Table des matières

1 Généralités sur les EDO **6**
- 1.1 Définitions . . . 6
  - 1.1.1 Equation différentielle . . . 6
  - 1.1.2 Système d'équations différentielles . . . 7
- 1.2 Equation différentielle linéaire . . . 9
- 1.3 Equation autonome . . . 10
- 1.4 Problème de Cauchy . . . 11
- 1.5 La résolvante . . . 12
  - 1.5.1 L'espace vectoriel des solutions . . . 12

2 Stabilité des points d'équilibres **15**
- 2.1 Notions du point d'équilibre . . . 15
- 2.2 Notions de stabilité d'équilibre . . . 18
- 2.3 Exemple illustrant la notion de stabilité . . . 20
- 2.4 Résultat fondamental . . . 22

3 Stabilité des équations différentielles en dimension un **23**
  - 3.0.1 Stabilité d'un point d'équilibre . . . 25

4 Stabilité des systèmes linéaires **28**
- 4.1 Rappel . . . 28
  - 4.1.1 Définitions de base . . . 28
  - 4.1.2 Rappel d'algèbre . . . 29
- 4.2 Résultat fondamental . . . 30
- 4.3 Stabilité du système linéaire à coefficient constant . . . 32
  - 4.3.1 Pour les systèmes linéaires en dimension 1 . . . 32
  - 4.3.2 Pour les systèmes linéaires en dimension deux . . . 33
- 4.4 Stabilité des systèmes homogénes à coefficient constant d'ordre n 45
- 4.5 Stabilité du système linéaire à coefficients variables . . . 50
- 4.6 Stabilité du système avec second membre . . . 53
- 4.7 Perturbations linéaire . . . 54

Introduction

Les équations différentielles forment la langue dans laquelle les lois fondamentales de la nature sont exprimées. A l'aide d'expériences, qui nous informent comment un système change d'un instant à un autre nous pouvons extraire ces équations différentielles.

Le défi relevé par la théorie des équations différentielles est de prendre à court terme des informations et d'obtenir des informations sur le comportement global à long terme.

On commence par traduite un système (physique, chimique, biologique, économique, voire mathématique) au moyen d'une équation différentille, on tente alors d'obtenir des informations sur les solutions de cette équation, et on traduit ensuite cette information mathématique de nouveau dans le contexte scientifique.

Un exemple de base est donnée par la loi de Newton, F = ma :
m =la masse du corps
a =accélération qui est la dérivée seconde de la position x
F =Forces n'affectant pas directement x, mais seulement en fonction de ses dérivées. C'est une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 car il y a la dérivée seconde. On va expliquer la notion d'ordre d'une équation différentielle plus tard.

L'étude des équations différentielles comporte trois parties :

1. Les méthodes analytiques exactes, les méthodes symboliques
2. Les méthodes qualitatives (champs de direction, ...)
3. Les méthodes numériques

La première partie consiste à chercher la solution exacte des équations différentielles. Le théorème de Cauchy-Lipschtiz assure l'existence et l'unicité des

solutions sous certaines conditions (aspect analytique), mais il n'est pas toujours facile de donner explicitement ces solutions, soit à cause de la difficulté des équations, soit à cause des contraintes de temps. Par conséquent, les techniques ont évolué pour déterminer le comportement qualitatif d'un système avec le temps. A titre d'exemple, détermination du comportement général des solutions des équations différentielles à l'infini. Les méthodes numériques sont utilisées pour approcher les solutions d'une équation différentielle, et même dans ce cas on peut chercher une valeur approchée de certaines grandeurs. A titre d'exemple, le nombre $e = e^1$ est la valeur $y(1)$ de la solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$.
Dans ce travaille on va étudier les comportements des solutions des équations différentielles, c-à-d les comportements des solutions à l'infini.
L'étude des comportements des solutions est basé sur l'idée suivante :
Si on part de deux solutions qui sont proches à l'instant $t = t_0$ est-ce que ces deux solutions resteront proches lorsque t tend vers l'infini ?
Pour cela, dans ce travail on va essayer de répondre à cette question en nous donnant des critères pour connaître les comportement des solutions.

- Au chapitre 1, on va donner des généralités sur les équations différentielles ordinaires composé par :
  - Des définitions générales des équations différentielles.
  - Définition du problème de Cauchy
  - Généralité sur la résolvante
- Au chapitre 2, on va étudier la stabilité des points d'équilibres on suit les étaps suivantes :
  - Définir la notions du point d'équilibre.
  - Définir la notions de stabilité d'équilibre.
  - Donnant un exemple illustrant la notion de stabilité.
- Au chapitre 3 *et* 4, on va étudier la stabilité des équations différentielles en suivant les étapes suivantes :
  - L'etude générale de la stabilité des équations différentielles en dimension 1.
  - Des définitions de base et des rappels d'algébre qui permettent de faciliter l'étude de la stabilité des systèmes différentiels d'orde n.
  - Etudier la stabilité des systèmes linéaires à coefficients constants.
  - Etudier la stabilité des systèmes linéaires à coefficients variables.
  - Etudier la stabilité des systèmes linéaires avec second membre.
  - Etudier la stabilité des systèmes linéaires perturbés.

Chapitre 1

Généralités sur les EDO

Commençons ces rappels sur les équations différentielles par quelques définitions de base.

1.1 Définitions

1.1.1 Equation différentielle

Définition 1.1.1.1 *(Définition générale d'une équation différentielle)*
Soit

$$\begin{aligned} F : & D \to \mathbb{R} \\ & X \to F(X) \end{aligned}$$

une application définie sur un domaine D de l'espace $\mathbb{R}^{n+2}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

On appelle équation différentielle, une équation mettant en jeu une fonction ainsi qu'un certain nombre de ses fonctions dérivées. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre n s'écrit :

$$F(y, y', y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}, t) = 0 \tag{1.1}$$

Où y représente une fonction de la variable t et $y, y', y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ ses dérivées successives.

D'un point de vue formel, le problème se pose donc de la même manière que pour les équations algébriques, mais avec la différence essentielle que l'inconnue n'est plus un nombre (réel ou complexe), mais une fonction, c'est à dire un être mathématique beaucoup plus compliqué.

Rapport-Gratuit.com

Remarque : L'ordre d'une équation différentielle est le plus grand entier qui figure sur les dérivées $y^{(k)}$ dans (1.1).

Définition 1.1.1.2 *(Définition générale d'une solution d'une équation différentielle)*
On appelle solution de l'équation différentielle (1.1) une fonction

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi : I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \rightarrow & \phi(t) \end{array} \right. \tag{1.2}$$

définie et n-fois dérivable sur un intervale I de $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\phi(t), \phi'(t), \phi^{(2)}(t), \ldots, \phi^{(n)}(t), t) = 0, \quad \forall t \in I \\ (\phi(t), \phi'(t), \phi^{(2)}(t), \ldots, \phi^{(n)}(t), t) \in D, \quad \forall t \in I \end{array} \right. \tag{1.3}$$

1.1.2 Système d'équations différentielles

Définition 1.1.2.1 *(Définition générale d'un système d'équations différentielles)*
Soient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F_i : D_i & \rightarrow & \mathbb{R} \\ X & \rightarrow & F_i(X) \end{array} \right. , \quad \forall i \in [\![1 \ , \ d]\!]$$

d fonctions définies sur des domaines D_i de $\mathbb{R}^{1+(n+1)d}$. On appelle système d'équations différentielles d'ordre n un système de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(y_1, \ldots, y_d, y_1', \ldots, y_d', \ldots, y_1^{(n)}, \ldots, y_d^{(n)}, t) = 0 \\ F_2(y_1, \ldots, y_d, y_1', \ldots, y_d', \ldots, y_1^{(n)}, \ldots, y_d^{(n)}, t) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ F_d(y_1, \ldots, y_d, y_1', \ldots, y_d', \ldots, y_1^{(n)}, \ldots, y_d^{(n)}, t) = 0 \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Définition 1.1.2.2 *(Définition générale d'une solution d'un système d'équations différentielles)*
Une solution de (1.4) est un ensemble de d fonctions

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi_i : I & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \rightarrow & \phi_i(t) \end{array} \right. , \quad \forall i \in [\![1 \ , \ d]\!]$$

définie et $n-$fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que pour tout $i \in [\![1 \ , \ d]\!]$, et pour tout $t \in I$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_i(\phi_1(t), \ldots, \phi_d(t), \phi_1'(t), \ldots, \phi_d'(t), \ldots, \phi_1^{(n)}(t), \ldots, \phi_d^{(n)}(t), t) = 0 \\ (\phi_1(t), \ldots, \phi_d(t), \phi_1'(t), \ldots, \phi_d'(t), \ldots, \phi_1^{(n)}(t), \ldots, \phi_d^{(n)}(t), t) \in D_i \end{array} \right.$$

En général, l'étude des équations différentielles d'ordre $n \geq 2$ est difficile. Pour cela, on peut diminuer l'ordre de l'équation différentielle pour faciliter l'étude à l'aide du théorème suivant :

Théorème 1.1.2.1 *: Toute équation différentielle d'ordre $n\,(n \geq 2)$, linéaire ou non linéaire, peut être transformé en un système de n équations différentielles de 1^{er} ordre.*

Preuve : Soit l'équation différentielle (1.1) On pose :

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \vdots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ F(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_n', t) = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Le système (1.5) est équivalent à l'équation (1.1).

On notera que la réciproque n'est pas vrai en général : un système différentiel arbitraire de n équations différentielles de 1^{er} ordre, ne peut pas, en générale, être ramené à une seule équation différentielle d'ordre n.
Soit la fonction(1.2) une solution de (1.1) $n-$fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et qui vérifie (1.3).
si on pose que :

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \phi(t) \\ \phi_2(t) = \phi'(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) = \phi^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

alors le vecteur $(\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t))$ est une solution du système (1.5).

Dans la suite on travailler seulement avec l'équation sous la forme canonique :

$$y^{(n)}(t) = f(y(t), y'(t), y^{(2)}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), t) + b(t) \tag{1.6}$$

Rapport-gratuit.com
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES

Remarque :

- b est appelé second membre.
- Si b=0 on dit que l'équation (1.6) est homogène, sinon on dit que l'équation (1.6) est non homogène.

D'une façon plus systématique, on sera amené à étudier les systèmes de n équations différentielles du 1$^{\text{er}}$ ordre, que l'on définira par les équations :

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, t) \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n, t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ y_n' = f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, t) \end{cases}$$

Introduisons les vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Et la fonction vectorielle :

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Alors l'équation(1.6) $\iff Y'(t) = f(t, Y(t)) + B(t)$

1.2 Equation différentielle linéaire

Si la fonction f est linéaire on parle de l'équation différentielle linéaire avec second membre. Elle s'écrit de la façon suivante :

$$y^{(n)}(t) = a_0(t)y(t) + a_1(t)y'(t) + \ldots + a_{(n-1)}(t)y^{(n-1)}(t) + b(t) \qquad (1.7)$$

Alors le système équivalent est de la forme suivante :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t) \qquad (1.8)$$

Avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad , \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Remarque : Si a_i dépend du temps on dit que l'équation différentielle linéaire est à coefficients non constants. Sinon on dit que l'équation différentielle linéaire est à coefficients constants.

Exemple : $y^{(2)} = y(t) + 3 \iff Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$
en posant

$$y_1 = y\,,\ y_2 = y'\,,\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad ,\ B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : Toute autre forme de la fonction f de l'équation (1.6) conduit à une équation différentielle non-linéaire.
La majorité des équations différentielles non triviales rencontrées dans les applications sont non linéaires.

1.3 Equation autonome

Lorsque f ne dépend pas explicitement du temps, mais seulement de $y(t)$, on dit que l'équation différentielle est autonome. Le système étudié est alors invariant par translation dans le temps, c-à-d si $y(t)$ est une solution d'une équation différentielle autonome, la solution décalée dans le temps, $y(t - t_0)$, est également solution. Dans le cas général des équations non autonomes, la trajectoire suivie au cours du temps ne dépend pas seulement de la position initiale, mais également de l'instant de départ.

Il est possible d'associer une équation autonome dans $\mathbb{R}^{n+1}$ à une équation non autonome dans $\mathbb{R}^n$ d'après le théorème suivant :

Théorème 1.3.0.2 *: Toute équation non autonome d'ordre n peut être transformée en une équation autonome d'ordre $n+1$ par adjonction d'une variable supplémentaire $v(t) \equiv t$*

Preuve : Puisque $v(t) \equiv t$, l'équation $Y'(t) = f(t, Y(t))$ est équivalente à :

$$\begin{cases} Y'(t) = & f(v(t), Y(t)) \\ v'(t) = & 1 \end{cases}$$

qui constitue bien une équation différentielle autonome d'ordre $n+1$ pour la variable $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$.

Le prix à payer est donc une augmentation de la dimension du système étudié. Ce qui peut considérablement compliquer la représentation et la compréhension des solutions.

1.4 Problème de Cauchy

Définition 1.4.0.3 *Un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale.*

Un problème de Cauchy s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} Y'(t) = & f(t, Y(t)) \\ Y(t_0) = & Y_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Avec $Y(t_0) = Y_0$ est appellé la condition initiale de (1.9).
Une question naturelle : est ce que le problème (1.9) admet une solution ? La réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.4.0.3 *(Théorème d'existence et d'unicité)*
soit

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to & \mathbb{R}^n \\ (t, Y) \to & f(t, Y) \end{cases}$$

soit ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans lequel f est définie et localement lipschitzienne en Y. soit $(t_0, Y_0) \in \omega$. Il existe un plus grand intervale I et une solution ϕ unique $(\phi : I \to \mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(t_0) = Y_0$ et $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$. I s'appelle intervalle maximal et ϕ solution maximale de(1.9).

Remarque : Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit en particulier l'unicité des solutions des équations différentielles pour une condition initiale donnée. Autrement dit, à deux conditions initiales différentes, correspondent deux solutions différentes pour toutes les valeurs antérieures ou postérieures de t. En terme dynamique, deux trajectoires partant de deux points initiaux différents ne peuvent se couper ou même se toucher.

1.5 La résolvante

1.5.1 L'espace vectoriel des solutions

On considère le système différentielle homogéne linéaire d'orde n suivant :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \tag{1.10}$$

On remarque que l'unique solution de (1.10) qui est nulle à $t = t_0$ est la fonction nulle.
Soit K l'ensemble des solutions de (1.10). L'une des propriétés de (1.10) est que toute combinaison linéaire de solution reste toujours une solution.

