# Table des matières

# REMERCIEMENTS

Je rends grâce à Dieu Tout Puissant pour son amour infini et tout le meilleur qu'il m'a toujours donné pour la réalisation de ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude envers Monsieur *Fréderic Manelo ANONA*, Professeur Titulaire à l'Université d'Antananarivo, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette soutenance.

Je remercie Monsieur *Princy RANDRIAMBOLOLONDRANTOMALALA*, Maître de Conférences à l'Université d'Antananarivo, encadreur de ce mémoire, pour sa précieuse contribution à la rédaction de ce document, et sa disponibilité malgré son emploi du temps très chargé.

Je remercie également l'examinateur de ce mémoire : Monsieur *Hanitriniaina Sammy Grégoire RAVELONIRINA*, Maître de Conférences à l'Université d'Antananarivo d'avoir accepté d'être membre de Jury.

Mes remerciements sont adressés à ma famille, pour le soutien moral qu'elle m'a apporté.

# Notations

Dans toute la suite, on adopte les notations suivantes :

– $X$ : une variété différentiable ou une variété analytique réelle de dimension $n$,
– $G$ : un groupe de Lie sur $X$,
– $\mathfrak{g}$ : l'algèbre de Lie de $G$,
– $P$ : un fibré principal sur $X$,
– $TX$ : le fibré tangent sur $X$,
– $L(X)$ : la structure linéaire fibrée sur $X$,
– $T_xX$ : l'espace tangent en $x$ pour tout $x$ de $X$,
– $T_xX$ : l'espace cotangent en $x$ pour tout $x$ de $X$,
– $\nabla$ : une connexion linéaire et/ou linéaire analytique réelle,
– $\Gamma(X)$ : le module des champs de vecteurs différentiable ou analytique réelle sur $X$,
– $[U, V]$ : le crochet de deux champs vecteurs $U$ et $V$ dans $\Gamma(X)$,
– $\mathcal{F}(X)$ : l'anneau des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$,
– $\tau^\gamma$ : un transport parallèle suivant un lacet $\gamma$,
– $Hol(\nabla)$ : le groupe d'holonomies basé au point $x$ de $X$,
– $Hol_x^0(\nabla)$ : le groupe d'holonomies restreint au point $x$ de $X$,
– $Hol_u^*$ : le groupe d'holonomies local au point $u$ de la structure linéaire fibrée $L(X)$,
– $Hol'_u$ : un groupe d'holonomies infinitésimal au point $u$ de la structure linéaire fibrée $L(X)$,
– $R$ : la courbure de la connexion $\nabla$,
– $\underline{r}_x$ : l'enveloppe linéaire de la courbure $R$.

# Introduction

En 1854, le travail de Riemann nous donnait la notion de variété riemannienne. Il était question d'une généralisation de la géométrie euclidienne. Il définit une variété riemannienne comme étant un espace dont les voisinages de chaque point lorsqu'ils sont zoomés infiniment deviennent des espaces euclidiens, qui sont les espaces tangents en ces points. D'ailleurs, une telle variété est notée par $(X, g)$, où $g(x)$ désigne la métrique euclidienne sur l'espace tangent au point $x$ de $X$ noté par $T_xX$. Une telle structure est appelée structure riemannienne.

Sous l'hypothèse de paracompacité d'une variété différentiable, il s'avère que toute structure riemannienne $g$ engendre une connexion linéaire $\nabla$ unique qui soit sans torsion et qui annule $g$. Mais, Jacques Vey décédé au milieu des années 80, propose de discuter la question réciproque dans son papier qu'il n'a pas publié sur lequel l'objet de ce travail a été inspiré. Étant donné une connexion linéaire $\nabla$ sur une variété différentiable $X$, sans torsion, la question c'est de reconnaitre si elle provient d'une structure riemannienne. Dans ce travail, on planifie d'élucider les réponses proposées par Jacques Vey. Ce qui amène à revenir sur quelques notions sur les variétés riemanniennes. On parlera des connexions linéaires, examinera de plus prêt la connexion de Levi-Civita. La notion de groupe d'holonomies qui est l'ensemble des transformations (rotations et translations) que le plan tangent subit, sera aussi étudié dans ce travail. A partir de ces groupes d'holonomies, on peut construire une structure riemannienne sur une variété différentiable $X$. On verra que la notion de groupes d'holonomies infinitésimaux sera aussi nécessaire pour le passage d'une variété analytique réelle à une variété riemannienne. En outre, une autre manière pour cette construction est aussi de revenir au cas différentiable et d'ajouter des hypothèses sur les enveloppes linéaires de la courbure $R$ de la connexion. A la fin de ce travail, on dresse un petit algorithme, et on cite quelques exemples d'applications des résultats ainsi énoncés.

Les résultats de Jacques Vey cf. [12] dans ce mémoire ne sont pas indexés. La convention d'Einstein sur la sommation des indices est adoptée dans toute la suite.

# Chapitre 1

# Les variétés riemanniennes

Présentons les notions de variétés riemanniennes, en commençant avec les variétés différentiables, puis les champs des vecteurs.

## 1.1 Rappels

**Définition 1.1.1.** Soit $X$ un espace topologique séparé. On dit que $X$ est une variété topologique de dimension $n$ si tout point $p$ de $X$ a un voisinage ouvert $V_p$ homéomorphe par $\varphi_p$ à un ouvert $\varphi_p(V_p)$ de $\mathbb{R}^n$. Formellement, on a

$$\forall p \in X, \exists V_p \subset X, \text{et} \quad \varphi_p : V_p \to \varphi_p(V_p) \subset \mathbb{R}^n \text{ un homéomorphisme.}$$

Dans la définition, $(V_p, \varphi_p)$ est appelé carte locale de $X$.

**Définition 1.1.2.** Soit l'homéomorphisme $\varphi_p : U_p \to \varphi_p(U_p)$. Pour tout point $q$ de $U_p, \varphi_p(q)$ est un point de $\mathbb{R}^n$, et d'autre part on a les coordonnées euclidiennes usuelles

$$(x_1(\varphi_p(q)), \cdots, x_n(\varphi_p(q))) \quad \text{pour} \quad \varphi_p(q).$$

On appelle donc coordonnées locales du point $q$ de $U_p$ par rapport à $(U_p, \varphi_p)$, l'ensemble $(x_1(\varphi_p(q)), \cdots, x_n(\varphi_p(q)))$. Il est donné par l'abréviation suivante $(x_1(q), \cdots, x_n(q))$, et le n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ est appelé système de coordonnées locales de la carte locale $(U_p, \varphi_p)$.

**Définition 1.1.3.** Soit $X$ une variété topologique, on a un recouvrement de $X$ par les cartes $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. Si pour tous $\alpha, \beta \in I$, on a $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, alors on a un homéomorphisme

$$f_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}),$$

appelé fonction de transition par rapport aux systèmes de coordonnées. Alors ce recouvrement est appelé atlas de $X$ de classe $\mathcal{C}^0$.

**Définition 1.1.4.** Soit $X$ une variété topologique avec un système de coordonnées $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. On dit que $X$ est une variété différentiable de dimension $n$ de classe $\mathcal{C}^r$ ou une variété $\mathcal{C}^r$, si toutes les fonctions de transition correspondantes sont des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^r$. C'est-à-dire qu'on a un atlas de classe $\mathcal{C}^r$. Et on dit que $X$ est une variété analytique réelle, ou $\mathcal{C}^\omega$, si toutes les fonctions de transition correspondantes sont des fonctions analytiques réelles. Rappelons que pour un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f$ définie sur $U$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On dit que $f$ est analytique réelle sur $U$ si elle est développable en série entière en tout point de $U$, autrement dit :

$$\forall (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in U, \exists \eta > 0; \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D((x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0), \eta) \subset U,$$

on a

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{r_1, r_2, \cdots, r_n \geqslant 0} \alpha_{r_1, \cdots, r_n} (x_1 - x_1^0)^{r_1} \cdots (x_n - x_n^0)^{r_n}$$

avec $\alpha_{r_1, \cdots, r_n} \in \mathbb{R}$, $D((x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0), \eta)$, un disque de $\mathbb{R}^n$ centré en $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ et de rayon $\eta$.

Le théorème suivant nous permet d'avoir un lien étroit entre une variété différentiable et une variété analytique réelle. En effet, toute variété analytique réelle est une variété différentiable. La réciproque est le théorème suivant :

**Théorème 1.1.1.** *[13](Théorème de Whitney) Toute variété différentiable de dimension $n$, admet une structure analytique réelle.*

**Définition 1.1.5.** Soit $X$ une variété différentiable. On dit que $X$ est paracompacte si pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de $X$, il existe un recouvrement ouvert $(U_j)_{j\in J}$ de $X$ qui est plus fin que $(U_i)_{i\in I}$ et localement fini, c'est-à-dire, $\forall i \in I, \exists j \in J; U_i \subset U_j$ et puis tout $x$ de $X$ possède un voisinage $\mathcal{V}_x$ qui ne rencontre qu'un nombre fini des $U_j$.

**Exemple 1.1.1.** (Variété analytique réelle) L'espace projectif réel $P_n(\mathbb{R})$.
Définissons la relation d'équivalence de colinéarité $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$. Soient $x$ et $y$ deux point de $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, $x$ est dit en relation avec $y$ ($x\mathcal{R}y$) s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = \lambda y$. Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, alors,

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}, \quad x\mathcal{R}y &\iff x = \lambda y, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ &\iff y = \frac{1}{\lambda}x, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \end{aligned}$$

donc

$$\dot{x} = \left\{ \frac{1}{\lambda}x, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\}.$$

Par suite $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ quotienté par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est alors $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}_{/\mathcal{R}} = \left\{ \frac{1}{\lambda}x, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\}$. On l'appelle espace projectif réel, on le note $P_n(\mathbb{R})$. Soit l'application

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} &\longrightarrow P_n(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \pi(x) = \dot{x}, \end{aligned}$$

et considérons le système de coordonnées de voisinage $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=1}^{n+1}$ construit comme suit :

pour chaque point $p$ de $P_n(\mathbb{R})$, choisir un élément $x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ tel que $\pi(x) = p$. Donc le point $p$ est alors défini par la classe de $x$ soit

$$\begin{aligned} p &= \dot{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}, \\ &= \frac{1}{\lambda} x \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}, \\ &= \frac{1}{\lambda}(x_1, \cdots, x_{n+1}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \quad x_i (1 \leqslant i \leqslant n+1) \in \mathbb{R} \backslash \{0\}. \end{aligned}$$

Soit $U_j = \{(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_{n+1}); x_j \neq 0\}$(on omet la notation classe pour simplifier l'écriture) un sous-ensemble ouvert de $P_n(\mathbb{R})$, et $\varphi_j$ l'homéomorphisme de $U_j$ sur $\mathbb{R}^n$ donné par :

$$\varphi_j([x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_{n+1}]) = ([x_1/x_j, \cdots, x_{j-1}/x_j, x_{j+1}/x_j, \cdots, x_{n+1}/x_j]).$$

Par conséquent, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, avec $i < j$ alors la fonction de transition $f_{ij}$ est

$$\begin{aligned} f_{ij}(y) &= \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y); \\ &= \varphi_i([y_1, \cdots, y_{j-1}, 1, y_j, \cdots, y_n]); \\ &= ([y_1/y_i, \cdots, y_{i-1}/y_i, y_{i+1}/y_i, \cdots, y_{j-1}/y_i, 1/y_i, y_j/y_i, \cdots, y_n/y_i]). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'espace projectif réel $P_n(\mathbb{R})$ est une variété analytique réelle.

**Définition 1.1.6.** (Fibré tangent, cotangent) Soit $X$ une variété de dimension $n$, $x$ un point de $X$.

- On appelle espace tangent en $x$ à $X$ noté $T_xX$ par l'ensemble des vecteurs tangents en $x$ à $X$. On définit ainsi le fibré tangent $TX$ à $X$ par $TX = \bigcup_{x \in X} T_xX$. où un élément de $TX$ est un couple $(x, U(x))$ avec $x \in X$ et $U(x) \in T_xX$. On note que $TX$ est une variété différentiable de dimension $2n$, ceci vient du fait que $X$ de dimension $n$ et que $T_xX$ a même dimension que $X$.
- On appelle espace cotangent en $x$ à $X$ noté $T_x^*X$ le dual de $T_xX$ qui est l'ensemble des applications linéaires de $TX$ dans $\mathbb{R}$. On définit alors le fibré

cotangent de $T^*X$ à $X$ par $T^*X = \bigcup_{x \in X} T_x^*X$

**Définition 1.1.7.** (Champ de vecteurs) Soit $X$ une variété et $x$ un point de $X$, $TX$ le fibré tangent à $X$ et $\pi : TX \to X$ la projection de $TX$ sur $X$ défini par $\pi(x, X(x)) = x$. On appelle champ de vecteurs sur $X$ une application $s : X \to TX$ continue, telle que $\pi \circ s$ soit l'identité. On dit que $s$ est une section de $TX$. On note $\Gamma(X)$ le module sur l'anneau des fonctions réelles $\mathcal{C}^\infty$ des champs de vecteurs sur $X$.

**Définition 1.1.8.** On appelle une $1-$ forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ l'application $\omega : X \longrightarrow T^*X$ qui à un élément $x$ de $X$ on associe $\omega_{|x}$ de $T_x^*X$. On note par $\Omega^1(X)$ le module des $1-$ formes différentielles sur $X$. Pour tout champ de vecteurs $U$ de $X$, on a $T^*X \times TX \to \mathbb{R}$ par $(\omega, U) \mapsto < \omega, U >$ ou par $(\omega, U) \mapsto \omega(U)$, avec $\omega \in T^*X$ et $U \in \Gamma(X)$.

