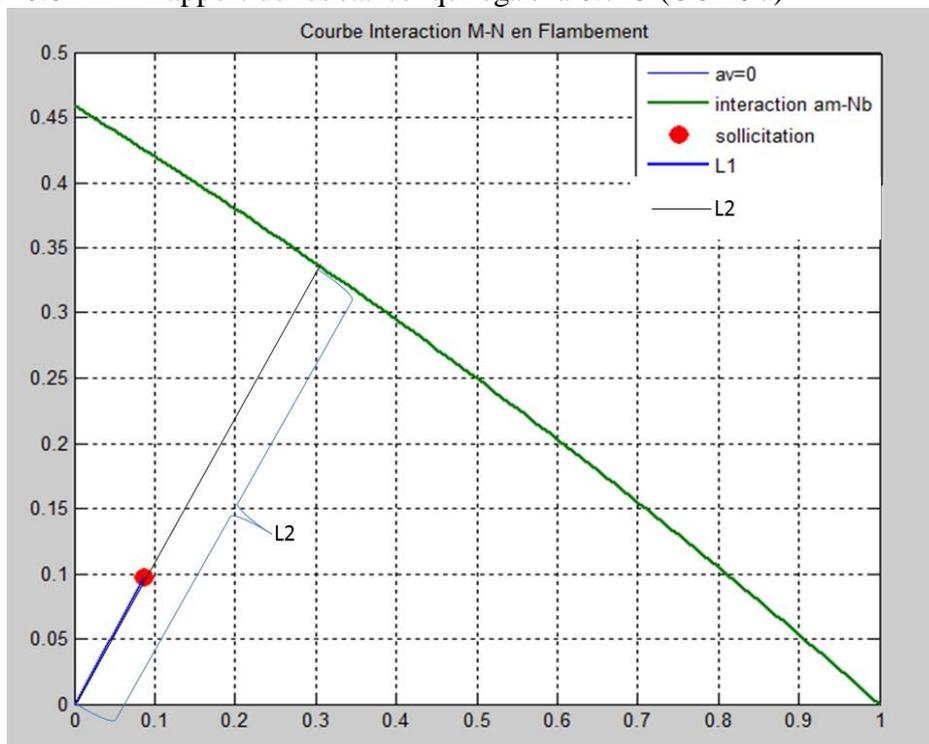


Fig. 3-9 Courbe d'interaction de moment fléchissant M-N en flambement (HEA300)

Ratio $=l_1/l_2=0.2871 >$ Rapport de résistance qui égale à 0.20 (CCM97)

-simulation numérique selon l'euro code sous la formule d'imperfection $e_0 = \frac{W}{A} \alpha. (\bar{\lambda} - 0.2)$

```

clc; format short; clear all;

options = optimset('Algorithm','Levenberg-Marquardt','TolX',1e-
20,'TolFun',1e-20);

a=5383;           % Aire de la section du poteau
i0=13358219;     % Moment d'inertie du poteau
r=(i0/a)^0.5;    % Rayon de giration du poteau
wpl=203800;      % Module d'inertie élastique du poteau
wl=wpl;
Lf=5000;         % Longueur de flambement du poteau
fy=235;          % Limite d'élasticité de l'acier

alfa=0.49;       % Coefficient d'imperfection par rapport à la section
étudiée

lambdab=(Lf/r)/93.9;

e0=wl*alfa*(lambdab-0.2)/a; % Excentricité géométrique initiale du poteau
EC3
ep=0;           % Excentricité maximale de l'effort de compression sur le
poteau

% Sollicitations appliquées à la section du poteau (kN,m)
nsd=300;
msd=10;

an0=1000*(nsd+0.000001)/(fy*a);
am0=1000000*(msd+0.000001)/(fy*wl);
av0=0.0;       % Taux de cisaillement de la section

result=zeros(101,3);

for j=0:1
    av=j*av0;

for i=0:100
    am=0.01*i;
    result(i+1,1)=am;

% x est l'effort = N/(fy.A) est fonction de lambdab=lambda/lambdal;

y=@(x)((1-x)*((1/lambdab^2)-x) - (x*e0*a/(wl*lambdab^2)) -
(((1/lambdab^2)-x)*x*ep*a/(wl*cos(0.5*pi*lambdab*sqrt(x)))) -
(((1/lambdab^2)-x)*am) - (((1/lambdab^2)-x)*(1-(1-av^2)^0.5)));

    x0 = 0;
    zeroy=fsolve(y,x0,options);