Preuve : Soit

$$\phi(t) = \alpha_0\phi_0(t) + \alpha_1\phi_1(t)$$

avec $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $\phi_0, \phi_1 \in K$

on a :

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= (\alpha_0\phi_0(t) + \alpha_1\phi_1(t))' \\
\phi'(t) &= \alpha_0\phi_0'(t) + \alpha_1\phi_1'(t) \\
\phi'(t) &= \alpha_0 A(t)\phi_0(t) + \alpha_1 A(t)\phi_1(t) \\
\phi'(t) &= A(t)(\alpha_0\phi_0(t) + \alpha_1\phi_1(t)) \\
\phi'(t) &= A(t)\phi(t)
\end{aligned}$$

D'où K est un espace vectoriel d'élément neutre la solution nulle. On va montrer que la dimension de K est égale à n :

Preuve : Soit t_0 et $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$.
Soit $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ des solutions de (1.10) telle que $\phi_i(t_0) = e_i \quad \forall i \in [\![1\ ,\ n]\!]$,donc les vecteurs $\phi_i(t_0)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$, mais est ce que les vecteurs $\phi_i(t)$ forment une base pour tout t ?
Sinon $\exists \quad t_0' \quad et \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non tous nuls telle que $\sum_{i=1}^n \alpha_i\phi_i(t_0') = 0$
Or $\sum_{i=1}^n \alpha_i\phi_i(t)$ est une solution de (1.10) telle que $\sum_{i=1}^n \alpha_i\phi_i(t_0') = 0$ donc elle est nulle pour tout t. En particulier pour $t = t_0$.
On a $\sum_{i=1}^n \alpha_i\phi_i(t) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \in [\![1\ ,\ n]\!]$ car $\phi_i(t_0)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.
Absurde donc la seule possibilité est que les $\phi_i(t_0)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ pour tout t.
soit ϕ solution de (1.10) et soit $t \in \mathbb{R}$, fixé alors $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ donc $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ \alpha_n$ telle que :

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\phi_i(t) \Rightarrow \phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\phi_i(t) = 0$$

Donc $\phi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i$ est une solution de (1.10) nulle à l'instant t, alors elle est identiquement nulle : $\phi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i = 0$
D'où

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i.$$

est par conséquent $dim(K) = n$

Définition 1.5.1.1 *Un système fondamental de solution de (1.10) est une base de K .*

Définition 1.5.1.2 *Soit $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ un système fondamental de solution de (1.10)*
Soit $\Phi(t)$ la matrice définie par :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_{1,1}(t) & \phi_{2,1}(t) & \ldots & \phi_{n,1}(t) \\ \phi_{1,2}(t) & \phi_{2,2}(t) & \ldots & \phi_{n,2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \phi_{1,n}(t) & \phi_{2,n}(t) & \ldots & \phi_{n,n}(t) \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

où $\phi_i(t) = \begin{pmatrix} \phi_{i,1}(t) \\ \phi_{i,2}(t) \\ \vdots \\ \phi_{i,n}(t) \end{pmatrix}$
une telle matrice s'appelle une matrice fondamentale.

Propriété 1.5.1.1 *: Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale alors :*

$$\begin{aligned} &\Phi(t)^{-1} \quad existe \quad \forall t \\ &\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \\ &(\Phi(t)^{-1})' = -\Phi(t)^{-1}A(t) \end{aligned}$$

Les propriétés de la résolvante sont données par le théorème suivante :

Théorème 1.5.1.1 *(Les propriétés de la résolvante)*
soit le système (1.10), il existe une application

$$\begin{cases} R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ (t, s) & \to & R(t, s) \end{cases}$$

appellée résolvante de (1.10) ou la résolvante de A et qui est la seule application vérifiant les propriétés suivante :

$$\begin{aligned} R(t,t) &= I_d \quad \forall t \\ R(t,s) &= R(t,u)R(u,s) \\ R(t,s)^{-1} &= R(s,t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R(t,s)\right) &= A(t)R(t,s) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(R(t,s)\right) &= -R(t,s)A(t) \end{aligned}$$

avec I_d la matrice identite.
de plus la solution $\phi(t)$ de (1.10) telle que $\phi(t_0) = Y_0$ est $R(t,t_0)Y_0$.

Remarque :

- $R(t,s) = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$
- D'après le théoèrme précédent, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R(t,t_0)\right) = A(t)R(t,t_0)$$

  Donc le $R(t,s)$ est l'unique solution de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Y(t)\right) = A(t)Y(t)$ telle que $Y(t_0) = I_d$

Lemme (lemme de Gronwall) :

Soient y, ϕ, ψ trois fonctions continues sur un segment $[a,b]$ à valeurs positives et vérifiant l'inégalité suivante :

$$\forall t \in [a,b] \quad y(t) \leq \phi(t) + \int_a^t \psi(u)y(u)\,\mathrm{d}u$$

alors :

$$y(t) \leq \phi(t) + \int_a^t \phi(u)\psi(u)exp(\int_u^t \psi(s)\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}u$$

Propriété 1.5.1.2 *:*
Soit R la résolvante de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Y(t)\right) = A(t)Y(t)$. Alors

$$\forall s \leq t \quad \| R(t,s) \| \leq exp \int_s^t \| A(u) \|\ \mathrm{d}u$$

Soit J un intervalle borné sur lequel $\| A(u) \| \leq k$ alors

$$\| R(t,s) \| \leq e^{k(t-s)}$$

de sorte que : $\| R(t,s)Y_0 \| \leq e^{k(t-s)} \| Y_0 \| \quad \forall t,s \in J$

Chapitre 2

Stabilité des points d'équilibres

2.1 Notions du point d'équilibre

On considère l'équation différentielle ordinaire autonome

$$Y'(t) = f(Y(t)) \tag{2.1}$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1

Définition 2.1.0.3 *(Point d'équilibre)*
On dit que $a \in \mathbb{R}^n$ est point d'équilibre de f si $f(a) = 0$.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} Y'(t) = & f(Y(t)) \\ Y(t_0) = & a \end{cases} \tag{2.2}$$

où a est un point d'équilibre de f.
Alors $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définit par $\phi(t) = a$ est l'unique solution maximale de (2.2).

Théorème 2.1.0.2 *(Alternative d'explosion)*
Soit I un intervalle ouvert et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. Soient α et β dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\phi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $Y'(t) = f(t, Y(t))$.

1. *Si $\beta < \sup I$ et $\beta \in I$ alors $\phi(t)$ n'admet pas de limite lorsque $t \to \beta^-$.*
2. *Si $\alpha > \inf I$ et $\alpha \in I$ alors $\phi(t)$ n'admet pas de limite lorsque $t \to \alpha^+$.*

($\inf I$ et $\sup I$ sont dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Preuve : Cas où $\beta < \sup I$ et $\beta \in I$
Par l'absurd supposons que $l = \lim_{t\to\beta^-} \phi(t) \in \mathbb{R}^n$ (*)
Soit

$$\begin{aligned} \overline{\phi} :]\alpha, \beta] &\to \mathbb{R}^n \\ t \to \overline{\phi}(t) &= \begin{cases} \phi(t) & si\, t \in]\alpha, \beta[\\ l & si \quad t = \beta \end{cases} \end{aligned}$$

Par (*) on a $\overline{\phi}$ est continue sur $]\alpha, \beta]$
on a $\beta < \sup I$ et $\beta \in I$ alors $(\beta, l) \in I \times \mathbb{R}^n$
or f est continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ alors $\lim_{t\to\beta^-} f(t, \phi(t)) = f(\beta, l)$ dans $\mathbb{R}^n$
donc $\lim_{t\to\beta^-} \phi'(t) = f(\beta, l)$
alors $\overline{\phi}$ est de classe C^1 sur $]\alpha, \beta]$ et que $\overline{\phi}'(t) = f(t, \overline{\phi}(t))$, $\forall t \in]\alpha, \beta]$
D'où $\overline{\phi}$ est une solution de l'équation différentielle $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ qui prolonge ϕ à l'intervalle $]\alpha, \beta]$. Contradiction avec la maximalité de ϕ.

Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} Y'(t) & = f(Y(t)) \\ Y(t_0) & = Y_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Propriété 2.1.0.3 *: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que : $||f(x)|| \leq \alpha||x|| + \beta \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.*
Alors toute solution maximale de (2.3) définie pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$ est définie sur $I = \mathbb{R}$.

Preuve : Soit le problème (2.3), alors il existe $\phi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ solution maximal de problème de Cauchy.
supposons que $\beta < +\infty$ d'après le théorème d'alternative d'explosion on a : $||\phi(t)||$ tend vers $+\infty$ quand $t \to \beta$.
On a :

$$||\phi(t)|| \leq ||\phi(t_0)|| + \int_{t_0}^{t} ||\phi'(s)|| \, \mathrm{d}s$$

$$||\phi(t)|| \leq ||\phi(t_0)|| + \int_{t_0}^{t} (\alpha||\phi(s)|| + \beta) \, \mathrm{d}s$$

$$||\phi(t)|| \leq ||\phi(t_0)|| + \beta(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \alpha||\phi(s)|| \, \mathrm{d}s$$

d'après le lemme de Gronwall on a :

$$||\phi(t)|| \leq (||\phi(t_0)|| + \beta(t - t_0))e^{\alpha(t-t_0)}$$
$$||\phi(t)|| \leq (||\phi(t_0)|| + \beta(\beta - t_0))e^{\alpha(\beta-t_0)}$$

d'où $||\phi(t)||$ est borné lorsque $t \to \beta$, ce qui est absurde.
Alors $\beta \geq +\infty$.

Propriété 2.1.0.4 *(Importance des points d'équilibres)*
Soit le problème de Cauchy suivant :

$$(pc) \begin{cases} Y'(t) = & f(Y(t)) \\ Y(t_0) = & Y_0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.
Soit $\phi(t)$ solution maximale de (pc) définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$.
Si $\phi(t)$ tend vers x^* quand $t \to \sup J$ alors $f(x^*) = 0$.

Preuve : on va montrer ce resultat pour $n = 1$ puis pour $n > 1$.
pour $n = 1$
On a $\phi(t)$ tend vers x^* quand $t \to \sup J$
alors $||\phi(t)||$ tend vers $||x^*||$ quand $t \to \sup J$
d'apès le théorème d'alternative d'explosion on a $\sup J = +\infty$.
Donc $\phi(t)$ tend vers x^* quand $t \to +\infty$
Comme f est de classe C^1 alors $f(\phi(t))$ tend vers $f(x^*)$ quand $t \to +\infty$
donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists T, \forall t > T \quad |f(\phi(t)) - f(x^*)| < \epsilon$$

Si $f(x^*) \neq 0$, par exemple $f(x^*) > 0$, posons $\epsilon = \dfrac{f(x^*)}{2}$
donc

$$-\frac{f(x^*)}{2} < f(\phi(t)) - f(x^*) < \frac{f(x^*)}{2}$$
$$\frac{f(x^*)}{2} < f(\phi(t)) < \frac{3f(x^*)}{2}$$
$$\frac{f(x^*)}{2} < \phi'(t) < \frac{3f(x^*)}{2}$$

en intégrant sur $[t_0, t]$ on déduit,

$$\phi(t) > \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{f(x^*)}{2} \, \mathrm{d}s$$
$$\phi(t) > \phi(t_0) + \frac{f(x^*)}{2}(t - t_0)$$

d'où $\phi(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \to +\infty$ absurde .
Donc $f(x^*) = 0$.
De façon plus générale,
notons $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ et $f(\phi) = (f_1(\phi), \ldots, f_n(\phi))$
si $f(x^*) \neq 0$ alors $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $f_i(x^*) \neq 0$ supposons que $f_i(x^*) > 0$
alors de la même façons pour $n = 1$ on a $\phi_i(t)$ tend vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$.
Donc $f(x^*) = 0$

2.2 Notions de stabilité d'équilibre

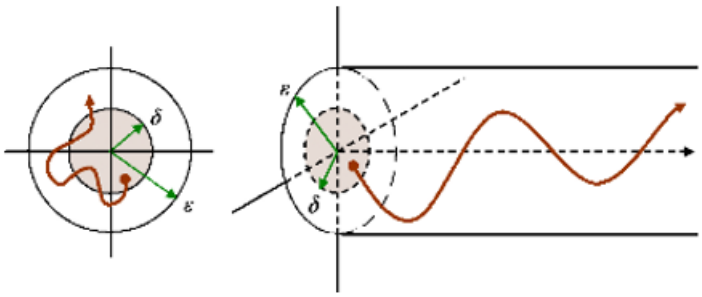
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} Y'(t) = & f(Y(t)) \\ Y(t_0) = & Y_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Définition 2.2.0.4 *(Stabilité)*
Soit $\phi(t)$ la solution unique de (2.4) telle que $\phi(t_0) = Y_0$. Soit a un point d'équilibre de f.
On dit que a est stable si :

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall Y_0 \in \mathbb{R}^n$ *telle que* $||Y_0 - a|| \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow ||\phi(t) - a|| \leq \epsilon$, $\forall t \geq t_0$.

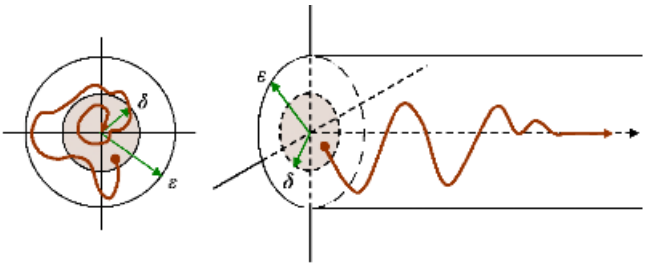
la figure suivante illustre la stabilité :



Définition 2.2.0.5 *(Stabilité asymptotique)*
Soit $\phi(t)$ la solution unique de (2.4) telle que $\phi(t_0) = Y_0$. Soit a un point d'équilibre de f.
On dit que a est asymptotiquement stable si :

1. *a est stable*
2. $\exists \rho \leq \delta(\epsilon), \forall Y_0 \in \mathbb{R}^n$ *telle que* $||Y_0 - a|| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} ||\phi(t) - a|| = 0$

la figure suivante illustre la stabilité asymptotique :



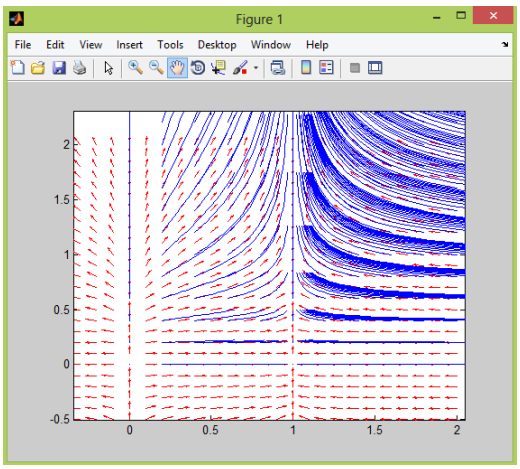
Définition 2.2.0.6 *(Instabilité)*
On dit que a est instable s'il n'est pas stable.