**Définition 1.1.9.** (Tenseur) On appelle tenseur $p-$covariant sur $T_xX$ une application multilinéaire

$$\underbrace{T_xX \times \cdots \times T_xX}_{p-fois} \to \mathbb{R}.$$

De même, on appelle tenseur $q-$contravariant une application multilinéaire

$$\underbrace{T_x^*X \times \cdots \times T_x^*X}_{q-fois} \to \mathbb{R}.$$

où $T_x^*X$ est le dual de $T_xX$. On appelle tenseur $p-$covariant et $q-$contravariant une application multilinéaire

$$\underbrace{T_xX \times \cdots \times T_xX}_{p-fois} \times \underbrace{T_x^*X \times \cdots \times T_x^*X}_{q-fois} \to \mathbb{R},$$

appelé aussi tenseur mixte de type $(p, q)$.

**Définition 1.1.10.** On appelle groupe de Lie, une variété différentiable muni d'une structure de groupe telle que

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \to & G \\ (h,k) & \longmapsto & hk^{-1} \end{array}$$

soit différentiable.

**Exemple 1.1.2.** Soit $GL(n,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n. Le groupe orthogonal noté $O(n) = \{M \in Gl(n,\mathbb{R})/M^tM = Id\}$ est un groupe de Lie (où $Id$ est la matrice identitée).

**Définition 1.1.11.** (Algèbre de Lie)[7] On appelle algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, la donnée d'un espace vectoriel muni du produit interne $[\ ,\ ] \in \mathfrak{g}$ nommé crochet de Lie, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) l'antisymétrie $[U,V] = -[V,U]$ ;

(ii) L'identité de Jacobi $[[U,V],W] + [[V,W],U] + [[W,U],V] = 0$, pour tous $U,V,W \in \mathfrak{g}$.

On note que sur une variété différentiable $X$, l'ensemble des champs de vecteurs $\Gamma(X)$ forme une algèbre de Lie.

**Définition 1.1.12.** Considérons $X$ une variété différentiable et $x$ un point de $X$. Une structure linéaire en $x$ est une base ordonnée $(U_1,\cdots,U_n)$ de $T_xX$. On désigne par $L_x(X)$ l'ensemble des structures linéaires en $x$ de $X$, et par $L(X)$ l'ensemble de toutes les structures linéaires sur $X$ appelé fibré des structures linéaires. Une structure $u = (U_1,\cdots,U_n)$ en $x$ de $X$ peut être considérée comme un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ vers $T_xX$.

$$u : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xX$$
$$e_i \longmapsto U_i$$

avec $e_1,\cdots,e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par ailleurs, $Gl(n,\mathbb{R})$ le groupe de Lie des matrices inversibles opérant librement à droite de $L(X)$ autrement dit

$$
\begin{aligned}
R_a : L(X) &\longrightarrow L(X) \\
(x, U_1, \cdots, U_n) &\longmapsto (x, a_1^i U_i, \cdots, a_n^i U_i),
\end{aligned}
$$

pour $a \in Gl(n, \mathbb{R})$.

**Définition 1.1.13.** [6] Soit $X$ une variété différentiable, $L(X)$ une structure linéaire fibré sur $X$. Soit $T_u(L(X))$ l'espace tangent de $L(X)$ au point $u \in L(X)$ et $V_u(L(X))$ un sous-espace de $T_u(L(X))$ tel qu'il est constitué par des vecteurs tangents du fibre au point $u$, c'est-à-dire si $\pi$ est la projection du fibré alors ce fibre est $\pi^{-1}(u)$. On définit une connexion sur $L(X)$ par l'application $H : u \in L(X) \longmapsto H_u$ tel que

- $T_u L(X)$ est la somme directe de $V_u$ et $H_u$, où $V_u$ et $H_u$ sont respectivement appelés sous-espace vertical et sous-espace horizontal de $T_u L(X)$.
- $H$ est invariant par $Gl(n, \mathbb{R})$ : $T_u R_a(H_u(L(X)) = H_{R_a u}(L(X))$ pour $u \in L(X), a \in Gl(n, \mathbb{R})$.

**Proposition 1.1.1.** *[4] Soient $X$ une variété différentiable, $L(X)$ la structure linéaire fibrée sur $X$, $H$ une connexion sur $L(X)$. Alors tout vecteur tangent $U$ de $T_u L(X)$ est appelé vertical respectivement horizontal lorsqu'il se trouve dans $V_u$ et dans $H_u$, $u \in L(X)$.*

De la définition (1.1.13), tout vecteur tangent $U$ dans $T_u L(X)$ peut s'écrire uniquement sous la forme $U = vU + hU$, où $hU$ sa composante verticale qui se trouve dans $V_u$ et $hU$ sa composante horizontale qui se trouve dans $H_u$.

**Définition 1.1.14.** [6] On appelle relèvement horizontal d'un champ de vecteurs $U \in T_x X, x \in X$ l'unique champ de vecteurs horizontal $\bar{U} \in H_u(L(X))$ tel que $T_u p(\bar{U}) = U$ $\forall u \in L(X)$ où $p$ désigne ici la projection de $L(X)$ vers $X$, avec $p^{-1}(x) = u$. Dans ce cas, pour chaque $u \in p^{-1}(x)$, $H_u(L(X))$ vers $T_x X$ constitue un isomorphisme.

**Définition 1.1.15.** [6] Soit $L(X)$ une structure linéaire fibré munie d'une connexion $H$ et $gl(n, \mathbb{R})$ l'algèbre de Lie de $Gl(n, \mathbb{R})$. On définit une forme de connexion $\omega(u)$ sur $L(X)$ à valeur dans $gl(n, \mathbb{R})$ par $\omega(u)(U) = M \in gl(n, \mathbb{R}), \bar{M}(u) = vU$ ($\bar{M}$ désigne le relèvement horizontal de $M$).

**Définition 1.1.16.** [6] Soit $L(X)$ une structure de fibré avec une connexion $H$ et une forme de connexion $\omega$. On définit une forme de courbure $\Omega$ par la dérivation extérieure (différentielle covariante) de $\Omega(U, V) = D\omega(U, V) = d\omega(hU, hV)$.

## 1.2 Les structures riemanniennes

**Définition 1.2.1.** Soit $X$ une variété différentiable. On appelle métrique riemannienne sur $X$ le morphisme de fibrés

$$g : TX \times TX \longrightarrow \mathbb{R}$$

tel que $\forall x \in X$

$$g_x : T_xX \times T_xX \longrightarrow \mathbb{R}$$

définit un produit scalaire avec $\forall \quad U, V \in TX$

$$\begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g_x(U(x), V(x)) \end{array}$$

est différentiable. La variété $X$ munie de cette métrique constitue une structure riemannienne et on le note par $(X, g)$.

**Remarque 1.2.1.** [7] Le produit scalaire ci-dessus étant une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc on a $g(U, V) = g(V, U)$ et $g(U, U) \neq 0 \quad \forall U, V \in T_xX$. Par ailleurs, la métrique riemannienne est un tenseur d'ordre 2 appelé aussi tenseur métrique. Notons $S^2(T_x^*X)$ l'ensemble des tenseurs d'ordre 2 des formes bilinéaires symétriques dans $T_xX$, donc $g \in S^2(T_x^*X)$. En effet, si on considère le système de coordonnées locales $(x_1 \cdots x_n)$, on a :

$$U = U^i \frac{\partial}{\partial x^i}, V = V^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\begin{aligned} g(U,V) &= g(U^i \frac{\partial}{\partial x^i}, V^j \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) U^i V^j \\ &= g_{ij} U^i V^j \\ &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j (U,V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx^i \otimes dx^j \quad : \quad & T_x X \times T_x X \to \mathbb{R} \\ & (U,V) \mapsto (dx^i \otimes dx^j)(U,V) \quad = (dx^i U) \times (dx^j V) \\ & \qquad = dx^i \left( U^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^j \left( V^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ & \qquad = U^i V^j dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^j \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ & \qquad = U^i V^j, \end{aligned}$$

C'est le produit tensoriel des covecteurs $dx^i$ et $dx^j$. De l'égalité

$$g(U,V) = g_{ij} dx^i \otimes dx^j (U,V),$$

on a

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

$g$ est souvent notée sous la forme quadratique $g = dS^2 = g_{ij} dx^i dx^j$.

On note aussi qu'une forme bilinéaire symétrique est déterminée par sa signature $p+q$ avec $p$ le nombre de 1 et $q$ le nombre de $-1$ obtenu à partir de la diagonalisation de forme bilinéaire. Une variété riemannienne est à signature $n$. Et une variété pseudo-riemannienne est de signature du type $n-2$.

**Définition 1.2.2.** Soit $X$ une variété différentiable. On appelle partition de l'unité de $X$, une famille de fonctions continues positives $(f_i)_{i \in I}$ à valeur dans l'intervalle $[0,1]$, telle que $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1, \quad \forall x \in X$.

**Théorème 1.2.1.** *[9] Soit $X$ une variété différentiable paracompacte et soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $X$. Il existe une partition de l'unité localement finie de l'unité de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $X$ subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$.*

*Démonstration.* cf. [9] □

**Proposition 1.2.1.** *[9] Toute variété différentiable paracompacte $X$, possède une métrique riemannienne.*

*Démonstration.* Soit $X$ une variété différentiable paracompacte. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $X$, alors il existe un recouvrement ouvert $(U_j)_{j\in J}$ de $X$ qui est plus fin que $(U_i)_{i\in I}$ et est localement fini. Considérons la carte $(U_j, \varphi_j)$ et définissons pour tout $j \in J$ la métrique canonique de l'espace euclidien sur l'ouvert $U_j$ par $g_j = \varphi_j g_{Euclid}$, tel que $g_j(U,V) = g_{Euclid}(\varphi_j(U), \varphi_j(V)), \forall U, V \in T_xX, \forall x \in U_j$. Comme $X$ est paracompacte, et $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de $X$, alors $X$ possède une partition localement fini de l'unité $\alpha_j, j \in J$ subordonnée au recouvrement ouvert $(U_j)_{j\in J}$. Considérons $g$ une combinaison convexe $\sum_j \alpha_j g_j$ des métriques $g_j$ sur $U_j$ . Alors $g$ définit bien une métrique riemannienne. En effet,

(1) $g$ définit un produit scalaire en tant que combinaison convexe de produits scalaires.

(2) Sur les domaines $U_j$, on peut trouver une métrique. En effet, avec les coordonnées locales définies sur cet ouvert, on ramène la métrique canonique de l'espace Euclidien. Autrement dit, on prend $g_j = \sum_r (dx^r)^2$.

(3) Avec les hypothèses de locale finitude, tout point $x$ de $X$ admet un voisinage compact sur lequel $\sum \alpha_j g_j$ se réduit à une somme finie. Ceci règle les problèmes de définition et de différentiabilité du tenseur construit.

□

**Exemple 1.2.1.** La variété $\mathbb{R}^n$ munie de la métrique euclidienne définit une variété riemannienne. En effet, l'espace tangent $T_x\mathbb{R}^n$ est identifié à $\mathbb{R}^n$, et la métrique euclidienne n'est autre que le produit scalaire sur $T_x\mathbb{R}^n$, donc on a

$$g = \sum_i dx^i dx^i = \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

Avec $\delta_{ij}$ désigne le symbole de Kronecker.

**Définition 1.2.3.** Soit $X$ une variété différentielle analytique réelle. On définit une métrique analytique comme une métrique riemannienne sauf qu'on remplace dans toute la définition l'expression " $\forall \quad U, V \in TX$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g_x(U(x), V(x)) \end{array}$$

est différentiable" par "$\forall \quad U, V \in TX$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g_x(U(x), V(x)) \end{array}$$

est analytique réelle."

# Chapitre 2

# Connexion linéaire et géométrie riemannienne

Les définitions et les propriétés suivantes seront utilisées dans la suite. Ainsi on les rappelle dans ce chapitre.

