Table des matières

Contenu de la thèse

Cette thèse est principalement répartie en trois chapitres :

1. **Préliminaires**
   Dans ce chapitre, on effectue des rappels mathématiques généraux nécessaires à la bonne compréhension des méthodes qui sont mises en œuvre dans la suite. Dans un premier temps, on rappelle ce qu'est un opérateur borné sur un espace de Hilbert avec des définitions, propositions et propriétés qui seront très utiles dans notre travail. Dans un second temps, on présente les opérateurs linéaires non-bornés avec ces propriétés qui s'avèrent différentes par rapport aux opérateurs bornés sur l'espace entier H. Ce chapitre nous mène à jumeler ces choses et de dire simplement un opérateur T défini sur un domaine $D(T) \subset H$ où sur ce domaine, on peut étudier la bornitude, la fermeture, la normalité et l'auto adjonction etc...

2. **Commutativité des opérateurs normaux et auto-adjoints et applications**
   Dans ce chapitre on s'intéresse aux théorèmes et propositions qui nous donnent la normalité du produit AB avec des conditions imposées sur les deux opérateurs A et B. Nous allons voir que c'est la normalité du produit nous donne des résultats extraordinaires.

3. **Maximalité d'opérateurs linéaires** Dans ce chapitre on donne des nouveaux résultats, en commençant par un théorème sur le produit normal d'opérateurs normaux qui sera très utile pour les prochains résultats sur la maximalité, ensuite on cloture cette thèse par une conjecture.

Introduction

La théorie des opérateurs est importante aussi bien en mathématiques dans plusieurs disciplines scientifiques (mathématiques, physique et chimie). Elle s'est révélée être une nécessité pour le progrès de plusieurs théories en physique et surtout la mécanique quantique. La théorie assure un certain nombre d'opérations indispensables et elle a apporté des outils mathématiques dont les physiciens avaient tant besoin. La théorie des opérateurs s'appuie sur les opérateurs linéaires, en particulier on se base aux opérateurs définis sur un espace de Hilbert qui est noté H. Dans cette thèse en particulier, on s'intéresse à la classe d'opérateurs normaux et auto-adjoints (bornés et non-bornés). Une classe très importante car c'est la plus grande classe pour laquelle le théorème spectral existe. La question de commutativité d'opérateurs non-bornés est assez délicate. En effet, une expression du type $AB\varphi = BA\varphi$ pour $\varphi \in D \subset D(AB) \cap D(BA)$ ne signifie pas nécessairement que les opérateurs commutent fortement (voir Read-Simon, Vol-1) et Nelson (voir [27]) a montré l'existence de deux opérateurs A et B définis sur un domaine commun D qui sont essentiellement auto-adjoints tels que $A : D \longrightarrow D$, $B : D \longrightarrow D$ et $ABx = BAx$ pour tout $x \in D$ mais $\overline{A}$ et $\overline{B}$ ne commutent pas fortement. Devinatz-Nussbaum et von Neumann ont démontré l'existence de trois opérateurs auto-adjoints A, B et C qui vérifient l'extension $A \subset BC$, cette extension implique la commutativité forte entre B et C et par conséquent l'égalité $A = BC$. L'étude précédente est arrivée à un résultat très important qui concerne l'égalité entre les opérateurs en démarrant de l'extension. Maintenant on essaye d'élargir les conditions imposées sur nos opérateurs avec la question suivante : Soient A, B et T trois opérateurs non nécessairement bornés tel que l'inclusion $T \subset AB$ (resp. $AB \subset T$), quand cette inclusion devient-elle une égalité ou bien elle nous donne d'autres résultats ? Les outils principaux utilisés sont : le Théorème de Fuglede-Putnam ; Théorème de Devinatz-Nussbau-Von-Neumann et la symétrie maximale d'opérateurs auto-adjoints ou normaux non-bornés. La question de normalité du produit non-borné d'opérateurs normaux a un lien étroit avec cette dernière question grâce au travaux de Devinatz-Nussbaum et M.H Mortad. Dans cette thèse on étudie cette question en détail et on rassemble les travaux faits dans ce sens. Pour plus de résultats et un peu d'historique sur cette thématique, voir les références [4, 9, 15, 31, 36] et pour le produit normal borné, voir [8, 14, 16, 30, 38, 37]. Pour le cas non-borné, voir [18, 19, 20, 24, 25].

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Opérateurs linéaires bornés

La formulation mathématique de la Mécanique Quantique rend indispensable l'étude des opérateurs linéaires définis dans un espace de Hilbert. Lorsque ces opérateurs sont continus, leur manipulation n'offre pas de difficulté majeure, mais dans le cas contraire il faut être d'une extrême prudence, car le domaine de définition de l'opérateur joue alors un rôle très important. Ce fait n'ayant pas d'analogue en algèbre linéaire, les opérateurs linéaires définis sur un espace de dimension finie étant nécessairement continus, il faut se garder de toute généralisation hâtive. Notons tout d'abord qu'il s'agit essentiellement d'applications linéaires. Leurs ensembles de départ et d'arrivée seront des espaces de Hilbert. Si H et K sont deux espaces de Hilbert, nous désignons par terme opérateur, toute application linéaire de H dans K. Bien plus, nous restreignons l'étude à l'espace $\mathcal{L}(H, K)$ des applications linéaires continues. Cette restriction permet, entre autres, d'exploiter la coïncidence des notions de continuité dans $L(H, K)$.

Définition 1.1.1. *Soit T une application linéaire $T : H \longrightarrow K$ telle que H et K sont deux espaces de Hilbert. On dit que T est bornée si :*

$$\exists c > 0 : \forall x \in H, \|T(x)\|_K \leq c\|x\|_H$$

.

T est dite continue ou bornée et on écrit, $T \in \mathcal{L}(H, K)$ ou $T \in B(H, K)$. On dit que T est un opérateur linéaire borné de H dans K.

Si $H = K$ on écrit $B(H,H) = B(H)$ et si $K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ on écrit $\mathcal{B}(H,K) = H'$ (l'ensemble des formes linéaires).

Définition 1.1.2. *Soit $T \in B(H)$. On pose $\|T\| = inf\{c > 0, \forall x \in H : \|Tx\|_K \leq c\|x\|_H\}$.*
$\|T\|$ est appelée norme de T.

Définition 1.1.3. *Soit $T \in B(H)$, on a :*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} | < Tx, y > |.$$

1.2 Opérateurs adjoints

Soient H et K deux espaces de Hilbert et T une application linéaire de H dans K. On appellle adjoint de T l'application T^* définie de K dans H par :

$$< Tx, y >_K = < x, T^*y >_H \quad \forall x \in H, \quad \forall y \in K.$$

Théorème 1.2.1. *Soient H et K deux espaces de Hilbert.*
Tout élément T de $B(H,K)$ admet un adjoint unique T^* dans $B(K,H)$.

Propriétés 1.2.1. *Soient T et $S \in B(H)$ on a :*

1. $\|T\| = \|T^*\|$.
2. $(T + S)^* = T^* + S^*$.
3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
4. $(T^*)^* = T$.
5. $(ST)^* = T^* S^*$.
6. $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.

Définition 1.2.1. *Soit $T \in B(H)$. On a :*
$\ker T = \{x \in H : T(x) = 0\}$ *("Kernel")*
$\text{Im } T = \{Tx, x \in H\}$

Proposition 1.2.1. *Soit $T \in B(H)$. On a :*

1. $\ker T^* = (\text{Im } T)^\perp$
2. $\ker T = (\text{Im } T^*)^\perp$

Définition 1.2.2. *Soit $T \in B(H)$ où H est un $\mathbb{C}$-Hilbert et I l'opérateur identité. On dit que T est :*

1. *Auto-adjoint si $T = T^*$.*
2. *Normal si $TT^* = T^*T$.*
3. *Unitaire si $TT^* = T^*T = I$.*
4. *Une projection orthogonal si T est auto-adjoint et $T^2 = T$.*
5. *Une isometrie si $T^*T = I$.*
6. *Positif si $(Tx, x) \geq 0, \quad \forall x \in H$.*
7. *Inversible si $\exists S \in B(H) : TS = ST = I$.*

Exemple 1.2.1. *Soit l'opérateur T_φ défini sur*
$H = L^2[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *mesurable et* $\int_{[0,1]} |f(x)|^2 dx < \infty\}$

$$T_\varphi f(x) = \varphi(x) f(x)$$

avec φ continue sur $[0,1]$ à valeur complexe. On a T_φ est borné et son adjoint est défini par :

$$T_\varphi^* f(x) = \overline{\varphi(x)} f(x)$$

qui nous donne :

T_φ est auto-adjoint $\Longleftrightarrow \varphi = \overline{\varphi}$.

T_φ est toujours normal.

T_φ est untaire $\Longleftrightarrow |\varphi| = 1$.

T_φ est positif $\Longleftrightarrow \varphi$ est positif.

Théorème 1.2.2. *Soit T un opérateur borné sur un Hilbert H (i.e $T \in B(H)$). Si $\|T\| < 1$, alors $I - T$ est inversible avec :*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k \geq 0} T^k \quad \text{(appelé série de Neumann)}$$

Théorème 1.2.3. *Soit H un Hilbert et T un opérateur borné et inversible sur H. Si S est un opérateur borné de $B(H)$ tel que*

$$\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|},$$

alors l'opérateur $T + S$ est inversible.

Démonstration. On a toujours

$$T + S = T(I + T^{-1}S),$$

de plus

$$\|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\|\|S\| < 1,$$

le théorème précédent permet d'affirmer que $I + T^{-1}S$ est inversible. D'où $T + S$ est inversible.

$\square$

Remarques 1.2.1.

1. *Au lieu d'auto-adjoint, on dit des fois symétrique si on est sur $\mathbb{R}$ (même sur $\mathbb{C}$), et on dit hermitien sur $\mathbb{C}$.*
2. *Positif sur $\mathbb{R}$ c'est à dire que T est auto-adjoint et $< Tx, x > \geq 0$*
3. *T auto-adjoint $\Longrightarrow T$ normal*
4. *T unitaire $\Longrightarrow T$ isométrie, normal et inversible.*
5. *T positif $\Longrightarrow T$ auto-adjoint.*

Propriété 1.2.1. *Soit $T \in B(H)$. On a :*

1. *T est normal $\Longleftrightarrow \|Tx\| = \|T^*x\|, \forall x \in H$*
2. *T est auto-adjoint $\Longleftrightarrow < Tx, x > \in \mathbb{R}, \forall x \in H$ sur $\mathbb{C}$.*
3. *T est unitaire $\Longleftrightarrow \|Tx\| = \|T^*x\| = \|x\|, \forall x \in H$.*

Proposition 1.2.2. *Soit $T \in B(H)$, on a :*

$$T \text{ est inversible} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha > 0, \|Tx\| \geq \alpha\|x\|, \forall x \in H \\ \ker T^* = \{0\} \end{cases}$$

Corollaire 1.2.1. *Soit $T \in B(H)$, on a :*
T est normal et inversible $\Longleftrightarrow \exists \alpha > 0$, $\forall x \in H : \|Tx\| \geq \alpha\|x\|$

Remarque 1.2.1. *Si T est inversible, alors T^* est inversible.*

Proposition 1.2.3. *Soient A,$B \in B(H)$ tel que A est auto-adjoint. Si $AB = I$ (ou $BA = I$), alors A est inversible et B est auto-adjoint.*

Démonstration. On a : $AB = I$ nous donne que A est inversible à droite. Par passage aux adjoints, on obtient :

$$(AB)^* = B^*A^* = B^*A = I^* = I,$$

i.e. A est aussi inversible à gauche, donc A est inversible et par coséquent $A^* = A$. □

1.3 Convergence sur $B(H)$

Définition 1.3.1. *Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite d'opérateurs bornés sur un Hilbert H. On dit que (T_n) converge :*

1. *Uniformément vers $T \in B(H)$ ssi $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$ (appelée convergence en norme) et on note : $T_n \xrightarrow{U} T$.*
2. *Fortement vers $T \in B(H)$ ssi $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n(x) - T(x)\| = 0$, $\forall x \in H$ et on note : $T_n \xrightarrow{S} T$.*
3. *Faiblement vers $T \in B(H)$ ssi $\lim\limits_{n\to\infty} < T_n x, y >=< Tx, y >$, $\forall x, y \in H$ et on note : $T_n \xrightarrow{W} T$.*

Remarque 1.3.1. *Si $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite d'opérateurs bornés sur un Hilbert H alors, on a :*

$$T_n \xrightarrow{U} T \Longrightarrow T_n \xrightarrow{S} T \Longrightarrow T_n \xrightarrow{W} T$$

Démonstration. Soit $x \in H$, on a :

$$0 \leq \|T_n x - Tx\| = \|(T_n - T)x\|_H \leq \|T_n - T\|_{B(H)} \|x\|_H \quad \forall x \in H$$

donc

$$T_n \xrightarrow{U} T \Longrightarrow T_n \xrightarrow{S} T.$$

On a aussi

$$0 \leq | < T_n x, y > - < Tx, y > | = | < (T_n - T)x, y > | \leq \|(T_n - T)x\| \|y\| \quad \forall x, y \in H$$

donc

$$T_n \xrightarrow{S} T \Longrightarrow T_n \xrightarrow{W} T$$

□

Définition 1.3.2. *Soit (T_n) une suite d'opérateurs auto-adjoint, bornés sur un Hilbert H.*

1. *On dit que (T_n) est croissante bornée si il existe $T \in B(H)$ tel que :*

$$T_1 \leq T_2 \leq T_3 ... \leq T_n ... \leq T$$

   c'est à dire que :

   $< T_1x, x > \leq < T_2x, x > \leq < T_3x, x > \leq < Tx, x > \leq < Tx, x > ... \leq < Tx, x >, \forall x \in H$

2. *On dit que (T_n) est décroissante bornée si il existe $T \in B(H)$ tel que :*

$$T \leq ... \leq T_n \leq ... \leq T_3 \leq T_2 \leq T_1$$

   .

Théorème 1.3.1. *Si (T_n) est une suite croissante d'opérateurs bornés auto-adjoint, alors il existe $T \in B(H)$ que :*

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n(x) - T(x)\| = 0, \forall x \in H.$$

1.4 Racine carrée d'un opérateur

Définition 1.4.1. *Soit $T \in B(H)$, on dit que $S \in B(H)$ est la racine carrée de T si : $S^2 = T$.*

Théorème 1.4.1. *Soit $T \in B(H)$. Si T est positif, alors il existe un opérateur $S \in B(H)$ positif unique tel que : $S^2 = T$. De plus, si B commute avec T, alors B commute avec S.*

Corollaire 1.4.1. *Soit T et S deux opérateurs positifs tels que $ST = TS$, alors ST est positif.*

Démonstration. On a $S \geq 0$ alors d'après le théorème 1.4.1, $\exists A \geq 0$ tel que $A^2 = S$ et aussi $A^* = A$ car A positif nous donne A auto-adjoint.
Soit $x \in H$, on a donc

$$< STx, x > = < A^2Tx, x > = < ATx, A^*x > = < ATx, Ax > = < T\underbrace{Ax}_{=y}, \underbrace{Ax}_{=y} > \geq 0$$

La démonstration est achevée. □

1.4.1 Décomposition polaire

Définition 1.4.2. *Soit $T \in B(H)$. On appelle valeur absolue de T l'opérateur noté par $|T|$ et défini par : $|T| = \sqrt{T^*T}$.*

Remarque 1.4.1. *Il est clair que T^*T est positif car :$< T^*Tx, x >= \|Tx\|^2 \geq 0$.*

Lemme 1.4.1. *Soit $U \in B(H)$. On a*

$$U \, unitaire \Longleftrightarrow U \, isométrie \ surjectif.$$

Théorème 1.4.2. *Soit $T \in B(H)$ et inversible, alors $T = UR$ où U est unitaire et R est positif.*

Démonstration. Puisque T est inversible, T^* l'est aussi, d'où T^*T est inversible. Puisque $T^*T \geq 0$ alors $\sqrt{T^*T} = |T|$ existe et elle est même inversible. On prend $R = \sqrt{T^*T}$ et $U = TR^{-1}$. Il reste de montrer que U est unitaire.
On a

$$\begin{aligned} U^*U =& (TR^{-1})^*TR^{-1} \\ =& (R^{-1})^* \, T^*TR^{-1} \quad [R^{-1} = (R^{-1})^* \text{ car } R \text{ est positif}] \\ =& R^{-1}(T^*T)R^{-1} = I \quad (\text{car } T^*T = R^2 \,). \end{aligned}$$

On déduit que U est une isométrie surjectif, et d'aprés le lemme 1.4.1 on conclut que U est unitaire. $\square$

Exemple 1.4.1. *Trouvons la décomposition polaire de $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2-i & 2i-1 \\ 2+i & -1-2i \end{pmatrix}$.*
Il est clair que $B \in B(\mathbb{C})$ et inversible, donc on peut appliquer le théoréme 1.4.2.
On a

$$B^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ -1-2i & -1+2i \end{pmatrix} \quad et \quad B^*B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$R = |B| = \sqrt{B^*B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \; et \; R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$U = BR^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix}.$$

Et finalement,

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix}}_{=U} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=R}.$$

1.5 Spectre d'un opérateur borné

Définition 1.5.1. *Soit $T \in B(H)$. On dit que λ est une valeur propre ssi :*

$$\exists x \in H(x \neq 0): \ Tx = \lambda x.$$

L'ensemble des valeurs propres est noté $\sigma_p(T)$ et appelé le spectre ponctuel.
Soit I l'identité, le spectre de T qui est noté par $\sigma(T)$ est donné par :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \ \textit{n'est pas inversible}\}$$

Exemples 1.5.1.