Notez que la stabilité asymptotique est une propriété plus forte que la stabilité, puisqu' un point d'équilibre doit être stable avant que nous puissions parler de asymptotiquement stable.
D'autre part, la condition 2 dans la définition (2.2.0.5) n'implique pas la stabilité en général, car on peut construire des exemples dans lesquels la condition 2 dans la définition (2.2.0.5) est vérifiée sans que le point d'équilibre a soit stable, à titre d'exemple :

Exemple : Soit le système suivant :

$$\rho' = \rho(1-\rho)$$
$$\theta' = \sin^2(\frac{\theta}{2})$$

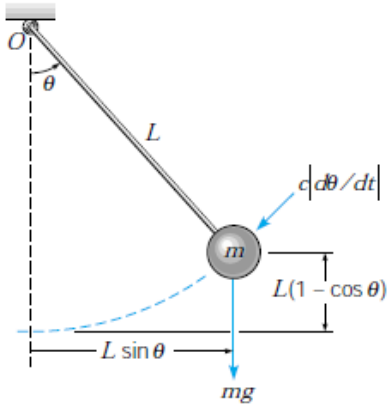
où (ρ, θ) sont les coordonnées polaires dans le plan. On montre avec une expérience de la simulation sur matlab que $(0,0)$ est un équilibre instable et que $(1,0)$ est un équilibre attractant (il attire l'orbite de touts point de $\mathbb{R}^2$ sauf ceux de l'origine) mais instable.
La simulation avec matlab :



Mais dans le cas linéaire à coefficients constants on va montrer que cette conditon implique la stabilité asymptotique.

2.3 Exemple illustrant la notion de stabilité

Les concepts de stabilité asymptotique, la stabilité et l'instabilité peuvent être facilement visualisées à l'aide d'un pendule oscillant ou bien ce qu'on appelle pendule simple. Considérons la configuration représentée suivante : Où m est une masse fixée à l'extrémité d'une barre rigide d'une longueur L et sans poids. L'autre extrémité de la tige est supportée à l'origine O, et la tige est libre de tourner dans le plan du papier. La position du pendule est décrite par l'angle θ entre la tige et la direction verticale vers le bas. Le sens inverse des aiguilles d'une montre est considéré comme positif. La force gravitationnelle mg agit vers le bas, tandis que la force d'amortissement $c|\frac{d\theta}{dt}|$, où c est positif, est toujours opposée à la direction du mouvement, nous supposons que θ et $\frac{d\theta}{dt}$ sont tous les deux positifs.



L'équation du mouvement peut être rapidement déduite du principe du moment angulaire ou par la deuxième loi de Newton, donc l'équation régissant est :

$$mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Lc\frac{d\theta}{dt} - mgLsin(\theta) \tag{2.5}$$

Par des opérations algébriques simples, nous pouvons écrire l'équation(2.5) sous la forme standard :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{mL}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L}sin(\theta) = 0$$

ou bien

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega^2 sin(\theta) = 0$$
$$avec \quad \gamma = \frac{c}{mL}, \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

Posons $\theta = x \quad et \quad y = \dfrac{d\theta}{dt}$ alors le système est équivalent à :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & y \\ \dfrac{dy}{dt} = & -\omega^2 sin(x) - \gamma y \end{cases} \tag{2.6}$$

Puisque γ et ω^2 sont des constantes, le système (2.6) est un système autonome non linéaire. Les points critiques du système (2.6) se trouvent en résolvant les équations suivantes :

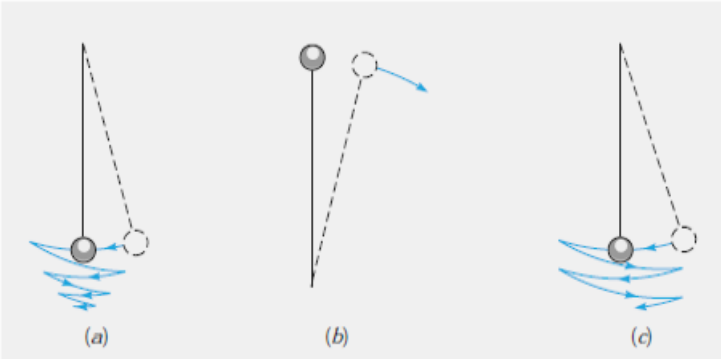
$$0 = y \quad et \quad 0 = -\omega^2 sin(x) - \gamma y$$

Nous obtenons

$$0 = y \quad et \quad x = \pm n\pi$$

où n est un entier. Ces points correspondent à deux positions d'équilibre physique, l'une avec la masse directement en-dessus du point d'appui ($\theta = 0$) et l'autre avec la masse directement au-dessus du point d'appui ($\theta = \pi$).
Notre intuition suggère que le premier est stable et le second est instable. Plus précisément, si la masse est légèrement déplacée de la position d'équilibre inférieure, elle va osciller d'avant en arrière avec la diminution de l'amplitude progressivement, éventuellement le pendule va approcher de sa position d'équilibre et l'énergie potentielle initiale est dissipée par la force d'amortissement. Ce type de mouvement illustre la stabilité asymptotique.
D'autre part, si la masse est légèrement déplacée de la position d'équilibre supérieure, elle sera rapidement tombée, sous l'influence de la gravité, et va finalement s'approcher de la position d'équilibre plus faible dans ce cas également. Ce type de mouvement illustre l'instabilité.
Dans la pratique, il est impossible de maintenir le pendule dans sa position d'équilibre vers le haut, pour toute longueur de temps sans un mécanisme de contrainte externe car la moindre perturbation provoquera la tombée de la masse.
Enfin, pensez à la situation idéale dans laquelle le coefficient d'amortissement $c\,(ou\gamma)$ est égal à zéro. Dans ce cas, si la masse se déplace légèrement de sa position d'équilibre inférieure, elle va osciller indéfiniment avec une amplitude constante sur la position. puisqu'il n'y a pas de dissipation dans le système, la masse restera près de la position d'équilibre, mais ne peut pas approcher de façon asymptotique à sa position d'équilibre. Ce type de mouvement est stable, mais pas asymptotiquement stable.
En général, ce mouvement est impossible à réaliser expérimentalement car le

moindre degré de résistance de l'air ou de frottement au point d'appui finira par causer le pendule d'approcher sa position de repos.
Ces trois types de mouvement sont illustrés schématiquement :



a :asymptotiquement stable b :instable c :stable

2.4 Résultat fondamental

Dans la suite on va travailler seulement avec le point d'équilibre zéro car on peut toujours se ramener à zéro par un changement de variable. On va montrer que avec se changement de variable on conserve le même resultat c-à-d l'équivalent entre la stabilité du zéro est du point d'équilibre a.

Preuve : Soient g et f deus fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définient par $g(y) = f(y+a)$ avec a point de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = 0$ c-à-d a un point d'équilibre de f, par conséquence 0 est un équilibre de g .
Soient les deux équations différentielles :

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{2.7}$$
$$y'(t) = g(y(t)) \tag{2.8}$$

Soient $x(t)$ la solution de (2.7) telle que $x(t_0) = x_0$ et $y(t)$ la solution de (2.8) telle que $y(t_0) = y_0$.
alors :$y(t) = x(t) - a$ est solution de (2.8).
car $(x(t) - a)' = x'(t) = f(x(t)) = f(y(t) + a) = g(y(t))$
Donc si l'origine est stable alors :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall y_0 \in \mathbb{R}^n \, telle \, que \, ||y_0|| \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow ||y(t)|| \leq \epsilon$$

c-à-d :$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \, telle \, que \, ||x_0 - a|| \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow ||x(t) - a|| \leq \epsilon$
d'où le résultat.

Chapitre 3

Stabilité des équations différentielles en dimension un

Dans ce chapitre on va étudier qualitativement l'équation différentielle pour donner un critère de stabilité.
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et t_0 et x_0 des réels. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{3.1}$$

et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = & f(x(t)) \\ x(t_0) = & x_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

soit $(J, x(.))$ la solution maximale de (3.2).
Soit $E_+ = \{x \in [x_0, +\infty[, f(x) = 0\}$ l'ensemble des équilibres plus grands que x_0 et $E_- = \{x \in]-\infty, x_0], f(x) = 0\}$ l'ensemble des équilibres plus petits que x_0.
Si $E_+ \neq \emptyset$ (resp,$E_- \neq \emptyset$), on pose $x_+ = \inf E_+$ (resp,$x_- = \sup E_-$).

On va montrer que si $f(x_0) > 0$, et s'il n'y a pas d'équilibre plus grand que x_0, alors la solution du problème (3.2) tend vers $+\infty$ en $supJ$ et que sinon, elle est définie jusqu'en $+\infty$ et tend vers le plus petit équilibre plus grand que x_0 quand $t \to +\infty$.
Si $E_+ \neq \emptyset$ alors E_+ est non vide minorée par x_0 donc $\inf E_+$ existe. De plus E_+ est fermé comme intersection du fermé $[x_0, +\infty[$ et de
$\{x \to \mathbb{R} f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ qui est fermé comme image réciproque d'un fermé par une applications continue. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tel que $x_n \in E_+ \quad \forall n$ et $x_n \to x_+ \quad quand \quad n \to \infty$ et par continuite de f on a

$f(x_n) \to f(x_+)$ or $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $f(x_+) = 0$. De même pour $E_- \neq \emptyset$.
Donc $\begin{cases} E_+ \neq \emptyset \Rightarrow f(x_+) = 0 \\ E_- \neq \emptyset \Rightarrow f(x_-) = 0 \end{cases}$
Si $f(x_0) = 0$ alors x_0 est un point d'équilibre donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = x_0$

Si $f(x_0) > 0$ alors pour tout $t \in J,\ f(x(t)) > 0$,
sinon il existe $t \in J$ telle que $f(x(t)) \leq 0$ alors par continuite de f et de TVI, il existe t_1 entre t et t_0 tel que $f(x(t_1)) = 0$, posant que $x_1 = x(t_1)$ donc $x(t) = x_1$ pour tout $t \in J$ car x_1 est un point d'équilibre, alors $x_0 = x(t_0) = x_1$, d'où $f(x_0) = f(x_1) = 0$ absurde car $f(x_0) > 0$. Donc pour tout $t \in J,\ f(x(t)) > 0$ or $x'(t) = f(x(t))$ donc $x'(t) > 0$, donc x est strictement croissante .
$f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x(t)) > 0$ alors x est croissante.

Si $f(x_0) > 0$ et $E_+ = \emptyset$ alors $x(t) \to +\infty$ quand $t \to \sup J$
sinon il existe $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \to x^*$ quand $t \to \sup J$, comme x est strictement croissante on a $x^* > x_0$ et de plus $f(x^*) = 0$ d'après le théorème d'explosion alternative donc $x^* \in E_+$ contradict avec $E_+ = \emptyset$ donc il n'existe pas de x^* telle que $x(t) \to x^*$ or x est strictement croissante donc $x(t) \to +\infty$ quand $t \to \sup J$

Si $f(x_0) > 0$ et $E_+ \neq \emptyset$ alors $x(t) \to x_+$ quand $t \to \sup J$
En effet :
soit $(I, y(.))$ la solution maximale de problème de Cauchy suivante

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(t_0) = x_+ \end{cases}$$

alors $I = \mathbb{R}$ et $y(t) = x_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Or $x(t_0) < y(t_0)$ donc d'après un corollaire de Cauchy-Lipschitz
$x(t) < y(t) = x_+$ sur $I \cap J = \mathbb{R} \cap J = J$. Comme de plus x est strictement croissante, on a pour tout $t \in]t_0, \sup J[$, $x_0 = x(t_0) < x(t) < x_+$, donc $||x(t)||$ est bornée au voisinage de $\sup J$, donc par le théoréme d'explosion alternative, $supJ = +\infty$. Comme x est croissante et majorée, il existe $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \to x^*$ quand $t \to \sup J = +\infty$. Soit $t_1 > t_0$. Commme x est strictement coissante et $x(t) < x_+$ pour tout $t \in J$. On a pour tout $t > t_1$ $x_0 = x(t_0) < x(t_1) < x(t) \leq x_+$ donc $x_0 = x(t_0) < x(t_1) < x^* < x_+$ donc $x^* \in]x_0, x_+]$ comme $x^* \in \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$ donc $x^* \in E_+$ alors $x^* \geq x_+$ or $x^* \leq x_+$ donc $x^* = x_+$ d'où $x(t) \to x_+$ quand $t \to +\infty$
Donc on peut resumer tout se quand n'a dit :
Dans le cas $f(x_0) > 0$, on a donc montré que s'il n'y a pas d'équilibre plus

grand que x_0, alors la tend vers $+\infty$ en $supJ$ et que sinon, elle est définie jusqu'à $+\infty$ et tend vers le plus petit équilibre plus grand que x_0 quand $t \to +\infty$. On montre de manière similaire que s'il n'y a pas d'équilibre plus petit que x_0, alors la solution tend vers $-\infty$ en $infJ$ et que sinon, elle est définie jusqu'à $-\infty$ et tend vers le plus grand équilibre plus petit que x_0 quand $t \to -\infty$.
dans le cas où $f(x_0) < 0$ on obtiendrait de façon similaire :
Si $E_- = \emptyset$ alors $x(t) \to -\infty$ quand $t \to \sup J$, sinon $supJ = +\infty$ et $x(t) \to x_-$ quand $t \to +\infty$
Si $E_+ = \emptyset$ alors $x(t) \to +\infty$ quand $t \to \inf J$, sinon $supJ = -\infty$ et $x(t) \to x_+$ quand $t \to -\infty$