## 2.1 Connexion linéaire

**Définition 2.1.1.** [7] Soit $X$ une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, soit $\Gamma(X)$ est le module des champs des vecteurs sur $X$ et $\mathcal{F}(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^{\infty}\}$ l' anneaux des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^{\infty}$. On appelle connexion linéaire sur $X$ l'application

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \Gamma(X) \times \Gamma(X) & \longrightarrow & \Gamma(X) \\ & (U, V) & \longmapsto & \nabla_U V \end{array}$$

telle que, $\forall \quad U, U', V, V' \in \Gamma(X), f \in \mathcal{F}(X)$ on a :

(i) $\nabla_{U+U'} V = \nabla_U V + \nabla'_U V$

(ii) $\nabla_{fU} V = f \nabla_U V$

(iii) $\nabla_U(V + V') = \nabla_U V + \nabla_U V'$

(iv) $\nabla_U(fV) = f\nabla_U V + U(f)V$

**Remarque 2.1.1.** Une connexion linéaire est déterminée par le symbole de Christoffel $\Gamma^k_{ij}$ défini en coordonnées locales par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

En effet, dans un système de coordonnées locales :

On pose $U = U^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $V = V^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, On obtient

$$\begin{aligned} \nabla_U V &= \nabla_{U^i \frac{\partial}{\partial x^i}} (V^j \tfrac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= U^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (V^j \tfrac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= U^i V^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \tfrac{\partial}{\partial x^j} + U^i (\tfrac{\partial}{\partial x^i} V^j) \tfrac{\partial}{\partial x^j} \\ &= U^i \left(\Gamma^k_{ij} V^j + \tfrac{\partial}{\partial x^i} V^k\right) \tfrac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

**Définition 2.1.2.** Soit $X$ une variété différentiable, $\Gamma(X)$ le module des champs des vecteurs sur $X$ et $\mathcal{F}(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty\}$ l' anneaux des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$. On appelle dérivée covariante d'un champ de vecteurs $V$ dans la direction du champ de vecteurs $U$, la donnée d'une application $\nabla_V : \Gamma(X) \to \Gamma(X)$ à qui on associe $U$ à $\nabla_V U$ tel que :

- $\nabla_U f = U.f \quad \forall f \in \mathcal{F}(X)$,
- $\nabla_U$ est linéaire par rapport à $\mathcal{F}(X)$
- $\nabla_U(T \otimes S) = (\nabla_U T) \otimes S + T \otimes (\nabla_U S)$, pour tous tenseurs $T, S$.
- Pour un tenseur $T$ de type $(r, s)$, on a :

$$(\nabla T)(U_1, \cdots, U_s; V) = (\nabla_V T)(U_1, \cdots, U_s) \quad \forall V, U_i (1 \leqslant i \leqslant s) \in T_x X. \tag{2.1}$$

- $\nabla$ commute avec la contraction des tenseurs $T$ de type $(r, s)$, autrement dit on a :

$$\nabla\left(T(U_1,\cdots,U_s;V)\right)=\nabla_V\left(T(U_1,\cdots,U_s)\right)-\left(\sum_{i=1}^{s}T(U_1,\cdots,\nabla_V U_i,\cdots,U_s)\right). \tag{2.2}$$

En particulier, soit $T$ un tenseur de type $(r,s)$. La seconde dérivée covariante de $T$ est un tenseur de type $(r,s+2)$. Elle est définie par

$$(\nabla^2 T)(U_1,\cdots,U_s;V_1;V_2)=\left(\nabla_{V_2}(\nabla T)\right)(U_1,\cdots,U_s;V_1) \tag{2.3}$$

$$\forall \quad U_i(1\leqslant i\leqslant s),V_1,V_2\in T_xX.$$

Et comme (2.2), on a

$$(\nabla^2 T)(U_1,\cdots,U_s;V_1;V_2)=(\nabla_{V_2}(\nabla_{V_1}(T(U_1,\cdots,U_s)-(\nabla_{\nabla_{V_2}V_1}T(U_1,\cdots,U_s). \tag{2.4}$$

**Définition 2.1.3.** [4] La $k^{ième}$ dérivée covariante d'un tenseur $T$ de type $(r,s)$ est alors définie par récurrence :

$$\nabla^k T\left(U_1,\cdots,U_s;V_1;\cdots;V_{k-1};V_k\right)=\nabla_{V_k}\left(\nabla^{k-1}T\right)(U_1,\cdots,U_s;V_1;\cdots;V_{k-1}) \tag{2.5}$$

**Définition 2.1.4.** Soit $X$ une variété analytique réelle, soit $\Gamma(X)$ le module des champs des vecteurs sur X et $\mathcal{C}^\omega(X)$ l'algèbre des fonctions analytiques réelles sur $X$. Une connexion analytique se définit comme une connexion linéaire sauf que l'on remplace tous les termes $\mathcal{C}^\infty$ par $\mathcal{C}^\omega(X)$, et que les symboles de Christoffel définissent des fonctions analytiques réelles.

## 2.2 Connexion de Levi-Civita

**Définition 2.2.1.** (Courbure) Soit $X$ une variété différentiable, $\nabla$ une connexion sur $TX$. On appelle courbure de la connexion $\nabla$ le tenseur de type $(3,1)$ défini par l'application $\Gamma(X) \times \Gamma(X) \times \Gamma(X) \longrightarrow \Gamma(X)$ à qui on associe

$$R(U,V)W = \left(\nabla_U \nabla_V - \nabla_V \nabla_U - \nabla_{[U,V]}\right) W, \text{ pour tous } U, V, W \in \Gamma(X).$$

De la définition, on remarque que $R(U,V)W = -R(V,U)W$. On note qu'une connexion est dite plate lorsque la courbure est nulle.

**Définition 2.2.2.** (Torsion) [7] Soit $X$ une variété différentiable, et $\nabla$ une connexion sur $X$. On appelle torsion de la connexion $\nabla$ l'application $T : \Gamma(X) \times \Gamma(X) \to \Gamma(X)$ définie par :

$$T(U,V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V]$$

où $[,]$ est le crochet de Lie sur $\Gamma(X)$, et $U, V \in \Gamma(X)$. Une connexion est dite sans torsion lorsqu'on a $T(U,V) = 0 \quad \forall U, V \in \Gamma(X)$.

**Remarque 2.2.1.** Une torsion est un tenseur de type $(2,1)$. En coordonnées locales, soit $U = U^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $V = V^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, on a

$$\begin{aligned} dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}(U^l \frac{\partial}{\partial x^l}, V^t \frac{\partial}{\partial x^t}) &= U^i dx^i(\frac{\partial}{\partial x^i}) V^j dx^j(\frac{\partial}{\partial x^j}) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= U^i V^i \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

De la définition, on remarque aussi que $T(U,V) = -T(V,U)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} T(U,V) &= \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V], \\ &= -\nabla_V U + \nabla_U V + [V,U], \\ &= -(\nabla_V U - \nabla_U V - [V,U]), \\ &= -T(V,U). \end{aligned}$$

$T(U,V) = 0$ si est seulement si $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ $\forall k, i, j$. En effet, soit $U = U^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et

$V = V^i \frac{\partial}{\partial x^j}$. On a :

$$\begin{aligned}
T(U,V) = 0 \;&\Rightarrow\; \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V] = 0,\\
&\Rightarrow\; \left(U^i V^j \Gamma^k_{ij} + U^i \frac{\partial}{\partial x^i} V^j\right)\frac{\partial}{\partial x^k} - \left(V^j U^i \Gamma^k_{ji} + V^j \frac{\partial}{\partial x^i} U^i\right)\frac{\partial}{\partial x^k} + \\
&\quad - \left(U^i \frac{\partial}{\partial x^i} V^j - V^j \frac{\partial}{\partial x^i} U^i\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = 0,\\
&\Rightarrow\; U^i V^j \Gamma^k_{ij} - V^j U^i \Gamma^k_{ji} = 0,\\
&\Rightarrow\; U^i V^j \Gamma^k_{ij} = V^j U^i \Gamma^k_{ji},
\end{aligned}$$

pour $U^{i_0} = V^{j_0} = 1$, on a $\Gamma^k_{i_0 j_0} = \Gamma^k_{j_0 i_0}$, les autres nuls. Or, $i_0$ et $j_0$ étant quelconque, donc $\forall i, j$ , on a $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

**Théorème 2.2.1.** *[3](Théorème Fondamental de la Géométrie Riemannienne) Soit $X$ une variété riemannienne et $g$ une métrique riemannienne sur $X$. Alors, il existe une unique connexion $\nabla$ sur $TX$ telle que sa torsion soit nulle et qui est compatible avec $g$.*

*C'est-à-dire : pour $U, V, W \in TX$, on a :*

*(i) $\nabla$ compatible avec $g$ : $\nabla_U g(V,W) = g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W)$*

*c'est-à-dire, $Ug(V,W) = g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W)$ $(\nabla g = 0)$*

*(ii) la torsion nulle $\nabla_U V - \nabla_V U = [U,V]$.*

*Cette connexion s'appelle connexion de Levi-Civita.*

On dit alors que toute structure riemannienne $g$ sur une variété différentiable paracompacte $X$ engendre une connexion linéaire $\nabla$ unique qui soit sans torsion et qui parallélise $g$ $(\nabla g = 0)$.

*Démonstration.* (i) Unicité de $\nabla$ :

supposons que la connexion $\nabla$ existe telle que la torsion soit nulle et qu'il soit compatible avec $g$. Comme $\nabla$ est sans torsion, on a $\nabla_U W = \nabla_W U +$

$[U, W]$ pour $U, W \in \Gamma(X)$. D'autre part, soit $V \in \Gamma(X)$, $\nabla$ est compatible avec $g$, alors on a,

$$Ug(V, W) = g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_W U) + g(V, [U, W]).$$

En permutant $U, V, W$ dans cette relation, il suit que

$$\begin{array}{rcl} Ug(V, W) & = & g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_W U) + g(V, [U, W]), \\ Vg(W, U) & = & g(\nabla_V W, U) + g(W, \nabla_U V) + g(W, [V, U]), \\ Wg(U, V) & = & g(\nabla_W U, V) + g(U, \nabla_V W) + g(U, [W, V]). \end{array}$$

Additionnant les deux premières équations, puis en faisant la soustraction, on a

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2g(\nabla_U V, W) \quad &= Ug(V, W) + Vg(W, U) - Wg(V, U) - g(W, [V, U]) - \\ & -g(V, [U, W]) + g([W, V], U). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Comme cette relation ne dépend plus de $\nabla$, on a

$$g(\nabla_U V, W) = g(\nabla'_U V, W)$$

pour $U, V$ fixés et pour tout $W$ .

Donc

$$g(\nabla_U V - \nabla'_U V, W) = 0$$

Or $g$ est non dégénérée, alors pour tout $W \neq 0$, $\nabla_U V - \nabla'_U V = 0$.

Par conséquent, $\nabla_U V = \nabla'_U V$. D'où l'unicité de la connexion $\nabla$.

(ii) Existence de $\nabla$ :

pour cela, il faut montrer que $\nabla$ définit bien une connexion. D'où les vérifications suivantes pour la relation (2.6), pour $U, V, W, U', V' \in \Gamma(X)$

- $$\begin{aligned} 2g(\nabla_{U+U'}V, W) &= (U+U')g(V,W) + Vg(W, U+U') - Wg(V, U+U') - \\ &\quad -g(W, [V, U+U']) - g(V, [U+U', W]) + g([W,V], U+U') \\ &= Ug(V,W) + Vg(W,U) - Wg(V,U) - g(W,[V,U]) - \\ &\quad -g(V,[U,W]) + g([W,V],U) + U'g(V,W) + Vg(W,U') - \\ &\quad -Wg(V,U') - g(W,[V,U']) + g([W,V],U') \\ &= 2g(\nabla_U V, W) + 2g(\nabla'_U V, W). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 2g(\nabla_U V + V', W) &= Ug(V+V', W) + (V+V')g(W,U) - Wg(V+V', U) - \\ &\quad -g(W, [V+V', U]) - g(V+V', [U,W]) + g([W, V+V'], U) \\ &= Ug(V,W) + Vg(W,U) - Wg(V,U) - g(W,[V,U]) - \\ &\quad -g(V,[U,W]) + g([W,V],U) + Ug(V',W) + V'g(W,U) - \\ &\quad -Wg(V',U) - g(W,[V',U]) + g([W,V'],U) \\ &= 2g(\nabla_U V, W) + 2g(\nabla_U V', W). \end{aligned}$$

- Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$, calculons $2g(\nabla_{fU}V, W)$

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{fU}V, W) &= fUg(V,W) + Vg(W, fU) - Wg(V, fU) - g(W, [V, fU]) \\ &\quad -g(V, [fU, W]) + g([W,V], fU) \\ &= fUg(V,W) + fVg(W,U) - fWg(V,U) + g(W, f[U,V]) - \\ &\quad -g(W, V(f)U) - g(V, f[U,W]) + g(V, W(f)U) + fg([W,V],U) \\ &\quad \text{comme } g \text{ est bilinéaire, cette équation est égale à} \\ &= fUg(V,W) + fVg(W,U) - fWg(V,U) + fg(W,[U,V]) - \\ &\quad -g(W, V(f)U) - fg(V,[U,W]) + g(W(f)V, U) + fg([W,V],U) \\ &= fUg(V,W) + fVg(W,U) - fWg(V,U) + fg(W,[U,V]) - \\ &\quad -g(W, V(f)U) - fg(V,[U,W]) + g(V(f)W, U) + fg([W,V],U) \\ &\quad \text{car } g \text{ est symétrique} \\ &= 2fg(\nabla_U V, W) - g(W, V(f)U) + g(W, V(f)U) \\ &= 2fg(\nabla_U V, W). \end{aligned}$$

- Soit $h \in \mathcal{C}^\infty(X)$, calculons $2g(\nabla_U hV, W)$

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_U hV, W) &= Ug(hV,W) + hVg(W,U) - Wg(hV,U) - g(W,[hV,U]) - \\
&\quad -g(hV,[U,W]) + g([W,hV],U) \\
&= hUg(V,W) + hVg(W,U) - hWg(V,U) - g(W,h[V,U]) + \\
&\quad +g(W,U(h).V) - hg(V,[U,W]) - g(h[V,W],U) + g(W(h).V,U) \\
&= 2g(h\nabla_U V,W) + g(W,U(h)V) + g(W(h)V,U) \\
&= 2g(h\nabla_U V,W) + g(W,U(h)V) + g(V,W(h)U) \\
&= 2g(h\nabla_U V,W) + g(W,U(h)V) + g(V,U(h)W) \\
&= 2g(h\nabla_U V,W) + g(W,U(h)V) + g(U(h)V,W) \\
&= 2hg(\nabla_U V,W) + 2g(U(h)V,W).
\end{aligned}$$

(iii) Pour la compatibilité de $\nabla$ avec $g$, vérifions que

$g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W) = Ug(V,W)$.