1. *Le spectre de l'opérateur identité est $\sigma(I) = \{1\}$*
2. *L'opérateur S (Shift à droite) n'a pas de valeur propre.*
   En effet $S(x_n) = \lambda(x_n)$ donne

$$(0, x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n, ...).$$

   - *Si $\lambda = 0$, alors $x_1 = x_2 = ... = x_n = ... = 0 \Longrightarrow x_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.*
   - *Si $\lambda \neq 0$, on trouve aussi $x_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque 1.5.1. *En dimention finie le spectre se réduit à l'ensemble des valeurs propres.*

Proposition 1.5.1. *Si $T \in B(H)$, alors*

$$\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$$

Définition 1.5.2. *Soit T un opérateur linéaire, on a :*

1. *Si $\lambda \in \sigma(T) - \sigma_p(T)$ et $\overline{Im(T - \lambda I)} = H$, on dit que λ est un élément du spectre continue, noté $\sigma_c(T)$.*
2. *Si $\lambda \in \sigma(T) - \sigma_p(T)$ et $\overline{Im(T - \lambda I)} \neq H$, on dit que λ est un élément du spectre residuel, noté $\sigma_r(T)$.*

Lemme 1.5.1. *Soit $T \in B(H)$. Alors :*

$$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Définition 1.5.3. *Le complémentaire de $\sigma(T)$ est appelé l'ensemble résolvant et il est noté par $\rho(T)$ avec :*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ est inversible}\} = \mathbb{C} - \sigma(T)$$

Théorème 1.5.1. *Soit $T \in B(H)$, alors $\sigma(T)$ n'est jamais vide.*

Théorème 1.5.2. *Soit $T \in B(H)$, alors :*

1. $|\lambda| > \|T\| \Longrightarrow \lambda \notin \sigma(T)$.
2. $\sigma(T)$ *est fermé dans* $\mathbb{C}$.

Corollaire 1.5.1. *Si $T \in B(H)$, alors $\sigma(T)$ est compact dans $\mathbb{C}$.*

Exemple 1.5.1. *Soit $H = \ell^2 = \{(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C} : \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < \infty\}$ et S l'opérateur (shift). Trouvons $\sigma(S)$.*
On va Montrer que

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Nous allons voir que si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$, alors $\lambda \in \sigma_P(S^*)$.
En effet soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$. On doit trouver un $x = (x_n)$ non nul dans ℓ^2 tel que : $S^*x = \lambda x*$. On sait que

$$S^*(x_n) = (x_2, x_3, ..., x_n, ...) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, ..., \lambda x_n, ...),$$

donc

$$x_{n+1} = \lambda x_n \ \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ est une suite géométrique,}$$

d'où

$$x_n = \lambda^{n-1} x_1,$$

en posant $x_1 = 1$, on obtient

$$(x_n) = (1, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^{n-1}, ...) \neq 0_{\ell^2} \text{ de plus } (x_n) \in \ell^2 \text{ car}$$

$$\sum_{n\geq 1} |x_n|^2 = \sum_{n\geq 1} |\lambda|^{2n-2} < \infty \text{ c'est une suite géométrique de raison } |\lambda| < 1.$$

On a donc

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma(S^*),$$

i.e.

$$\{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma(S^{**}) = \sigma(S),$$

mais

$$\{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\},$$

et comme $\sigma(S)$ est fermé, alors

$$\overline{\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \subset \overline{\sigma(S)} = \sigma(S),$$

et d'après le théorème 1.5.2, alors $\sigma(S) \subset B'(0, \|S\| = 1)$.
D'où

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Définition 1.5.4. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $T \in B(H)$. Si $\lambda \in \rho(T)$, alors $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ est appelé résolvante de T au point λ.*

Proposition 1.5.2. *Soit $T \in B(H)$. Alors :*

1. *L'ensemble résolvant est ouvert dans $\mathbb{C}$.*
2. *Le spectre $\sigma(T)$ est non vide de $\mathbb{C}$.*
3. *L'application $\lambda \longmapsto R_\lambda(T)$ de $\rho(T)$ dans $B(H)$ est analytique et vérifie les propriétés suivantes :*
   – $\forall \lambda, \mu \in \rho(T) : \; R_\lambda(T)R_\mu(T) = R_\mu(T)R_\lambda(T)$.
   – $\forall \lambda, \mu \in \rho(T) : \; R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T)$.
   dont la seconde est appelé équation résolvante.

Proposition 1.5.3. *Soit $T \in B(H)$, on a :*
si $\lambda \in \rho(T)$, alors $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$ et

$$(R_\lambda(T))^* = R_{\overline{\lambda}}(T^*)$$

Théorème 1.5.3. *Soit $T \in B(H)$. On a*

1. *Si T est inversible, alors $\sigma(T^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$.*
2. *$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$ pour tout polynôme P complexe.*

Le théorème (voir [1]) suivant nous donne un résultat sur le spectre du produit de deux opérateurs bornés.

Théorème 1.5.4. *(Barra-Boumazghour) Soient $A, B \in B(H)$ tel que l'un des deux est normal. Alors*

$$\sigma(AB) = \sigma(BA).$$

Remarque 1.5.2. *Le résultat précédent a été récemment généralisé au cas où* $\ker A = \ker A^*$ *même dans le cas où A n'est pas nécessairement borné. Voir [5].*

1.6 Opérateurs linéaires non bornés

On a vu que, dans le cas d'un opérateur borné, on peut toujours supposer que son domaine est l'espace de Hilbert tout entier. Dans le cas d'un opérateur non borné il n'en est pas de même ; le domaine de l'opérateur devra toujours être précisé et, lorsqu'on effectuera des opérations algébriques sur des opérateurs non bornés, les questions de domaine devront être examinées avec soin. Le domaine $D(T)$ d'un opérateur T est dit dense dans l'espace de Hilbert H si et seulement si $\overline{D(T)} = H$, oú $\overline{M}$ représente la fermeture d'un sous-ensemble M dans H. Dans ce cas on dit que T est densément défini. Si T est borné défini partiellement sur un domaine dense $D(T)$ de H, alors il est prolongeable par continuité en un opérateur borné sur H tout entier. Ceci ne nous empêche pas de dire que les opérateurs non-bornés densément définis ont une grande importance mathématique et surtout lorsqu'ils sont fermés.

1.7 Domaine, graphe

Définition 1.7.1. *Un opérateur linéaire T d'un espace de Hilbert H est une application linéaire d'un sous-espace vectoriel $D(T)$ (bien défini) de H à valeur dans H. $D(T)$ est le domaine de T.*

Définition 1.7.2. *On appelle graphe de T le sous espace vectoriel de $H \oplus H$ défini par :*

$$G_T = \{(x, Tx), x \in D(T)\}$$

La linéarité de T implique que G_T est un sous-espace vectoriel de $H \oplus H$ pour le produit scalaire

$$\ll (x, y) \gg = < x, y > + < Tx, Ty >$$

d'où, on peut définir la norme du graphe de T de la façon suivante :

$$\|x\|_T = \|x\|_H + \|Tx\|_H.$$

Pour un sous-espace vectoriel $\mathcal{L}$ de $D(T)$, on défini l'ensemble suivant :

$$D(T) \ominus_T \mathcal{L} = \{x \in D(T) : \ll x, y \gg = 0, \forall y \in \mathcal{L}\}.$$

Remarque 1.7.1. *Un opérateur non borné admet en général plusieurs domaines. Le domaine naturel de T sera l'ensemble $D(T) = \{x \in H : Tx \in H\}$ appelé aussi domaine maximal.*

Exemple 1.7.1. *L'opérateur*

$$\begin{aligned} T : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto Tf \quad \text{avec } Tf(x) = (1+x^2)f(x). \end{aligned}$$

est non borné sur son domaine naturel $D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : (1+x^2)f \in L^2(\mathbb{R})\}$. Soit la suite suivante définie par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2n^2}}}{1+x^2} \text{ telle que } n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad et \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi < +\infty.$$

Donc $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^2(\mathbb{R})$, de plus notre suite est borné car

$$\|f_n\| \leq (\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

En utilisant $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss), on obtient

$$\|Tf_n\| = (\int_{-\infty}^{+\infty} ((1+x^2) \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2n^2}}}{1+x^2})^2 dx)^{\frac{1}{2}} = \pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{n}.$$

Puisque $\lim_{n\longrightarrow\infty} \pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{n} = +\infty$, alors la partie $(T(f_n))_{n\geq 1} = \{Tf_n,\ n \geq 1\}$ n'est pas bornée. Donc l'opérateur T est non borné, car les opérateurs bornés conservent la bornitude (i.e l'image directe d'une partie bornée par un opérateur linéaire borné est bornée).

Définition 1.7.3. *L'opérateur T est dit fermé si son graphe G_T est fermé dans $H \oplus H$.*

Remarque 1.7.2. *Par le théorème du graphe fermé les opérateurs fermés sur H sont les opérateurs bornés.*

Proposition 1.7.1. *Soit T un opérateur défini sur un domaine $D(T) \subset H$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *T est fermé.*
2. *$\forall (x_n)_n \subset D(A)$ tel que $x_n \longrightarrow x$ et $Tx_n \longrightarrow y$, alors $x \in D(T)$ et $y = Tx$.*
3. *$(D(T), \|.\|_T)$ est un espace complet.*

Démonstration. Il est clair que (1) $\Longleftrightarrow$ (2). Montrons que (1) $\Longrightarrow$ (3). Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(D(T), \|.\|_T)$. On a

$$\|x_n - x_m\|_T = \|x_n - x_m\|_H + \|Tx_n - Tx_m\|_H \longrightarrow 0$$

donc

$$\|x_n - x_m\|_H \longrightarrow 0 \quad et \quad \|Tx_n - Tx_m\|_H \longrightarrow 0$$

i.e. les deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(Tx_n)_{n\geq 0}$ sont de Cauchy dans $(H, \|.\|_H)$ qui est complet, par conséquent $x_n \longrightarrow x \in H$ et comme T est fermé, on aura $x \in D(T)$, d'où $(D(T), \|.\|_T)$ est un espace complet.

Maintenant soient $(x_n)_{n\geq 0} \subset D(T)$ une suite tels que :

$$x_n \longrightarrow x \quad et \quad Tx_n \longrightarrow y,$$

alors ces deux suites seront de Cauchy dans H qui nous donne

$$\|x_n - x_m\|_T = \|x_n - x_m\|_H + \|Tx_n - Tx_m\|_H \longrightarrow 0,$$

i.e. $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $(D(T), \|.\|_T)$, donc elle convergente vers $x \in D(T)$, donc

$$\|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_H + \|Tx_n - Tx\|_H \longrightarrow 0$$

par conséquent

$$\|Tx_n - Tx\|_H \longrightarrow 0,$$

D'où

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} Tx_n = Tx = y \quad \text{(car la limite est unique).}$$

donc on est arrivé à

$$x \in D(T) \quad et \quad y = Tx.$$

ce qui nous donne T est fermé. $\square$

Définition 1.7.4. *On dit qu'un opérateur S est une extension d'un opérateur T si : $G_T \subset G_S$. On écrit alors $T \subset S$.*
Autrement dit : $Tx = Sx$, $\forall x \in D(T)$ et $D(T) \subset D(S)$.

Définition 1.7.5. *On dit que l'opérateur est fermable s'il existe un opérateur S tel que $T \subset S$ et S est fermé. La plus petite extension c'est sa fermeture et notée par $\overline{T}$.*

Remarque 1.7.3. *T est fermé $\Longleftrightarrow T = \overline{T}$*

Définition 1.7.6. *Soitt T un opérateur fermé défini sur un domaine $D(T)$. D un sous-espace de $D(T)$. On dit que D est un coeur de T si T est la fermeture de la restriction $T|D$ (i.e. $\overline{T|D} = T$).*

Définition 1.7.7. *Soit T un opérateur non borné et S un opérateur borné.*
On dit que S commute avec T si : $ST \subset TS$.

Maintenant on va donner la définition de la commutativité lorsque les deux opérateurs sont non bornés.

Définition 1.7.8. *Soient A et B deux opérateurs non bornés. On dit que A commute avec B si $AB \subset BA$. B commute avec A si $BA \subset AB$. On dit que A et B commutent si A commute avec B et B commute avec A, i.e. $AB = BA$.*

Définition 1.7.9. *Soit T un opérateur non borné.*
On dit que T est inversible s'il existe un opérateur S borné tel que : $TS = I$ et $ST \subset I$.
On désigne l'inverse de T par T^{-1}. On note aussi qu'il est unique.

Définition 1.7.10. *Soit A un opérateur non borné avec son domaine $D(A) \subset H$. On dit que A est inversible à droite s'il existe un opérateur borné $B \in B(H)$ tel que*

$$AB = I,$$

et on dit que A est inversible à gauche s'il existe un opérateur borné $C \in B(H)$ tel que

$$CA \subset I.$$

Remarque 1.7.4. *Généralement le domaine d'un opérateur borné c'est l'espace entier H, mais des fois on trouve des opérateurs bornés qui possèdent des domaines différents* *de l'espace H. Par exemple si T est un opérateur non-borné inversible, alors son inverse T^{-1} vérifie $T^{-1}T = I_{D(T)}$, i.e. $T^{-1}T$ est borné et défini sur $D(T) \neq H$. La fermeture d'un opérateur défini et borné sur un domaine différent de l'espace entier H dépend de la fermeture de son domaine, la proposition suivante clarifie ce point.*

Proposition 1.7.2. *Soient H un Hilbert et T un opérateur borné défini sur un domaine $D(T)$. Alors T est fermé ssi $D(T)$ est fermé dans H.*

Démonstration. Puisque T est borné (continu) et l'espace d'arrivé H est T_2-séparé, alors G_T est fermé dans $D(T) \times H$ qui est égale à l'intersection des fermés de la forme

$$(F_i^1 \cap D(T)) \times F_j^2,$$

tels que $(i, j) \in I \times J$ et F_i^1, F_j^2 sont des fermés dans l'espace H. Donc G_T est fermé dans $H \times H$ si et seulement si $D(T)$ est fermé dans H (c'est la topologie induite !). □

Théorème 1.7.1. *Tout opérateur T non borné inversible est fermé.*

Démonstration. Soit T un opérateur non borné inversible de domaine $D(T)$. On a,

$$T^{-1} : \mathrm{Im}\, T \longrightarrow D(T)$$

Soit $(x_n)_{n \geq 0} \subset D(T)$ tel que,

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{et} \quad Tx_n \longrightarrow y.$$

Donc

$$x \longleftarrow x_n = T^{-1}Tx_n \longrightarrow T^{-1}y \quad (\text{car } T^{-1} \text{ est borné}).$$

D'où

$$x = T^{-1}y \in D(T) \quad \text{et} \quad Tx = TT^{-1}y = y.$$

La démonstration est achevée. □

1.8 Produits et sommes d'opérateurs fermés

En général le produit de deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement fermé et ainsi pour la somme.