Résumé :
si $f(x_0) = 0$ alors x_0 ets un point d'équilibre donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ $x(t) = x_0$
dans la cas où $f(x_0) > 0$
si $E_+ = \emptyset$ alors $x(t) \to +\infty$ quand $t \to \sup J$
si $E_+ \neq \emptyset$ alors $x(t) \to x_+$ quand $t \to \sup J$
si $E_- = \emptyset$ alors $x(t) \to -\infty$ quand $t \to \inf J$
si $E_- \neq \emptyset$ alors $x(t) \to x_-$ quand $t \to \inf J$
dans la cas où $f(x_0) < 0$
si $E_- = \emptyset$ alors $x(t) \to -\infty$ quand $t \to \sup J$
si $E_- \neq \emptyset$ alors $x(t) \to x_-$ quand $t \to \sup J$
si $E_+ = \emptyset$ alors $x(t) \to +\infty$ quand $t \to \inf J$
si $E_+ \neq \emptyset$ alors $x(t) \to x_+$ quand $t \to \inf J$

3.0.1 Stabilité d'un point d'équilibre

Propriété 3.0.1.1 *: Soit x^* un équilibre de (3.1).*

1. *si $f'(x^*) < 0$ alors x^* est asymptotiquement stable*
2. *si $f'(x^*) > 0$ alors x^* est instable*
3. *si $f'(x^*) = 0$ on ne peut rien dire*

Preuve :

Pour 1 . Si $f'(x^*) < 0$ alors comme au voisinage de x^* $f(x) - f(x^*) \simeq f'(x^*)(x - x^*)$ car $f'(x^*) \neq 0$ et de plus $f(x^*) = 0$ alors $f(x) \simeq f'(x^*)(x - x^*)$
donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(x) > 0$ sur $]x^* - \epsilon, x^*[$ et $f(x) < 0$ sur $]x^*, x^* + \epsilon[$.
Soit $v =]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$, soit $(J, x(.))$ la solution maximale.
Supposons qu'il existe $t_0 \in J$ tel que $x(t_0) \in J$.
Soit $x_0 = x(t_0)$ d'après se qui précède :

Si $x_0 = x^*$ donc $f(x^*) = 0$, $J = \mathbb{R}$ et $x(t) = x^* = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ en particulier $supJ = +\infty$ et $x(t) \to x^*$ quand $t \to +\infty$
Si $x_0 \in]x^* - \epsilon, x^*[$ donc $f(x_0) > 0$ alors comme $x_+ = x^*$ (car $f(x) > 0$ sur $]x^* - \epsilon, x^*[$ donc pas d'équilibre entre x_0 et x^*. On a $\sup J = +\infty$ $x(t) \to x^*$ quand $t \to +\infty$
Si $x_0 \in]x^*, x^* + \epsilon[$ donc $f(x_0) < 0$ alors comme $x_- = x^*$. On a $\sup J = +\infty$ $x(t) \to x^*$ quand $t \to +\infty$
donc dans tous les cas $\sup J = +\infty$ et $x(t) \to x^*$ quand $t \to +\infty$
alors on a montré que pour toute solution qui assez voisione de x^* à $t = t_0$ il converge vers x^* quand $t \to \sup J$, alors x^* est un équilibre asymbtotiquement stable

Pour 2 . Si $f'(x^*) > 0$ alors il existe $\epsilon > 0$ tel sue $f(x) < 0$ sur $]x^* - \epsilon, x^*[$ et $f(x) > 0$ sur $]x^*, x^* + \epsilon[$.
Soit $V =]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$, soit $(J, x(.))$ solution maximale et $t_0 \in J$ tel que $x(t_0) \in V - \{x^*\}$
Soit $x_0 = x(t_0)$
Si $x_0 \in]x^* - \epsilon, x^*[$, alors soit $E_- = \emptyset$ et $x(t) \to -\infty$ quand $t \to \sup J$, ou bien, soit $E_- \neq \emptyset$, donc $\sup J = +\infty$ et $x(t) \to x_-$ quand $t \to +\infty$.
Comme dans ce cas $x_- \notin V$ et que V est ouvert on a dans tous les cas : il existe $T \in J$ tel que pour tout $t \geq T$ tel que $\forall t \in J \; x(t) \notin V$, on montre de même que si $x_0 \in]x^*, x^* + \epsilon[$ soit $x(t) \to +\infty$ quand $t \to \sup J$, soit $x(t) \to x_+$ quand $t \to \sup J$ et donc il existe $T \in J$ tel que pour tout $t \geq T$ et $t \in J \; x(t) \notin V$ donc x^* est un équilibre instable.

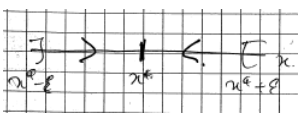
Avant de donner un exemple pour le cas 3 dans la propriété (3.0.1.1), on va donner quelque définitons importantes.

Définition 3.0.1.1 *(L'espace des phases)*
L'espace des phases ou plan de phase est un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables du système étudié.

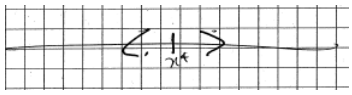
Définition 3.0.1.2 *(Le portrait de phase)*
Le portrait de phase d'un système est une représentation graphique de plusieurs orbites et des vecteurs du champ dans l'espace des phases.

Donc :

- la représentation du cas où $f'(x^*) < 0$



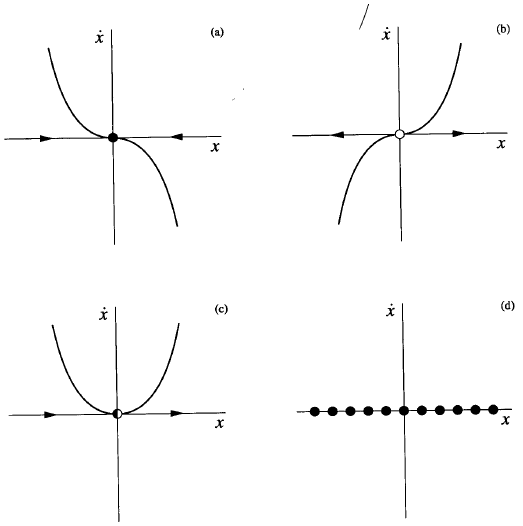
- la représentation du cas où $f'(x^*) > 0$



- un exemple pour $f'(x^*) = 0$
  prenons les quatre exemples suivants :

(a) $\dot{x} = -x^3$ **(b)** $\dot{x} = x^3$ **(c)** $\dot{x} = x^2$ **(d)** $\dot{x} = 0$

les quatres exemples ont comme point d'équilibre zéro et la dérivée seconde est nulle en zéro pour les quatres exemples, par contre on a :



(a) est stable (b) est instable (c) est instable (d) on ne peut rien dire.

Chapitre 4

Stabilité des systèmes linéaires

Soit un système (autonome) d'équations différentielles $Y' = F(Y)$ où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On a vu que pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique solution maximale $(I, \phi(.))$ de l'équation $Y' = F(Y)$ satisfaisant la condition initiale $\phi(t = t_0) = Y_0$. C'est la solution ou la trajectoire passant par Y_0.

4.1 Rappel

4.1.1 Définitions de base

Définition 4.1.1.1 *(champ de vecteur)*
On appelle champ de vecteurs dans un domaine D de $\mathbb{R}^n$ la donnée en tout point Y de D d'un vecteur $F(Y)$.

Définition 4.1.1.2 *: On appelle orbite l'ensemble des points $(\phi(t))$ où $\phi(t)$ est solution du système $X' = F(X)$.*

Pour le cas $n = 2$ le système $Y' = F(Y)$ est équivalent à

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(x(t), y(t)) \end{cases}$$

oùf_1 et f_2 sont des fonctions de classse C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Alors les orbites sont définies par les courbes intégrales de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x(t), y(t))}{f_1(x(t), y(t))} \tag{4.1}$$

Mais ce n'est pas toujours possible d'intégrer le système (4.1). Pour cela, on trace le champ de vecteurs associé à ce système, ceci permet de donner les vecteurs tangents aux orbites.

4.1.2 Rappel d'algèbre

Définition 4.1.2.1 *(Deux matrices semblables)*
soient A et B deux matrices réels on dit que A et B sont semblables si et seulement si il existe P inversible telle que : $B = PAP^{-1}$

Théorème 4.1.2.1 *: En dimension 2 et 3 deux matrices sont semblables ssi elles ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal .*

Pour le démonstration voir la référence [4], page−461

•Dans le cas de dimension deux

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors A posséde deux valeurs propres λ_1, λ_2 , ces valeurs propres peuvent être réelles égales ou non, complexes.
Donc cherchons la matrice semblable à A dans chaque cas des valeurs propres.
•Cas où A posséde deux valeurs propres réelles distinctes
On a $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sont réelles, alors la matrice A est diagonalisable, alors il existe une matrice P inversible forme par les vecteurs propres de chaque valeurs propres et une matrice D dans la diagonale forme par les valeurs propres de A et les zéros autres de la diagonale telle que : $A = PDP^{-1}$.
Donc A est semblable à D .

•Cas où A posséde deux valeurs propres égales
On pose $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.
Il y a deux cas selon que la matrice A est diagonalisable ou non .

- A est diagonalisable
  Alors le même raisonnement que précédemment, A est semblable à D telle que :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- A est non diagonalisable
  Alors la matrice A posséde un seul vecteur propre, alors par la méthode de jordan on peut touver une base telle que la matrice A soit une

matrice de jordan.
Alors la matrice A est semblable à la matrice de jordan suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

•Cas où A posséde deux valeurs propres complexes
Soient

$$\begin{cases} \lambda_1 &= \alpha + i\beta \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta \end{cases}$$

les valeurs propres de A, et considérons $Z = u + iv$ vecteur propre associé à la valeur propre λ_1.
Alors $AZ = A(u+iv) = Au+iAv = (\alpha+i\beta)(u+iv) = (u\alpha-v\beta)+i(v\alpha+u\beta)$, c-à-d que $Au = u\alpha - v\beta$ et $Av = v\alpha + u\beta$.
Soit P la matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs u et v, soit D la matrice de A dans la base $\{u, v\}$, alors A et D sont semblables.
Donc $A = PDP^{-1}$
alors $AP = PD$
après identifications des termes de AP et PD on obtient : $D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

4.2 Résultat fondamental

Pour les systèmes linéaires, toutes les solutions sont de même nature du point de vu de la stabilité c-à-d que s'il existe une qui est stable, asymptotiquement stable ou instable alors les autres solutions sont aussi de la même nature.

Preuve : On va montrer ce résultat pour les systèmes linéaires quelconques.
Soient $X'(t) = A(t)X(t)$ un système linéaire et $\phi(t)$ sa solution unique telle que $\phi(t_0) = X_0$. On a $\phi(t) = R(t, t_0)X_0$
Supposons que la solution associée à $\phi(t_0) = 0$ est stable c-à-d
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ *on a* $||x_0|| \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow ||\phi(t)|| \leq \epsilon$
on a

$$\|R(t, t_0)\| = \sup_{\|y\|=1} \|R(t, t_0)y\|$$

on posse $y = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$ telle que $\|X_0\| = \delta$

$$= \sup_{x_0:\|x_0\|=\delta} \frac{\|R(t, t_0)x_0\|}{\|x_0\|}$$

Rapport-gratuit.com
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES

donc $\|R(t,t_0)\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}$
alors si la solution associé à $\phi(t_0) = 0$ est stable alors $\exists k = \frac{\epsilon}{\delta}$ telle que $\|R(t,t_0)\| \leq k$ pour tout $t \geq t_0$
soit $\psi(t)$ la solution de $X'(t) = A(t)X$ telle que $\psi(t_0) = \psi_0$
alors pour toute autre solution ϕ on a :
$\|\psi(t) - \phi(t)\| = \|R(t,t_0)(\psi_0 - \phi_0)\| \leq \|R(t,t_0)\|\|(\psi_0 - \phi_0)\|$
or$\|R(t,t_0)\| \leq K$ alors $\|\psi(t) - \phi(t)\| \leq K\|(\psi_0 - \phi_0)\|$
donc pour tout $\epsilon > 0$
on pose $\delta = \frac{\epsilon}{K} > 0$
alors pour tout ϕ telle que $\|\psi_0 - \phi_0\| \leq \delta$
on a

$$\|\psi(t) - \phi(t)\| \leq k\delta$$
$$\|\psi(t) - \phi(t)\| \leq \epsilon$$

d'où le résultat.
la même chose pour les autres types de stabilité

Dans ce cas c-à-d pour les systèmes linéaires on peut parler de stabilité du système car la stabilité d'équilibre est équivalente à la stabilité de la solution qui est équivalente à la stabilité du système. Contrairement à ce qui se passe dans le cas des systèmes linéaires, il peut arriver qu'une équation posséde à la fois des solutions stables et d'autres solutions qui sont instables pour les systèmes non linéaires.
L'équation suivante est un exemple :

Exemple : Soit

$$\frac{dX}{dt} = f(X) \tag{4.2}$$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le système défini par

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y\sqrt{x^2+y^2} \\ \frac{dy}{dt} = x\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point donné et $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.
Les orbites de (4.2) sont $r^2 = x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ et la solution $\phi(t)$ telle que

$\phi(t_0) = X_0$ est définie par ses coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(r_0(t - t_0)) - y_0 \sin(r_0(t - t_0)) \\ y(t) = x_0 \sin(r_0(t - t_0)) + y_0 \cos(r_0(t - t_0)) \end{cases}$$

La solution $x(t) = y(t) = 0$ est stable puisque $\forall \epsilon$ si $r_0^2 \leq \eta(\epsilon) = \epsilon$ alors $x^2(t) + y^2(t) = \|\phi(t)\|^2 = r_0^2 \leq \epsilon$
Soit ϕ_1 autre solution de (4.2) telle que $\phi_1(t_0) = X_1$.
Par contre $\|\phi(t) - \phi_1(t)\|$ représente la distance entre deux points qui parcourent deux cercles concentriques à une vitesse différente, celle-ci ne saurait donc pouvoir être rendue plus petite que ϵ $\forall \epsilon$.

4.3 Stabilité du système linéaire à coefficient constant

On a montré dans la section précédente que la stabilité en zéro est équivalente à la stabilité du système. Alors, on va étudier la stabilité de zéro pour connaître la stabilité du système.