On a

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_U V, W) &= Ug(V,W) + Vg(W,U) - Wg(V,U) - g(W,[V,U]) - \\
&\qquad -g(V,[U,W]) + g([W,V],U)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
2g(V, \nabla_U W) &= Ug(W,V) + Wg(V,U) - Vg(W,U) - g(V,[W,U]) \\
&\qquad -g(W,[U,V]) + g([V,W],U) \\
&= Ug(V,W) + Wg(U,V) - Vg(W,U) + g(V,[U,W]) \\
&\qquad +g(W,[V,U]) - g([W,V],U).
\end{aligned}$$

donc

$$2g(\nabla_U V, W) + 2g(V, \nabla_U W) = 2Ug(V,W)$$

Par suite,

$$g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W) = Ug(V,W).$$

(iv) Quand à la nullité de la torsion, vérifions que

$$g(\nabla_U V, W) - g(\nabla_V U, W) = g([U, V], W).$$

On a :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_U V, W) &= Ug(V, W) + Vg(W, U) - Wg(V, U) - g(W, [V, U]) - \\ &\quad -g(V, [U, W]) + g([W, V], U) \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V U, W) &= Vg(U, W) + Ug(W, V) - Wg(U, V) - g(W, [U, V]) - \\ &\quad -g(U, [V, W]) + g([W, U], V). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_U V, W) - 2g(\nabla_V U, W) &= -g(W, [V, U]) + g(W, [U, V]) \\ &= g([U, V], W) + g([U, V], W) \\ &= 2g([U, V], W). \end{aligned}$$

Par suite,

$$g(\nabla_U V, W) - g(\nabla_V U, W) = g([U, V], W); \quad \forall W \in \Gamma(X).$$

Et comme $g$ est non dégénérée, alors on a $\nabla_U V - \nabla_V U = [U, V]$.

□

# Chapitre 3

# Construction d'une structure riemannienne

## 3.1 Groupes d'holonomies et structure riemannienne

Dans cette section, nous allons voir que sous la condition de relative compacité des groupes d'holonomies, on construit une structure riemannienne à partir d'une connexion sur une variété différentiable.

**Définition 3.1.1.** [7] Soit $X$ une variété différentiable, $TX$ un fibré tangent sur $X$ et $\nabla$ la connexion de Levi-Civita sur $TX$.
Soit $\gamma : [0,1] \to X, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ avec $x, y \in X$ une courbe lisse par morceaux sur $X$. On dit qu'un champ $U(t)$ est parallèle le long de la courbe $\gamma$ lorsque $\frac{DU}{dt}(t) = 0$, où $\frac{DU}{dt}(t)$ désigne la dérivée covariante du champ $U(t)$ le long de la courbe $\gamma$, il est défini par $\frac{DU}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}U(t)$. On appelle alors transport parallèle toute application linéaire

$$\begin{aligned} \tau^\gamma : T_xX &\longrightarrow T_yX \\ U(0) &\longmapsto \tau^\gamma(U(0)) = U(1), \end{aligned}$$

où le champ $U(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle $\frac{DU}{dt}(t) = 0$ conditionnée par $U(0) \in T_xX$.

**Proposition 3.1.1.** *[3] Soit $X$ une variété différentiable, $TX$ le fibré tangent sur $X$ et $\nabla$ la connexion de Levi-Civita sur $TX$. Soit $\gamma : [0,1] \to X, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ avec $x, y \in X$, et $\gamma^{-1} : [0,1] \to X, \gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Alors $\tau^{\gamma}$ est une application inversible, son inverse est $\tau^{\gamma^{-1}}$.*

*Démonstration.* Soit le champ $U_x$ de $T_xX$, tel que $\tau^{\gamma}(U_x) = U_y \in T_yX$. Alors il existe un champ $U(t)$ parallèle le long de la courbe $\gamma$, donc solution de l'équation $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}U(t) = 0$, il vérifie $U(0) = U_x$ et $U(1) = U_y$. Définissons le champ $U'(t) = U(1-t)$, donc $U'(0) = U(1)$ et $U'(1) = U(0)$. Donc $U'(t)$ est un champ parallèle le long de la courbe $\gamma^{-1}$. Alors $\tau^{\gamma^{-1}}(U_y) = U_x$. D'où $\tau^{\gamma}$ est inversible d'inverse $\tau^{\gamma^{-1}}$. $\square$

**Définition 3.1.2.** On dit que deux chemins continus $\gamma, \beta$ de $X$ sont homotopes lorsqu'il existe une application continue $H$ de $[0,1] \times [0,1]$ dans $X$ telle que l'application qui à $t$ associe $H(t,0)$ est égale à $\gamma(0)$ et celle qui à $t$ associe $H(t,1)$ est égale à $\beta(1)$. Formellement, on a :

$$\forall t \in [0,1] \quad H(t,0) = \gamma(t) \text{ et } H(t,1) = \beta(t).$$

Et on dit qu'un lacet c'est-à-dire chemin fermé, est contractile s'il est homotope à un lacet constant.

**Définition 3.1.3.** [3] Soit $X$ une variété différentiable, $x$ un point de $X$. On appelle groupe d'holonomies basé en un point $x$ de la connexion de Levi-Civita $\nabla$, ou tout simplement holonomie riemannienne, noté $Hol(x)$ l'ensemble

$$Hol(x) = \{\tau^{\gamma} : T_xX \to T_xX\}$$

avec $\gamma : [0,1] \to X; \gamma(0) = \gamma(1) = x$.

Comme $\tau^{\gamma} : T_xX \to T_xX$ une application linéaire inversible, alors $\tau^{\gamma}$ réside dans le groupe de transformations linéaires inversibles de $T_xX$, noté $Gl(T_x)$ ($\tau^{\gamma} \in Gl(T_xX)$). Lorsque $\gamma$ désigne un lacet contractile, on définit le groupe d'holonomies restreint en

$x$ par

$$Hol^0(x) = \{\tau^\gamma : T_xX \to T_xX\},$$

$\gamma$ un lacet contractile.

**Proposition 3.1.2.** *[3] Soit $X$ une variété différentiable, et $x, y \in X$. Si $X$ est connexe et $\gamma$ un chemin de $x$ vers $y$, le groupe d'holonomies des deux points de base $x, y$ sont isomorphes et on a*

$$\tau^\gamma Hol(x)\tau^{\gamma^{-1}} = Hol(y).$$

*Démonstration.* Soient $x, y \in X$, comme $X$ est connexe, alors on peut trouver un chemin lisse par morceaux $\gamma : [0,1] \to X, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ et on définit alors le transport parallèle qui lie les deux points $x, y$ $\tau^\gamma : T_xX \to T_yX$. Si $\alpha$ est un lacet basé en $x$, tout en sachant que $\gamma$ est un lacet basé en $y$, alors $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ est un lacet basé en $y$ donc on a

$$\tau^{\gamma\alpha\gamma^{-1}} = \tau^\gamma \circ \tau^\alpha \circ \tau^{\gamma^{-1}}$$

Par conséquent, si $\tau^\gamma \in Hol(x)$, alors $\tau^\gamma \circ \tau^\alpha \circ \tau^{\gamma^{-1}} \in Hol(y)$. D'où

$$\tau^\gamma Hol_x(\nabla)\tau^{\gamma^{-1}} = Hol_y(\nabla).$$

□

On dit ainsi que le groupe d'holonomies $Hol(x)$ est indépendant du point de base $x$ choisi, on omet alors la notation en $x$ si l'on souhaite et on écrit $Hol$ tout court.

**Proposition 3.1.3.** *[3] Soit $X$ une variété différentiable paracompacte et simplement connexe. Alors le groupe d'holonomies en $x$ coïncide avec le groupe d'holonomies* *restreint au point $x$. Formellement, on a*

$$Hol(x) = Hol^0(x).$$

*Démonstration.* Soit $x$ un point fixe de $X$. Comme $X$ est simplement connexe, considérons $\alpha, \beta$ deux lacets basés en $x$ tel que $\beta$ contractile, alors $\alpha\beta\alpha^{-1}$ est contractile. Ainsi si $\tau^\gamma$ est dans $Hol(x)$ et $\tau^\beta$ dans $Hol^0(x)$, alors $\tau^{\alpha\beta\alpha^{-1}} = \tau^\gamma\tau^\beta\tau^{-1\alpha}$ réside aussi dans $Hol^0(x)$ et donc $Hol^0(x)$ est un sous-groupe normal de $Hol(x)$.

Considérons maintenant l'homomorphisme surjectif

$$f : \pi_1(X) \to Hol(x)/Hol^0(x), \quad \text{défini comme suit} \quad f([\gamma]) = \tau^\gamma.Hol^0(x)$$

avec $\gamma$ un lacet basé en $x$ et $[\gamma]$ l'élément correspondant dans $\pi_1(X)$. Comme $X$ est simplement connexe et paracompacte, alors $X$ vérifie le second axiome de dénombrabilité. Il s'ensuit que $\pi_1(X)$ est dénombrable. Puisque $f$ est un homomorphisme surjective, alors le groupe quotient $Hol(x)/Hol^0(x)$ est aussi dénombrable. Par conséquent, $Hol^0(x)$ est la composante connexe de $Hol(x)$ contenant l'identité. □

**Définition 3.1.4.** On dit qu'un tenseur $g$ est invariant par $\nabla$ si $\nabla g = 0$. Donc pour une variété riemannienne $(X, g)$, avec la connexion de Levi-Civita, la métrique riemannienne $g$ est constante.

**Proposition 3.1.4.** *[3] Soit $X$ une variété riemannienne de dimension $n$, $\nabla$ la connexion de Levi-Civita. Alors l'holonomie riemannienne $Hol$ est un sous-groupe de $O(n)$.*

*Démonstration.* Considérons $X$ une variété riemannienne de dimension $n$, $\nabla$ la connexion de Levi-Civita sur $X$. Donc $\nabla g = 0$, autrement dit $g$ est un tenseur invariant. Alors pour $x \in X$, le groupe d'holonomies agit sur $T_xX$ tout en préservant la métrique $g$ restreinte au point $x$ dans $T_xX$. Or le groupe de transformation de $T_xX$ préservant $g$ est le groupe orthogonal $O(n)$. Donc, $Hol$ est sous-groupe de $O(n)$. □

**Définition 3.1.5.** [7] Soit $\mathbf{K}$ un groupe de transformations sur $X$ considéré comme un compact. On appelle mesure de Haar sur $\mathbf{K}$, notée $\mu$ l'unique mesure invariante par translation à droite et à gauche de $\mathbf{K}$, soit

$$\int_{\mathbf{K}} f(k)d\mu(k) = \int_{\mathbf{K}} f(kh)d\mu(k) = \int_{\mathbf{K}} f(hk)d\mu(k),$$

avec $f \in L(\mathbf{K})$ espace vectoriel de toutes les fonctions $f : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbb{C}$.

**Définition 3.1.6.** Soit $X$ une variété, $g_0$ une métrique sur $X$, $\mathbf{K}$ un groupe compact. On définit une métrique invariante $g$ sur $X$ qui normalise toute métrique $g_0$ de $X$ sur le groupe compact $\mathbf{K}$. Soit

$$g = \int_{\mathbf{K}} k^* g_0 dk \text{ où } k^* \text{désigne l'application " pull-back " de } k.$$

Cette intégrale suit la propriété de mesure de Haar.

**Proposition 3.1.5.** *Soient $X$ une variété et $\nabla$ la connexion linéaire sur $X$ sans torsion. Pour que $\nabla$ provienne d'une structure riemannienne, il faut et il suffit que ses groupes d'holonomies soient relativement compacts.*

*Démonstration.* ($\Rightarrow$) Supposons $\nabla$ provenant d'une structure riemannienne $(X, g)$. Alors d'après le Théorème Fondamental de la Géométrie riemannienne, on a la connexion de Levi-Civita $\nabla$ sur $TX$. Par suite, l'holonomie riemannienne est bien défini par le groupe d'holonomies de la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent $TX$. Mais l'holonomie riemannienne est un sous-groupe de $O(n)$ et que $O(n)$ est compact, donc ce sous-groupe est relativement compact.
($\Leftarrow$) Supposons que le groupe d'holonomies en un point $x \in X$ soit relativement compact. Soit $g_0$ une métrique sur la variété paracompacte $X$, et $x \in X$. Donc, il laisse invariant une forme quadratique définie positive $g$ en un point $x$ de $X$ sur $TX$.

En effet, on a

$$Hol(x) = \{\tau^{\gamma}; \gamma : [0,1] \to X; \gamma(0) = \gamma(1) = x\},$$

on définit alors

$$g(U_x, V_x) = \int_{Hol(x)} (\tau^{\gamma})^* g_0(U_x, V_x) d\tau^{\gamma}, \quad \forall \quad \tau^{\gamma} \in Hol(x); \quad U_x, V_x \in T_x X.$$

Soit maintenant $\upsilon^{\alpha} \in Hol(x)$, donc on a,

$$\begin{aligned} g(\upsilon^{\alpha} U_x, \upsilon^{\alpha} V_x) &= \int_{Hol(x)} (\tau^{\gamma})^* g_0(\upsilon^{\alpha} U_x, \upsilon^{\alpha} V_x) d\tau^{\gamma}, \\ &= \int_{Hol(x)} g_0 \left(\tau^{\gamma}(\upsilon^{\alpha} U_x), \tau^{\gamma}(\upsilon^{\alpha} V_x)\right) dP_{\gamma}, \\ &= \int_{Hol(x)} g_0 \left(\tau^{\gamma} U_x, \tau^{\gamma} V_x\right) d\tau^{\gamma}, \\ &= \int_{Hol(x)} (\tau^{\gamma})^* g_0(U_x, V_x) d\tau^{\gamma}, \\ &= g(U_x, V_x). \end{aligned}$$

Soit $y \in V_x \subset X$ ($V_x$ voisinage de $x$ ). Comme $X$ est une variété différentiable, alors $X$ est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ d'après la Définition 1.1.4. Par ailleurs, $\mathbb{R}^n$ est localement connexe, et la connexité locale est préservée par homéomorphisme. Par conséquent, d'après la Proposition 3.1.2, l'holonomie est indépendant du point de base choisi. Par suite, le transport parallèle relativement à $\nabla$ de la forme quadratique $g$ le long du chemin partant de $x$ à $y$ est alors indépendant du chemin, par définition de l'holonomie. On construit ainsi une structure riemannienne $g$ sur $X$ invariante par transport parallèle, avec $\nabla g = 0$. Comme $\nabla$ est de torsion nulle, et que $\nabla$ est unique, alors $\nabla$ est la connexion riemannienne. $\square$

Mais ce résultat, qui suppose faites les intégrations du transport parallèle, est fort peu explicite. Pour obtenir une réponse en termes de $\nabla$ elle-même, il faut certainement supposer $X$ simplement connexe. (Des exemples de variétés non simplement connexes portant des connexions plates, donc localement riemanniennes, mais non globalement riemanniennes), en sorte que le groupe d'holonomies soit connexe.