```

```

if zeroy>=0
    result(i+1,j+2) = zeroy;
end;
end;
end;

pp = interp1(result(1:101,1),result(1:101,2),'cubic','pp');

% Courbe de Flambement
set(0,'DefaultAxesLineStyleOrder',{'-'});
plot(result(1:101,1),result(1:101,2:3));
grid on;
title('Courbe Interaction M-N en Flambement');
hold on;
plot(am0,an0,'r.','MarkerSize',30);
line([0 am0],[0 an0],'LineStyle','-')
hold off;

l0=(am0^2+an0^2)^0.5;
pente=an0/am0;

i=1; y1=0; y2=0;
while y2-y1 >= 0
    x0=0.0001*i;
    y1=pente*x0;
    y2=ppval(pp,x0);
    i=i+1;
end;

l1=(x0^2+ppval(pp,x0)^2)^0.5;

ratio=l0/l1;

clc;
disp('Elancement réduit : ');
disp(lambdab);
disp('Imperfection géométrique e0 (mm) : ');
disp(e0);
disp('Rapport Résistance : ');
disp(ratio);

```

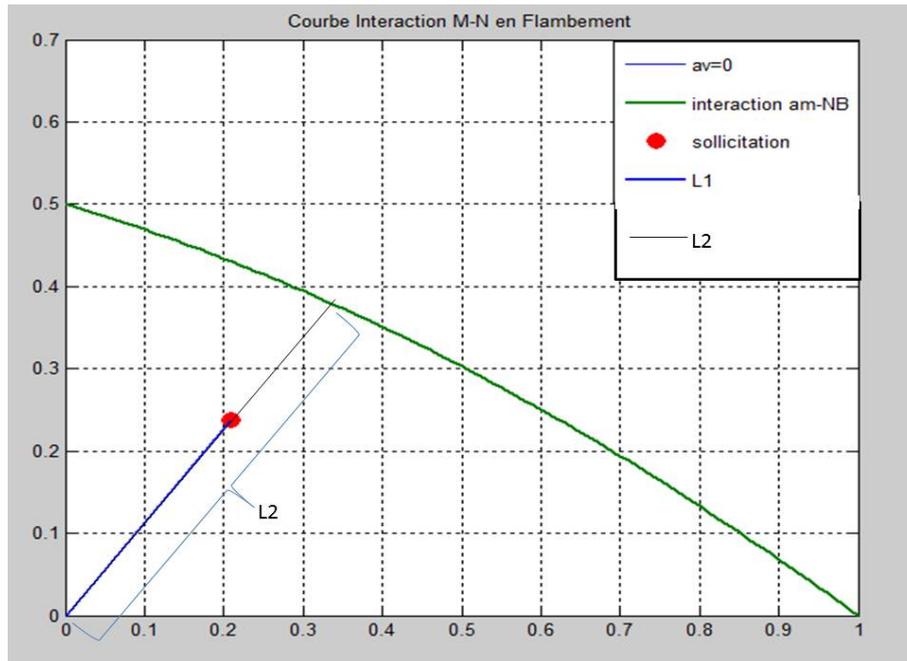


Fig. 3-10 Courbe d'interaction de moment fléchissant M-N en flambement selon EC3 (HEA200)

Ratio= $l_1/l_2=0.8242$ > Rapport de résistance qui égale à 0.6243 (EC3)