4.3.1 Pour les systèmes linéaires en dimension 1

Notation Pour un réel x, on notera $sgn(x)$ son signe. La notation $sgn(x)\infty$ signifie $+\infty (resp. -\infty, 0)$ pour $x > 0$ $(resp. < 0, = 0)$.
I_d est l'identite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit l'équation différentielle :

$$x'(t) = \rho x(t) \tag{4.3}$$

dont la solution est :

$$\phi(t) = ce^{\rho t} \quad \text{avec } c \text{ est une constante.}$$

Si $\rho \neq 0$ alors 0 est le seul point d'équilibre de ρx .
On remarque que la limite quand t tend vers l'infini de $\phi(t) = ce^{\rho t}$ dépend de signe de ρ .
Si $\rho > 0$: alors $\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = \lim_{t \to +\infty} ce^{\rho t} = sgn(c)\infty$, donc pour toute solution proche de zéro, s'éloigne de 0 pour tout t assez grand, dans ce cas nous disons que $x = 0$ est une solution d'équilibre instable.
Si $\rho < 0$: alors $\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = \lim_{t \to +\infty} ce^{\rho t} = 0$, donc pour toute solution proche de zéro ,elle restera proche de zéro pour tout t assez grand, dans ce

cas nous disons que $x = 0$ est une solution d'équilibre asymbtotiquement stable.
Si $\rho = 0$: alors la solution de (4.3) est donc constante donc les solutions au voisinage de zéro sont proches de zéro, alors elle resrtera proche pour tout t, dans ce cas on dit que la solution d'équilibre est stable.

4.3.2 Pour les systèmes linéaires en dimension deux

Soit le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

ou bien

$$X'(t) = AX(t) \quad avec \quad A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Comme la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors elle admet deux valeurs propres (réelles, complexes, distinctes ou non), on a vu dans la section (4.1.2) que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ elle est semblable à une des trois cas, tout dépend des valeurs propres, par conséquence la forme des solutions de (4.4), aussi dépend des valeurs porpres (complexe, réelles distinctes ou égales ,..., etc), c-à-d que les orbites du système (4.4) dépendent des valeurs propres. Ceci explique que l'étude du comportement se fait en fonction des valeurs propres. Avant de donner les différents cas de stabilité, des solutions et d'orbites, on remarque que, si $P \in GL_2(\mathbb{R})$, l'application $x \to y = Px$ est un isomorphisme linéaire qui envoit les trajectoires de $x' = Ax$ sur les trajectoires de $y' = (PAP^{-1})y$.
Soit λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de A.
On note $\phi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

1- Cas de deux valeurs propres complexes

On pose :

$$\begin{cases} \lambda_1 &= \alpha + i\beta \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta \end{cases}$$

dans ce cas la matrice A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$
La solution du problème de Cauchy associé au système (4.4) avec la condition initiale $x(t = t_0) = x_0$ et $y(t = t_0) = y_0$ s'écrit :

$$\begin{cases} x(t) = (x_0 cos(\beta t) + y_0 sin(\beta t))e^{\alpha t} \\ y(t) = (y_0 cos(\beta t) - x_0 sin(\beta t))e^{\alpha t} \end{cases}$$

comme les fonctions sin et cos sont des fonctions bornées alors $\lim_{t\to\infty} x(t)$ et $\lim_{t\to\infty} y(t)$ dépendent de α.

Si $\alpha < 0$

On a $\lim_{x\to\infty} x(t) = \lim_{x\to\infty} y(t) = 0$
donc il est évident que pour tout $\epsilon > 0$ on peut choisir $\|\phi(t_0)\|$ suffisament petit tel que l'on ait pour tout $t \geq t_0$, $\|\phi(t)\| \leq \epsilon$, de plus $\lim_{\to+\infty} \|\phi(t)\| = 0$. Alors zéro est un équilibre asymptotiquement stable. Dans ce cas on dit que zéro est un foyer stable .
La représentation de cette situation dans le portrait de phase est donnée par la figure 1.
La représentation de cette situation sur machine avec $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est donnée par la figure 2.

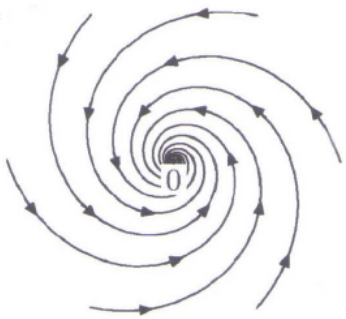


FIGURE : 1

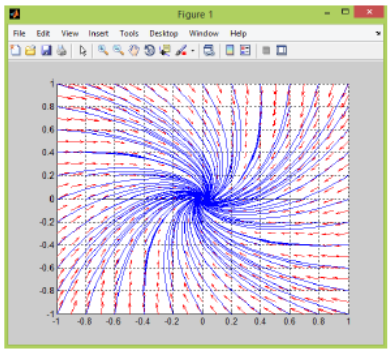


FIGURE : 2

Si $\alpha > 0$

Alors on a : $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|y(t)\| = +\infty$ car les fonctions *sin* et *cos* sont bornées pour tout t. donc pour tout $\|\phi(t_0)\|$ aussi petit qu'on veut on a $||\phi(t)|| \to +\infty$ quand $t \to +\infty$, alors zéro est un équilibre instable.
Dans ce cas on dit que zéro est un foyer instable .
La représentation de cette situation dans le portrait de phase est donnée par la figure 3.
La représentation de cette situation sur machine avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est donnée par la figure 4.

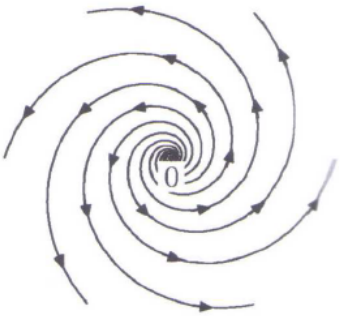


FIGURE : 3

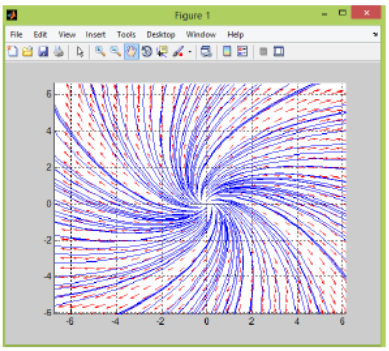


FIGURE : 4

Si $\alpha = 0$

On a $(x(t)^2 + y(t)^2)^{\frac{1}{2}} = (x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
donc pour tout $\epsilon > 0$ on peut choisir $\|\phi(t_0)\|$ suffisament petit telle que l'on peut ait pour tout $t \geq t_0$ on a $\|\phi(t)\| \leq \epsilon$.
Alors zéro est un équilibre stable mais n'est pas asymptotiquement stable. Toutes les trajectoires (autre que le point critique lui même) sont périodiques, de période $\frac{2\pi}{\beta}$. On dit que l'origine est un centre.
La représentation de cette situation dans le portrait de phase est donnée par la figure 5.
La représentation de cette situation sur machine avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est donnée par la figure 6.

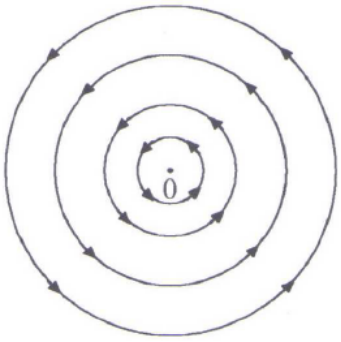


FIGURE : 5

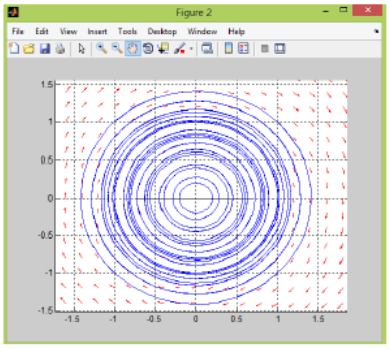


FIGURE : 6

Remarque : On peut étudier ce système en coordonnées polaires, en posant $x = \rho cos(\theta)$ et $y = \rho sin(\theta)$.

On a

$$\begin{cases} \rho' = \rho' cos(\theta) - \rho\theta' sin(\theta) \\ \theta' = \rho' sin(\theta) + \rho\theta' cos(\theta) \end{cases}$$

D'où le système (4.4) est équivalent à

$$\begin{cases} \rho' = & \alpha\rho \\ \theta' = & \beta \end{cases}$$

On a donc $\rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t}$ et $\theta = \beta t + \theta_0$.
Ainsi, l'orbite associée à la donnée de Cauchy (ρ_0, θ_0) a pour équation polaire

$$\rho(t) = \rho_0 e^{\frac{\alpha(\theta-\theta_0)}{\beta}} \tag{4.5}$$

La nature de l'orbite est donc claire : si $\alpha \neq 0$, il s'agit d'une spirale logarithmique. Si $\alpha = 0$ d'un cercle.

2- Cas de deux valeurs propres distinctes non nulles

Dans ce cas la matrice A est diagonalisables et on est ramené au cas où :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Remarque : Le point $(0, 0)$ est, dans ce cas, le seul point d'équilibre de A.

La solution du problème de Cauchy associé au système (4.4) avec la condition initiale $x(t = t_0) = x_0$ et $y(t = t_0) = y_0$ s'écrit :

$$x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \ , \ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t}$$

Il est alors facile de montrer que $y = c|x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ avec $c = (y_0/\lambda_1)|x_0|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$
Dans la base formée par les vecteurs propres les trajectoires décrivent les courbes d'équations $y = c|x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ où $c \in \mathbb{R}$, alors la nature des ces courbes dépent de la nature des valeurs propres.

Cas où $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$

On a alors : $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$
d'où $\lim_{t\to+\infty} ||\phi(t)|| = 0$
donc pour tout $\epsilon > 0$ on peut choisir $\|\phi(t_0)\|$ suffisament petit telle que l'on ait pout tout $t > t_0$, $||\phi(t)|| \leq \epsilon$. De plus $\lim_{t\to+\infty} ||\phi(t)|| = 0$

Rapport-Gratuit.com

alors zéro est une solution d'équilibre asymptotiquement stable.
Par conséquent les orbites sont proches du point $(0,0)$ lorsque $t \to \infty$.
Supposons par exemple $\lambda_1 < \lambda_2$. On a donc $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$. Pour $y_0 \neq 0$, il vient $lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{y(t)} = 0$ alors la solution dominante est $y(t)$. Ainsi, les orbites sont tangentes à la direction donnée par y sauf celles telle que $y_0 = 0$ qui sont tangentes à la direction donnée par x. Dans ce cas on dit l'origine est un noeud stable.
Tous les autres cas se traitent de manière analogue.
La représentation de cette situation dans le portrait de phase est donnée par la figure 7.
La représentation de cette situation sur machine avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est donnée par la figure 8.

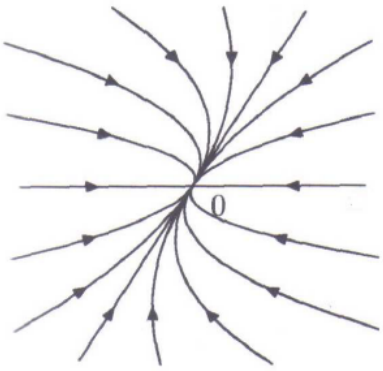


FIGURE : 7

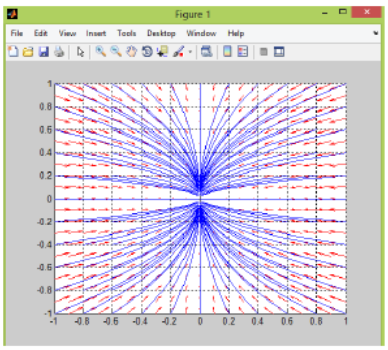


FIGURE : 8

Cas où $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$

On a $\lim_{t\to\infty} x(t) = sgn(x_0)\infty$ *et* $\lim_{t\to\infty} y(t) = sgn(y_0)\infty$
d'où $\lim_{t\to+\infty} ||\phi(t)|| = +\infty$ donc pour tout $||\phi(t_0)||$ aussi petit qu'on veut on a $||\phi(t)|| \to +\infty$
alors zéro est une solution d'équilibre instable. dans ce cas on dit l'origine est un noeud instable.
La représentation de cette situation dans le portrait de phase est donnée par la figure 9.
La représentation de cette situation sur machine avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est donnée par la figure 10.

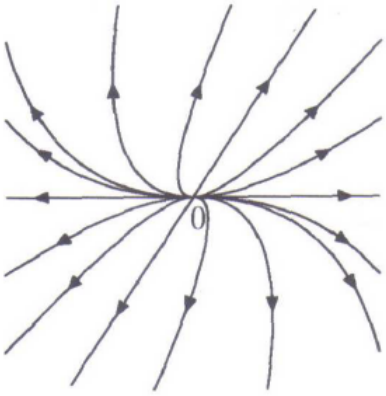


FIGURE : 9

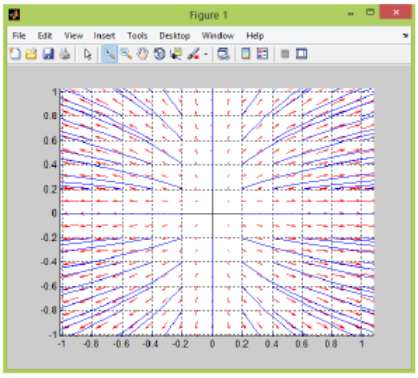


FIGURE : 10

3-Cas où λ_1 et λ_2 sont de signes contraires

On suppose par exemple $\lambda_1 < 0$ et$\lambda_2 > 0$.
On a alors $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ *et* $\lim_{t\to\infty} y(t) = sgn(y_0)\infty$
alors $\lim_{t\to+\infty} ||\phi(t)|| = +\infty$
donc pour tout $||\phi(t_0)||$ aussi petit qu'on veut on a $||\phi(t)|| \to +\infty$
alors zéro est une solution d'équilibre instable.
On dit que zéro est un col ou un point selle.
La représentation de cette situation dans le portrait de phase est donnée par la figure 11.
La représentation de cette situation sur machine avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est donnée par la figure 12.

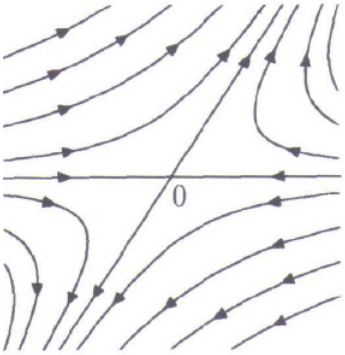


FIGURE : 11

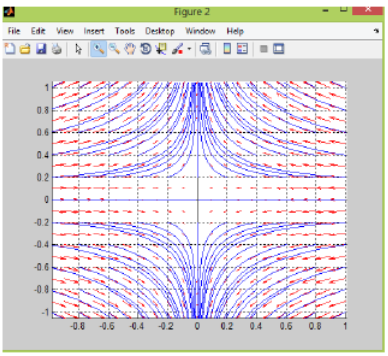


FIGURE : 12

4-Cas d'une valeur propre nulle

On suppose par exemple $\lambda_1 = 0$.