**Exemple 3.1.1.** On sait qu'une surface est simplement connexe lorsqu'on peut contracter n'importe quelle courbe fermée tracée sur cette surface en un point sans quitter et sans sectionner la surface . Le tore à 2 dimension noté $\mathbb{T}^2$ est une variété non simplement connexe à connexion plate, c'est-à-dire à courbure nulle. En effet, elle est non simplement connexe puisque lorsqu'on trace une courbe fermée autour du tore, elle ne peut pas être contractée en un point à la surface du tore.

## 3.2 Variétés analytiques réelles et structure riemannienne

Cette section présente la construction d'une variété riemannienne si on part d'une variété analytique réelle.

**Définition 3.2.1.** [6] Soit $x$ un point de $X$, notons $\mathcal{C}(x)$ l'ensemble des courbes fermées en $x$, et $\mathcal{C}^0(x)$ l'ensemble des courbes contractiles au point 0. Prenons un point $u \in p^{-1}(x)$, où $p$ est la projection de $L(X)$ à $X$.

• On appelle groupe d'holonomies au point $x$ noté $\psi(x)$ le sous-groupe des difféomorphismes de $p^{-1}(x)$ dont les éléments sont obtenus par transport parallèle des courbes dans $\mathcal{C}(x)$, autrement dit, les éléments de $\psi(x)$ sont de la forme $\tau : p^{-1}(x) \longrightarrow \psi^0(x), \forall \tau \in \mathcal{C}(x)$.

• De façon analogue, on appelle le groupe d'holonomies restreint au point $x$ noté $\psi^0(x)$ le sous-groupe des difféomorphismes de $p^{-1}(x)$ dont les éléments sont de la forme $\tau : p^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(x), \forall \tau \in \mathcal{C}^0(x)$.

• Pour $u \in p^{-1}(x)$, on définit le groupe d'holonomies au point $u$ par

$\psi(u) = \{a \in Gl(n, \mathbb{R}), R_a(u) = \tau(u), \text{pour } \tau \in \psi(x)\} \subset Gl(n, \mathbb{R})$. On définit de même le groupe d'holonomies restreint au point $u$.

• On définit maintenant le groupe d'holonomies local par $\psi^*(u) = \bigcap\limits_{k=1,2,\cdots} \psi^0(u, U_k)$, où $\psi^0(u, U_k)$ est un sous-ensemble de $\psi^0(u)$ tel que $\psi^0(u, U_k) \subset \psi^0(u, U_{k+1})$, avec $U_k$ désigne une suite de voisinages de $x$ vérifiant $U_{k+1} \subset U_k$, pour $k \in \mathbb{Z}^+$et $\bigcap\limits_{k=1,2,\cdots} U_k = x$.

**Définition 3.2.2.** Soit $m_0(u)$ un sous-espace de $gl(n, \mathbb{R})$ engendré par $\Omega_u(U, V)$ des vecteurs horizontaux $U, V \in T_u(L(X))$ avec $u \in L(X)$. De façon inductive sur $k$, $m_k(u)$ définit un sous-espace de $gl(n, \mathbb{R})$ engendré par les éléments de $m_{k-1}(u)$ et les éléments de la forme $V_1 \cdot \cdots \cdot V_k(\Omega(U, V))$, où $U, V, V_1, \cdots, V_k$ sont des vecteurs horizontaux. Soit maintenant $g'(u)$ la réunion de tous les $m_k(u), k = 0, 1, 2, \cdots$ .

L'ensemble $g'(u)$ est une sous-algèbre de $gl(n, \mathbb{R})$ et le sous-groupe de Lie connexe engendré par $g'(u)$ est appelé groupe d'holonomies infinitésimal au point $u$ de $L(X)$, on le note par $\psi'(u)$.

Ce qui nous intéresse ce sont les groupes d'holonomies par rapport à un point de $X$ mais non pas de $L(X)$. La proposition suivante nous permet de passer aux groupes d'holonomies en un point $u$ de $L_x(X)$ vers les groupes d'holonomies par rapport à un point $x$ de $X$.

**Proposition 3.2.1.** *[6] Considérons les groupes d'holonomies définis ci-dessus $\psi(x), \psi^0(x), \psi^*(x), \psi'(x)$. Ces groupes peuvent être réalisés comme des groupes de transformations linéaires de $T_xX$, avec $x = p^{-1}(u)$ notés respectivement par $\psi(x), \psi^0(x)$, $\psi^*(x), \psi'(x)$, qui sont les groupes d'holonomies en un point $x$ de $X$.*

*Démonstration.* On va voir le cas de $\psi(u)$. En effet, de la Définition 3.2.1 le groupe d'holonomies $\psi(u)$ est un sous-groupe de $Gl(n, \mathbb{R})$ et que $u \in L_x(X)$ peut être considéré comme une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $T_xX$. Alors, comme $\psi(u)$ est un sous-groupe de $Gl(n, \mathbb{R})$ et que $Gl(n, \mathbb{R})$ est le groupe d'automorphismes de $\mathbb{R}^n$, on peut considérer $\psi(u)$ comme un sous-groupe du groupe d'automorphismes de $\mathbb{R}^n$. En utilisant le fait que $u$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $T_xX$, on peut affirmer que $\psi(u)$ a une représentation dans $T_xX$, avec $x = p^{-1}(u)$. Cette représentation est notée par

$$\Psi_u : \psi(u) \longrightarrow Aut(T_xX)$$
$$a \longmapsto u \circ a \circ u^{-1}.$$

De cette manière, $\psi(u)$ peut être considéré comme un sous-groupe de $Aut(T_xX)$. Soit maintenant $u \in p^{-1}(x)$. Posons $u' = R_b(u) \in p^{-1}(x)$. Alors $\psi(u') = b^{-1}\psi(u)b$. Donc $\psi$ est indépendant du point de base choisi $u$. Supposons $a \in \psi(u)$ et posons $a' = b^{-1}ab$ l'élément correspondant de $a$ dans $\psi(u')$. Alors par définition de $\Psi$ nous avons $\Psi_{u'}(a') = u' \circ a' \circ (u')^{-1} = u \circ a \circ u^{-1} = \Psi_u(a)$. Il s'ensuit cette représentation est bien définie et $\psi(u)$ peut être ainsi réalisé comme un groupe de transformations de $T_xX$ noté $\psi(x)$. On procède de manière analogue pour les autres groupes d'holonomies. $\square$

Soit $X$ une variété analytique réelle, $\nabla$ une connexion linéaire analytique réelle. Notons maintenant par $Hol(x), Hol^0(x), Hol^*(x), Hol'(x)$ les groupes d'holonomies respectifs correspondant aux $\psi(x), \psi^0(x), \psi^*(x), \psi'(x)$. Et puisque le groupe d'holonomies est indépendant du point de base choisi, on omet la notation en $x$ autant que l'on veut.

**Proposition 3.2.2.** *[11] Soit $X$ une variété analytique réelle, $\nabla$ une connexion linéaire analytique réelle. Notons par $\underline{h}(x)$, $\underline{h}^*(x)$, $\underline{h}'(x)$ les algèbres de Lie respectives des groupes d'holonomies $Hol(x)$, $Hol^*(x)$, $Hol'(x)$. Les deux groupes $Hol^*(x), Hol'(x)$ constituent des sous-groupes de Lie de $Hol(x)$, à savoir $Hol'(x) \subset Hol^*(x) \subset Hol(x)$ et par conséquent $\underline{h}'(x) \subset \underline{h}^*(x) \subset \underline{h}(x)$. Et comme $X$ est une variété analytique réelle, on a l'inclusion inverse pour les groupes d'holonomies et l'égalité entre $\underline{h}(x) = \underline{h}'(x)$.*

**Définition 3.2.3.** On appelle enveloppe linéaire $L(A)$ d'un sous-ensemble $A$ d'un espace vectoriel $V$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des $x \in A$

$$L(A) = \left\{ y = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j x_j, x_j \in A, \alpha_j \in \mathbb{R}, q = 1, 2, \cdots \right\}.$$

Soit $X$ une variété analytique réelle, $\nabla$ une connexion linéaire analytique réelle. On définit la courbure de $\nabla$ par $R : \wedge^2 T_x X \longrightarrow End(T_x X)$. Notons $\underline{r}_x$ l'enveloppe linéaire dans $End(T_x X)$, des opérateurs $R(W)$, pour tout $W$ variant dans $\wedge^2 T_x X$. D'une façon analogue, pour tout entier $k$, on désigne par $r_x^{(k)}$ l'enveloppe linéaire dans $End(T_x X)$ des opérateurs $\nabla^k R(W, U_1, U_2 \cdots, U_k)$ où les $U_i$ varient dans $T_x X$ et $W$ dans $\wedge^2 T_x X$, avec $\nabla^0 R(W) = R(W)$.

**Lemme 3.2.1.** *Pour un champ de tenseurs de type $A_k$ (resp. $B_k$), soit un champ de tenseurs de type $(1,1)$ de la forme $\nabla_{V_k} \cdots \nabla_{V_1}(R(U,V))$ (resp. $(\nabla^k R)(U, V; W_1, \cdots, W_k)$), où $U, V, W_1, \cdots, W_k$ sont des champs de vecteurs de $X$. Alors, tout champ de vecteurs de type $A_k$ (resp. $B_k$) est combinaison linéaire d'un nombre fini de champs de tenseurs de type $B_j$ (resp. $A_j$) $0 \leqslant j \leqslant k$.*

**Lemme 3.2.2.** *[4] Si $W \in \wedge^2 T_x X$, et $V_1, \cdots, V_k$ sont des champs de vecteurs sur $X$ et que $\bar{W}, \bar{V}_1, \cdots, \bar{V}_k$ sont leurs relèvements horizontaux respectifs dans $L(X)$. Alors, on a :*

$$\left(\nabla_{V_k} \cdots \nabla_{V_1}(R(W))\right)_x Z = u \circ (\bar{V}_k \cdots \bar{V}_1(2\Omega(\bar{W}))) \circ u^{-1}(Z), \quad pour \quad Z \in T_x X$$

*où $\Omega$ est la forme de courbure de la connexion linéaire $\nabla$.*

*Démonstration.* (cf.[4]) □

**Théorème 3.2.1.** *[4] Soit $X$ une variété analytique réelle, $\nabla$ la connexion linéaire analytique réelle associée à $X$. L'algèbre de Lie $\underline{h}'(x)$ du groupe d'holonomies infinitésimal $Hol'(x)$ est engendrée par $\nabla^k R(U, V; U_1, \cdots, U_k)$, pour $U, V, U_1, \cdots, U_k \in T_x X, 0 \leqslant k < \infty$.*

*Démonstration.* Ceci est obtenu à partir du Lemme 3.2.2 et du Lemme 3.2.1 $cf.$[4]. □

Lorsque $k$ varie de 0 à un certain entier $N$, on note par

$$\underline{h}'_N(x) = \langle \nabla^k R(U,V;U_1,\cdots,U_k), U,V,U_1,\cdots,U_k \in T_xX, 0 \leqslant k \leqslant N \rangle. \tag{3.1}$$

le sous-espace de $\underline{h}'(x)$. Comme $\underline{r}_x^{(k)}$ désigne l'enveloppe linéaire des opérateurs $\nabla^k R(U,V;U_1,\cdots,U_k)$, alors $\underline{r}_x^{(k)}$ n'est autre que $\underline{h}'(x)$ d'après le Théorème 3.2.1. Or la Proposition 3.2.2 dit que $\underline{h}'(x) \subset \underline{h}(x)$ donc tous les espaces $\underline{r}_x^{(k)}$ sont contenus dans l'algèbre de Lie $h(x)$ du groupe d'holonomies $Hol(x)$ au point $x$, et que, réciproquement, dans le cas où les données sont analytiques, $\underline{h}(x)$ est précisément l'enveloppe linéaire des $\underline{r}_x^{(k)}$ toujours d'après la Proposition 3.2.2.

**Proposition 3.2.3.** *[10] Soit $(X,\nabla)$ une variété analytique réelle simplement connexe, de torsion nulle, $x$ un point fixe de $X$, $g$ une forme quadratique bilinéaire symétrique sur $T_xX$. Alors l'invariance de $g$ par $Hol(x)$ est caractérisée par :*

$$g(AU,V) + g(U,AV) = 0, \forall A \in \underline{h}(x), U,V \in T_xX, x \in X. \tag{3.2}$$

*Démonstration.* Soit $A \in \underline{h}(x)$, et $S^A$ le sous-groupe correspondant défini par

$$\begin{array}{cccl} S^A: & \mathbb{R} & \rightarrow & Hol(x); \\ & t & \mapsto & S^A(t); \quad \text{tel que} \quad S^A(0) = 1 \end{array}$$

En dérivant par rapport à $t$ au point 0, on a $(S^A)'(0) = (\frac{d}{dt})_{t=0} S^A(t) = A$. Soit maintenant $g$ une forme quadratique bilinéaire symétrique qui est invariant par le groupe d'holonomies. On a alors

$$g(S^A(t)U, S^A(t)V) = g(U,V) \quad \forall U,V \in T_xX.$$

La dérivée par rapport à $t$ au point 0 de ce dernier nous donne

$$g((S^A)'(0)(U), S^A(0)V) + g(S^A(0)U, (S^A)'(0)(V)) = 0 \quad \forall U, V \in T_xX;$$

par suite

$$g(AU, V) + g(U, AV) = 0 \quad \forall U, V \in T_xX.$$

□

Notons

$$\mathbf{G}(x) = \left\{ g \in S^2(T_x^*X), g(AU, V) + g(U, AV) = 0 \quad \forall U, V \in T_xX, \quad A \in \underline{h}(x) \right\} \tag{3.3}$$

le sous-espace vectoriel de toutes les formes bilinéaires symétriques vérifiant les conditions de la Proposition 3.2.3. Maintenant comme $\underline{h}(x) = \underline{h}'(x)$, alors l'invariance de la forme bilinéaire symétrique $g$ de la Proposition 3.2.3 est aussi valable pour $A \in \underline{h}'(x)$ de l'équation (3.2).