Exemple 1.8.1. *Soit T un opérateur non borné et fermé défini sur son domaine $D(T)$, alors $0T$ n'est pas fermé car*

$$D(0T) = D(T) \quad et \quad (0T)x = 0, \forall x \in D(T).$$

Pour $S = -T$ qui reste fermé, alors

$$T - T = 0_{D(T)}$$

n'est pas fermé sur $D(T)$.

Théorème 1.8.1. *Soit S et T deux opérateurs fermés à domaines denses, alors*

1. *ST est fermé si S est inversible ou T est borné.*
2. *$T + S$ est fermé si S est borné (i.e $S \in B(H)$).*

1.9 Adjoint d'un opérateur non borné

Définition 1.9.1. *Soit T un opérateur non borné défini sur son domaine $D(T)$. Le domaine de l'adjoint de T est donné par :*

$$D(T^*) = \{y \in H : l'application \quad \varphi(x) =< Tx, y > est\ continue\ sur\ D(T)\}.$$

Remarque 1.9.1. *Si $y \in D(T^*)$, alors le théorème de [Hahn-Banach] nous permet de prolonger $< Tx, y >$ en une forme linéaire continue sur H entier, d'où*

$$\exists T^*y \in H :< Tx, y >=< x, T^*y >$$

(c'est d'après le théorème de Riesz). Il est indispensable de supposer $D(T)$ dense, car si $\overline{D(T)} \neq H$ et si $y_0 \in D(T)^\perp \neq \{0\}$, alors :

$$\forall x \in D(T) :< x, T^*y + y_0 >=< x, T^*y > + \underbrace{< x, y_0 >}_{=0} =< x, T^*y >,$$

donc on aura un autre adjoint qui est $T^*y + y_0$ (i.e l'adjoint ne sera plus unique !).

Proposition 1.9.1. *Soient S, T deux opérateurs définis sur des domaines denses respectivement $D(S)$ et $D(T)$ dans H.*

1. *L'opérateur adjoint T^* est fermé.*
2. *$\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$.*
3. *Si $D(T^*)$ est dense, alors $T \subset T^{**}$, où $T^{**} = (T^*)^*$.*
4. *Si $T \subset S$, alors $S^* \subset T^*$.*
5. *Si $D(T+S)$ est dense, alors $(T+S)^* \supseteq T^* + S^*$.*
6. *Si S est borné et $D(S) = H$, alors $(T+S)^* = T^* + S^*$.*

Proposition 1.9.2. *Soient T et S deux opérateurs tel que $D(ST)$ est dense dans H. On a :*

1. *Si $D(S)$ est dense dans H, alors $(ST)^* \supseteq T^*S^*$.*
2. *Si S est borné avec $D(S) = H$, alors $(ST)^* = T^*S^*$.*

Théorème 1.9.1. *Soit T un opérateur défini sur un domaine dense $D(T)$. On a :*

1. *T est fermable ssi $D(T^*)$ est dense dans H.*
2. *Si T est fermable, alors $(\overline{T})^* = T^*$, de plus*
$$\overline{T} = T^{**}.$$
3. *T est fermé ssi $T = T^{**}$.*
4. *On suppose que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ et $\mathcal{R}(T)$ est dense dans H. Alors T^* est inversible et*
$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$
5. *On suppose que T est fermable et $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. Alors l'inverse T^{-1} de T est fermable ssi $\mathcal{N}(\overline{T}) = \{0\}$. Dans ce cas, on a*
$$(\overline{T})^{-1} = \overline{(T^{-1})}.$$
6. *Si T est inversible, alors T est fermé ssi T^{-1} est fermé.*

Corollaire 1.9.1. *Si T est un opérateur auto-adjoint tel que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, alors T^{-1} est auto-adjoint.*

Démonstration. Puisque $T = T^*$, alors

$$\mathcal{R}(T)^{\perp} = \mathcal{N}(T) = \{0\},$$

par conséquent $\mathcal{R}(T)^{\perp}$ est dense dans H, et d'après le théorème précédent, on obtient T^{-1} est auto-adjoint. □

Remarques 1.9.1. *Si A et B deux opérateurs non bornés inversibles, alors AB est inversible avec $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Si A est inversible, alors A est fermé et si A est fermé avec un domaine dense, alors A est inversible ssi A^* est aussi inversible. On peut avoir facilement que si A est fermé avec un domaine dense, alors A est inversible à droite (resp. à gauche) ssi A^* est inversible à gauche (resp. à droite respectivement).

Proposition 1.9.3. *Soit A un opérateur non borné inversible et B un opérateur non borné alors :*

$$(BA)^* = A^*B^*$$

Démonstration. On a toujours $(AB)^* \supset A^*B^*$ (d'après le théorème 1.9.1).
Montrons que $(BA)^* \subset A^*B^*$.
On a :

$$\begin{aligned} BAA^{-1} = B &\Longrightarrow (A^{-1})^*(BA)^* \subset (BAA^{-1})^* = B^* \\ &\Longrightarrow (A^*)^{-1}(BA)^* \subset B^* \text{ (d'aprés le lemme\textbf{??})} \\ &\Longrightarrow \underbrace{A^*(A^*)^{-1}}_{=I}(BA)^* \subset A^*B^* \\ &\Longrightarrow (BA)^* \subset A^*B^*. \end{aligned}$$

D'où,

$$(BA)^* = A^*B^*.$$

□

1.10 Opérateurs symétriques, auto-adjoints et normaux

Dans ce qui suit, tous les opérateurs pour lesquels on parle sont bien sûr à domaine dense.

Définitions 1.10.1. *Soit T un opérateur non borné défini sur son domaine dense $D(T)$.*

1. *On dit que T est symétrique si : $T \subset T^*$.*
2. *On dit que est auto-adjoint si : $T = T^*$.*
3. *On dit que T est essentillement auto-adjoint si : $\overline{T} = (\overline{T})^*$.*
4. *On dit que l'opérateur T est normal si $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pour tout $x \in D(T) = D(T^*)$.*
5. *On dit que T est formellement normal si $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pour tout $x \in D(T) \subset D(T^*)$.*

Remarque 1.10.1.

1. *Tout opérateur symétrique est fermable.*
2. *Tout opérateur auto-adjoint est fermé.*
3. *Tout opérateur auto-adjoint est normal.*
4. *Tout opérateur normal et symétrique est auto-adjoint.*

Proposition 1.10.1. *Soit T un opérateur symétrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est auto adjoint*
2. *T est fermé, et $\ker(T^* \pm i) = \{0\}$*
3. *$Im(T \pm i) = H$*

Théorème 1.10.1 (voir [36])**.** *Soit T un opérateur non borné fermé à domaine dense. Alors l'opérateur T^*T est auto-adjoint sur $D(T^*T)$.*

Lemme 1.10.1. *Soit T un opérateur fermé défini sur un domaine dense $D(T)$. Alors T^*T est un opérateur positif est auto-adjoint, de plus $D(T^*T)$ est un cœur de T.*

Proposition 1.10.2. *Un opérateur T est normal ssi T est fermé et $T^*T = TT^*$.*

Démonstration. Montrons l'implication " $\Longrightarrow$ ". On a :

$$\|Tx\|_H = \|T^*x\|_H \Longrightarrow \|x\|_T = \|x\|_{T^*},$$

i.e. $(D(T), \|\|_T) = (D(T^*), \|\|_{T^*})$, et puisque T^* est fermé, alors $(D(T), \|\|_T) = (D(T^*), \|\|_{T^*})$ est complet, donc T est fermé. Soit $x \in D(T^*T)$, donc $x \in D(T)$ et $Tx \in D(T^*)$. On a

$$\begin{aligned} < T^*Tx, x > &=< Tx, Tx > \\ &=< T^*x, T^*x > \quad \text{(car } T \text{ est normal)} \\ &=< TT^*x, x > \end{aligned}$$

i.e. $T^*T \subseteq TT^*$. De la même manière, on obtient $TT^* \subseteq T^*T$. D'où $T^*T = TT^*$.
Montrons maintenant l'implication " $\Longleftarrow$ ". Soit $x \in D = D(T^*T) = D(TT^*)$, on a

$$\begin{aligned} < T^*Tx, x >=< TT^*x, x > &\Longrightarrow< Tx, Tx >=< T^*x, T^*x > \\ &\Longrightarrow \|Tx\| = \|T^*x\|, \end{aligned}$$

par conséquent $\|x\|_T = \|x\|_{T^*}$. Puisque $D(T^*T)$ est le coeur de T et aussi $D(TT^*)$ est le coeur de T^*, on aura

$$(D, \|\|_T) = (D, \|\|_{T^*}).$$

D'où

$$\|Tx\| = \|T^*x\|$$

pour tout $x \in D(T) = D(T^*)$. $\square$

Proposition 1.10.3. *Soit A un opérateur fermé à domaine dense sur un Hilbert H. Alors l'opérateur $I + A^*A$ est inversible. De plus l'opérateur $C_A = (I + A^*A)^{-1}$ est positif, borné et auto-adjoint.*

De cette proposition, l'opérateur C_A possède une racine carré positif (d'après le théorème 1.4.1) où on peut définir l'opérateur, noté et définie par

$$Z_A = AC_A^{\frac{1}{2}}$$

qui est appelé la transformation borné de A.

Définition 1.10.1 (Commutativité forte). *Soient A et B deux opérateurs normaux avec leurs transformations bornés respectivement Z_A et Z_B. On dit que A et B commutent fortement ssi $Z_AZ_B = Z_BZ_A$.*

Proposition 1.10.4. *Soient S et T deux opérateurs définis sur leurs domaines $D(S)$ et $D(T)$ respectivement. Si le domaine de S dense et $D(S^*) \subset D(S)$, alors*

$$S \subset T \Longrightarrow S = T$$

pour $D(T) \subset D(T^*)$.

Proposition 1.10.5. *Les opérateurs auto-adjoints sont symétriques maximaux.*
C'est-à-dire, si S est symétrique et T est auto-adjoint, alors :

$$T \subset S \Longrightarrow S = T.$$

Démonstration. On a $S \subset S^*$ et $T = T^*$.
Donc,

$$\begin{aligned} T \subset S &\Longrightarrow S \subset S^* \subset T^* = T \\ &\Longrightarrow T = S. \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant nous donne des égalités semblables à la proposition précédente, c'est-à-dire qu'il y a des conditions qui transforme l'inclusion $S \subset T$ à une égalité $S = T$ (que nous appelons un état de maximalité) pour quelques classes des opérateurs, et également dans le cas d'un produit de deux opérateurs. Ce type de résultats est un outil puissant pour prouver des résultats sur les opérateurs non bornés. Par exemple, la propriété (3) du prochain théorème est employé dans la preuve de la version « non borné » du théorème spectral des opérateurs normaux (voir par exemple [31]). Pour d'autres utilisations, voyez par exemple [31] ou [32].

Théorème 1.10.2 ([32])**.** *Soient S, T deux opérateurs définis respectivement sur leurs domaines denses $D(S)$ et $D(T)$ tel que $S \subset T$. Alors $S = T$ ssi l'un de ces propriétés suivantes est satisfaite :*

1. *S est surjectif et T est injectif.*
2. *T est symétrique et S est auto-adjoint (resp. normal). On dit alors que les opérateurs auto-adjoints (resp. normaux) sont symétriques maximaux.*

3. *T et S sont normaux (on dit que les opérateurs normaux sont normaux maximaux), par conséquent s'ils sont auto-adjoints (on dit que les opérateurs auto-adjoints maximaux).*

4. *S est normal et T est formellement normal.*

Théorème 1.10.3. **(a)** *Si $T_1 \subset T_2$ sont deux opérateurs auto-adjoints, alors $T_1 = T_2$.*

(b) *Si S est un opérateur symétrique et T_1, T_2 deux opérateurs auto-adjoints et extensions de S tel que $D(T_1) \subset D(T_2)$, alors $T_1 = T_2$.*

(c) *Si S est essentiellement auto-adjoint, alors $\overline{S}$ est unique extension auto-adjointe de S.*

Démonstration. on a :

(a) Puisue T_1 et T_2 sont auto-adjoints, alors

$$T_1 \subset T_2 \Longrightarrow T_2 = T_2^* \subset T_1^* = T_1 \Longrightarrow T_1 = T_2$$

(b) Soient $x \in D(T_1) \subset D(T_2)$ et $y \in D(S) \subset D(T_1) \subset D(T_2)$, on a

$$< T_2x, y >=< x, T_2y >=< x, Sy >=< x, T_1y >=< T_1x, y >$$

et comme $D(S)$ est dense, alors $T_1 = T_2$ sur $D(T_1$ (i.e. $T_1 \subset T_2$) et d'après (a) on obtient $T_1 = T_2$.

(c) Soit T est une extention auto-adjointe de S, alors

$$S \subset T \Longrightarrow T \subset S^* = (\overline{S})^* = \overline{S}$$

et d'après (a), on obtient $T = \overline{S}$

□

Maintenant on rappelle des résultats dans le cas où un coté de l'inclusion contient un produit de deux opérateurs.

Théorème 1.10.4 ([22], [28], [32]). *Soient R, S, T, A, B, C des operateurs tels que $T \subset RS$ et $AB \subset C$. Alors*

1. *$T = RS$ si T, R et S sont auto-adjoints.*

2. *$T_0 = \overline{RS}$ si T, R et S sont auto-adjoints et $T_0 \subset RS$ où T_0 est la restriction de T sur un certain domaine $D_0(T)$ (voir [10]).*
3. *$AB = C$ si A et B sont auto-adjoint, B est positif et $B^{-1} \in B(H)$ et C est normal.*
4. *$C = BA$ si A, B sont auto-adjoints et $B^{-1} \in B(H)$ et C est fermé et symétrique.*

Les propriétés du théorème précédent nous donne beaucoup de résultats et voici la proposition suivante :

Proposition 1.10.6. *Soit S et T deux opérateurs définis sur leur domaines $D(S)$ et $D(T)$ respectivement. Si S est à domaine dense et $D(S^*) \subset D(S)$, alors*

$$S \subset T \Longrightarrow S = T$$

pour tout $D(T) \subset D(T^*)$.

On peut parler maintenant d'une notion de « double maximalité ». Une propriété connue dans (Théorème5.31, [36]) indique que si S est un opérateur symétrique tels que $S \subset R$ et $S \subset T$ où R et T sont auto-adjoints et $D(R) \subset D(T)$, alors T = R. Remarquons que ce qui précède la symétrie de l'opérateur S est implicitement citée dans $S \subset T$ car

$$(S \subset T \Longrightarrow T = T^* \subset S^*) \Longrightarrow S \subset S^*$$

de plus la supposition que S est symétrique n'est pas utilisé dans la preuve. Voici le résultat amélioré dans la proposition suivante :

Proposition 1.10.7. *Soit S un opérateur défini sur un domaine $D(S)$ dense tels que $S \subset R$ et $S \subset T$ où R et T sont auto-adjoints. Si $D(R) \subset D(T)$, alors $T = R$.*

On a aussi cette proposition,

Proposition 1.10.8 (voir [23], cf. [35])**.** *Soient R, S et T trois opérateurs définis respectivement sur leurs domaines denses $D(R)$, $D(S)$ et $D(T)$. On suppose que*

$$\begin{cases} T \subset R \\ T \subset S. \end{cases}$$

On suppose aussi que R et S sont auto-adjoints. Soit $D \subset D(T) \subset (D(R) \cap D(S))$ est dense. On suppose que D est un coeur de S. Alors $R = S$.