Remarque :

- Dans ce cas, l'axe des x est formé des points critiques.
- On peut travailler avec $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \neq 0$, on obtient le même résultat.

La solution du problème de Cauchy associé au système (4.4) avec la condition initiale $x(t = t_0) = x_0$ et $y(t = t_0) = y_0$ s'écrit :

$$x(t) = x_0 \ , \ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t}$$

on remarque que lorsque $t \to +\infty$ la limite de $\phi(t)$ dépend du signe λ_2, et que les orbites, pour $y_0 \neq 0$, sont des demi-droites ouvertes verticales. C'est un cas dégénéré.

si $\lambda_2 > 0$

On a $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$ *et* $\lim_{t\to\infty} y(t) = sgn(y_0)\infty$
donc il est évident que lorsque $t \to +\infty$ $\|\phi(t)\| \to +\infty$
alors pour tout $||\phi(t_0)||$ aussi petit qu'on veut on a $||\phi(t)|| \to +\infty$ quand $t \to +\infty$
alors zéro est un équilibre instable.
La représentation de cette situation sur machine avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

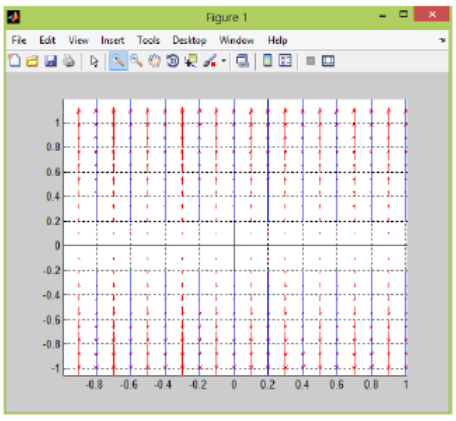


FIGURE : 13

si $\lambda_2 < 0$

On a $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$ *et* $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$
donc il est évident que pour tout $\epsilon > 0$ on peut choisir $\|\phi(t_0)\|$ suffisament petit tels que l'on ait pour tout $t > t_0$ on a $\|\phi(t)\| \leq \epsilon$, de plus $\lim_{t\to+\infty} \|\phi(t)\| = \|c_1\gamma_1\| \neq 0$ alors zéro est un équilibre stable mais n'est pas asymptotiquement stable car $\|\phi(t)\|$ ne converge pas vers 0 lorsque $t \to +\infty$
La repréntation de cette situation sur machine avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

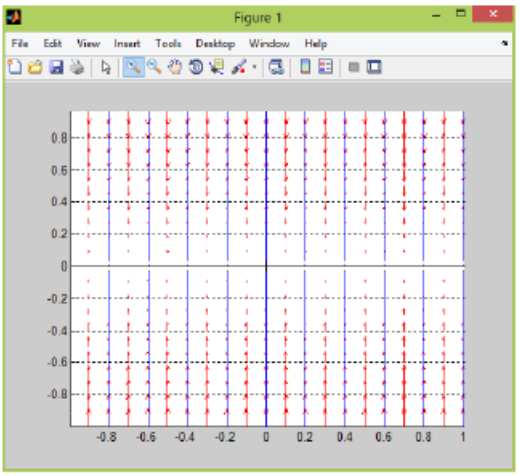


FIGURE : 15

5-Cas où A posséde une valeur propre réelle double λ

***Cas où A est diagonalisable**

La solution du problème de Cauchy associé au système (4.4) avec la condition initiale $x(t = t_0) = x_0$ et $y(t = t_0) = y_0$ s'écrit :

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} \ , \ y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

La forme intégrale des orbites est $y(t) = c_1(\frac{x(t)}{c_2})$ avec c_1 et c_2 sont deux constantes dépendent des conditions initiales. Donc les orbites sont des demi-droites ouvertes de vecteur directeur (c_1, c_2) .

Si $\lambda < 0$

on a $lim_{t\to\infty} x(t) = 0 = lim_{t\to\infty} y(t)$
alors $\lim_{t\to+\infty} \|\phi(t)\| = 0$

donc il est évident que pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir $\|\phi(t_0)\|$ suffisament petit tel que l'on ait pour tout $t > t_0$ on a $\|\phi(t)\| \leq \epsilon$, de plus $\lim_{t\to+\infty} \|\phi(t)\| = 0$, alors zéro est un équilibre asymptotiquement stable.
Dans ce cas on dit que l'origine est un noeud stable .
La représentation de cette situation dans le portrait de phase est donnée par la figure 16.
La représentation de cette situation sur machine avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est donnée par la figure 17.

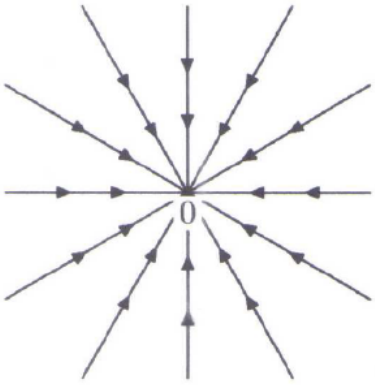


FIGURE : 16

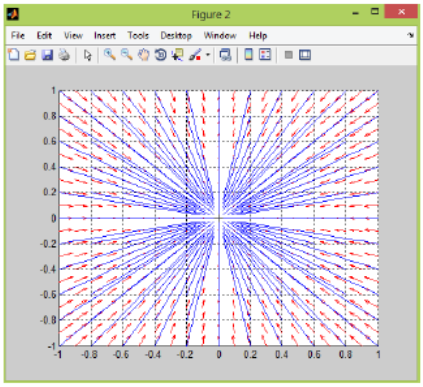


FIGURE : 17

Si $\lambda > 0$

On a $lim_{t\to\infty} x(t) = sgn(x_0)\infty$ et $lim_{t\to\infty} y(t) = sgn(y_0)\infty$
alors $\lim_{t\to+\infty} \|\phi(t)\| = +\infty$
alors pour tout $||\phi(t_0)||$ aussi petit qu'on veut on a $||\phi(t)|| \to +\infty$ quand $t \to +\infty$, alors zéro est un équilibre instable.
Dans ce cas on dit que l'origine est un noeud instable .
La représentation de cette situation dans le portrait de phase est donnée par la figure 18.
La représentation de cette situation sur machine avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est donnée par la figure 19.

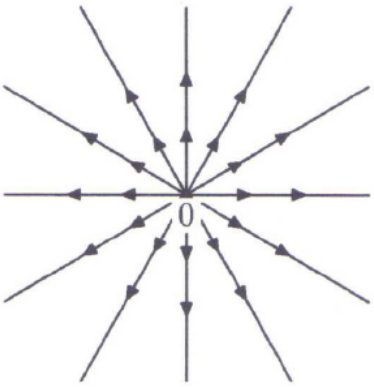


FIGURE : 18

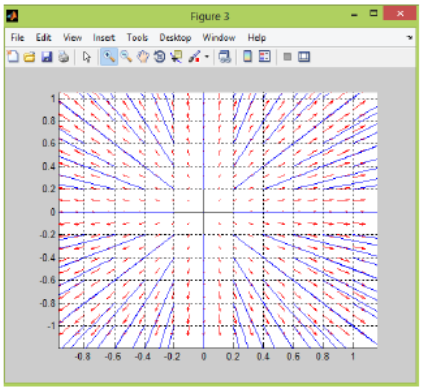


FIGURE : 19

***Cas où A n'est pas diagonalisable**

Donc ce cas la matrice A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

La solution du problème de Cauchy associé au système (4.4) avec la condition initiale $x(t = t_0) = x_0$ et $y(t = t_0) = y_0$ s'écrit :

$$x(t) = (x_0 + y_0 t)e^{\lambda t} \ , \ y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

Si $y_0 = 0$ alors la trajectoire est une droite, sinon les trojectoires sont écrites par l'équation $x = c_1 y \ln(|y|) + c_2 y$ où $c_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ et $c_2 = \frac{(x_0 - \frac{y_0}{\lambda_1}) \ln(|y_0|)}{y_0}$

Si $\lambda < 0$

On a $lim_{t\to\infty} x(t) = 0 = lim_{t\to\infty} y(t)$

alors $\lim_{t\to+\infty} \|\phi(t)\| = 0$, donc il est évident que pour tout $\epsilon > 0$ on peut choisir $\|\phi(t_0)\|$ suffisament petit tel que l'on ait pour tout $t > t_0$, $\|\phi(t)\| \leq \epsilon$, de plus $\lim_{t\to+\infty} \|\phi(t)\| = 0$ alors zéro est un équilibre asymptotiquement stable.

Dans ce cas on dit que l'origine est un noeud dégénéré stable .

La représentation de cette situation dans le portrait de phase est donnée par la figure 20.

La représentation de cette situation sur machine avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est donnée par la figure 21.

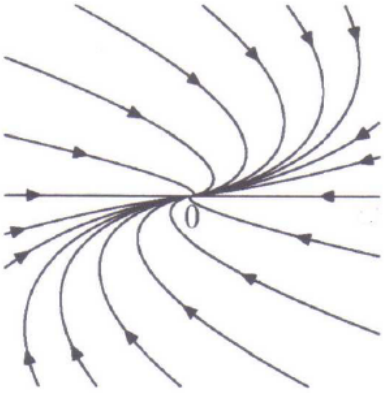


FIGURE : 20

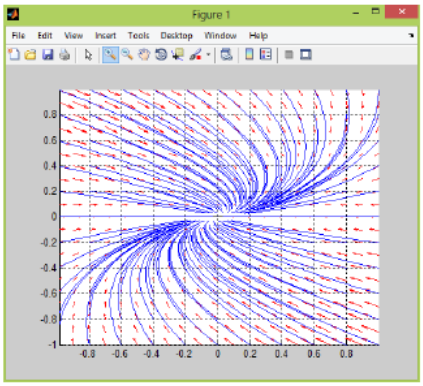


FIGURE : 21

Si $\lambda > 0$

On a $lim_{t\to\infty}x(t) = sgn(y_0)\infty$ et $lim_{t\to\infty}y(t) = sgn(y_0)\infty$
alors $\lim_{t\to+\infty} \|\phi(t)\| = +\infty$
alors pour tout $||\phi(t_0)||$ aussi petit qu'on veut on a $||\phi(t)|| \to +\infty$ quand $t \to +\infty$
alors zéro est un d'équilibre instable.
Dans ce cas on dit que l'origine est un noeud dégénéré instable .
La représentation de cette situation dans le portrait de phase est donnée par la figure 22.
La représentation de cette situation sur machine avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est donnée par la figure 23.

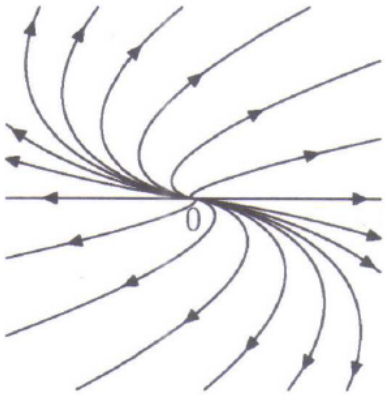


FIGURE : 22

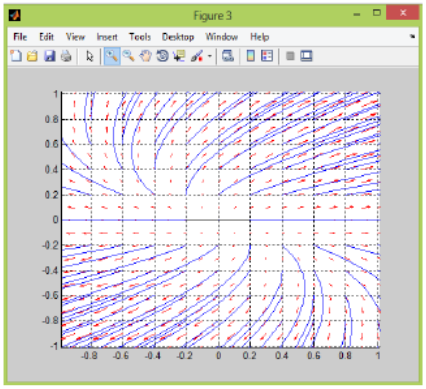


FIGURE : 23

6-Cas où $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$

Dans ce cas on ne peut rien dire .

Preuve : Soient les deux systèmes suivants ayant deux valeurs propres nulles mais l'un est stable et l'autre instable.

$$(1)\, x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) \quad \text{et} \quad (2)\, y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(t)$$

alors la solution de (1) est constante donc stable.
La solution générale de (2) est la forme

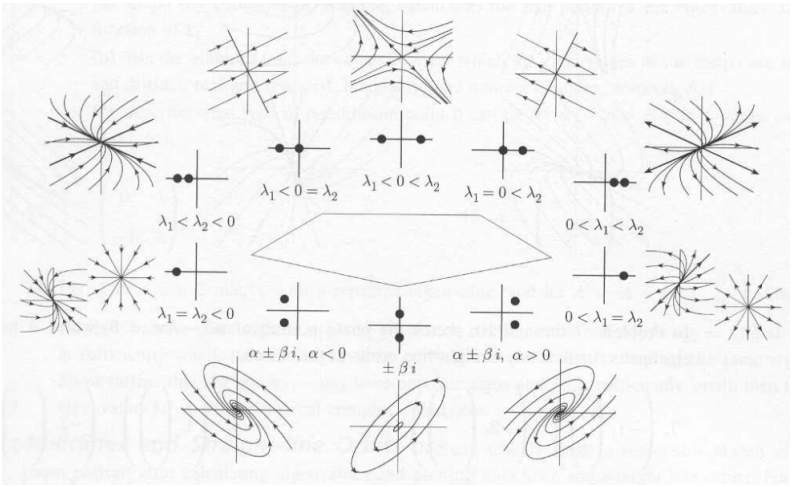
$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 t + c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } c_2 \, et \, c_1 \in \mathbb{R}$$

donc lorsque $t \to +\infty \ \|\phi(t)\| \to +\infty$
donc le système (2) instable .

Résumé : Le tableaux suivant résume la stabilité de zéro pour les systèmes linéaires à coefficients constants d'ordre deux.

type des valeurs propres	nature des valeurs propres	stabilité de zéro
$\lambda_1 \neq \lambda_2$	λ_1 et λ_2 positives	instable
	λ_1 et λ_2 négatives	asymptotiquement stable
	λ_1 et λ_2 de signe opposé	instable
$\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$	$\lambda_2 < 0$	asymptotiquement stable
	$\lambda_2 > 0$	instable
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et A diagonalisable	$\lambda > 0$	instable
	$\lambda < 0$	asymptotiquement stable
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et A non diagonalisable	$\lambda > 0$	instable
	$\lambda < 0$	stable
$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda_1 = \alpha + i\beta$	$\alpha > 0$	instable
	$\alpha = 0$	stable
	$\alpha < 0$	asymptotiquement stable
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	...	on ne peur rien dire

La figure suivante généralise tout ce qu'on a dit :



Remarque : On dennera le code en matlab pour tracer le portrait de phase à la fin de ce mémoire.
D'après le tableaux précédent :

1. si les valeurs propres sont à parties réelles strictement négative alors zéro est asymptotiquement stable.
2. si les valeurs propres sont à parties réelles négative ou nulle alors zéro est stable.
3. si au moins l'une des deux valeurs propres est positive alors zéro est instable.