**Proposition 3.2.4.** *Soit $X$ une variété analytique réelle, simplement connexe, et $\nabla$ une connexion analytique sur $X$, sans torsion, de courbure $R$. Soit $x \in X$. S'il existe une forme quadratique définie positive $g$ sur $T_xX$, préservée au sens infinitésimal par tous les opérateurs linéaires $\nabla^k R(W, U_1, U_2 \cdots, U_k)$ ($k$ entier $\geqslant 0, W \in \wedge^2 T_xX, U_i \in T_xX$), alors $\nabla$ provienne d'une structure riemannienne.*

*Démonstration.* Soit $x \in X$, $g$ une forme quadratique définie positive sur $T_xX$, $\nabla$ la connexion analytique associée à $X$, $R$ la courbure de la connexion $\nabla$. Supposons que $g$ est préservée au sens infinitésimal par tous les opérateurs linéaires $\nabla^k R(W, U_1, U_2 \cdots, U_k)$ de $\underline{h}'(x)$ (d'après le Théorème 3.2.1), c'est-à-dire qu'on a d'après les Propositions 3.2.3 et 3.2.2.

$$g(\nabla^k R(W, U_1, U_2, \cdots, U_k)U, V) \quad + \quad g(U, \nabla^k R(W, U_1, U_2, \cdots, U_k)V) = 0 \tag{3.4}$$

$\forall W \in \wedge^2 T_xX, U_i \in T_xX$ et $\nabla^k R(W, U_1, U_2 \cdots, U_k)$ ($k$ entier $\geqslant 0$) dans $\underline{h}'(x)$. Comme $\nabla^k R(W, U_1, U_2 \cdots, U_k) \in \underline{h}'(x)$ et $\underline{h}'(x) = \underline{h}(x) = \underline{r}_x^{(k)}$, alors $\nabla^k R(W, U_1, U_2 \cdots, U_k)$ appartient à l'enveloppe linéaire dans l'endomorphisme de $T_xX$. Alors l'équation (3.4) devient,

$$\nabla^k_{R(W,U_1,U_2,\cdots,U_k)} g(U,V) = 0 \quad \forall U, V \in T_xX, x \in X,$$

par suite $\nabla^k g = 0$ pour tout $k \geqslant 0$, il s'ensuit que $\nabla g = 0$. Puisque la torsion est supposée nulle, alors $\nabla$ provienne d'une structure riemannienne.

□

## 3.3 Enveloppe linéaire de la courbure et structure riemannienne

Dans cette section, on parle des enveloppes linéaires de la courbure et ses relations avec la structure riemannienne.

**Définition 3.3.1.** Soit $X$ une variété différentiable, $\nabla$ la connexion associée à $X$. On appelle jet d'ordre $k$ de la connexion $\nabla$ au point $p$ de $X$ l'opération

$$\begin{aligned}(J^k_{(U(p),V(p))}\nabla)(Z_1(p), Z_2(p)) &= \nabla_{U(p)}V(p) + D^{(1)}_{U(p)}V(p)(Z_1(p), Z_2(p))^1 + \\ &+ \frac{D^{(2)}_{U(p)}V(p)}{2!}(Z_1(p), Z_2(p))^2 + \cdots + \frac{D^{(k)}_{U(p)}V(p)}{k!}(Z_1(p), Z_2(p))^k \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $D^{(i)}$ désigne la somme de toutes les dérivées partielles d'ordre $i$ par rapport aux arguments de $\nabla$, c'est un opérateur vectoriel ; avec $(Z_1(p), Z_2(p))$ est voisin de 0.

**Définition 3.3.2.** [11] Un point $x$ de $X$ est dit $Hol-$régulier ou générique si pour tout entier naturel $k$, la dimension de $\underline{h}_k(x)$ atteint son maximum dans un voisinage ouvert de $x$ dans $X$.

Par dessus de l'hypothèse analytique, le critère de la Proposition 3.2.4 a l'inconvénient, de concentrer la vérification en un point, et donc de la faire porter sur le jet infini de la connexion.
Revenons au cas différentiable, et soit $\nabla$ une connexion sur la variété $X$ (provenant éventuellement d'une structure riemannienne $g$). La courbure $R$ de $\nabla$ est en tout point une application linéaire

$$R : \wedge^2 T_x X \to End(T_x X)$$

pour $x$ appartenant à $X$. En toute dimension supérieure ou égale à 2, il arrive que $R$ soit injectif (cf espace symétrique $S^n = SO(n+1)/SO(n)$) ; comme la non-injectivité de $R$ s'exprime par des équations aux dérivées partielles portant sur les $\Gamma_{ij}^k$ (ou sur les $g_{ij}$ si $\nabla$ est riemannienne), on conclut que génériquement, $R$ est injectif.
Rappelons que $X$ est de dimension $n$ et $x \in X$, supposons que la connexion $\nabla$ riemannienne et générique, puisque $\underline{h}(x)$ est conjugué d'un groupe orthogonal alors

$$n(n-1)/2 = dim \underline{r}_x \leqslant dim \underline{h}(x) \leqslant n(n-1)/2;$$

par conséquent, en tout point $\underline{r}_x = \underline{h}(x)$ et $\underline{r}_x^{(1)} \subset \underline{r}_x$. Ces considérations précisent la portée du critère suivant :

**Proposition 3.3.1.** *Soit $X$ une variété différentiable, et $\nabla$ une connexion linéaire sur $X$. Si le tenseur $\nabla R$ prend toutes les valeurs dans l'enveloppe linéaire de la courbure , et si celle-ci est de dimension constante, alors elle coïncide avec l'algèbre de Lie du groupe d'holonomies en chaque point.*

**Lemme 3.3.1.** *Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie, et $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $V_i(t)$ une famille de vecteurs dépendant différentiablement de $t \in I$. Soit $L(t)$ le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. Supposons $L(t)$ de dimension constante, et* *que pour tout $i$ et pour tout*

$$\frac{d}{dt}V_i(t) \in L(t)$$

*alors $L(t)$ est indépendant de $t$.*

**Théorème 3.3.1.** *(Théorème d'Ambrose-Singer)[2] L'algèbre de Lie $\underline{hol}(x_0)$ du groupe d'holonomies $Hol(x_0)$ (sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$) est engendrée par les vecteurs $\Omega_x(U, V)$ pour tout point $x$ d'un fibré principal $P$ cf. [2], relié avec $x_0$ par une courbe lisse par morceaux d'extrémités $x$ et $x_0$ et $U, V$ des vecteurs horizontaux en $x$.*

*Démonstration.* Cf.[2] □

*Démonstration.* (Proposition 3.3.1) Soit $x$ un point variant dans $X$. Désignons toujours par $\underline{r}_x$ l'enveloppe linéaire de la courbure en $x \in X$ ; et $\underline{h}(x)$ l'algèbre de Lie de l'holonomie. Soit $a$ un point fixe de $X$, et $\tau^\gamma$ le transport parallèle le long de $\gamma$ (opérant sur $\mathrm{End}(TX)$), où $\gamma$ désigne un chemin joignant $x$ et $a$. D'après le Théorème d' Ambrose-Singer, $\underline{h}(a)$ est l'enveloppe linéaire des sous-espaces $\tau^\gamma(\underline{r}_x)$. Prenons donc un point $x \in X$, un chemin $\gamma(t)$ paramétré par $[0, 1]$ et joignant $x$ de $a$. Rappelons que $R$ est défini par $R : \wedge^2 TX \longrightarrow End(TX)$. Soit $w_i(1 \leqslant i \leqslant n(n-1)/2)$ une base de $\wedge^2 T_x X$ et, $w_i(t)$ la base de $\wedge^2 T_{\gamma(t)} X$ obtenue par transport parallèle le long de $\gamma$, $\underline{r}_{\gamma(t)}$ définit une enveloppe linéaire dans End $(T_{\gamma(t)}X)$ des opérateurs $R_{\gamma(t)}(w_i(t))$. Or par hypothèse $\nabla R$ prend ses valeurs dans l'enveloppe linéaire de la courbure, alors $\nabla_{d/dt} R_{\gamma(t)(w_i(t))} \in \underline{r}_{\gamma(t)}$.

Considérons le sous-espace de $\mathrm{End}(T_a X)$

$$\underline{r}'_t = \tau^{\gamma|[t,1]}(\underline{r}_{\gamma(t)})$$

comme l'enveloppe linéaire est supposé de dimension constante, alors $\underline{r}'_t$ a une dimension indépendante de $t$, et il définit l'enveloppe linéaire des opérateurs

$$R'_{i,t} = \tau^{\gamma|[0,1]}\left(R_{\gamma(t)}(w_i(t))\right) \in \mathrm{End}(T_a X).$$

Il résulte de ce qui précède que pour tout $t \in [0,1]$;

$$\frac{d}{dt} R'_{i,t} \in \underline{r}'_t. \tag{3.6}$$

Comme $R'_{i,t}$ dépend différentiablement de $t$ pour $t \in [0,1]$, $\underline{r}'_t$ a une dimension constante par hypothèse, et qu'on a la relation (3.6). Alors d'après le Lemme 3.3.1, $\underline{r}'_t$ est indépendante de $t$. Donc, $\underline{r}'_t = \underline{r}'_1 = \underline{r}'_a$. Par conséquent $\underline{h}(a) = \underline{r}_a$. □

**Théorème 3.3.2.** *(Lie-Palais)[8] Soit $X$ une variété différentiable compacte et on a une action sur $X$ par une algèbre de Lie de dimension finie, alors c'est un relèvement d'une action d'un groupe de Lie de dimension finie.*

**Proposition 3.3.2.** *Soit $X$ une variété simplement connexe, et $\nabla$ une connexion linéaire sur $X$, sans torsion ; de courbure $R$. Supposons réalisées les conditions suivantes :*

*(a) l'enveloppe linéaire de la courbure $R$ a une dimension constante*

*(b) le tenseur $\nabla R$ prend ses valeurs dans $\underline{r}$*

*(c) en tout point $a$ de $X$, il existe une forme quadratique définie positive sur $T_aX$ préservée l'infinitésimalement par $\underline{r}_a$ ;*

*alors la connexion $\nabla$ provient d'une structure riemannienne sur $X$.*

Cette proposition résulte immédiatement de la Proposition 3.1.5 et de la Proposition 3.3.1. En effet, on a

*Démonstration.* (Proposition 3.3.2) Soit $a$ un point de $X$, supposons vérifiées les hypothèses ci-dessus. Comme $(a)$ et $(b)$ sont vrais par hypothèse, alors d'après la Proposition 3.3.1, l'enveloppe linéaire coïncide avec l'algèbre de Lie du groupe d'holonomies. Par conséquent, l'enveloppe linéaire est stable par le crochet et donc admet une structure d'algèbre de Lie. Or d'après la condition $(c)$, il existe une forme quadratique définie positive sur $T_aX$ préservée infinitésimalement par $\underline{r}_a$. Il s'ensuit que l'enveloppe linéaire est compact. On en déduit que l'algèbre de Lie du groupe d'holonomies est de dimension finie voir condition $(a)$. Comme $X$ est localement compact, alors d'après le Théorème de Lie-Palais, l'algèbre de Lie du groupe est le relèvement du groupe d'holonomies dont la structure topologique compact est préservée. Par suite le groupe d'holonomies est relativement compact. Or la Proposition 3.1.5 nous dit que pour une variété différentiable $X$ donnée de connexion $\nabla$ et sans torsion, $\nabla$ provienne d'une structure riemannienne si et seulement si ses groupes d'holonomies sont relativement compactes. D'où le résultat. □

## 3.4 Reconnaissance d'une connexion riemannienne par un algorithme et applications

Dans cette section, on va dresser un algorithme permettant de décider quel chemin prendre pour avoir une structure riemannienne.

### 3.4.1 Algorithme pour une structure riemannienne

Rappelons quelques notions qui ne sont pas encore énoncées dans les précédentes sections, nécessaires pour cette présente section.

**Définition 3.4.1.** Étant donnée un élément $A \in Gl(n, \mathbb{R})$. On appelle espace de nullité de $A$ l'ensemble des solutions de l'équation $Ax = 0$, où $x$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

**Proposition 3.4.1.** *[11] L'ensemble des points $Hol-$régulier est un sous-ensemble ouvert et dense dans $X$. Et pour un point régulier, la suite des sous-espaces de $\underline{h}(x)$ est stable à partir d'un certain rang $N$, $\underline{h}_N(x) = \underline{h}_{N+1}(x)$, et cette propriété reste valable dans un voisinage ouvert de $x$ dans $X$. Alors, $\underline{h}_N(y) = \underline{h}_{N+1}(y)$ pour tout point $y$ qui se trouve dans un voisinage ouvert de $x$. Par conséquent, si on trouve les sous-espaces $\underline{h}_k(y)$ dans un voisinage ouvert de $x$, on peut décider que $x$ est régulier ou non. Et dans le cas $x$ est point régulier, on peut calculer l'algèbre de Lie $h(y)$ dans* *un système de coordonnées locales. Donnons un algorithme permettant de prendre une décision pour avoir une structure riemannienne.*

*Démonstration.* (Cf. [11]) □

Algorithme : [5]

***Étape*** 1 : Choisir une base de coordonnées locales dans un voisinage ouvert $\mathcal{U}_x$ d'un point $x$ de $X$. Calculer le tenseur de courbure, les dérivées covariantes au point $x$ et les sous-espaces $\underline{h}_0(x) \subset \underline{h}_1(x) \subset \cdots$ au point $x$ étape par étape.