Remarque 1.10.2. *la première propriété (1) dans le théorème précédent ne se prolonge pas aux opérateurs normaux. En effet, juste dans le cas des opérateurs unitaires, nous avons qu'un produit de deux opérateurs unitaires quelconques est toujours unitaire même lorsque les deux facteurs du produit ne commutent pas. Cette observation motive la recherche dans le cas où un opérateur est normal*

1.11 Spectre des opérateurs non-bornés

Définition 1.11.1. *Soit T un opérateur non-borné défini sur un domaine $D(T)$ dense dans H. On définit les ensembles suivants :*

1. *Le spectre de T par*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}.$$

2. *L'ensemble résolvant de T par*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad T - \lambda I \text{ est inversible}\} = \mathbb{C} - \sigma(T).$$

De plus si $\lambda \in \rho(T)$, l'opérateur $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ est appelé la résolvante de T au point λ.
Le spectre $\sigma(T)$ se décompose en trois parties disjointes :

* *Spectre ponctuel*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad T - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}.$$

* *Spectre continu*

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad T - \lambda I \text{ est injectif et } \overline{T - \lambda I} = H\}.$$

* *Spectre résiduel*

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad T - \lambda I \text{ est injectif et } \overline{T - \lambda I} \neq H\}.$$

Lemme 1.11.1. *Soient S et T deux opérateurs auto-adjoints à domaines denses sur un espace de Hilbert H. On suppose que S est borné. S et T commutent (i.e. $ST \subset TS$). Alors $f(S)T \subset Tf(S)$ pour toute fonction à valeurs réelles continue sur le spectre $\sigma(S)$. En particulier, on a $S^{\frac{1}{2}}T \subset TS^{\frac{1}{2}}$, si S est positif.*

1.12 Le théorème de Fuglede-Putnam

Dans cette section on rappelle le théorème célèbre de Fuglede-Putnam qui joue un rôle très important dans la théorie des opérateurs bornés et non bornés avec toutes ses applications. Beaucoup d'auteurs travaillent sur ce théorème. Voici ci-après ce théorème dans le cas borné et dans le cas non-borné et pour la preuve (voir par exemple [4]).

Théorème 1.12.1 (la version bornée)**.** *Soient T, M, N trois opérateurs bornés sur un Hilbert H, avec N et M sont normaux et $TN = MT$ alors :*

$$TN^* = M^*T$$

Remarque 1.12.1. *Si $N = M$ on l'appelle le théorème de Fuglede.*

Théorème 1.12.2 (La version non borné)**.** *Soit H un espace de Hilbert, et soient M, N deux opérateurs normaux non borné et T un opérateur borné sur H.*
Si $TN \subseteq MT$, alors

$$TN^* \subseteq M^*T$$

Théorème 1.12.3 (Fuglede-Putnam-Mortad)**.** *Soit A un opérateur non borné et fermé sur son domaine $D(A)$. Soient M et N deux opérateurs non bornés normaux sur leurs domaines $D(M)$ et $D(N)$ respectivement. Si $D(N) \subset D(AN)$, alors*

$$AN \subset MA \Longrightarrow AN^* \subset M^*A$$

Beaucoup d'auteurs ont essayé de trouver des autres résultats similaires au téhorème de Fuglede-Putnam en changeant leur hypothèses. En voici un théorème,

Théorème 1.12.4. *Soit N un opérateur unitaire et A, B deux opérateurs bornés. Alors*

$$NA = BN \Longrightarrow NA^* = A^*N.$$

Chapitre 2

Commutativité des opérateurs normaux et auto-adjoints et applications

2.1 Sur la fermeture, l'adjonction et la normalité du produit ou la somme de deux opérateurs non bornés

Les opérateurs fermés et les opérateurs fermables sont les classes importantes des opérateurs linéaires non-bornés qui sont assez grands pour couvrir toute l'occurrence intéressante d'opérateurs dans les applications. Dans ce chapitre on va commencer par la fermeture car elle représente une condition nécessaire pour la normalité de l'opérateur et aussi on essaye de donner des théorèmes qui donnent la normalité d'un produit de deux opérateurs et on va voir quelques résultats pour la somme de deux opérateurs. On rappelle quelques définitions et théorèmes dont on a besoin pour prouver nos résultats.

Définition 2.1.1. *Soient A et B deux opérateurs non bornés à domaines denses. On dit que A est B-borné si les conditions suivantes sont réalisées :*

1. $D(B) \subset D(A)$.
2. $\exists a, b \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in D(B), \|A(x)\| \leq a\|B(x)\| + b\|x\|$.

La borne inférieure des "a" convenables est appelée la borne relative de A (par rapport à B).

Théorème 2.1.1. *Soit B un opérateur fermé. Si A est B-borné avec la borne ralative "a" telle que $a < 1$, alors $A + B$ est fermé.*

Théorème 2.1.2 (Kato-Rellich)**.** *Soit B un opérateur non borné auto-adjoint avec le domaine $D(B)$. Si A est B-borné avec la borne relative "a" tel que $a < 1$, sachant que A est symétrique, alors $A + B$ est auto-adjoint sur $D(B)$.*

Proposition 2.1.1. *Soit B un opérateur borné et soit A un opérateur non borné fermé de domaine $D(A)$. Si pour un certain $r > 0$ on a : $\|rB - I\| < 1$, alors BA est fermé sur $D(A)$.*

Démonstration. Pour la preuve on utilise le théorème 2.1.1. Puisque B est borné on aura $D(BA) = D(A)$, et par conséquent pour tout $x \in D(A)$ on peut écrire :

$$rBAx = (rB - I)Ax + Ax$$

Puisque $\|rB - I\| < 1$, on peut dire que $(rB - I)A$ est A-borné avec une borne relative strictement inférieure à 1. Puisque A est fermé, le théorème 2.1.1 nous donne la fermeture de l'opérateur rBA, donc BA est fermé. □

Une idée semblable peut être employée pour établir la fermeture de l'opérateur BA dans le cas où les deux opérateurs A, B sont non bornés. On a

Théorème 2.1.3. *Soient A et B deux opérateurs non bornés à domaines denses $D(A)$ et $D(B)$ respectivement. On suppose que $D(A) \subset D(BA)$, A est fermé et pour un certain $a < 1$ et $b > 0$*

$$\exists r > 0 : \|(rB - I)Ax\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|, \forall x \in D(A).$$

Alors BA est fermé.

Remarque 2.1.1. *On remarque que dans le théorème précédent la fermeture de l'opérateur B n'est pas supposé.*

Démonstration. Puisque $D(A) \subset D(BA)$ on aura $D(BA) = D(A)$. Donc BA possède un domaine dense.
Alors on peut écrire pour tout $x \in D(BA)$:

$$rBAx = (rB - I)Ax + Ax.$$

La condition

$$\|(rB - I)Ax\|Ax \leq a\|Ax\| + b\|x\| \quad \text{et} \quad a < 1$$

indique que $(rB-I)A$ est A-borné avec une borne relative strictement inférieur à 1, par conséquent le théorème 2.1.1 permet d'établir la fermeture de $rBA=(rB-I)A+A$. Donc BA est fermé. $\square$

Théorème 2.1.4. *Soient A et B deux opérateurs non bornés tel que $AB=BA$ Si A est inversible, B est fermé et $D(BA^{-1})\subset D(A)$, alors $A+B$ est fermé sur $D(B)$.*

Démonstration. Premiérement, l'opérateur $A+B$ est défini sur $D(A)\cap D(B)$. Mais

$$AB=BA\Longrightarrow A^{-1}B\subset BA^{-1}\Longrightarrow D(B)=D(A^{-1}B)\subset D(BA^{-1})\subset D(A),$$

par conséquent $D(A+B)=D(B)$.
En effet

$$\begin{aligned}A+B&=A+BAA^{-1}\\&=A+ABA^{-1}\\&=A(I+BA^{-1})\quad(\text{car } D(BA^{-1})\subset D(A)).\end{aligned}$$

Puisque A^{-1} est borné et B est fermé par cet ordre, BA^{-1} est fermé. Par conséquent $A(I+BA^{-1})$ est fermé car par cet ordre A est inversible et $I+BA^{-1}$ est fermé. $\square$

2.1.1 Auto-adjonction et la question de la normalité

Dans cette section on présente des résultats positifs sur le produit et la somme de deux opérateurs auto-adjoints ou normaux, en supposant que l'un d'entre eux est au plus borné.

Proposition 2.1.2. *Soient B un opérateur unitaire et A un opérateur normal non borné. Si B et A commutent (i.e $BA\subset AB$), alors BA est normal.*

Démonstration. Puisque B est inversible (et borné) et A est fermé, on aura BA est fermé.

On a également par(B borné) : $(BA)^*=A^*B^*$, et par B unitaire($B^*B=I$), donc

$$(BA)^*BA=A^*B^*BA=A^*A$$

Puisque B et A commutent et A est normal, on aura d'après le théorème de Fuglede-Putnam,

$$BA\subset AB\Longrightarrow BA^*\subset A^*B.$$

Par conséquent,

$$BA(BA)^* = BAA^*B^* \subset ABA^*B^* \subset AA^*BB^* = AA^* = A^*A$$

D'où,

$$BA(BA)^* \subset (BA)^*BA$$

Puisque BA est fermé, alors $BA(BA)^*$ et $(BA)^*BA$ sont auto-adjoints et comme les opérateurs auto-adjoints sont symétriques maximaux, alors

$$BA(BA)^* = (BA)^*BA.$$

Donc BA est normal sur $D(A)$.

□

Le résultat reste valable si l'ordre de A et de B est échangé et on a :

Proposition 2.1.3. *Soient A un opérateur unitaire et B un opérateur normal non borné. Si B et A commutent (i.e $AB \subset BA$), alors BA est normal.*

Démonstration. Puisque B est fermé et A est borné, on aura BA est fermé. Comme $AB \subset BA$, alors

$$(BA)^*BA \supset A^*B^*BA \supset A^*B^*AB \supset AA^*B^*B = B^*B.$$

Où on a utilisé encore le théorème de Fuglede-Putnam.
Par conséquent

$$BA(BA)^* \subset (BA)^*BA.$$

Puisque BA est fermé, alors $BA(BA)^*$ est auto-adjoint sur $D[BA(BA)^*]$ et comme les opérateurs auto-adjoints sont symétriques maximaux, alors

$$BA(BA)^* = (BA)^*BA.$$

Donc BA est normal. □

Corollaire 2.1.1. *Soient B et A deux opérateurs auto-adjoints tel que $B^2 = I$. Si B et A commutent, alors BA est auto-adjoint.*

Démonstration. Puisque B est borné, on aura $(BA)^* = A^*B^* = AB$ et comme B et A commutent, alors

$$BA \subset AB = (BA)^*$$

Donc BA est symétrique et d'après la proposition 2.1.2, BA est normal.
Puisque BA est normal et symétrique, on trouve que BA est auto adjoint. □

De la même manière, on trouve l'auto-adjonction de BA si l'ordre de A et de B est échangé. On a

Corollaire 2.1.2. *Soient B et A deux opérateurs auto-adjoints tel que $A^2 = I$. Si A et B commutent, alors BA est auto-adjoint.*

Démonstration. On a BA est normal d'après la proposition 2.1.3. Puisque BA est fermé, $AB \subset BA$ et A est borné, on aura

$$(BA)^* \subset (AB)^* = B^*A^* = BA = [(BA)^*)]^*.$$

Ce qui signifie que $(BA)^*$ est symétrique. Comme BA est normal, $(BA)^*$ est aussi normal. Donc $(BA)^*$ est auto-adjoint et ainsi pour BA. □

On peut supposer d'autres hypothèses sans utiliser la condition (A et B commutent) pour obtenir un autre résultat de l'auto-adjonction de BA. On a

Proposition 2.1.4. *Soient B un opérateur borné et A un opérateur non borné auto-adjoint à domaine dense $D(A)$. Si pour un certain $r > 0$ on a $\|rB - I\| < 1$ et BA est symétrique, alors BA est auto-adjoint sur $D(A)$.*

Démonstration. Puisque B est borné on aura $D(BA) = D(A)$ et par conséquent pour tout $x \in D(A)$, on peut écrire

$$rBAx = (rB - I)Ax + Ax$$

Comme $\|rB - I\| < 1$, on peut dire que $(rB - I)A$ est A-borné avec la borne relative strictement inférieur à 1. Puisque A est auto-adjoint, on trouve que rBA est auto-adjoint, c'est grâce au théorème de Kato-Rellich. D'où BA est auto-adjoint. □

Remarque 2.1.2. *La proposition précédente peut être utilisée pour établir un résultat de la normalité du produit de deux opérateurs.*

Théorème 2.1.5. *Soient B un opérateur borné normal et A un opérateur non borné normal. On suppose que B et A commutent. Si pour un certain $r > 0$, $\|rBB^* - I\| < 1$, alors BA est normal.*

Démonstration. Montrons premièrement que BA est fermé. Soit la suite $(x_n)_{n\geq 0} \subset D(BA) = D(A)$ tel que :

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{et} \quad BAx_n \longrightarrow y$$

La condition $\|rBB^* - I\| < 1$, plus la normalité de B, on aura $BB^* = B^*B$ est inversible. Puisque B^* est borné (i.e. continue), on aura

$$B^*BAx_n \longrightarrow B^*y,$$

Donc

$$Ax_n \longrightarrow (B^*B)^{-1}B^*y.$$

Comme A est fermé, on obtient

$$x \in D(A) \quad \text{et} \quad Ax = (B^*B)^{-1}B^*y.$$

Ceci implique que

$$B^*BAx = B^*y \Longrightarrow BB^*BAx = BB^*y.$$

Et puisque BB^* est inversible, On aura

$$BAx = y.$$

D'où BA est fermé.
Puisque B est borné et $BA \subset AB$, on aura

$$B^*A^* \subset (AB)^* \subset (AB)^* = A^*B^*,$$

et grace au théorème de Fuglede, on aura

$$BA^* \subset A^*B \text{ et } B^*A \subset AB^*.$$

On a aussi

$$(BA)^*BA = A^*B^*BA \supset B^*A^*BA \supset B^*BA^*A$$

et

$$BA(BA)^* = BAA^*B^* \supset BAB^*A^* \supset BB^*AA^*.$$

Comme A est fermé (qui donne l'auto-adjonction de AA^*) et $\|rBB^* - I\| < 1$, et par la proposition 2.1.4, on trouve que BB^*AA^* et B^*BA^*A sont auto-adjoints.
Puisque BA est fermé, alors $(BA)^*BA$ et $BA(BA)^*$ sont auto-adjoints. Comme les opérateurs auto-adjoints sont symétriques maximaux, alors

$$B^*BA^*A = (BA)^*BA \qquad et \qquad BB^*AA^* = BA(BA)^*.$$

Donc BA est normal avec

$$D((BA)^*BA) = D(BA(BA)^*) = D(AA^*) = D(A^*A),$$

car BB^* est borné. □

Théorème 2.1.6. *Soient B un opérateur borné normal et A un opérateur non borné normal. On suppose que B et A commutent. Si pour un certain $r > 0$, $\|rBB^* - I\| < 1$, alors AB est normal.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 2.1.5.
Il est clair que AB est fermé car A est fermé et B borné.
On a toujours,

$$B^*A^* \subset (AB)^* \subset (AB)^* = A^*B^*,$$

et grâce au théorème de Fuglede, on aura

$$BA^* \subset A^*B \text{ et } B^*A \subset AB^*$$

On a aussi

$$(AB)^*BA \supset B^*A^*AB \supset B^*A^*BA \supset B^*BA^*A,$$

et

$$AB(AB)^* \supset ABB^*A^* \supset BAB^*A^* \supset BB^*AA^*.$$

Comme A est fermé et $\|rBB^* - I\| < 1$, par la proposition 2.1.4, on trouve que BB^*AA^* et B^*BA^*A sont auto-adjoints.
Par conséquent

$$AB(AB)^* = (AB)^*AB.$$

Donc AB est normal.

□

Théorème 2.1.7. *Soient A et B deux opérateurs à domaine dense $D(A)$, $D(B)$ respectivement. On suppose que $D(A) \subset D(BA)$, BA est symétrique et A auto-adjoint et pour un certain $a < 1$ et $b > 0$,*

$$\exists r > 0 : \|(rB - I)Ax\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|, \forall x \in D(A)$$

Alors BA est fermé.