4.4 Stabilité des systèmes homogénes à coefficient constant d'ordre n

Soit le système homogéne

$$x'(t) = Ax(t) \tag{4.6}$$

On sait que les solutions du système (4.6) sont définies sur $\mathbb{R}$, et ils sont données par le théorème suivant :

Théorème 4.4.0.1 *: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
Alors l'ensemble des solutions du système différentiel $x'(t) = Ax(t)$ est :

$$\begin{cases} \phi : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ & t \to e^{At}(c) \end{cases} \text{telle que } c \ \in \mathbb{R}^n$$

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

D'après le théorème (4.4.0.1), on a la solution du problème de Cauchy est de la forme :

$$\phi(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ l valeurs propres distinctes de A d'ordre de multiplicité respictives $k_1, \ldots, k_l$.
Soit N_{λ_i} l'espace caractéristique associé à λ_i de dimension k_i telle que :

$$N_{\lambda_i} = ker(A - N_{\lambda_i} I_d)^{\nu_i}$$

où ν_i est l'ordre de multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal.
Alors on peut écrire $x_0 = \sum_{p=1}^{l} x_0^p$ où $x_0^p \in N_{\lambda_p}$
donc :

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 \\
&= \sum_{p=1}^{l} e^{A(t-t_0)}x_0^p \\
&= \sum_{p=1}^{l} e^{\lambda_p(t-t_0)}e^{(A-\lambda_p I_d(t-t_0))}x_0^p \\
&= \sum_{p=1}^{l} e^{\lambda_p(t-t_0)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A-\lambda_p I_d)^n (t-t_0)^n}{n!} x_0^p \\
&= \sum_{p=1}^{l} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A-\lambda_p I_d)^n (t-t_0)^n}{n!} e^{\lambda_p(t-t_0)} x_0^p \\
\phi(t) &= \sum_{p=1}^{l} \sum_{n=0}^{\nu_p - 1} \frac{(A-\lambda_p I_d)^n (t-t_0)^n}{n!} e^{\lambda_p(t-t_0)} x_0^p \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Théorème 4.4.0.2 *: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\exists M$ et $\omega > 0$ tel que $\forall x_0 \in \mathbb{C}^n$ on a $\|e^{At}x_0\| \leq Me^{-\omega t}\|x_0\|$ $\forall t \geq t_0$*
2. *pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$ on a $\lim_{t\to+\infty} \|e^{At}x_0\| = 0$*
3. *toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.*

Preuve : (1) $\Longrightarrow$ (2)
est évidente car lorsque $t \to +\infty$ $\lim_{t\to+\infty} Me^{-\omega t} = 0$.
(2) $\Longrightarrow$ (3)
Supposons que pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$ on a $\lim_{t\to+\infty} \|e^{At}x_0\| = 0$ et $\exists\lambda$ valeur propre de A à partie réelle strictement positive.
Choisissons x_0 de telle sorte que x_0 soit un vecteur propre de λ alors

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

comme x_0 vecteur propre de A alors $Ax_0 = \lambda x_0$
d'où $e^{At}x_0 = e^{\lambda t}x_0$
alors $\lim_{t\to+\infty} \|e^{At}x_0\| = \lim_{t\to+\infty} \|e^{\lambda t}x_0\| = +\infty$ absurde .
(3) $\Longrightarrow$ (1)
On écrit $x_0 = \sum_{p=1}^{l} x_0^p$ avec $x_0^p \in N_{\lambda_p} = ker(A - \lambda_p I_d)_p^{\nu}$.
Les N_{λ_p} sont en somme directe, on prend $\|x_0\| = \sum_{p=1}^{l} \|x_0^p\|$
D'où

$$e^{At}x_0 = \sum_{p=1}^{l}\sum_{n=0}^{\nu_p-1} \frac{(A-\lambda_p I_d)^n (t-t_0)^n}{n!} e^{\lambda_p(t-t_0)} x_0^p$$

$$\|e^{At}x_0\| = \|\sum_{p=1}^{l}\sum_{n=0}^{\nu_p-1} \frac{(A-\lambda_p I_d)^n (t-t_0)^n}{n!} e^{\lambda_p(t-t_0)} x_0^p\|$$

$$\leq \sum_{p=1}^{l}\sum_{n=0}^{\nu_p-1} \|\frac{(A-\lambda_p I_d)^n (t-t_0)^n}{n!} e^{\lambda_p(t-t_0)} x_0^p\|$$

$$\leq \sum_{p=1}^{l}\sum_{n=0}^{\nu_p-1} \|\frac{(A-\lambda_p I_d)^n}{n!}\| \|(t-t_0)^n e^{\lambda_p(t-t_0)}\| \|x_0^p\|$$

supposant que $\lambda_p = \alpha_p + i\beta_p$

$$\|e^{At}x_0\| \leq \sum_{p=1}^{l}\sum_{n=0}^{\nu_p-1} \|\frac{(A-\lambda_p I_d)^n}{n!}\| \|(t-t_0)^n e^{\alpha_p(t-t_0)}\| \|x_0^p\|$$

car $\|e^{i\beta_p(t-t_0)}\| = 1$

comme les α_p sont tous négatifs alors il existe $\omega = \inf_p |\alpha_p|$

Remarque : soit $f(t) = t^n e^{-bt}$ avec $b > 0$ $etn \in \mathbb{N}$
alors on peut touver un c négligable devant b tel que,
$\lim_{t\to+\infty} \dfrac{t^n e^{-bt}}{e^{-ct}} = 0$

d'où d'après la définition de la limite on a, $\exists c > 0$ tel que $t^n e^{-bt} \leq e^{-ct}$ pour t assez grand.

D'après la remarque précédente on a :
$\exists \omega > 0$ *telle que* $\|(t-t_0)^n e^{\alpha_p(t-t_0)}\| \leq e^{-\omega(t-t_0)}\ \forall \alpha_p$

$$\|e^{At}x_0\| \leq e^{-\omega(t-t_0)} \sum_{p=1}^{l} \sum_{n=0}^{\nu_p - 1} \|\frac{(A-\lambda_p I_d)^n}{n!}\| \|x_0^p\|$$

or A est une matrice à coefficients constants et les α_p sont finis pour tout p.
on pose $k_p = \sup_n \|\frac{(A-\lambda_p I_d)^n}{n!}\|$ alors :

$$\|e^{At}x_0\| \leq e^{-\omega(t-t_0)} \sum_{p=1}^{l} \sum_{n=0}^{\nu_p - 1} k_p \|x_0^p\|$$

$$\|e^{At}x_0\| \leq e^{-\omega(t-t_0)} \sum_{p=1}^{l} k_p \sum_{n=0}^{\nu_p - 1} \|x_0^p\|$$

$$\|e^{At}x_0\| \leq e^{-\omega(t-t_0)} \sum_{p=1}^{l} k_p \|x_0\|$$

on pose $M = \sup_p k_p$
d'où

$$\|e^{At}x_0\| \leq M e^{-\omega(t-t_0)} \|x_0\|$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire pour la stabilité des systèmes linéaires à coefficients constants.

Définition 4.4.0.1 *Une valeur propre est dite oscillatoire si l'ordre de multiplicité de cette valeur dans le polynôme minimal est supérieur strictement à* 1 .

Théorème 4.4.0.3 *: Soit*

$$x'(t) = Ax(t)$$

un système linéaire à coefficient constant, soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ *l valeurs propres distinctes de A, alors*

1. 0 *est un équilibre stable si et seulement si* $\Re(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, l\}$ *et si* $\Re(\lambda_i) < 0$ *pour les valeurs propres oscillatoires .*
2. 0 *est un équilibre asymptotiquement stable si et seulement si* $\Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, l\}$.

3. 0 *est un équilibre instable si et seulement si* $\exists i \in \{1,\dots,l\}$ *telle que* $\Re(\lambda_i) > 0$.

Preuve :

Pour 1 : $\Longrightarrow$

Supposons que $\Re(\lambda_i) \leq 0$ pour tout $i \in \{1,\dots,l\}$
de la même manière que le théorème précédent avec $\omega = 0$ alors $\exists M > 0$ telle que pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$ $\|e^{At}x_0\| \leq M\|x_0\|$
pour tout $\epsilon > 0\, \exists \eta = \frac{\epsilon}{M}$ pour tout x_0 telle que $\|x_0\| \leq \eta \implies \|e^{At}x_0\| \leq \epsilon$.
$\Leftarrow$
on a :

$$e^{At}x_0 = \sum_{p=1}^{l}\sum_{n=0}^{\nu_p-1} \frac{(A-\lambda_p I_d)^n (t-t_0)^n}{n!} e^{\lambda_p(t-t_0)}x_0^p$$

$$\|e^{At}x_0\| = \|\sum_{p=1}^{l}\sum_{n=0}^{\nu_p-1} \frac{(A-\lambda_p I_d)^n (t-t_0)^n}{n!} e^{\lambda_p(t-t_0)}x_0^p\|$$

$$\leq \sum_{p=1}^{l}\sum_{n=0}^{\nu_p-1} \|\frac{(A-\lambda_p I_d)^n (t-t_0)^n}{n!} e^{\lambda_p(t-t_0)}x_0^p\|$$

$$\leq \sum_{p=1}^{l}\sum_{n=0}^{\nu_p-1} \|\frac{(A-\lambda_p I_d)^n}{n!}\|\|(t-t_0)^n e^{\lambda_p(t-t_0)}\|\|x_0^p\|$$

supposons que $\lambda_p = \alpha_p + i\beta_p$

$$\|e^{At}x_0\| \leq \sum_{p=1}^{l}\sum_{n=0}^{\nu_p-1} \|\frac{(A-\lambda_p I_d)^n}{n!}\|\|(t-t_0)^n e^{\alpha_p(t-t_0)}\|\|x_0^p\|$$

car $\|e^{i\beta_p(t-t_0)}\| = 1$

on pose $k_p = \sup_n \|\frac{(A-\lambda_p I_d)^n}{n!}\|$

$$\|e^{At}x_0\| \leq \|x_0\| \sum_{p=1}^{l} k_p \sum_{n=0}^{\nu_p-1} \|(t-t_0)^n e^{\alpha_p(t-t_0)}\|$$

on pose $M = \sup_p k_p$

$$\|e^{At}x_0\| \leq M\|x_0\| \sum_{p=1}^{l}\sum_{n=0}^{\nu_p-1} \|(t-t_0)^n e^{\alpha_p(t-t_0)}\|$$

pour que 0 soit stable il faut que $\sum_{p=1}^{l}\sum_{n=0}^{\nu_p-1}\|(t-t_0)^n e^{\alpha_p(t-t_0)}\|$ soit fini pour tout $t\in\mathbb{R}$, c-à-d $\|(t-t_0)^n e^{\alpha_p(t-t_0)}\|$ soit bornée lorsque $t\to+\infty$ cela n'est possible que si $\alpha_p\leq 0\,\forall p\in\{1,\ldots,l\}$ et $\alpha_p<0$ pour les valeurs oscillatoires.

Pour 2 : c'est la démonstration de théorème précédent .

Pour 3 : une simple contraposé de 1.

4.5 Stabilité du système linéaire à coefficients variables

Pour les systèmes linéaires à coefficients variables il n'y a pas de critère relatif aux valeurs propres comme le cas où la matrice A est à coefficients constants.
L'exemple suivant va éclairer cette situation .
Soit le système $X'(t)=A(t)X(t)$ avec $A=\begin{pmatrix}-1+\frac{3}{2}cos^2(t) & 1-\frac{3}{2}sin(t)cos(t)\\ -1-\frac{3}{2}sin(t)cos(t) & -1+\frac{3}{2}sin^2(t)\end{pmatrix}$
les valeurs propres de $A(t)$ sont fixes c-à-d ne dépendent pas de t :
$\lambda_1=-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{7}}{4}$ et $\lambda_2=-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{7}}{4}$
donc la partie réelle de ces valeurs propres est strictement négative.
Une solution de ce système est :

$$\begin{cases} x(t)= & e^{-\frac{t}{2}}\cos(t)\\ y(y)= & e^{\frac{t}{2}}\sin(t)\end{cases}$$

on remarque que $y(t)$ tend vers l'infini quand t tend vers l'infini, donc le système est instable malgré que les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative.
Alors pour les systèmes à coefficients variables on ne peut pas déduire la stabilité à travers les valeurs propres pour cela en revient à la définition de stabilité.
On dit que 0 est stable si et seulement si

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta(\epsilon)>0\ \forall X_0\in\mathbb{R}^n\ \|X_0\|\leq\delta(\epsilon)\Rightarrow\|X(t)\|\leq\epsilon$$

c-à-d pout tout voisinage U de 0 il existe un voisinage V de 0 telle que pour tout $X_0\in\mathbb{R}^n\,X_0\in V$ alors $\forall t\geq t_0\,X(t)\in U$, autrement dit 0 est stable alors pour toute solution voisine de 0 à $t=t_0$, elle est borné pour tout t.

Théorème 4.5.0.4 *: Soit*

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X \tag{4.8}$$

1. *le système (4.8) est stable pour t_0 si et seulement si*
   $\exists k(t_0) > 0$ *tel que* $\|R(t,t_0)\| \leq k(t_0)\, \forall t \geq t_0$
   autrement dit le système (4.8) est stable si et seulement si toutes les solutions sont bornées.
2. *le système (4.8) est asymptotiquement stable pour t_0 si et seulement si*
   $\lim_{t\to+\infty} \|R(t,t_0)\| = 0$
   le système (4.8) est asymptotiquement stable pour t_0 si et seulement si toutes les solutions convergent vers 0 quand $t \to +\infty$.