♦ S'il existe un entier naturel $N$ tel que $\underline{h}_N(x) \subset h_{N+1}(x)$ alors $x$ est un point $Hol-$ régulier. Continuer avec ***Étape*** 2.

♦ Sinon essayer un autre point.

***Étape*** 2 : ♦ Si $x$ est un point régulier, alors d'après le Théorème 3.2.1, poser $A = \nabla^{(k)}R, k = 0, \cdots, N \in \underline{h}'(x) = \underline{h}(x)$. Et calculer l'espace $\mathbf{G}(x)$ comme étant solution du système d'équations homogènes obtenu à partir de l'équation (3.3).

En effet, on trouve la solution de l'équation sous la forme de l'équation (3.4) correspondant à $k \geqslant N$.

♦ Si la dimension de $\mathbf{G}(x)$ est égale à 0 alors, $\nabla$ ne provienne pas d'une structure riemannienne, STOP.

***Étape*** 3 : ♦ Si $\mathbf{G}(x)$ a une dimension supérieure ou égale à 1, choisir une base $(G^1, \cdots, G^p)$ de $\mathbf{G}(x)$, alors tout élément $g$ de $\mathbf{G}(x)$ s'écrit sous forme $g = \lambda_1 G^1 + \cdots + \lambda_p G^p$. Soit $G^m_{kl}$ les composantes dans un système de coordonnées locales, ce sont des fonctions rationnelles des composantes des dérivées covariantes du tenseur de courbure.

Pour décider s'il y a une forme régulière dans $\mathbf{G}(x)$ ou non, calculer le déterminant $det(\sum_m \lambda_m G^m_{kl}), k \in \{1, \cdots, N\}$, considéré comme un polynôme de variables indépendantes des $\lambda_i$.

♦ Si le déterminant donne un polynôme nul, $\nabla$ n'est pas riemannien, STOP.

♦ Sinon, alors il existe une forme régulière dans $\mathbf{G}(x)$. Choisir étape par étape des entiers $\hat{\lambda}_1, \cdots, \hat{\lambda}_l$ pour obtenir une forme régulière $\hat{h} \in \mathbf{G}(x)$.

***Étape*** 4 : Dans le système de coordonnées locales choisi, désigner par $S^1, \cdots, S^p$ les endomorphismes symétriques par rapport à $\hat{h}$ de l'espace $(T_xX, \hat{h})$ ; calculer $S^1, \cdots, S^p$ les opérateurs linéaires correspondants respectivement à l'élément de la base $G^1, \cdots, G^p$ en passant par la forme régulière $\hat{h}$ selon la formule suivante :

$$\hat{h}(S^l U, V) = G^l(U, V); U, V \in T_xX, \quad l = 1, \cdots, p.$$

Évaluer les éléments dans $End(T_xX)$ qui engendrent tous les commutateurs des endomorphismes ci-dessus, soit $C_x = \langle [S^l, S^k], l, k = 1, \cdots, p \rangle$ le commutant de l'ensemble $S^1, \cdots, S^p$. La prochaine étape est maintenant de trouver l'espace de nullité $N_x$ de $C_x$.

♦ Si $N_x$ n'est pas invariant sous $S^1, \cdots, S^p$ ou que la restriction $\hat{h} \mid N_x$ n'est pas régulière alors $\nabla$ n'est pas Riemannienne, STOP.

♦ Sinon continuer avec ***Étape*** 5.

***Étape*** 5 : ♦ Si $C_x(\neq 0)$, alors chercher le complément orthogonal $\hat{N}_x$ de $N_x$ dans $T_xX$ par rapport à $\hat{h}$. Et calculer la restriction $G^l \mid \hat{N}_x, l = 1, \cdots, p$.

♦ S'ils ne génèrent pas l'espace $S^2(\hat{N}_x^*)$ des formes bilinéaires symétriques sur $\hat{N}_x$ alors $\nabla$ n'est pas Riemannienne. STOP.

♦ Sinon, continuer avec ***Étape*** 6.

♦ Si $C_x = (0)$, continuer avec ***Étape*** 6.

***Étape*** 6 : Trouver l'ensemble des générateurs $S^{(1)}, \cdots, S^{(s)}$ de l'espace $\mathbf{G}(x) \mid N_x$ dans la famille des restrictions $S^1 \mid N_x, \cdots, S^p \mid N_x$. Calculer tous les espaces propres de $S^{(1)}, \cdots, S^{(s)}$ et toutes les intersections possibles $Z^{(1)}_{\alpha_1} \bigcap \cdots \bigcap Z^{(s)}_{\alpha_s}$ (avec $Z^{(1)}_1, \cdots, Z^{(1)}_{p_1}, Z^{(2)}_2, \cdots, Z^{(2)}_{p_2}, \cdots, Z^{(s)}_s, \cdots, Z^{(s)}_{p_s}$ désignent l'ensemble de tous les sous-espaces des opérateurs, $S^{(1)}, \cdots, S^{(s)} \leqslant \alpha_i \leqslant p_j, \ j = 1, \cdots, s)$

des différents espaces propres de $S^{(1)}, \cdots, S^{(s)}$. Soit $(0), L_1, \cdots, L_r$ l'ensemble de toutes les intersections. Alors, les conditions nécessaires et suffisantes pour $\nabla$ provienne d'une structure riemannienne sont :

$r = s$ et $N_x = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$(la décomposition orthogonal par rapport à $\hat{h}$).

♦ Si les conditions ci-dessus ne sont pas satisfaites, alors $\nabla$ n'est pas riemannienne, STOP.

♦ Sinon continuer avec ***Étape*** 7.

***Étape*** 7 : ♦ Si chaque restriction $\hat{h} \mid L_j$ est définie positive ou négative alors $\nabla$ est riemannienne, et $\hat{N}_x := T_x^0 \subset T_x X$ est le sous-espace sur lequel $\psi(x)$ agit trivialement.

♦ Sinon, $\nabla$ n'est pas riemannienne.

Notez que si $X$ est de dimension 2, et la variété $(X, \nabla)$ est analytique réelle simplement connexe, la procédure de décision peut être simplifiée ; $\nabla$ est riemannienne seulement dans deux cas, à savoir, soit $p = dim(\mathbf{G}(x)) = 1$ et l'espace $\mathbf{G}(x)$ est engendré par une forme définie positive en un point donné $x$ $Hol$-régulier, soit $p = 3$ (ceci arrive si et seulement si $R = 0$), puis la connexion $\nabla$ est euclidienne.

Une autre manière de voir cet algorithme par Jacques Vey est la suivante cf. [12] :

**Définition 3.4.2.** Un multi-indice de taille $n$ est un $n-$uplet dont les coordonnées sont des entiers positifs.

**Définition 3.4.3.** [4] Soit $X$ une variété différentiable avec une connexion $\Gamma$, $u = (U_1, \cdots, U_n) \in L_x(X)$ une structure linéaire au point $x$ pour un champ de vecteurs $U$ de $T_x X$. Soit $\varrho = x_t$ la géodésique (ensemble des courbes autoparallèle pour une connexion linéaire) avec la condition initiale $(x, U)$, $U = a^1 U_1 + \cdots + a^n U_n$. On pose $exp(tU) = x_t$, où $exp(tU)$ est défini dans l'intervalle $t \in ]\epsilon_1, \epsilon_2[$ avec, $\epsilon_1, \epsilon_2$ désignent deux nombres strictement positifs. Dans le cas général, $exp$ est défini dans un sous-ensemble de $T_x X$. Mais dans le cas où la connexion est complète, c'est-à-dire toute géodésique peut être prolongée en une géodésique $\varrho = x_t \quad \forall t \in ]-\infty, +\infty[$, $exp$ est défini sur $T_x X$ tout entier $\forall x \in X$. A partir de l'isomorphisme linéaire $\mathbb{R}^n \longmapsto T_x X$, on définit un système de coordonnées dans $T_xX$. Le difféomorphisme $exp : V_x \longmapsto U_x$ ($V_x, U_x$ désignent respectivement un voisinage de $T_xX$ et $x$) définit alors un système de coordonnées locales dans $U_x$ appelé système de coordonnées normales caractérisé par la structure linéaire $u$.

**Remarque 3.4.1.** Pour que la connexion $\nabla$ soit riemannienne, une condition nécessaire évidente est l'existence d'une structure riemannienne $g^0$ préservée infinitésimalement en tout insuffisance de manière suivante. On sait que la série de Taylor centrée en $a \in X$ des coefficients $\Gamma_{ij}^k$ de la connexion $\nabla$ rapportée aux coordonnées normales en $a$ s'écrit

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \sum_{\alpha \quad \text{multi-indice de longueur}>0} A_{ij\alpha}^k (X')^\alpha$$

où les coefficients $A_{ij\alpha}^k (X')^\alpha$ s'expriment en fonction de la valeur en $a$ de la courbure $R$ et de ses dérivées covariantes ; la structure même de ces formules contient l'identité

$$\Gamma_{ij}^k(x) x^i x^j = 0.$$

A l'inverse, donnons-nous des tenseurs $S, S^{'}, S^{''}, \cdots$ sur l'espace $T_aX$, de type courbure, dérivée covariante de la courbure, etc $\cdots$ et disons nuls à partir d'un certain rang ; définissons ensuite les $\Gamma_{ij}^k(x)$ (polynomiaux) par la formule de Taylor. Il est clair que pour la connexion $\nabla$ ainsi obtenue, les coordonnées $((X')^i)$ seront normales au point a, et que la courbure et ses dérivées covariantes seront égales à $S, S^{'}$, etc $\cdots$ au point a.

Plaçons - nous pour simplifier en dimension 2. Si l'on impose à $S, S^{'}$ d'être de trace nulle ; la connexion $\nabla$ sera à valeurs dans $\underline{Sl}(2, \mathbb{R})$ et sa courbure (identifiée à sa valeur sur le bivecteur de base $e_1 \wedge e_2$) aura partout une trace nulle. Si de plus le déterminant de $S$ est positif, il en ira de même pour la courbure sur un voisinage de $a$ : ses valeurs propres seront imaginaires pures conjuguées, et elle préservera un structure riemannienne $g^\circ$. En choisissant un tenseur $S'$ dont les valeurs ne soient pas proportionnelle à $S$, on sera sûr que la connexion $\nabla$ n'est pas riemannienne.

**Remarque 3.4.2.** Dans la Proposition 3.3.1, on pourrait, quitte à faire des hypothèses d'analyticité, permettre des chutes de dimension à l'enveloppe linéaire de la courbure (l'égalité avec l'algèbre d'holonomies n'ayant lieu qu'aux points de dimension maximale).

**Remarque 3.4.3.** Enfin, les modifications à apporter pour prendre en compte les structures pseudo-riemanniennes sont évidentes.

### 3.4.2 Applications

Avant d'entrer dans le vif de cette section, il sera utile d'énoncer quelques théorèmes pour construire de manière explicite les exemples ci-dessous.

**Définition 3.4.4.** On appelle $p-$champ $\Delta$ sur une variété différentiable $X$ l'application $x \in X \mapsto \Delta(x)$ telle que $\Delta(x)$ est un sous-espace vectoriel de $T_xX$ de dimension $p$.