Démonstration. La condition $D(A) \subset D(BA)$ donne $D(BA) = D(A)$ ce qui assure la densité du domaine de l'opérateur BA. En utilisant le théorème 2.1.3, on aura BA est fermé, ensuite on applique le théorème de Kato-Rellich pour trouver l'auto-adjonction de BA. □

Théorème 2.1.8. *Soient A et B deux opérateurs non bornés et auto-adjoints tel que B est inversible. Si $AB = BA$ et $D(AB^{-1}) \subset D(B)$, alors $A + B$ est auoto-adjoint sur $D(A)$.*

Démonstration. Il est clair que

$$D(A) = D(B^{-1}A) \subset D(AB^{-1}) \subset D(B)$$

qui nous donne $D(A + B) = D(A)$. On a

$$B^{-1}\underbrace{BA}_{=AB} + B \subset A + B$$

et par conséquent

$$(I + B^{-1})B \subset A + B.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
(A + B)^* &\subset [(I + B^{-1})B]^* \\
&= B^*(I + B^{-1}A)^*) \quad (\text{car } B \text{ est inversible et } I + B^{-1}A \text{ fermé par cet ordre}) \\
&= B^*[I + (B^{-1}A)^*] \\
&= B^*[I + A^*(B^{-1})^*] \quad (\text{car } B^{-1} \text{ est borné}) \\
&= B(I + AB^{-1}) \quad (\text{car } A \text{ et } B \text{ sont auto-adjoints}) \\
&= B + BAB^{-1} \quad (\text{pour } D(AB^{-1}) \subset D(B)) \\
&= B + ABB^{-1} \\
&= A + B.
\end{aligned}$$

Dans la théorie on a toujours $(A+B)^* \supset A^*+B^* = A+B$. Donc

$$(A+B)^* = A+B.$$

D'où $A+B$ est auto-adjoint sur $D(A)$. □

Théorème 2.1.9. *Soient A et B deux opérateurs normaux. On suppose que B est borné. Si $AB = BA$, alors BA (et ainsi AB) est normal.*

Démonstration. Puisque $AB = BA$, par le théorème de Fuglede-Putnam, on aura

$$BA^* = A^*B.$$

D'autre part

$$(BA)^*BA = A^*B^*BA = A^*B^*AB \underbrace{\subset}_{\text{Fuglede classique}} A^*AB^*B,$$

et aussi

$$BA(BA)^* = BAA^*B^* = ABA^*B^* = AA^*BB^*.$$

D'où

$$(BA)^*BA \subset BA(BA)^*.$$

Il est clair que $AB = BA$ est fermé car A est fermé et B est borné. Donc, $BA(BA)^*$ et $(BA)^*BA$ sont auto-adjoints et par conséquent BA est normal car les opérateurs auto-adjoints sont symétriques maximaux. □

On obtient également une version d'anticommutativité du théorème 2.1.9. On a

Théorème 2.1.10. *Soient A et B deux opérateurs normaux. On suppose que B est borné. Si $BA = -AB$, alors BA (et ainsi AB) est normal.*

Démonstration. La même idée de la preuve précédente s'applique. On a $BA^* = -A^*B$, c'est grâce au théorème de Fuglede-Putnam, parce que $-A$ est également normal. Alors

$$(BA)^*BA = A^*B^*BA = -A^*B^*AB \underbrace{\subset}_{\text{Fuglede}} A^*AB^*B,$$

et aussi

$$BA(BA)^* = BAA^*B^* = -ABA^*B^* = AA^*BB^* = A^*AB^*B$$

D'où

$$(BA)^*BA \subset BA(BA)^*.$$

Il est clair que $BA = -AB$ est fermé car A est fermé et B est borné. Donc, $BA(BA)^*$ et $(BA)^*BA$ sont auto-adjoints et par conséquent BA est normal.

□

Maintenant, on améliore le théorème 2.1.5 en enlevant la condition que BA soit fermé, c'est-à-dire qu'on peut prouver que BA est fermé.

Théorème 2.1.11. *Soient B un opérateur borné normal et A un opérateur non borné normal. On suppose que B et A commutent. Si pour un certain $r > 0$, $\|rBB^* - I\| < 1$, alors BA est normal.*

Théorème 2.1.12. *Soit A un opérateur borné et inversible. Soit B un opérateur non borné et fermé. On suppose que $D(B) \subset D(BAB)$. Alors BA et AB sont normaux ssi $BAA^* = A^*AB$ et $B^*BA \subset ABB^*$.*

Démonstration. Puisque A est borné et inversible, alors BA et AB sont fermés.

1. On suppose que $BAA^* = A^*AB$ et $B^*BA \subset ABB^*$. Montrons que BA et AB sont normaux.
   Puisque A est inversible, $(BA)^* = A^*B^*$ et on a :

   $$\begin{aligned} B^*BA \subset ABB^* &\Longrightarrow (ABB^*)^* \subset (B^*BA)^* \\ &\Longrightarrow (BB^*)^*A^* \subset A^*(B^*B)^* \quad \text{(car } A \text{ est borné et inversible)} \\ &\Longrightarrow BB^*A^* \subset A^*B^*B \quad \text{(car } BB^* \text{ et } B^*B \text{ sont auto-adjoints)} \end{aligned}$$

   Par conséquent

   $$(BA)^*BA = A^*B^*BA \supset BB^*A^*A$$

   Comme A est borné inversible (qui donne A^*A borné et inversible), on aura

   $$(BB^*A^*A)^* = \underbrace{A^*AB}_{=BAA^*}B^* = BAA^*B^* = BA(BA)^* \subset ((BA)^*(BA))^* = (BA)^*(BA),$$

   car $BA(BA)^* = (BA)^{**}(BA)^*$.

D'autre part

$$BA(BA)^* = BAA^*B^* = A^*ABB^* \qquad (\text{car } BAA^* = A^*AB).$$

Donc

$$BA(BA)^* \subset (BA)^*BA.$$

D'où BA est normal.

Prouvons maintenant que AB est normal.
On a

$$(AB)^*AB = B^*A^*AB = B^*BAA^* \qquad (\text{car } A^*AB = BAA^*)$$

et

$$AB(AB)^* = ABB^*A^* \supset B^*BAA^* \qquad \text{car } B^*BA \subset ABB^*.$$

Donc

$$AB(AB)^* \subset (AB)^*AB.$$

D'où AB est normal.

2. Maintenant on suppose que BA et AB sont tous les deux normaux. Montrons que

$$BAA^* = A^*AB \quad \text{et} \quad B^*BA \subset ABB^*.$$

D'après le théorème Fuglede-Putnam et puisque (A est borné et inversible), on trouve

$$A(BA) = (AB)A \Longrightarrow A(BA)^* = (BA)^*A \Longrightarrow AA^*B^* = B^*A^*A.$$

Donc

$$(B^*AA^*)^* = (AA^*B^*)^* \Longrightarrow BAA^* = A^*AB.$$

On a également

$$B(AB) = (BA)B \Longrightarrow B(AB) \subset (BA)B \Longrightarrow B(AB)^* \subset (BA)^*B$$

grâce au Théorème 1.12.3 [Fuglede-Putnam-Mortad] (car $D(B) = D(AB) \subset D(BAB)$).
Par conséquent

$$BB^*A^* \subset A^*B^*B \Longrightarrow (A^*B^*B)^* \subset (BB^*A^*)^*.$$

D'où
$$B^*BA \subset ABB^*,$$
car A est borné inversible et BB^* et B^*B sont auto-adjonts. La preuve est achevée.

□

Considérons l'exemple suivant :

Exemple 2.1.1. *Soient A et B deux opérateurs définis par*
$$Af(x) = e^{ix}f(x) \quad et \quad Bf(x) = e^{x^2-ix}f(x)$$
sur leurs domaines respectivement
$$D(A) = L^2(\mathbb{R}) \quad et \quad D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : e^{x^2}f \in L^2(\mathbb{R})\}$$
On a A est unitaire, B est normal et $BAA^* = A^*AB$. De plus
$$D(B^*BA) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : e^{2x^2}f \in L^2(\mathbb{R})\}$$
et
$$D(ABB^*) = D(BB^*) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : e^{2x^2}f \in L^2(\mathbb{R})\}$$
et puisque
$$B^*BAf(x) = ABB^*f(x), \forall f \in D(B^*BA) = D(ABB^*),$$
on obtient $B^*BA = ABB^*$. On a aussi AB et BA sont normaux sur leurs domaines
$$D(AB) = D(BA) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : e^{x^2}f \in L^2(\mathbb{R})\}.$$
Néanmoins, on a :
$$D(BAB) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : e^{2x^2}f \in L^2(\mathbb{R})\}$$
mais $D(B) \not\subset D(BAB)$ car par exemple $e^{\frac{-3}{2}x^2} \in D(B)$ et $e^{\frac{-3}{2}x^2} \notin D(BAB)$.
Cet exemple nous permet de changer les hypothèses du théorème précédent qui nous donne le théorème suivant :

Théorème 2.1.13. *Soit A un opérateur unitaire. Soit B un opérateur non borné et fermé. Alors BA et AB sont normaux ssi $B^*BA \subset ABB^*$.*

Démonstration. Puisque A est unitaire, A est borné et inversible plus B fermé , on aura BA et AB sont fermés.

1. Puisque A est unitaire, alors A est borné et inversible. Comme $BAA^* = A^*AB$, on aura BA et AB sont normaux (d'après le théorème 2.1.12).

2. On suppose que BA et AB sont normaux et on vérifie que $BAA^* = A^*AB$.
   Puisque AB est normal, on aura

$$(AB)^*AB = B^*\underbrace{A^*A}_{=I}B = B^*B = AB(AB)^* = ABB^*A^*$$

   Donc

$$B^*B = ABB^*A^* \Longrightarrow A^*(B^*B) = A^*(ABB^*A^*) = \underbrace{A^*A}_{=I}BB^*A^*.$$

   Par conséquent

$$BB^*A^* = A^*B^*B \Longrightarrow (BB^*A^*)^* = (A^*B^*B)^*.$$

   Donc

$$B^*BA = ABB^* \Longrightarrow B^*BA \subset ABB^*.$$

   La preuve est terminée.

□

Théorème 2.1.14. *Soit A un opérateur non borné normal et inversible. Soit B un opérateur normal non borné. Si $BA = AB$, $A^*B \subset BA^*$ et $B^*A \subset AB^*$, alors BA est normal.*

Démonstration. Puisque A est fermé inversible et B est fermé, alors $BA = AB$ sont fermés et $(BA)^* = A^*B^*$.
D'autre part

$$(BA)^*BA = A^*B^*BA = A^*B^*AB \subset A^*AB^*B$$

et

$$BA(BA)^* = BAA^*B^*B = BA^*AB^* \supset A^*BAB^* = A^*ABB^*.$$

Donc

$$(BA)^*BA \subset BA(BA)^*.$$

D'où

$$(BA)^*BA = BA(BA)^*.$$

Donc BA est normal.

La preuve est terminé. $\square$

Théorème 2.1.15. *Soit A un opérateur non borné normal et inversible. Soit B un opérateur non borné normal. Si $BA \subset AB$, $A^*B \subset BA^*$ et $B^*A \subset AB^*$, alors BA est normal s'il est fermé.*

Pour la preuve, on applique les mêmes idées de la preuve du théorème 2.1.14.

Corollaire 2.1.3. *Soient A et B deux opérateurs non bornés normaux et inversibles sur leurs domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement. Si $BA = AB$ et $D(A), D(B) \subset D(BA)$, alors BA et AB sont normaux.*

Démonstration. Puisque A et B sont fermés et inversibles, alors AB et BA sont fermés.

Comme $D(A) \subset D(BA)$, on obtient d'aprés le théorème 1.12.3 [Fuglede-Putnam-Mortad]

$$BA \subset AB \Longrightarrow BA^* \subset A^*B \Longrightarrow B^*A \subset (A^*B)^* \subset (BA^*)^* = AB^*,$$

car A^* est inversible.

Et aussi pour $D(A) \subset D(BA)$ et B^* est inversible, on aura

$$AB \subset BA \Longrightarrow AB^* \subset B^*A \Longrightarrow A^*B \subset BA^*$$

Ainsi les conditions du théorème 2.1.14 sont satisfaites, alors BA est normal. $\square$

Théorème 2.1.16. *Soient A et B deux opérateurs non bornés normaux et inversibles. alors*

$$AB = BA \Longrightarrow AB^* = B^*A \quad \textit{et} \quad BA^* = A^*B$$

Démonstration. Puisque B est inversible, alors

$$AB = BA \Longrightarrow B^{-1}A\underbrace{BB^{-1}}_{=I} = \underbrace{B^{-1}B}_{\subset I}AB^{-1} \Longrightarrow B^{-1}A \subset AB^{-1}.$$

Comme B^{-1} est inversible et A non borné normal, on aura par le théorème classique de Fuglede

$$B^{-1}A \subset AB^{-1} \Longrightarrow B^{-1}A^* \subset A^*B^{-1} \Longrightarrow \underbrace{BB^{-1}}_{=I}A^*B \subset BA^*\underbrace{B^{-1}B}_{\subset I},$$

donc

$$A^*B \subset BA^*.$$

Puisque B est inversible, on aura

$$AB^* \subset (BA^*)^* \subset (A^*B)^* = B^*A.$$

De la même manière si on échange le rôle de A et de B, on obtient

$$B^*A \subset AB^* \quad \text{et} \quad BA^* \subset A^*B.$$

D'où

$$B^*A = AB^* \quad \text{et} \quad BA^* = A^*B.$$

La preuve est terminée. □

Théorème 2.1.17. *Soient B un opérateur non-borné et fermé et A un opérateur borné tel que A et AB sont normaux. Alors*

$$BA \textit{ est normal} \Longrightarrow A^*AB \subset BAA^*.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} A(BA) = (AB)A &\Longrightarrow A(BA)^* = (AB)^*A \quad \text{(d'après le théorème de Fuglaed-Putnam)} \\ &\Longrightarrow AA^*B^* \subset A(BA)^* = B^*A^*A \\ &\Longrightarrow A^*AB^* \subset B^*A^*A \quad \text{(car } A \text{ est normal)} \\ &\Longrightarrow A^*AB \subset BAA^* \quad \text{(d'après le théorème de Fuglede-Putnam).} \end{aligned}$$

□

Théorème 2.1.18. *Soient B un opérateur non-borné et normal, A un opérateur borné et normal. On suppose que le domaine de BA est dense. Si $A^*AB \subset BAA^*$ et $ABB^* \subset BB^*A$, alors BA est normal.*

Démonstration. Puisque B est fermé et A est borné, BA est fermé. On a

$$\begin{aligned}(BA)^*BA &\supset A^*B^*BA \\ &= A^*BB^*A \quad \text{(car } B \text{ est normal)} \\ &\supset A^*ABB^* \quad \text{(d'après les hypothèses)}\end{aligned}$$

et comme A^*A et BB^* sont auto-adjoints, de plus A^*A est borné, alors par passage aux adjoints, on obtient

$$(BA)^*BA \subset BB^*A^*A$$

et d'après le théorème de Devinatz, on obtient

$$(BA)^*BA = BB^*A^*A.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}BA(BA)^* &\supset BAA^*B^* \\ &= A^*ABB^* \quad \text{(d'après les hypothèses)}\end{aligned}$$

de la même manière, on obtient

$$BA(BA)^* = BB^*A^*A.$$

D'où BA est normal. □

Théorème 2.1.19. *Soient A et B deux opérateurs non-bornés normaux tels que $AB \subset BA$ et AB à domaine dense. Si B est inversible, alors BA et $\overline{AB}$ sont normaux.*

Démonstration. Puisque B est inversible, alors

$$\begin{aligned}AB \subset BA &\Longrightarrow A \subset BAB^{-1} \\ &\Longrightarrow B^{-1}A \subset AB^{-1}.\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fuglede-Putnam, on obtient

$$B^{-1}A^* \subset A^*B^{-1}.$$

En multipliant cette inclusion par B à gauche et à droite, on aura

$$A^*B \subset BA^* \Longrightarrow AB^* \subset B^*A,$$

de plus

$$(BA)^*BA \subset (AB)^*BA = B^*A^*BA \subset B^*BA^*A.$$

Puisque BA est fermé, $(BA)^*BA$ est auto-adjoint. Comme B^*B, A^*A sont auto-adjoints, alors

$$(BA)^*BA = B^*BA^*A.$$

De la même manière, on obtient

$$BA(BA)^* = BB^*AA^*.$$

Puisque A et B sont normaux, alors

$$(BA)^*BA = BA(BA)^*$$

i.e. BA est normal.
Maintenant pour montrer la normalité de $\overline{AB}$, il suffit de voir que B est inversible, ceci entraine que B^* est aussi inversible, de plus

$$AB \subset BA \Longrightarrow A^*B^* \subset B^*A^*$$

et

$$\overline{AB} = (AB)^{**} = (B^*A^*)^*$$

Ainsi par la première partie de la preuve, on aura B^*A^* est normal, donc $(B^*A^*)^* = \overline{AB}$ est normal. □

Remarque 2.1.3. *Ce théorème est, généralement, faux si $AB \not\subset BA$. En voici un exemple.*

Exemple 2.1.2. *Soient A et B deux opérateurs définies par*

$$Af(x) = f'(x) \quad et \quad Bf(x) = e^{|x|}f(x)$$

sur

$$D(A) = H^1(\mathbb{R}) \quad et \quad D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : e^{|x|}f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

où $H^1(\mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev. L'opérateur A est normal. L'opérateur B est auto-adjoint et inversible. Il clair que AB et BA ne coïncident pas.
Montrons que $N = BA$ n'est pas normal. En effet

$$Nf(x) = e^{|x|}f'(x) \quad \textit{définie sur son domaine } D(N) = D(BA), \textit{ par conséquent}$$

$$D(N) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \in L^2(\mathbb{R}), e^{|x|}f'L^2(\mathbb{R})\} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : e^{|x|}f'L^2(\mathbb{R})\}.$$

L'adjoint N^* est définie par (voir [14]*),*

$$N^*f(x) = e^{|x|}(\mp f(x) - f'(x))$$

sur

$$D(N^*) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : e^{|x|}f \in L^2(\mathbb{R}), e^{|x|}f'L^2(\mathbb{R})\}.$$

De plus

$$NN^*f(x) = e^{2|x|}(-f(x) \mp 2f'(x) - f''(x))$$

et

$$N^*Nf(x) = e^{2|x|}(\mp 2f'(x) - f''(x))$$

d'où $N = BA$ n'est pas normal.