Preuve :

- Pour 1.
  Condition suffisante :
  Supposons $\exists k(t_0) > 0$ tel que $\|R(t,t_0)\| \leq k(t_0)$ pour tout $t \geq t_0$
  alors

$$\begin{aligned} \forall X_0 \in \mathbb{R}^n \quad \|R(t,t_0)X_0\| &\leq \|R(t,t_0)\|\|X_0\| \\ &\leq k(t_0)\|X_0\| \quad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

  soit $\epsilon > 0$
  supposons que $\delta = \frac{\epsilon}{k(t_0)} > 0$
  alors pour tout X_0 qui vérifie $\|X_0\| \leq \delta$
  on a

$$\begin{aligned} \|R(t,t_0)X_0\| &\leq k(t_0)\|X_0\| \\ &\leq \epsilon \qquad\qquad\qquad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

  d'où 0 est stable.
  Condition nécéssaire :
  on a $\|R(t,t_0)\| = \sup_{\|y\|=1} \|R(t,t_0)y\| \quad \forall t \geq t_0$
  on pose que $y = \frac{X_0}{\|X_0\|}$ telle que $\|X_0\| = \delta$
  alors $\|R(t,t_0)\| = \sup_{X_0:\|X_0\|=\delta} \frac{\|R(t,t_0)X_0\|}{\|X_0\|}$
  comme 0 est stable alors :

$$\begin{aligned} \|R(t,t_0)X_0\| &\leq \frac{\epsilon}{\|X_0\|} \\ &\leq \frac{\epsilon}{\|\delta\|} = k(t_0) \qquad\qquad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

  d'où $\exists k(t_0) > 0$ tel que $\|R(t,t_0)\| \leq k(t_0)$ pour tout $t \geq t_0$

- Pour 2.
  Condition suffisante :
  on a $\lim_{t\to+\infty}\|R(t,t_0)\|=0 \iff \forall\epsilon_1>0\,\exists M(\epsilon_1)$
  $\forall t\geq t_0+M(\epsilon_1)\,,\|R(t,t_0)\|\leq\epsilon_1$
  soit $\epsilon>0$
  on pose que $\delta=\frac{\epsilon}{\epsilon_1}$
  alors pour tout X_0 telle que $\|X_0\|\leq\delta$
  on a :

$$\begin{aligned}\|R(t,t_0)X_0\| &\leq \|R(t,t_0)\|\|X_0\| \\ &\leq \epsilon_1\|X_0\| \qquad\qquad \forall t\geq t_0+M(\epsilon)\\ &\leq \epsilon_1\delta \\ \|R(t,t_0)X_0\| &\leq \epsilon\end{aligned}$$

  d'où le système(4.8) est stable.
  Si $\exists\rho$ telle que $\|X_0\|\leq\rho$ alors $\lim_{t\to+\infty}\|R(t,t_0)X_0\|=0$
  Condition nécéssaire :
  supposons que le système (4.8) est asymptotiquement stable
  alors il est stable c-à-d $\exists k(t_0)>0$ tel que $\|R(t,t_0)\|\leq k(t_0)\,\forall t\geq t_0$
  de plus $\exists\rho$ telle que $\|X_0\|\leq\rho\Rightarrow\lim_{t\to+\infty}\|R(t,t_0)X_0\|=0$
  $\iff \forall\epsilon>0\,\exists M(\epsilon)\forall t\geq t_0+M(\epsilon)\,,\|R(t,t_0)\|\leq\epsilon$
  alors :

$$\begin{aligned}\|R(t,t_0)\| &= \sup_{X_0:\|X_0\|=\rho}\frac{\|R(t,t_0)X_0\|}{\|X_0\|} \\ \|R(t,t_0)X_0\| &\leq \frac{\epsilon}{\|X_0\|} \\ &\leq \frac{\epsilon}{\rho} \qquad\qquad \forall t\geq t_0+M\end{aligned}$$

  Choisissons $\frac{\epsilon}{\rho}<1 \iff \epsilon<\rho$
  alors pour $t_0+M\leq t<t_0+M+l \quad l\in\mathbb{R}^+$ alors :

$$\begin{aligned}\|R(t,t_0)\| &\leq \|R(t,t_0+M)\|\|R(t_0+M,t_0)\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{\rho}k \\ &\leq ke^{\ln(\frac{\epsilon}{\rho})} \\ &\leq ke^{-M\sigma} \quad \text{avec}\sigma=-\ln(\frac{\epsilon}{\rho})\frac{1}{M} \\ &\leq ke^{l}e^{-\sigma(t-t_0)} \\ &\leq \eta e^{-\sigma(t-t_0)}\end{aligned}$$

alors lorsque $t \to +\infty$ $\|R(t,t_0)\|$ tend vers 0 .
D'où le resultat.

4.6 Stabilité du système avec second membre

On a vu que la stabilité des systèmes linéaires sans second membre dépend de signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice A lorsque A ne dépend pas de t et de la nature de solution lorsque A dépend de t.
Pour les systèmes linéaires avec second membre on peut caracteriser leur stabilité à travers le système linéaire sans second membre associé.

Propriété 4.6.0.1 *: Soient*

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \tag{4.9}$$

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t) \tag{4.10}$$

où $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ alors :
si les solutions de (4.9) sont stables alors les solutions de (4.10) sont aussi stables.

Preuve : Soit X(t) solution de (4.10) alors $X(t)$ à la forme suivante :

$$X(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)\,\mathrm{ds} \quad \textit{avec } x(t) \textit{ solution de } (4.9).$$

Alors $X(t_0) = x(t_0)$.
Si $x(t)$ est stable, alors soit $y(t)$ une autre solution de (4.9)
donc $\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) > 0, \|y(t_0) - x(t_0)\| \leq \eta(\epsilon) \Rightarrow \|y(t) - x(t)\| \leq \epsilon$
or $X(t_0) = x(t_0)$
alors

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) > 0, \|Y(t_0) - X(t_0)\| \leq \eta(\epsilon) &\Rightarrow \|y(t) - x(t)\| \leq \epsilon \\ &\Rightarrow \|Y(t) - X(t)\| \leq \epsilon \end{aligned}$$

d'où $X(t)$ aussi stable .

Remarque : Comme toutes les solutions du système (4.9) ont la même nature alors les solutions du système (4.10) ont la même nature .

4.7 Perturbations linéaire

D'après la proprieté précédente on a vu qu'on peut savoir la stabilité du système (4.10) à partir de celle du système (4.9).
Mais si on perturbe la matrice A, est-ce que le système conserve sont état ? sinon à quelle condition peut on dire que le système conserve son état ?
la réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.7.0.5 *: Soient*

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= A(t)X \\ \frac{dX}{dt} &= (A(t)+B(t))X \end{aligned} \tag{4.11}$$

tel que $B(t)$ matrice continue et $\int_{t_0}^{\infty} \|B(s)\|\,\mathrm{ds} < \infty$
alors

- *si (4.9) est asymptotiquement stable alors (4.11) l'est aussi .*
- *si (4.9) est stable alors (4.11) l'est aussi .*

Preuve : On va démontrer ce resultat seulement pour la cas à coefficient constant et pour le cas à coefficient variable c'est la même chose.
Soit $\frac{dX}{dt} = AX + B(t)X$ par la méthode de la variation de la constante on a :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)X(s)\,\mathrm{ds}$$

• si le système (4.9) est asymptotiquement stable alors $\exists k$ et $\sigma > 0$ tel que :

$$\|e^{A(t-t_0)}\| \leq ke^{-\sigma(t-t_0)}$$

$$\|X(t)\| \leq ke^{-\sigma(t-t_0)}\|X_0\| + \int_{t_0}^{t} ke^{-\sigma(t-s)}\|B(s)\|\|X(s)\|\,\mathrm{ds}$$

$$\text{d'où} \quad e^{\sigma t}\|X(t)\| \leq ke^{\sigma t_0}\|X_0\| + \int_{t_0}^{t} ke^{\sigma s}\|B(s)\|\|X(s)\|\,\mathrm{ds}$$

on applique le lemme de Gronwall sur $e^{\sigma t}\|X(t)\|$

Rapport-gratuit.com
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES

alors :

$$e^{\sigma t}\|X(t)\| \leq ke^{\sigma t_0}\|X_0\| + \int_{t_0}^{t} k^2 e^{\sigma t_0}\|X_0\| exp(\int_s^t k\|B(u)\|\,\mathrm{du})\,\mathrm{ds}$$

$$e^{\sigma t}\|X(t)\| \leq ke^{\sigma t_0}\|X_0\| + ke^{\sigma t_0}\|X_0\|(-1 + exp(\int_{t_0}^{t} k\|B(u)\|\,\mathrm{du}))$$

$$e^{\sigma t}\|X(t)\| \leq ke^{\sigma t_0}\|X_0\| exp(\int_{t_0}^{t} k\|B(u)\|\,\mathrm{du}))$$

$$\|X(t)\| \leq ke^{-\sigma(t-t_0)}\|X_0\| exp(\int_{t_0}^{t} k\|B(u)\|\,\mathrm{du}))$$

comme $\exists M > 0$ telle que $\int_{t_0}^{\infty} \|B(u)\|\,\mathrm{du} < \infty$)

alors $\|X(t)\| \leq ke^{-\sigma(t-t_0)}\|X_0\| exp(kM)$

$$\|X(t)\| \leq \eta e^{-\sigma(t-t_0)}\|X_0\|$$

alors lorsque $t \to \infty$ $\|X(t)\| \to 0$
d'où $X(t)$ est asymptotiquement stable .
• Si le système (4.9) est stable alors toutes les solutions de (4.9) sont bornées
donc $\exists M > 0$ telle que $\|e^{A(t-t_0)}\| \leq M$
on revient à la même démenstration dans le cas où (4.9) est asymptotiquement stable sauf en remplace $ke^{\sigma t_0}$ par M.
donc on obtient $\|X(t)\| \leq \eta M\|X_0\|$
donc $X(t)$ est bornée.
alors : $\forall \epsilon > 0$ supposons qu'il existe $\gamma = \frac{\epsilon}{\eta M}$
alors pour tout X_0 telle que $\|X_0\| \leq \gamma$
on a $\|X(t)\| \leq \eta M\|X_0\|$
$\|X(t)\| \leq \epsilon$
d'où $X(t)$ est stable.

On remarque que la condition $\int_{t_0}^{\infty} \|B(s)\|\,\mathrm{ds} < \infty$ est très forte. Pour la stabilité asymptotique on n'a pas besoin de cette condition mais seulement d'une condition plus faible qui est : $\|B(t)\| \leq \delta < \frac{\sigma}{k},\ \forall t \geq t_0$.

Preuve : Si le système (4.9) est asymptotiquement stable alors $\exists k$ telle que :

$$\|e^{A(t-t_0)}\| \leq ke^{-\sigma(t-t_0)}$$

par la méthode de la variation de la constante on a :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)X(s)\,\mathrm{ds}$$

pour le système (4.11)
donc

$$\|X(t)\| \leq ke^{-\sigma(t-t_0)}\|X_0\| + \int_{t_0}^{t} ke^{-\sigma(t-s)}\|B(s)\|\|X(s)\|\,\mathrm{ds}$$

$$\text{d'où} \quad e^{\sigma t}\|X(t)\| \leq ke^{\sigma t_0}\|X_0\| + \int_{t_0}^{t} ke^{\sigma s}\|B(s)\|\|X(s)\|\,\mathrm{ds}$$

on applique le lemme de Gronwall sur $e^{\sigma t}\|X(t)\|$
alors :

$$e^{\sigma t}\|X(t)\| \leq ke^{\sigma t_0}\|X_0\| + \int_{t_0}^{t} k^2 e^{\sigma t_0}\|X_0\| exp(\int_{s}^{t} k\|B(u)\|\,\mathrm{du})\,\mathrm{ds}$$

$$e^{\sigma t}\|X(t)\| \leq ke^{\sigma t_0}\|X_0\| + ke^{\sigma t_0}\|X_0\|(-1 + exp(\int_{t_0}^{t} k\|B(u)\|\,\mathrm{du}))$$

$$e^{\sigma t}\|X(t)\| \leq ke^{\sigma t_0}\|X_0\| exp(\int_{t_0}^{t} k\|B(u)\|\,\mathrm{du}))$$

$$\|X(t)\| \leq ke^{-\sigma(t-t_0)}\|X_0\| exp(\int_{t_0}^{t} k\|B(u)\|\,\mathrm{du}))$$

$$\text{comme} \int_{t_0}^{t} \|B(u)\|\,\mathrm{du} \leq \delta)$$

$$\text{alors } \|X(t)\| \leq ke^{-\sigma(t-t_0)}\|X_0\| e^{(k\delta(t-t_0)}$$

$$\|X(t)\| \leq ke^{-(\sigma-k\delta)(t-t_0)}\|X_0\|$$

lorsque $t \to +\infty$ on a $\|X(t)\| \to 0$ car $\delta < \frac{\sigma}{k}$
donc le système (4.11) est asymptotiquement stable.

CONCLUSION

Dans ce travail on a donné :

1. Les différents types de stabilité.
2. Définition d'un point d'équilibre, importance d'un point d'équilibre et sa stabilité.
3. Critère de stabilité des équations diffférentielles en dimension un et un étude détaillée du portrait de phase en dimension un.
4. Critère de stabilité des systèmes d'équations diffférentielles linéaires à coefficients constants.
5. Critère de stabilité des systèmes d'équations diffférentielles linéaires à coefficients variables.
6. Critère de stabilité des systèmes d'équations diffférentielles linéaires avec second membre.
7. Critère de stabilité des systèmes perturbés.

Donc ce travail, est un résumé de la stabilité des équations différentielles linéaires.

Algorithm 1 le code pour tracer les orbites et les lignes de champ sur matlab

```
figure ;
[x,y]=meshgrid(-1 :.1 :1) ;
A=[0,1 ;0,0] ;
[V,L]=eig(A) ;
lambda=diag(L) ;
x1p = A(1,1)*x+A(1,2)*y ;
x2p=A(2,1)*x+A(2,2)*y ;
hold on
quiver(x,y,x1p,x2p,'r')
grid on
t=-1 :0.1 :1 ;
plot(V(1,1)*t,V(2,1)*t,'k') ;
plot(V(1,2)*t,V(2,2)*t,'k') ;
f = @(t,y) [A(1,1)*y(1)+ A(1,2)*y(2) ; A(2,1)*y(1)+ A(2,2)*y(2)] ;
for i=-1 :.2 :1
for j=-1 :.2 :1
[ts,ys] = ode45(f,-1 :.1 :1,[j i]) ;
plot(ys( :,1),ys( :,2),'b') ;
end
end
```

Rapport-Gratuit.com

Bibliographie

[1] H.Reinhard, *Equations différentielles Fondements et applications*, Gauthier-Villars, 1982.

[2] Martin Braun, *Differential Equations and their Applications*, Springer-Verlay, Fourth Edition, 1992.

[3] William E.Boyce et Richard C.DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley and Sons.Inc, Seventh Edition, 1986.

[4] Henri Roudier, *Algèbre linéaire* , Vuibert, Troisième Edition, 2008.