**Théorème 3.4.1.** *(Fröbenius) Soit $\Delta$ un $p-$champ sur une variété différentiable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(i) $\Delta$ est complètement intégrable*

*(ii) $\nabla$ est involutif c'est-à-dire pour tous $U_1, U_2 \in \Delta,\ [U_1, U_2] \in \Delta$*

*(iii) $d(\mathcal{D}(\Delta)) \subset \mathcal{D}(\Delta)$, avec $d(\mathcal{D}(\Delta))$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des $d\omega, \omega \in \Delta$,*

**Proposition 3.4.2.** *[5] Sur une variété analytique réelle $X$ munie d'une connexion analytique $\nabla$, soit $\mathcal{U}_x$ une voisinage ouvert de $x \in X$ formé exclusivement par des points $Hol-$réguliers. Supposons $\nabla$ riemannienne, et soit $\hat{g}$ une forme regulière sur $\mathcal{U}_x$. Soient $H^{(1)}, \cdots, H^{(t)}$ un champ de tenseurs sur $\mathcal{U}_x$ tel que :*

*(i) $H^{(1)}, \cdots, H^{(t)}$ soient linéairement indépendants de la forme bilinéaire symétrique sur $T_yX$, pour $y \in \mathcal{U}_x$.*

*(ii) l'espace de nullité de chaque $H^{(i)}$ au point $y$ est $N_y$,*

*(iii) la restriction $H^{(1)} \mid N_y^*, \cdots, H^{(t)} \mid N_y^*$ au point $y$ est engendrée par $S^2(N_y^*)$. Alors, il existe une $1-$forme $\omega_j^i$ dans $\mathcal{U}_x$ tel que $H^{(i)} = \sum \omega_j^i \otimes H^{(j)}, 1 \leqslant i, j, \leqslant t$. De plus, le système linéaire d'équations différentielles ordinaires homogènes $d\lambda_i + \lambda_k \omega_i^k = 0$, est complètement intégrable, $1 \leqslant i \leqslant t$.*

**Proposition 3.4.3.** *[5] Sous les mêmes hypothèses et mêmes notations que la Proposition précédente, supposons que pour tout $y \in \mathcal{U}_x, N_y = L_{1,y} \otimes \cdots \otimes L_{s,y}$ est la décomposition orthogonale par rapport à $\hat{g}$ (cf. Étape 3 de l'algorithme ). Notons $h_i$ le champ de tenseurs sur $\mathcal{U}_y$ tel que son espace de nullité au point $y \in \mathcal{U}_y$ coïncide avec le complément orthogonal de $L_{i,y}$ dans $T_yX$ par rapport à $\hat{g}$, et qui coïncide avec $\hat{g}$ sur $L_{i_j}$ pour tout $y \in \mathcal{U}_y$. Alors il existe une $1-$ forme différentielle exact sur $\mathcal{U}_y$ (premier intégration, $\omega_i = df_i$), tel que $\nabla h_i = \omega_i \otimes h_i, 1 \leqslant i \leqslant s$.*

**Proposition 3.4.4.** *[5] On garde toujours les mêmes hypothèses et notations que la Proposition 3.4.2, avec $H^{(i)}$ et $h_i$ sont analytiques sur $\mathcal{U}_y$. Alors, toutes les métriques riemanniennes admissibles sont de la forme :*

$$g = \sum_{i,k=1}^{t} b_i \lambda_k^i H^{(k)} + \sum_{k=1}^{s} c_k e^{-f_k} h_k, \tag{3.7}$$

*où $f_k$ est une fonction primitive de la forme différentielle exacte $\omega_j, 1 \leqslant j \leqslant s$, les fonctions $(\lambda_1^i, \cdots, \lambda_t^i), 1 \leqslant i \leqslant t$ forment une base des espaces de solutions des systèmes complètement intégrables de la Proposition 3.4.2, et les paramètres réels $b_i, c_k$ sont choisis de manière à ce que $g$ soit définie positive.*

Pour illustrer les théories énoncées ci-dessus, citons quelques exemples d'applications. Considérons les équations différentielles ordinaires représentées avec les composantes d'une connexion linéaire symétrique de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

**Exemple 3.4.1.** [11] Dans $\mathbb{R}^2$

$$\ddot{x} + \Gamma_{11}^1 \dot{x}^2 = 0, \quad \ddot{y} + \Gamma_{22}^2 \dot{y}^2 = 0 \tag{3.8}$$

avec $\Gamma^1_{11} = \frac{x}{x^2+1}, \Gamma^2_{22} = \frac{y}{y^2+1}$. Selon les trois dernières propositions successives, on cherche une métrique de la forme $g = b_i \nabla^i_k H^{(k)}, 1 \leqslant i, k \leqslant 3$ puisque le second terme de la somme dans l'équation (3.7) est nulle à cause de la trivialité de $N_y$ dans voisinage de $x$. On peut choisir comme champ de tenseurs

$$H^{(1)} = dx \otimes dy + dy \otimes dx, H^{(2)} = dx \otimes dx + dy \otimes dy, H^{(3)} = dx \otimes dx - dy \otimes dy. \quad (3.9)$$

Alors leurs dérivées covariantes sont

$$\begin{aligned}
\nabla H^{(1)} &= -\frac{x}{x^2+1}(dx \otimes dy + dy \otimes dx) \otimes dx \quad -\frac{y}{y^2+1}(dx \otimes dy + dy \otimes dx) \otimes dy \\
\nabla H^{(2)} &= -\frac{2x}{x^2+1} dx \otimes dx \otimes dx \qquad -\frac{2y}{y^2+1} dy \otimes dy \otimes dy \\
\nabla H^{(3)} &= -\frac{2x}{x^2+1} dx \otimes dx \otimes dx \qquad +\frac{2y}{y^2+1} dy \otimes dy \otimes dy \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Par conséquent les formes $\omega^i_j$ vérifient $\nabla H^{(i)} = \omega^i_j \otimes H^{(i)}$ avec

$$\begin{aligned}
\omega^1_1 &= -\frac{x}{x^2+1}dx - \frac{y}{y^2+1}dy, \qquad \omega^1_2 = \omega^1_3 = \omega^2_1 = \omega^3_1 = 0, \\
\omega^2_2 &= -\frac{x}{x^2+1}dx - \frac{y}{y^2+1}dy, \quad \omega^2_3 = -\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{y}{y^2+1}dy, \\
\omega^3_2 &= -\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{y}{y^2+1}dy, \quad \omega^3_3 = -\frac{x}{x^2+1}dx - \frac{y}{y^2+1}dy.
\end{aligned}$$

L'espace des solutions du système d'équations différentielles linéaires donné par

$$\begin{aligned}
d\lambda_1 &= \quad -\lambda_1 \frac{x}{x^2+1}dx \quad - \quad \lambda_1 \frac{y}{y^2+1}dy, \\
d\lambda_2 &= (\lambda_2 + \lambda_3)\frac{x}{x^2+1}dx + (\lambda_2 - \lambda_3)\frac{y}{y^2+1}dy, \\
d\lambda_3 &= (\lambda_2 + \lambda_3)\frac{x}{x^2+1}dx - (\lambda_2 - \lambda_3)\frac{y}{y^2+1}dy,
\end{aligned}$$

a une base $\langle\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\rangle$ formée par les triples des fonctions $\lambda^i = (\lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i), 1 \leqslant i \leqslant 3;$

$$\lambda^1 = (\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}, 0, 0) \quad \lambda^2 = (0, x^2+1, x^2+1) \quad \lambda^3 = (0, y^2+1, y^2+1).$$

On a la représentation matricielle de la composante de la métrique riemannienne compatible

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2b_2(x^2+1) & b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1} \\ b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1} & 2b_3(y^2+1) \end{pmatrix}$$

où les constants réels $b_1, b_2, b_3$ sont choisis arbitrairement de façon à ce que $g$ soit définie positive. Pour une notation classique, toutes les métriques admissibles sont

$$ds^2 = 2b_2(x^2+1)dx^2 + 2b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}dxdy + 2b_3(y^2+1)dy^2.$$

Pour la notation tensorielle, les tenseurs compatibles sont

$$\begin{aligned} g = \quad & 2b_2(x^2+1)dx \otimes dx \qquad +b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}dx \otimes dy + \\ & +b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}dy \otimes dx \qquad +2b_3(y^2+1)dy \otimes dy. \end{aligned}$$

**Exemple 3.4.2.** [11] On considère les coordonnées de $\mathbb{R}^2$, $x = (x^1, x^2)$ et le système d'équations différentielles ordinaires

$$(\ddot{x}^1)^2 + (x^1 - x^2)(\ddot{x}^1)^2 = 0, \quad (\ddot{x}^2)^2 + (x^1 - x^2)(\ddot{x}^2)^2 = 0. \tag{3.11}$$

Les courbes $c(s) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (longueur d'arc paramétré), solutions du système, représentent les famille géodésiques de la connexion linéaire symétrique de composantes $\nabla_{11}^1 = \nabla_{22}^2 = x^1 - x^2, \Gamma_{jk}^i = 0$ ailleurs, équivalentes.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^1} = (x^1 - x^2)\frac{\partial}{\partial x^1},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \frac{\partial}{\partial x^2} = (x^1 - x^2)\frac{\partial}{\partial x^2}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0 \text{ autrement.}$$

Déterminons les solutions de ces équations résultant de la condition $\nabla g = 0$ pour les fonctions $g_{ij}(x^1, x^2)$, qui devrait être les composantes de la matrice symétrique non-singulier fonctionnelle $G = g_{ij}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^1} g_{11} = (x^1 - x^2) g_{11}, \frac{\partial}{\partial x^2} g_{11} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} g_{12} = 0, \frac{\partial}{\partial x^2} g_{12} = (x^1 - x^2) g_{12}, \quad g_{ij} = 0 \quad \forall i, j,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} g_{22} = 0, \frac{\partial}{\partial x^2} g_{22} = (x^1 - x^2) g_{22}, \text{rang maximal} = q = 0.$$

Où $q$ est le rang maximal des toutes les solutions possibles de l'équation (3.2) en remplaçant $A$ par $R(U', V'), U', V' \in T_x X$ et l'équation 3.4. Donc $G = 0$, et la seule solution est triviale et la connexion n'est pas métrisable.

# Conclusion

Après avoir donné des généralités sur la géométrie riemannienne, sous l'hypothèse de la nullité torsion de la connexion linéaire $\nabla$, nous avons construit dans ce travail une structure riemannienne par différentes manières. Le Théorème fondamental de la géométrie riemannienne jouait alors un rôle important pour cette construction. Nous avons, pour ce faire, utilisé la relative compacité des groupes d'holonomies $Hol(x)$ rattachés à la variété différentiable muni de la connexion linéaire $\nabla$, permettant l'invariance de la forme quadratique $g$ sur l'espace tangent par le groupe d'holonomies, et par conséquent le parallélisme de $g$ par $\nabla$ pour avoir la connexion de Levi-Civita. Nous avons proposé une autre formulation de notre problème, en considérant une variété analytique réelle simplement connexe accompagnée d'une connexion analytique réelle. Cependant, ces nouvelles hypothèses sous l'existence d'une forme quadratique symétrique $g$ préservée infinitésimalement par les dérivées covariantes, fournissent le résultat à notre problème par le fait que l'algèbre de Lie des groupes d'holonomies coïncide avec l'algèbre de Lie du groupe d'holonomies infinitésimales. En outre nous avons aussi présenté notre problème de manière à considérer les enveloppes linéaires de la courbure, dans le cas où $X$ est une variété différentiable. Pourtant, ces conditions sous le fait que l'enveloppe linéaire de la courbure de dimension constante coïncide avec l'algèbre de Lie du groupe d'holonomies, rendent la forme quadratique $g$ parallèle à $\nabla$ et permet ainsi de construire une structure riemannienne. Une extension naturelle de ce travail est de considérer une structure finslerienne (déjà fait par M. ANONA dans [1] où la courbure est régulière) ou une structure kahlerienne sur une variété différentiable. Les études des algèbres de Lie rattachées à ces structures en fonction des propriétés de la connexion s'avèrent aussi promettant.

# Bibliographie

[1] M. ANONA, *Sur les connexions finsleriennes à courbure régulière*, Publications du Services de Mathématiques, vol 1(1987), p.40-45.

[2] S. Matthias C. Giulio, *The Ambrose-Singer theorem*, January, 2011.

[3] D. D. Joyce, *Riemannian holonomy group and calibrated geometry group*, The Mathematical Institute, 24-29 St. Giles, Oxford, OX1 ;3LB, 2007.

[4] S. Kobayashi K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Interscience Publishers, 1963.

[5] O. Kowalski, *Metrazibility of affine connections on analytic manifolds*, Note Mat.8 1988.

[6] A. D. Lewis, *Note on linear frame bundles*, 1995.

[7] T. Masson, *Géometrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions*, Case 907 - Campus de Luminy, 2010.

[8] R. S. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Memoirs of American Mathematical Society, 22, 1957.

[9] F. Paulin, *Leçons de géométrie riemannienne*, Département de Mathématiques d'Orsay, 2011.

[10] A. Vanzurava, *Metrization of connections with regular curvature*, Archivum Mathematicum (BRNO), Tomus 45 (2009), 325-333.

[11] ______, *Metrization problem for linear connections and holonomy group*, Archivum Mathematicum (BRNO), Tomus 44 (2008), 511-521.

[12] J. Vey, *Travaux de Jacques Vey*, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Paris, 1983.

[13] H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math., Second Series, Volume 37, Issue 3, (Jul., 1936), 645-680.

**Nom** : LANTONIRINA
**Prénoms** : Sendrasoa Laurence
**Adresse** : III S 363 ACL Madera Namontana, Antananarivo 101, Madagascar
**Contact** : +261334651397, +261340463412, laurence@aims-senegal.org
**Titre** : Sur les variétés riemanniennes

## Résumé

Ce travail éclaircit l'œuvre de Jacques Vey intitulé : sur les variétés riemanniennes. L'objectif était de construire une variété riemannienne. On l'aborde par trois manières. On se donne une variété différentiable, et on introduit des conditions nécessaire et/ou suffisante sur ses groupes d'holonomies afin d'obtenir une structure riemannienne. Puis, on considère une variété analytique réelle et on combine avec les $k^{\text{ième}}$ dérivées covariantes dans le but d'avoir une structure riemannienne. Et, la dernière construction s'agit de revenir au cas différentiable et de regarder quelques hypothèses sur les enveloppes linéaires de la courbure pour atteindre le résultat. D'ailleurs, quelques exemples d'illustrations sont donnés.

**Mot-clés** : variété différentiable, Connexion Levi-Civita, groupes d'holonomies, $K^{\textbf{ième}}$ dérivée covariante, variété analytique réelle, enveloppe linéaire de la courbure.

## Abstract

This work highlights a paper of Jacques Vey titled : "Sur les variétés riemanniennes". The principal objet is to construct a riemanniann manifold. We have three ways. Given a differentiable manifold, we introduce a sufficient and necessary condition on its holonomy groups to obtain a riemannian structure. Then, we consider an real analytic manifold combine with $K^{\text{th}}$ covariante derivative with a view to get a riemannian structure. And, the last construction concern to come back in the case differentiable and to see some hypothesis on linear envelop of the curvature to reach the result. Moreover, some illustrative examples are given.

**Keywords** : differentiable manifold, Levi-Civita connection, holonomy group, $K^{\text{th}}$covariante derivative, real analytic manifold, linear envelop of curvature.

**Encadreur** : Princy RANDRIAMBOLOLONDRANTOMALALA, Maître de Conférences à l'Université d'Antananarivo