Corollaire 2.1.4. *Soient A et B deux des operateurs non-bornés normaux tels que $AB \subset BA$. Si B est inversible, alors $\overline{AB} = BA$ où le domaine $D(AB)$ est dense.*

Démonstration. Puisque BA est fermé, alors

$$AB \subset BA \Longrightarrow \overline{AB} \subset BA.$$

D'après le théorème précédent, $\overline{AB}$ et BA sont normaux. Comme les opérateurs normaux sont normaux maximaux, alors

$$\overline{AB} = BA.$$

□

Théorème 2.1.20. *Soient A et B deux opérateurs normaux où B est borné. supposons que $BA \subset \lambda AB$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors AB est normal ssi $|\lambda| = 1$.*

Démonstration. On a AB est fermé car A est fermé et B est borné par cet ordre. De plus

$$\begin{aligned} BA \subset \lambda AB &\Longrightarrow BA^* \subset \overline{\lambda} A^* B \quad \text{(d'après le théorème de Fugled-Putnam)} \\ &\Longrightarrow \lambda B^* A \subset AB^* \quad \text{(par passage au adjoints),} \end{aligned}$$

d'autre part

$$(AB)^*AB \supset B^*A^*\underbrace{AB} \supset \frac{1}{\lambda}B^*\underbrace{A^*B}A \supset \frac{1}{\lambda|\lambda|}B^*BA^*A = \frac{1}{|\lambda|^2}B^*BA^*A$$

et comme B^*B, A^*A sont auto-adjoints de plus B^*B est borné par cet ordre, on obtient par passage aux adjoints :

$$(AB)^*AB \subset \frac{1}{|\lambda|^2}A^*AB^*B$$

donc d'après le théorème de Devinatz, on obtient

$$(AB)^*AB = \frac{1}{|\lambda|^2}A^*AB^*B.$$

On a aussi

$$AB(AB)^* \supset \underbrace{AB}B^*A^* \supset \frac{1}{\lambda}B\underbrace{AB^*}A^* \supset (\frac{1}{\lambda}\lambda)BB^*AA^*$$

et en suivant le même raisonnement avec A et B sont normaux, on obtient

$$AB(AB)^* = AA^*BB^* = A^*AB^*B$$

D'où AB est normal ssi $|\lambda| = 1$. □

Corollaire 2.1.5. *Soient A et B deux opérateurs normaux avec B borné. si $BA \subset \lambda AB$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| = 1$, alors*

$$\overline{BA} = \lambda AB.$$

Démonstration. D'après le théorème précédent AB est normal et par conséquent λAB est aussi normal. Comme $D(BA) = D(A)$, BA est à domaine dense, alors :

$$\begin{aligned} BA \subset \lambda AB &\Longrightarrow B^*A \subset \frac{1}{\lambda}AB^* \\ &\Longrightarrow B^*A^* \subset \frac{1}{\overline{\lambda}}A^*B^* \quad \text{(d'après le théorème de Fuglede-Putnam)} \end{aligned}$$

Puisque les opérateurs vérifient les mêmes conditions du théorème précédent avec $|\frac{1}{\overline{\lambda}}| = 1$, alors A^*B^* sera normal. C'est-à-dire $(BA)^* = A^*B^*$ est normal, donc $(BA)^{**} = \overline{BA}$ est normal. De plus

$$BA \subset \overline{BA} \subset \lambda AB,$$

et puisque les opérateurs auto-adjoints sont symétriques maximaux, alors

$$\overline{BA} = \lambda AB.$$

$\square$

Proposition 2.1.5. *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints avec B est borné. Si $BA \subset \lambda AB$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, alors AB est normal.*

Démonstration. Il est clair que AB est fermé. L'auto-adjonction de A entraine la normalité de A, de plus

$$\begin{aligned} BA \subset \lambda AB &\Longrightarrow BA^* \subset (\lambda A)^* B \quad \text{(d'après le théorème de Fuglede-Putnam)} \\ &\Longrightarrow BA \subset \overline{\lambda} AB. \end{aligned}$$

En effet

$$(AB)^* AB \supset BA \underbrace{AB} \supset \frac{1}{\lambda} B \underbrace{AB} A \supset \frac{1}{|\lambda|^2} B^2 A^2$$

et comme $\frac{1}{|\lambda|^2} B^2$, A^2 sont auto-adjoints par cet ordre et par passage aux adjoints, on obtient

$$(AB)^* AB \subset \frac{1}{|\lambda|^2} A^2 B^2$$

et d'après le théorème de Devinatz, on aura

$$(AB)^* AB = \frac{1}{|\lambda|^2} A^2 B^2,$$

et d'autre part

$$AB(AB)^* \supset \underbrace{AB} BA \supset \frac{1}{\lambda} BABA,$$

en suivant le même raisonnement, on obtient

$$AB(AB)^* = \frac{1}{|\lambda|^2} A^2 B^2.$$

D'où AB est normal. $\square$

Voici quelques théorèmes sur la "double maximalité".

Théorème 2.1.21. *Soient S, T deux opérateurs non-bornés définis respectivement sur leurs domaines denses $D(S)$ et $D(T)$. On suppose que*

$$\begin{cases} T \subset S^* S \\ T \subset SS^*. \end{cases}$$

Soit $D \subset (D(T))(\subset D(S^*S) \cap D(SS^*))$ est dense.

(1) *On suppose que D est le coeur de S^*S (par exemple). Si S est fermé, alors S est normal.*

(2) *Si S n'est pas fermé, alors $\overline{S}$ est normal si D est le coeur de $S^*\overline{S}$.*

Démonstration. **(1)** On a SS^* et S^*S sont auto-adjoints sur leurs domaines $D(SS^*)$ et $D(S^*S)$ respectivement. Il est clair que

$$0_{D(T)} = T - T \subset S^*S - SS^*,$$

par conséquent

$$S^*S - SS^* \subset (S^*S - SS^*)^* \subset (0_{D(T)})^* = 0_H.$$

On pose $S^*S_D = S^*S|_D$ (la restiction de S^*S à D). Alors

$$S^*S_D \subset S^*S - SS^* + SS^* \subset 0_H + SS^* = SS^*.$$

Puisque D est le coeur de S^*S, on obtient

$$S^*S = \overline{S^*S_D}$$

en passant à la fermeture dans l'inclusion précédente, on obtient

$$S^*S = \overline{S^*S_D} \subset SS^*,$$

et comme les opérateurs auto-adjoints sont symétriques maximaux, alors

$$S^*S = SS^*.$$

D'où S est normal.

(2) On a $S^*\overline{S}$ et $\overline{S}S^*$ sont auto-adjoints sur leurs domaines, de plus

$$0_{D(T)} = T - T \subset S^*S - SS^* \subset S^*\overline{S} - \overline{S}S^*$$

donc

$$S^*\overline{S} - \overline{S}S^* \subset (S^*S - SS^*)^* = (0_{D(T)})^* = 0_H$$

et en suivant le même raisonnement de la preuve précédente, on obtient la normalité de $\overline{S}$.

Remarque 2.1.4. *Le théorème précédent nous assure que la condition du coeur est importante pour obtenir la normalité de l'operateur S. En voici un exemple.*

Exemple 2.1.3. *Soit S un opérateur défini par*

$$Sf(x) = -f'(x) \quad sur \quad D(S) = \{f \in L^2(0,1) : f' \in L^2(0,1)\}.$$

Alors S est à domaine dense et il est fermé. En effet

$$S^*f(x) = -f'(x) \quad sur \quad D(S^*) = \{f \in L^2(0,1) : f' \in L^2(0,1)f(0) = f(1) = 0\}$$

de plus

$$SS^*f(x) = S^*Sf(x) = -f''(x)$$

avec

$$D(SS^*) = \{f \in L^2(0,1) : f'' \in L^2(0,1), f(0) = f(1) = 0\}$$

et

$$D(S^*S) = \{f \in L^2(0,1) : f'' \in L^2(0,1), f'(0) = f'(1) = 0\}$$

puisque $D(SS^*) \neq D(S^*S)$, alors S n'est pas normal. Soit T un opérateur défini par

$$Tf(x) = -f''(x) \quad sur \quad D(T) = \{f \in L^2(0,1) : f'' \in L^2(0,1), f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0\}.$$

Il est clair que

$$\begin{cases} T \subset S^*S \\ T \subset SS^*. \end{cases}$$

et T, S à domaine dense. S est fermé, mais il n'est pas normal.

□

Proposition 2.1.6. *Soient S, T deux opérateurs non-bornés définis respectivement sur leurs domaines denses $D(S)$ et $D(T)$. On suppose que S est fermé et*

$$\begin{cases} T \subset S^*S \\ T \subset SS^*. \end{cases}$$

Soit $D \subset (D(T))(\subset D(S^*S) \cap D(SS^*))$ est dense. On a

$$D \text{ est le cœur de } S^*S \Longleftrightarrow S^*S_D \text{ est essentiellement auto-adjoint.}$$

Démonstration. On a déjà prouvé l'implication directe. On prouve maintenant l'implication réciproque. On a :
si S^*S_D est essentiellement auto-adjoint, alors

$$\overline{S^*S_D} = (\overline{S^*S_D})^* = (S^*S_D)^*$$

et aussi

$$S^*S_D \subset S^*S$$

mais

$$S^*S = (S^*S)^* \subset (S^*S_D)^*$$

par conséquent

$$S^*S \subset \overline{S^*S_D}$$

d'autre part

$$\overline{S^*S_D} \subset \overline{S^*S} = S^*S$$

D'où

$$\overline{S^*S_D} = S^*S \quad \text{(i.e. } D \text{ est le cœur de } S^*S\text{).}$$

La preuve est achevée. $\square$

Théorème 2.1.22. *(Mortad, [12]). Soit T un opérateur non-borné et auto-adjoint avec son domaine $D(T)$. Si N est un opérateur non-borné et normal tel que $D(N) \subset D(T)$, Alors*

$$TN \subset N^*T \Longrightarrow TN^* \subset NT. \tag{2.1}$$

Théorème 2.1.23. *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints tel que B est borné. On suppose que A est positif et BA est normal. Alors BA et AB sont auto-adjoints. De plus $AB = BA$.*

Démonstration. Puisque B est borné et auto adjoint, on peut écrire

$$A(BA) = (AB)A = (BA)^*A$$

et comme $D(BA) = D(A)$, alors d'après le théorème 2.1.22, on obtient

$$A(BA)^* = (BA)A$$

i.e.

$$A^2B = BA^2$$

Montrons maintenant que B et A^2 commutent (i.e.$BA^2 \subset A^2B$).
puisque BA et $(BA)^*$ sont normaux, alors

$$\begin{aligned} B(BA)^* = (BA)B &\Longrightarrow B(BA) = (BA)^*B \quad \text{(d'après le théorème de Fuglede-Putnam).} \\ &\Longrightarrow B^2A = AB^2. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité indique que B^2A, AB^2 sont auto-adjoints, de plus elle nous donne

$$B^2A^2 = AB^2A = A^2B^2$$

et aussi

$$B^2A^4 = A^2B^2A^2 = A^4B^2.$$

Montrons que $\overline{BA^2}$ est normal. On a

$$\begin{aligned} (\overline{B^2A^2})^*\overline{BA^2} &= (\overline{BA^2})^{**}(\overline{BA^2})^* \\ &= (A^2B)^*(A^2B) \\ &\supset \underbrace{BA^2}A^2B \\ &\supset A^2\underbrace{BA^2}B \\ &\supset A^4B^2 = B^2A^4 \\ &\subset A^4B^2 \quad \text{(par passage aux adjoints)} \end{aligned}$$

et d'après le théorème de Devinatz, on obtient

$$(\overline{B^2A^2})^*\overline{BA^2} = A^4B^2,$$

en suivant le même raisonnement, on aura

$$(\overline{B^2A^2})^*\overline{BA^2} = \overline{BA^2}(\overline{B^2A^2})^* = A^4B^2,$$

i.e. $\overline{BA^2}$ est normal.
Donc $(\overline{BA^2})^* = A^2B$ est aussi normal. De plus on a :

$$(A^2B)^* \supset BA^2 \supset A^2B.$$

ce qui implique que A^2B est symétrique, par conséquent A^2B est auto-adjoint. Ainsi

$$BA^2 \subset \overline{BA^2} = (A^2B)^* = A^2B = (BA^2)^*.$$

Puisque A est positif et d'après le théorème 10 (voir [3]), on obtient que A et B commutent, i.e.

$$BA \subset AB = (BA)^*.$$

Comme BA, $(BA)^*$ sont normaux et aussi les opérateurs normaux sont normaux maximaux, alors

$$BA = AB = (BA)^* = (AB)^*.$$

D'où BA et AB sont auto-adjoints. □

Corollaire 2.1.6. *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints tel que B est borné. On suppose que A est positif, AB est normal et BA est fermé. Alors AB et BA sont auto-adjoints. De plus $AB = BA$.*

Démonstration. Puisque B est borné et $AB = (BA)^*$ est normal, alors

$$(BA)^{**} = \overline{BA} = BA \quad \text{est normal.}$$

D'après le théorème précédent BA est auto-adjoint, par conséquent

$$BA = (BA)^* = AB$$

ce qui donne l'auto-adjonction de AB est auto-adjoint. □

Remarque 2.1.5. *Il est à noter qu'en général la normalité de AB n'implique pas que BA est fermé. En voici un exemple.*

Exemple 2.1.4. *Soit A un opérateur non-borné, auto-adjoint, positif et inversible de domaine $D(A)$ non fermé dans l'espace H. Soit B l'inverse de A. Il est clair que B est borné et auto-adjoint, de plus*

$$BA \subset I \quad et \quad AB = I,$$

tel que I est l'opérateur identité sur H. On a AB est normal, mais BA est un opérateur borné qui n'est pas fermé car son domaine $D(BA) = D(A)$ n'est pas fermé dans H.

Chapitre 3

Maximalité d'opérateurs linéaires

La notion de maximalité d'opérateurs linéaires est un outil théorique fondamental pour démontrer plusieurs résultats des opérateurs non-bornés. Parmi ses applications majeures, on note que cet outil est indispensable dans la preuve du théorème spectral des opérateurs normaux non-bornés, qui est rappelons-le, le théorème le plus important dans la théorie des opérateurs.