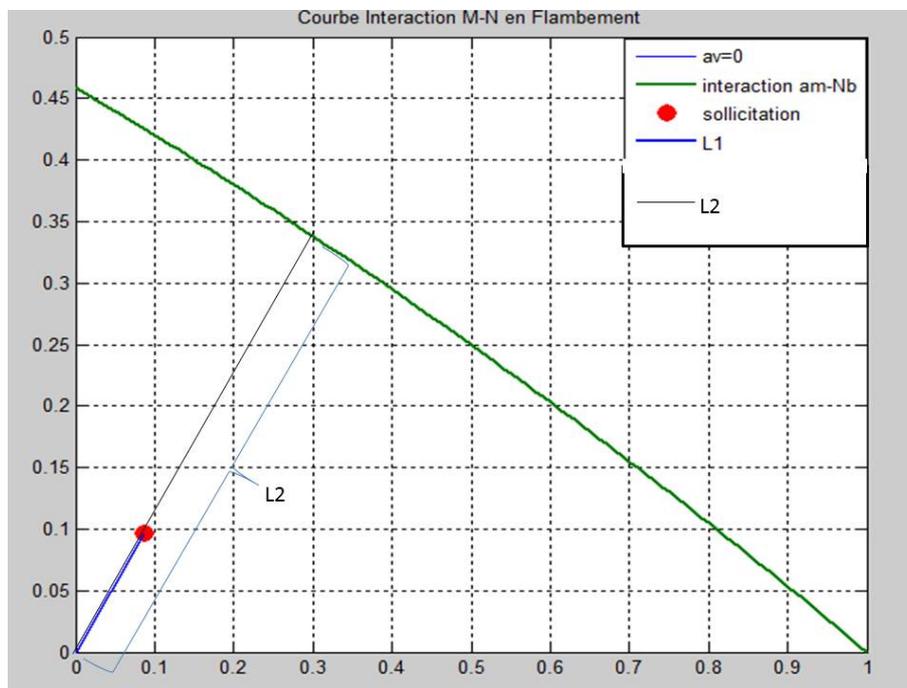


Fig. 3-11 Courbe d'interaction de moment fléchissant M-N en flambement selon EC3 (HEA300)

Ratio= $l_1/l_2=0.2871$ > Rapport de résistance qui égale à 0.22 (EC3)

	Ratio Calcul EC3/CCM97	Ratio Code Matlab (e₀,ep)	Ratio Code Matlab (e₀ EC3)
Section HEA200	0.713	0.824	0.624
Section HEA300	0.200	0.287	0.220

Tableau 3.4 : Etude comparative entre les résultats du ratio des contraintes.

On remarque que les résultats des calculs fournis par les programmes de calcul développés sont assez proches de ceux règlementaires.

Les formules d'interaction de l'Eurocode 3 et de CCM97 sous-estiment dramatiquement la capacité portante de la barre comprimée fléchie à section laminée en double T soumise à flexion mono-axiale autour de l'axe de faible inertie sont trop sécuritaire; Les résultats fournis par les formules d'interaction sont toutefois très différents, et de manière très significative, de ceux de la simulation, plus particulièrement dans le domaine des valeurs élevées et intermédiaires des moments fléchissant .

3.6.1 Effet combinée du moment fléchissant et l'effort axial avec l'effort tranchant :

Il est possible de traiter une barre soumise aux sollicitations Effort Normal (N_{sd}) + Moment fléchissant (M_{z,sd}) + Effort tranchant (V_{sd}).

	Ratio Calcul EC3/CCM97	Ratio Code Matlab (e₀,ep)	Ratio Code Matlab (e₀ EC3)
Section HEA200	0.713	0.831	0.630
Section HEA300	0.200	0.293	0.230

Tableau 3.5 : Etude comparative entre les résultats du ratio des contraintes.

Lorsque nous avons pris $V_{sd}=0.2*V_{pl,rd}$ ($\alpha_v=0.2$), on remarque que la capacité de résistance diminue par rapport aux résultats du tableau 3.4. donc la capacité portante commence à diminuer avant la valeur de $0.5 V_{pl,rd}$

3.7 Conclusion :

Des conclusions similaires peuvent être tirées pour la barre comprimée fléchie constituée de la section laminée à chaud à larges ailes HEA. Seules les comparaisons relatives au cas de la barre comprimée fléchie soumise à flexion mono-axiale autour de l'axe de faible inertie sont présentées ici elles mettent plus particulièrement en évidence ce qui suit :

- Pour des élancements plus importants. La barre comprimée fléchie peut se trouver en danger d'instabilité

- La ruine par instabilité d'une barre comprimée fléchie soit par flambement sous effort axial de compression seul, soit par flambement sous moment de flexion seul autour de l'axe de faible inertie qui doit être couvert par la formule d'interaction,

- En particulier, la formule d'interaction se doit de couvrir de manière précise les ruines par épuisement de résistance de section des profils soit uniquement comprimés (N), soit uniquement fléchis (M)

- Les approches de la CCM97, et de l'Eurocode 3 fournissent des valeurs comparables de la capacité portante, dans tout le domaine de variation de l'effort axial et des moments fléchissant, pour le cas de compression axiale combinée à flexion mono-axiale autour de l'axe de faible inertie. Les résultats fournis par les formules d'interaction sont toutefois très différents, et de manière très significative, de ceux de la simulation, plus particulièrement dans le domaine des valeurs élevées et intermédiaires des moments fléchissant.

Conclusion général

Au terme de ce mémoire de fin d'études intitulé « Flambement des barres comprimée et des barres comprimée fléchies, avec déformation initial et d'excentricité des charges » dont le but de notre recherche était d'évaluer par les formules d'interaction que l'on utilise couramment dans les bureaux d'études pour dimensionner les poutres et les poutres colonnes. L'étude détaillée de l'effet des imperfections diverses de ces poutres-colonnes sur l'instabilité par flambement nous a amené à formuler de nouvelles propositions. La démarche suivie pour atteindre ce but a nécessité la mise en œuvre d'une étude mathématique plus élaborée.