3.1 Quelques résultats sur la normalité

La normalité des produits non-bornés des opérateurs normaux a été étudiée récemment. Voir par exemple [13] et ces références. On commence de rappeller le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 ([22], cf. [6])**.** *Soient A, B deux opérateurs normaux avec $B^{-1} \in B(H)$. Si $AB \subset BA$, alors $\overline{AB}$ and BA sont normaux.*

Théorème 3.1.1. *Soient A et B deux opérateurs normaux avec $B \in B(H)$. Si $BA \subset AB$, alors AB et $\overline{BA}$ sont normaux et $AB = \overline{BA}$.*

Démonstration. Puisque $BA \subset AB$, AB est défini sur un domaine dense. Le théorème de Fuglede-Putnam nous donne

$$BA^* \subset A^*B \quad et \quad B^*A \subset AB^*$$

de plus . On a :

$$(AB)^*AB \supset B^*A^*\underbrace{AB} \supset B^*\underbrace{A^*B}A \supset B^*BA^*A.$$

Puisque AB est fermé, $(AB)^*AB$ est auto-adjoint. Comme B^*B est borné et auto-adjoint de plus A^*A est aussi auto-adjoint, alors

$$(AB)^*AB \subset A^*AB^*B$$

et d'après le théorème précédent, on obtient

$$(AB)^*AB = A^*AB^*B.$$

On a aussi AB fermé, nous donne $(AB)^*$ à domaine dense et $AB(AB)^*$ est auto-adjoint. En effet

$$AB(AB)^* \supset \underbrace{AB}B^*A^* \supset B\underbrace{AB^*}A^* \supset BB^*AA^*$$

et de la même manière, on obtient

$$AB(AB)^* = AA^*BB^*$$

et puisque A et B sont normaux, alors

$$AB(AB)^* = (AB)^*AB = A^*AB^*B.$$

Donc AB est normal.
Montrons maintenant que $\overline{BA}$ est normal.
On a

$$\overline{BA} = (BA)^{**} = (A^*B^*)^*,$$

de plus

$$BA \subset AB \Longrightarrow B^*A^* \subset A^*B^*.$$

Il est clair que les opérateurs A^* et B^* son normaux avec $B^* \in B(H)$, donc d'après la question précédente, l'opérateur A^*B^* devient normal et par conséquent $(A^*B^*)^* = \overline{BA}$ est normal.
On a aussi

$$BA \subset AB \Longrightarrow \overline{BA} \subset AB,$$

puisque les opérateurs normaux sont normaux maximaux, alors

$$\overline{BA} = AB.$$

□

Le résultat suivant est démontré par le théorème spectral (voir [1]). On peut le considérer comme corollaire du théorème précédent :

Corollaire 3.1.1. *Soient A, B deux opérateurs auto-adjoints tel que $B \in B(H)$. Si $BA \subset AB$, alors AB et $\overline{BA}$ sont auto-adjoints.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, AB et BA sont normaux, de plus

$$AB = \overline{BA} \Longrightarrow AB = (BA)^{**} = (AB)^{*}$$

D'où AB et $\overline{BA}$ sont auto-adjoints. □

3.2 Résultats Principaux sur la Maximalité

La même idée de la preuve de (théorème 5.31, [17], discuté ci-dessus) peut mener au résultat suivant :

Proposition 3.2.1. *Soient S un opérateur défini sur son domaine $D(S)$ dense, tels que $S \subset T$ et $S \subset T^*$. Si $D(T) = D(T^*)$, alors T est auto-adjoint.*

Démonstration. Soient $x \in D(T) = D(T^*)$ et $y \in D(S) \subset D(T) = D(T^*)$.
En effet :

$$\begin{aligned} < Tx, y > &=< x, T^*y > \\ &=< x, Sy > \\ &=< x, Ty > \\ &=< T^*x, y > . \end{aligned}$$

Puisque $D(S)$ est un domaine dense, alors pour tout $x \in D(T) = D(T^*)$

$$Tx = T^*x.$$

D'où T est auto-adjoint. □

Corollaire 3.2.1. *Soit S un opérateur définie sur un domaine dense tels que $S \subset T$ et $S \subset T^*$. Si T est normal, alors T est auto adjoint.*

Démonstration. Puisque T est normal, $D(T) = D(T^*)$. D'après le théorème précédent, on obtient $T = T^*$. Donc T est auto-adjoint. □

Proposition 3.2.2. *Soient A, B deux opérateurs linéaires sur un Hilbert H. On suppose que $B \in B(H)$ et A possède un domaine $D(A)$ dense avec $A \subset B$.*

1. *$A = B$ n'est pas nécessaire si A n'est pas fermé et son domaine dense.*
2. *$A = B$ n'est pas nécessaire si A est fermé et son domaine n'est pas dense.*
3. *On suppose que A est fermé. Alors*

$$A = B \Longleftrightarrow \overline{D(A)} = H$$

et en particulier si C est inversible, alors

$$AC \subset B \Longrightarrow AC = B.$$

Démonstration. 1. Puisque le domaine de A dense, on peut parler de l'adjoint de A. On a :

$$\begin{aligned} A \subset B &\Longrightarrow B^* \subset A^* \\ &\Longrightarrow B^* = A^* \quad (car\ D(B^*) = H) \\ &\Longrightarrow B = A^{**} = \overline{A}. \end{aligned}$$

Pour un contre-exemple, considérons l'opérateur $A = B|D$ (la restriction de A à D) où D est dense dans H mais non fermé. Puisque D n'est pas fermé, A n'est pas fermé malgré qu'il est borné sur D. Donc impossible d'obtenir l'égalité $A = B$ car B est fermé et A n'est pas fermé.

2. Considérons l'opérateur $A = 0$ (l'opérateur nul)) sur son domaine trivial $D(A) = \{0\}$. Soit B un opérateur borné ($B \in B(H)$). Puisque $A(0) = B(0) = 0$, alors $A \subset B$. Il est clair que A est fermé et $\overline{D(A)} \neq H$, mais $B \neq A$.

3. L'implication $A = B \Longrightarrow \overline{D(A)} = H$ est évidente. Montrons maintenant que $\overline{D(A)} = H \Longrightarrow A = B$. Puisque A est fermé, alors $D(A)$ est fermé dans H, i.e.

$$D(A) = \overline{D(A)} = H.$$

Donc $A = B$.

Pour le dernier résultat, on a C est inversible, alors

$$AC \subset B \Longrightarrow A \subset BC^{-1},$$

et comme $BC^{-1} \in B(H)$ et A est fermé avec un domaine dense, alors

$$A = BC^{-1} \Longrightarrow AC = B.$$

□

D'après le théorème précédent, on a le lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Soit S un opérateur fermé à domaine dense sur un Hilbert H, B un opérateur borné ($B \in B(H)$ et auto-adjoint tel que $SB \subset I$. Alors B est injectif, $M = D(SB)$ est fermé et $SB = I_M$.*

Démonstration. Puisque S est fermé et $B \in B(H)$, alors SB est fermé et comme SB est borné (car $SB \subset I$), alors son domaine $M = D(SB)$ sera fermé. Montrons maintenant que B est injectif.
Soit $x \in D(B) = H$, on a :

$$Bx = 0 \Longrightarrow SBx = Ix = 0 \Longrightarrow x = 0,$$

donc $\ker B = \{0\}$, d'où B est injectif. □

Lemme 3.2.2 (voir [33])**.** *Soit A un opérateur defini sur un domaine $D(A)$ dense dans H et $e \in D(A) \setminus \{0\}$. Alors $D(A) \ominus_A < e >$ est dense dans H ssi $e \in D(A) \setminus D(A^*A)$.*

Proposition 3.2.3. *Soient $B \in B(H)$ est injectif et auto-adjoint, avec B^{-1} n'est pas borné. Alors il existe un opérateur S fermé et injectif à domaine dense, tels que $SB \subset I$ et le domaine de SB n'est pas dense.*

Démonstration. Par l'hypothèse $A := B^{-1}$ est auto-adjoint, donc il est fermé. Maintenantt soit $e \in D(A) \setminus D(A^2)$ tel que $e \neq 0$. Donc d'après le Lemme 3.2.2, $M := D(A) \ominus_A < e >$ est sous espace dense dans H. Posons $S = A|_M$. Puisque M est un sous-espace vectoriel fermé de $(D(A), \|.\|_A)$ qui est complet, alors $(M, \|.\|_A)$ est complet et par conséquent l'opérateur $S = A|_M$ est fermé.
Il est clair que

$$SB = B^{-1}|_M B \subset B^{-1}B = I.$$

i.e. SB est fermé et borné, donc le domaine $D(SB)$ est fermé dans H. Comme $D(SB) \subsetneq H$, alors le domaine de SB n'est pas dense dans H.

□

Théorème 3.2.1. *Soient A, B, T des opérateurs non nécessairement bornés tels que A est auto-adjoint, B est symétrique avec $B^{-1} \in B(H)$ (par conséquent B est auto-adjoint) et T est symétrique. On suppose que $AB \subset T$. Alors :*

1. *$AB \subset BA$.*
2. *BA est normal.*
3. *$\overline{T} = (BA)^*$.*
4. *T est essentiellement auto-adjoint.*
   Si T est fermé, alors BA est auto-adjoint et

$$T = BA \quad et \quad T = \overline{AB}.$$

Démonstration. 1. On a T est à domaine dense et ainsi pour AB. Comme A et B sont auto-adjoints avec B est inversible, alors

$$T^* \subset (AB)^* = B^*A^* = BA.$$

De plus T est symétrique nous donne

$$AB \subset T \subset T^* \subset BA.$$

2. D'après le lemme 3.1.1 , on obtient la normalité de BA.
3. On a :

$$T^* \subset BA \Longrightarrow (BA)^* = T^{**} = \overline{T} \subset (\overline{T})^*.$$

Puisque BA est normal, $(BA)^*$ est aussi normal, de plus les opérateurs normaux sont symétriques maximaux. D'où

$$(BA)^* = \overline{T}.$$

4. Puisque $\overline{T}$ est normal est symétrique, alors $\overline{T}$ est auto-adjoint (i.e. T est essentiellement auto-adjoint). Maintenant si T est fermé, alors T est auto-adjoint, de plus

$$T = (BA)^* = (BA)^{**} = \overline{BA} = BA$$

car BA est fermé.

Finalement, on a :

$$\overline{AB} = (AB)^{**} = (BA)^{*} = T.$$

□

Corollaire 3.2.2. *Soient A, B, T des opérateurs non nécessairement bornés tels que A est auto-adjoint, B est symétrique avec $B^{-1} \in B(H)$ (par conséquent B est auto-adjoint) et T est symétrique. On suppose que $AB \subset T$. Alors $A = BAB^{-1}$.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, on obtient $AB \subset BA$. En multipliant par B^{-1} à droite et à gauche, on aura

$$B^{-1}A \subset AB^{-1}$$

et d'après le corollaire 5.2.1, AB^{-1} est auto-adjoint. De plus

$$AB \subset BA \Longrightarrow A \subset B(AB^{-1}),$$

le théorème 5.1.3 nous donne

$$A = BAB^{-1}.$$

La preuve est terminée. □

Remarque 3.2.1. *Généralement*

$$BA \subset T \not\Longrightarrow BA = T$$

pour les opérateurs T, A et B auto-adjoints. Pour un contre-exemple, prenons A un opérateur auto-adjoint sur son domaine $D(A) \subsetneq H$ tel que $A^{-1} = B \in B(H)$ et $T = I_H$ (l'identité sur l'espace H). Il est clair que

$$BA = A^{-1}A = I_{D(A)} \subset I_H = T$$

où $I_{D(A)}$ est l'identité sur $D(A)$.

Théorème 3.2.2. *Soient A, B et T trois opérateurs tel que $B \in B(H)$. Si T^{*} est symétrique, B est auto-adjoint et A est normal, alors*

$$T \subset AB \Longrightarrow \overline{T} = AB.$$

En particulier, si on suppose que T est fermé, alors on obtient $T = AB$.

Démonstration. On a :

$$T \subset AB \Longrightarrow \overline{T} \subset AB,$$

donc

$$T \subset AB \Longrightarrow BA^* \subset (AB)^* \subset T^* \subset T^{**} = \overline{T} \subset AB$$

et d'après le théorème de Fuglede-Putnam, on aura

$$BA \subset A^*B.$$

En suivant le même raisonnement du théorème 3.1.1, on obtient

$$(AB)^*AB = AB(AB)^* = AA^*B^2$$

i.e. AB est normal, par conséquent $(AB)^*$ est aussi normal. Comme les opérateurs normaux sont normaux maximaux, alors

$$(AB)^* \subset \overline{T} \subset AB \Longrightarrow (AB)^* = \overline{T} = AB.$$

□

Corollaire 3.2.3. *Soient A, B et T des opérateurs tel que $B \in B(H)$. Si T est symétrique, B est auto-adjoint et A est normal, alors*

$$BA \subset T \Longrightarrow \overline{T} = \overline{BA}.$$

Démonstration. D'après les résultats précédents, on a :

$$BA \subset T \Longrightarrow \overline{BA} \subset \overline{T} \subset (\overline{T})^*$$

et

$$BA \subset T \Longrightarrow BA \subset T \subset T^* \subset A^*B,$$

et

$$BA \subset A^*B \Longrightarrow BA^* \subset AB \quad \text{(d'après le théorème deFugled-Putnam)}$$

On obtient aussi

$$\overline{BA}(BA)^* = (BA)^*\overline{BA} = A^*AB^2$$

i.e. $\overline{BA}$ est normal et puisque les opérateurs normaux sont symétriques maximaux, alors

$$\overline{BA} = \overline{T}.$$

□

D'après le théorème précédent, on a :

Corollaire 3.2.4. *Soient A, B et T trois opérateurs tel que $B \in B(H)$. Si T^* est symétrique, B est auto-adjoint et A est normal, alors*

$$T \subset AB \Longrightarrow \overline{BA} = A^*B.$$

Démonstration. Il est clair que

$$T \subset AB \Longrightarrow \overline{T} \subset AB \quad \text{(car } AB \text{ est fermé).}$$

On a :

$$\begin{aligned} T \subset AB &\Longrightarrow BA^* \subset T^* \subset T^{**} = \overline{T} \subset AB \\ &\Longrightarrow BA \subset A^*B \quad \text{(d'après le théorème de Fuglede-Putnam)} \\ &\Longrightarrow \overline{BA} \subset A^*B \quad \text{(car } A^*B \text{ est fermé).} \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\overline{BA}$ est normal. En suivant le même raisonnement du théorème précédent, on obtient

$$\overline{BA}(BA)^* = (BA)^*\overline{BA} = A^*AB^2$$

i.e. que $\overline{BA}$ est normal.
Remarquons que $A^*B = (BA)^* = (\overline{BA})^*$, et par conséquent $(\overline{BA})^*$ est aussi normal et comme les opérateurs normaux sont symétriques maximaux, alors

$$\overline{BA} = (\overline{BA})^* = A^*B.$$

Ce résultat implique que BA est essentiellement auto-adjoint. □

Corollaire 3.2.5. *Soient A, B, T des opérateurs non nécessairement bornés tels que A est auto-adjoint, B est symétrique avec $B^{-1} \in B(H)$ (i.e. B est auto-adjoint) et T est normal. Alors*

$$AB \subset T \Longrightarrow A = TB^{-1}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} AB \subset T &\Longrightarrow A \subset TB^{-1} \\ &\Longrightarrow B^{-1}T^* \subset A \subset TB^{-1} \\ &\Longrightarrow B^{-1}T \subset T^*B^{-1} \quad \text{(d'après Fuglede-Putnam).} \end{aligned}$$

Les inclusions ci-dessus aident à montrer la normalité de TB^{-1}. Puisque A est auto-adjoint avec $A \subset TB^{-1}$, alors

$$A = TB^{-1}.$$

La preuve est terminée. $\square$

Corollaire 3.2.6. *Soient A, B, T trois opérateurs tels que A est normal, B est borné et auto-adjoint et T est auto-adjoint. Alors*

$$T \subset AB \Longrightarrow T = AB.$$

Démonstration. Pour la preuve, on va suivre le même raisonnement des preuves antécédentes. Montrons que AB est normal. Tout d'abord AB est fermé de plus

$$T \subset AB \Longrightarrow BA^* \subset (AB)^* \subset T \subset AB$$

donc

$$BA \subset A^*B \quad \text{(d'après Fuglede-Putnam).}$$

avec ces inclusions et en utilisant le théorème 5.1.3, on obtient

$$(AB)^*AB = AB(AB)^* = B^2AA^*$$

i.e. AB est normal. Puisque T est auto-adjoint, alors

$$T \subset AB \Longrightarrow T = AB.$$

La démonstrtion est achevée. $\square$

Théorème 3.2.3. *Soient A, B et T des opérateurs non nécessairement bornés. On suppose que B est normal, A est symétrique et inversible (par conséquent A est auto-adjoint) et T est auto-adjoint. Alors*

$$T \subset AB \Longrightarrow T = AB$$

Démonstration. Montrons que AB est normal. Tout d'abord, on a AB est fermé car A est inversible et B est fermé, de plus

$$\begin{aligned} T \subset AB &\Longrightarrow B^*A \subset T \subset AB \\ &\Longrightarrow A^{-1}B^*AA^{-1} \subset T \subset A^{-1}ABA^{-1} \\ &\Longrightarrow A^{-1}B^* \subset BA^{-1} \\ &\Longrightarrow A^{-1}B \subset B^*A^{-1} \quad \text{(d'après le théorème de Fuglede-Putnam)} \\ &\Longrightarrow BA \subset AB^* \end{aligned}$$

par conséquent

$$(AB)^*AB \supset B^*BA^2 \Longrightarrow (AB)^*AB \subset A^2B^*B,$$

car A est inversible est auto adjoint et B^*B est aussi auto-adjoint. Donc

$$(AB)^*AB = A^2B^*B.$$

De la même manière, on obtient

$$AB(AB)^* = (AB)^*AB = A^2B^*B$$

i.e. AB est normal. D'où

$$T \subset AB \Longrightarrow T = AB.$$

La preuve est terminée. $\square$

Théorème 3.2.4. *Soient T, A et B trois opérateurs tels que T et B sont auto-adjoint avec $B \in B(H)$ et A est normal. Si $BA \subset T$, alors $\overline{BA} = T$.*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} BA \subset T &\Longrightarrow BA \subset T \subset A^*B \\ &\Longrightarrow BA^* \subset AB \quad \text{(d'après le théorème de Fuglede-Putnam).} \end{aligned}$$

Il est clair que l'opérateur BA est fermable et possède un domaine dense. Montrons maintenant que $\overline{BA}$ est normal.