Après avoir vérifié le bon fonctionnement du modèle théorique à l'aide des résultats de la recherche paramétrique, nous avons établi un plan de simulations numériques pour l'étude des poutres et des poutres-colonnes. L'objectif de cette étude était de déterminer la capacité portante d'une poutre-colonne en fonction de son élancement avec des imperfections et des forces et moments sollicitant.

A l'aide des résultats des simulations numériques, des études comparatives ont été entreprises. Dans cette recherche, nous avons montré que les relations recommandées par le CCM 97 et l'Eurocode 3 ne permettent pas de prédire les sollicitations ultimes d'une poutre-colonne avec une précision convenable. Leur inconvénient majeur est d'entraîner un dimensionnement, d'une part, très conservateur pour des barres peu élancées et, d'autre part, situé du côté de l'insécurité lorsque l'élancement devient plus élevé.

Cette étude a montré qu'à l'aide des relations simples rappelées aux chapitres précédant, les poutres-colonnes pouvaient être dimensionnées de manière sûre et économique.

Notre travail peut être la base d'autres travaux qui traiteront de manière globale les effets d'un bi-moment et/ou aussi celui de l'instabilité par déversement.

Références bibliographiques:

- [1] AUGUST. G., BARATTA A. : 'Théorie probabiliste de la résistance des barres comprimées'. Construction métallique N°2 1971
- [2] Ballio, G. et Mazzolani, F., "Theory and Design of Steel Structures", Chapman and Hall, London, 1983
- [3] Galambos, T.V. (éditeur), "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", John Wiley and Sons, New York, 1988.
- [4] MAQUOI R. (2009) "Instabilités structurales des barres - Flambement et déversement" la base documentaire, *L'expertise technique et scientifique de référence, document C 2 511*.
- [5] LI QS, (2000) "Buckling of elastically restrained non-uniform columns" Journal of Engineering Structures 22, p 1231–1243.
- [6] BERT CW (1984) Improved technique for estimating buckling loads J. of Eng Mech., ASCE, vol 110. n°12. pp 1655-1665
- [7] APK (Association pour la Promotion de l'enseignement de la construction acier). "Stabilité appliqué " <http://www.mmaya.fr/Insta/amphi>
- [8] ALVAREZ R.A. (1975) "La estructura Metalica Hoy" Tomo I, vol 1° , 2a Edición, Madrid.
- [9] CARTER W.O. – GERE J.M.(1963) "Critical Buckling Loads for Tapered Columns" Transaction of ASCE Vol. 128 Part II, p 736 – 754
- [10] Ir. Jacques Dehard Professeur-Deh 2009 "Analyse des struct. acier" INSTITUT HEMES GRAMME
- [11] GALÉA Y. (2009) "Instabilité des barres de portique en acier" Centre technique Industriel Construction Métallique (CTICM), p 103 – 130.
- [12] Galambos, T.V. (éditeur), "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", John Wiley and Sons, New York, 1988.

[13]Beer, H. et Schulz, G. : Die Traglast des planmässigmittiggedrückten Stabs mit Imperfektionen, VDI — Zeitschrift 111 (1969), Nr. 21, S. 1537-1541; Nr. 23, S. 1683-1687; Nr. 24, S. 1767-1772.

[14]CECM Recommendations of Steel Shells, Publication CECM n° 56, 1988.

[15]JAAN K. "Numerical Methods in Engineering with MATLAB", www.cambridge.org

[16]Massonnet, Ch. : Etat actuel du problème du flambement des barres en acier, à la lumière des travaux de la Commission VIII (Instabilité) de la CEACM, Acier-Stahl-Steel, n° 10, 1966, p. 459-466 (nombreuses références bibliographiques).

[17] American Institute for Steel Construction. Load and Resistance Factor Design. Manual of Steel Construction. 1^{re} édition, 1986

[18] Eurocode 3-DAN. - Calcul des structures en acier. Partie 1.1 : Règles générales et règles pour les bâtiments. Norme expérimentale française P22-311

[19] Matthey. P.-A.: Simulation numérique du comportement des poutres-colonnes métalliques. Lausanne, EPFL, ICOM 137, 1984.

[20] ECCS-Task Working Group 8.1/8.2 Documents de travail, 1985 (non publiés).