En effet

$$(\overline{BA}^*)\overline{BA} = (BA)^*(BA)^{**} = A^*B(A^*B)^* \supset \underbrace{A^*B}BA \supset B\underbrace{AB}A \supset B^2A^*A.$$

Comme les opérateurs B^2, A^*A et $(\overline{BA}^*)\overline{BA}$ sont auto-adjoints avec $B^2 \in B(H)$, alors

$$(\overline{BA})^*\overline{BA} \subset A^*AB^2.$$

Donc d'après le théorème de Dévinatz, on obtient l'égalité

$$(\overline{BA})^*\overline{BA} = A^*AB^2$$

d'autre part

$$\overline{BA}(\overline{BA})^* = (BA)^{**}(BA)^* = (A^*B)^*A^*B \supset BA\underbrace{A^*B} \supset BABA$$

et de la même manière, on aura

$$(\overline{BA})^*\overline{BA} = \overline{BA}(\overline{BA}^*) = A^*AB^2.$$

Donc $\overline{BA}$ est normal. Comme les opérateurs normaux sont symétriques maximaux, alors

$$\overline{BA} = T$$

□

Corollaire 3.2.7. *Soient T, B et A trois opérateurs tels que T est normal et B est symétrique avec $B^{-1} \in B(H)$ (i.e. B est auto-adjoint) et A est auto-adjoint. Si $T \subset BA$, alors $A = \overline{B^{-1}T}$.*

Démonstration. On a :

$$T \subset BA \Longrightarrow B^{-1}T \subset A.$$

Donc d'après le théorème précédent, on obtient

$$A = \overline{B^{-1}T}$$

□

Théorème 3.2.5. *Soient T, B et A trois opérateurs tels que T est auto-adjoint et B est symétrique avec $B^{-1} \in B(H)$ (i.e. B est auto-adjoint) et A^* est un opérateur symétrique. Si $AB \subset T$, alors $TB^{-1} = \overline{B^{-1}T} = \overline{A}$.*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} AB \subset T &\Longrightarrow A \subset TB^{-1} \\ &\Longrightarrow B^{-1}T \subset A^* \subset A^{**} = \overline{A} \subset \overline{TB^{-1}} = TB^{-1}, \end{aligned}$$

et d'après le théorème 3.1.1, on obtient TB^{-1} et $\overline{B^{-1}T}$ sont normaux, et par conséquent

$$TB^{-1} = \overline{B^{-1}T} = \overline{A},$$

□

Théorème 3.2.6. *Soient T, B et A trois opérateurs tels que T et B sont auto-adjoints avec $B \in B(H)$ et inversible et A^* est un opérateur symétrique. Si $BA \subset T$, alors $B\overline{A} = \overline{A}B = T$*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} BA \subset T &\Longrightarrow A \subset B^{-1}T \\ &\Longrightarrow TB^{-1} \subset A^* \subset A^{**} = \overline{A} \subset \overline{B^{-1}T} = B^{-1}T, \\ &\Longrightarrow BT \subset B\overline{A}B \subset TB. \end{aligned}$$

et d'après le théorème 3.1.1, on obtient TB et $\overline{BT} = BT$ sont normaux. Par conséqent

$$TB = BT = B\overline{A}B,$$

d'où

$$B\overline{A} = \overline{A}B = T.$$

□

Théorème 3.2.7. *Soient T, A et B trois opérateurs tels que A et B sont normaux avec $B \in B(H)$ et T est unitaire. Si $BA \subset TAB$ et TA est normal, alors AB et $\overline{BA}$ sont normaux. De plus si A et T commutent, alors TAB est normal.*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} BA \subset TAB &\Longrightarrow B^*A^*T^* \subset A^*B^* \\ &\Longrightarrow B^*TA \subset AB^* \quad \text{(d'après le théorème de Fugled Putnam)} \\ &\Longrightarrow BA^* \subset A^*T^*B. \end{aligned}$$

Il est clair que AB, est fermé et on a :

$$(AB)^*AB \supset B^*A^*\underbrace{AB} \supset B^*\underbrace{A^*T^*B}A \supset B^*BA^*A$$

et comme les opérateurs $(AB)^*AB$, B^*B et A^*A sont auto-adjoints avec $B^*B \in B(H)$, alors

$$(AB)^*AB \subset A^*AB^*B,$$

D'après le théorème de Devinatz, on obtient l'égalité

$$(AB)^*AB = A^*AB^*B.$$

D'autre part

$$AB(AB)^* \supset \underbrace{AB}B^*A^* = \underbrace{AB^*}BA^* \supset B^*T\underbrace{AB}A^* \supset B^*TT^*BAA^* = B^*BAA^*.$$

Par conséquent
$$AB(AB)^* = AA^*B^*B.$$
Puisque A est normal, alors
$$(AB)^*AB = AB(AB)^* = A^*AB^*B,$$
D'où AB est normal.
Montrons maintenant que $\overline{BA}$ est normal.
En effet
$$(\overline{BA})^*\overline{BA} = A^*B^*(A^*B^*)^* \supset \underbrace{A^*B^*}BA \supset B^*\underbrace{A^*T^*B}A \supset B^*BA^*A,$$
i.e.
$$(\overline{BA})^*\overline{BA} = A^*AB^*B,$$
de plus
$$\overline{BA}(\overline{BA})^* \supset BAA^*B^* = BA^*\underbrace{AB^*} \supset B\underbrace{A^*B^*}TA \supset BB^*A^*T^*TA = BB^*A^*A$$
par conséquent
$$\overline{BA}(\overline{BA})^* = A^*ABB^*.$$
Comme B est normal, on obtient
$$(\overline{BA})^*\overline{BA} = \overline{BA}(\overline{BA})^* = A^*AB^*B.$$
D'où $\overline{BA}$ est normal.

Montrons maintenant que TAB est normal.

On a tout d'abord TAB est fermé car T est inversible, AB est fermé et A et T commutent, alors :
$$\begin{aligned} TA \subset AT &\Longrightarrow TA^* \subset A^*T \quad \text{(d'après le théorème de Fuglede-Putnam)}\\ &\Longrightarrow T^*A \subset AT^* \quad \text{(par passage aux adjoints)}\\ &\Longrightarrow T^*A^* \subset A^*T^* \quad \text{(d'après le théorème de Fuglede-Putnam),}\end{aligned}$$
en effet
$$(TAB)^*TAB \supset B^*A^*T^*TAB = B^*A^*\underbrace{AB} \supset B^*\underbrace{A^*T^*B}A \supset B^*BA^*A.$$

D'après le théorème de Devinatz, on obtient

$$(TAB)^*TAB = A^*AB^*B,$$

et aussi

$$TAB(TAB)^* \supset T\underbrace{AB}B^*A^*T^* \supset TT^*BAB^*A^*T^* = B\underbrace{AB^*}A^*T^* \supset BB^*TA\underbrace{A^*T^*}$$

$$TAB(TAB)^* \supset BB^*T\underbrace{AT^*}A^* \supset BB^*TT^*AA^* = BB^*AA^*.$$

Puisque A et B sont normaux, on obtient

$$(TAB)^*TAB = TAB(TAB)^* = A^*AB^*B.$$

D'où TAB est normal. $\square$

Remarque 3.2.2. *Dans le théorème précédent, l'hypotèse A et T commutent, elle donne aussi la normalité de AB et $\overline{BA}$, c'est grâce au théorème 3.1.1.*

3.3 Conjecture

Malheureusement, si on échange les conditions imposées sur les opérateurs A et B dans le corollaire 3.2.6, alors on n'a pas jusqu'ici trouvé une réponse. En effet, on a besoin d'une version du théorème de Fuglede Putnam qui n'est pas disponible maintenant. Suite à notre travail, on propose cette conjecture suivante :

Conjecture 3.3.1. *Soit A un opérateur (s'il est nécessaire qu'il soit fermé et son domaine dense) et soit $B \in B(H)$ et normal. Alors*

$$BA \subset AB^* \Longrightarrow B^*A \subset AB.$$

Très récemment, cette conjecture s'est avérée être fausse. Un contre exemple a été trouvé dans le papier [2]. dans le même article, les auteurs ont donné de nouvelles versions du fameux théorème de Fuglede-Putnam. Un autre problème en relation avec notre travail est le suivant :

Soit A un opérateur (s'il est nécessaire qu'il soit fermé et son domaine dense) et soit $B \in B(H)$ et normal. Alors

$$BA = AB^* \Longrightarrow B^*A = AB.$$

Bibliographie

[1] M. Barraa, M. Boumazghour, *Numerical range submultiplicity*, Linear Multilinear Algebra, **63/11** (2015) 2311-2317..

[2] I. F. Z. Bensaid, S. Dehimi, B. Fuglede, M. H. Mortad, *The Fuglede Theorem and Some Intertwining Relations*, (soumis). arXiv :1901.09271.

[3] Il Bong Jung, M. H. Mortad, J. Stochel, *On normal products of selfadjoint operators*, Kyungpook Math. J., **57** (2017) 457-471.

[4] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer, 1990 (2nd edition).

[5] S. Dehimi, M. H. Mortad, *Right (Or Left) Invertibility of Bounded and Unbounded Operators and Applications to the Spectrum of Products*, Complex Anal. Oper. Theory, **12/3 (2018)** 589-597.

[6] A. Devinatz, A. E. Nussbaum, *On the Permutability of Normal Operators*, Ann. of Math. (2), **65** (1957) 144-152.

[7] A. Devinatz, A. E. Nussbaum, J. von Neumann, *On the Permutability of Self-adjoint Operators*, Ann. of Math. (2), **62** (1955) 199-203.

[8] A. Gheondea, *When are the products of normal operators ?* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.), 2009, 52(100)/2, 129-150.

[9] S. Goldberg, *Unbounded linear operators*, McGraw-Hill, 1999.

[10] K. Gustafson, M. H. Mortad, *Conditions Implying Commutativity of Unbounded Self-adjoint Operators and Related Topics*, J. Operator Theory, **76/1** (2016) 159-169.

[11] K. Gustafson, *On projection of selfadjoint operators*, Bull. Amer. Math Soc., 1969, 75, 739-741.

[12] K. Gustafson, *Positive (noncommuting) operator products and semi-groups*, Math. Z., 1969, 75, 739-741.

[13] K. Gustafson, M. H. Mortad, *Unbounded Products of Operators and Connections to Dirac-Type Operators*, Bull. Sci. Math., **138/5** (2014) 626-642.

[14] I. Kaplansky, *Products of normal operators*, Duke Math. J., 1953,20/2,257-260.

[15] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, 2nd Edition, Springer, 1980.

[16] F. Kittaneh, *On the normality of operator products, Linear and Multilinear Algebra*, 1991, 30/1-2, 1-4.

[17] M. Meziane, M.H. Mortad, *Maximality of linear operators*, Rend. Circ. Mat. Palermo,II. Ser, DOI 10.1007/s12215-018-0370-x.

[18] M. H. Mortad, *An application of Putnam-Fuglede theorem to normal products of self-adjoint operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **131/10** (2003), 3135-3141.

[19] M. H. Mortad, *On some product of two unbounded self-adjoint operators*, Integral Equations Operator Theory, **64/3 (**2009), 399-408.

[20] M. H. Mortad, *On the closedness, the self-adjointness and the normality of the product of two unbounded operators*, Demmonstratio Math.,2012, 45/1, 161-167.

[21] M. H. Mortad, *An All-Unbounded-Operator Version of the Fuglede-Putnam Theorem*, Complex Anal. Oper. Theory, **6/6** (2012), 1269-1273.

[22] M. H. Mortad, Commutativity of Unbounded Normal and Self-adjoint Operators and Applications, *Operators and Matrices*, **8/2** (2014), 563-571.

[23] M.H. Mortad, A criterion for the normality of unbounded operators and applications to self-adjointness, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, **64/1** (2015) 149-156.

[24] M. H. Mortad, *Products of Unbounded Normal Operators*. arXiv :1202.6143v1.

[25] M. H. Mortad, *The sum of two Unbounded Linear operators : Closedness, Self-adjointness and Normality*. arXiv :1203.2545v1.

[26] M. H. Mortad, *An Operator Theory Problem Book*, World Scientific Publishing Co., (2018). https ://doi.org/10.1142/10884. ISBN : 978-981-3236-25-7 (hardcover).

[27] E. Nelson, *Analytic Vectors*, Ann. of Math. (2), 70 (1959) 572-615.

[28] A. E. Nussbaum, *A Commutativity Theorem for Unbounded Operators in Hilbert Space*, Trans. Amer. Math. Soc., **140** (1969) 485-491.

[29] F. C. Paliogiannis, *A generalization of the Fuglede-Putnam theorem to unbounded operators*, J. Oper., (2015). Art. ID 804353, 3 pp.

[30] A. Patel, P. B. Ramanujan, *On the sum and product of normal operators*, Indian J. Pure Appl. Math., 1981, 12/10, 1213-1218.

[31] W. Rudin, Functional Analysis, *McGraw-Hill Book Co.*, Second edition, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hillv , Inc., New York, 1991.

[32] K. Schmüdgen, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space,* Springer GTM **265** (2012).

[33] Z. Sebestyén, J. Stochel, *On suboperators with codimension one domains*, J. Math. Anal. Appl., **360/2** (2009) 391-397.

[34] J. Stochel, *An asymmetric Putnam-Fuglede theorem for unbounded operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **129/8** (2001) 2261-2271.

[35] J. Stochel, F. H. Szafraniec, *Domination of unbounded operators and commutativity*, J. Math. Soc. Japan **55/2** (2003), 405-437.

[36] J. Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces* (translated from the German by J. Szücs), Srpinger-Verlag, GTM **68** (1980).

[37] N.A. Wiegmann, *A note on infinitienormal matrices*, Duke Math. J., 1949, 16, 535-538.

[38] N.A. Wiegmann, *Normal products of matrices*, Duke Math J., 1948, 15, 633-638.

Résumé

Nous présentons les résultats de la maximalité des opérateurs non nécessairement bornés. Pour cela, nous avons traité le problème de l'égalité des opérateurs en situation d'inclusion. Un chapitre important, concernant le produit normal des opérateurs normaux nous semble être la clé pour la maximalité.

Mots-clés:
Opérateur borné; Opérateur non-borné; Opérateur fermable; Opérateur inversible; Opérateur adjoint; Opérateur normal; Opérateur auto-adjoint; Opérateur symétrique; Commutativité; Maximalité des opérateurs.

Abstract

We present the results of maximumity of the non necessarily bounded operators . For that, we dealt the problem of equality of the operators in *inclusion* situation.
An important chapter concerning the normal product of normal operators . will be the key for the maximumity

ملخص

نستهل هذا العمل في دراسة المؤثرات بصفة عامة و ليس شرطا أن تكون محدودة**.** نتطرق خصوصا للنتائج و البراهين التي تعطينا المساواة بين المؤثرات في حالة توسعة بينهم. الأعمال التي تسبق الفصل الأخير مركزة على الجداء الناظمي للمؤثرات الناظمية لأنها تعتبر سبيل للحدية القصوى.