Chapitre 4

Analyse dynamique

Introduction

Dans ce chapitre, on va analyser les termes sources obtenus dans les équations d'équilibre en s'appuyant sur des résultats de la partie bibliographique. On va classer les sources d'excitation en fonction de la dépendance de leur amplitude en fonction de la vitesse de roulement. Par des exemples simples, on va aussi illustrer leur interprétation physique (rugosité, défilement des patins)...

On va aussi proposer une nouvelle description des phénomènes de résonance dans les pneumatiques en roulement à partir de la propagation libre. Cette méthode aurait l'avantage pour l'ingénieur de déterminer les pneumatiques intrinsèquement vibrants (et bruyants) quelque soit le type de route sur lequel ils roulent.

Cette démarche justifie a posteriori qu'on ne se soit pas intéressé au calcul explicite de la solution du roulement quasi statique du pneumatique.

On testera enfin notre compréhension sur une expérience complexe.

4.1 Analyse des sources d'excitation

On rappelle que les sources d'excitation sont les termes donnés qui apparaissent dans les équations d'équilibre qui portent sur la réponse dynamique.

On a une condition de saut :

$$\left[\underline{\underline{\sigma'}}\right].\underline{n} - \rho_0\,(\underline{u_0}.\underline{n})\,[\underline{u}] = +\rho_0\,(\underline{u_0}.\underline{n})\,[\underline{u_s}] + \rho_0\,(\underline{u_0}.\underline{n})\,[\underline{u_0}] \tag{4.1}$$

et une équation d'équilibre :

$$\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma'}} - \rho_0\,\underline{a} = \rho_0\,\underline{a_s} + \rho_0\,\underline{a_0}$$

L'excitation par le mouvement d'entraînement au niveau des lignes d'attaque et de fuite :
Dans la condition de saut 4.1 qui traduit l'équilibre au niveau des ondes de choc $\mathcal{A}_0(t)$ et $\mathcal{F}_0(t)$, le second terme $+\rho_0\,(\underline{u_0}.\underline{n})\,[\underline{u_0}]$ est un terme dont l'amplitude varie comme le carré de la vitesse de roulement, comme le bruit émis par les pneumatiques.

C'est un terme constant dans le cas du roulement à vitesse constante, mais il s'applique sur une surface qui varie en fonction du temps suivant si elle coupe une rainure ou un patin de gomme. Cette surface correspond à une section de la bande de roulement. C'est une excitation par la variation du flux de masse au travers des lignes d'attaque et de fuite de la zone de contact.

Cela signifie que pour un pneumatique lisse, ce terme est stationnaire : il ne provoque pas de vibration.

Les ingénieurs prédisent qualitativement le spectre du bruit du pneumatique dû à l'excitation par le défilement des patins de gomme à partir de l'analyse d'une section courante de la bande de roulement : cette source pourrait modéliser l'excitation par le motif de bande de roulement.

On présente ici une analyse simplifiée de ce terme au niveau de la ligne de fuite (le problème est symétrique). Les notations sont illustrées dans la figure 4.1.

On suppose que dans la zone de contact, la vitesse d'entraînement $\underline{u_0}$ est horizontale, et qu'après la ligne de fuite (située à un angle θ'_0 par rapport à la verticale descendante), elle est tangente au cercle de centre l'axe de la roue :

$$\underline{u_0}(\theta_0'^{-}) = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{u_0}(\theta_0'^{+}) = \begin{pmatrix} u_0\cos\theta'_0 \\ -u_0\sin\theta'_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La conservation du flux de matière permet de calculer la normale à la surface d'onde de choc : $\underline{u_0}.\underline{n}$ est continue.

$$n_x = n_x\cos\theta'_0 - n_y\sin\theta'_0 \Rightarrow n_x\sin\frac{\theta'_0}{2} = n_y\cos\frac{\theta'_0}{2}$$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} -\cos\dfrac{\theta'_0}{2} \\ \sin\dfrac{\theta'_0}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a choisi la normale qui pointe de $\theta_0'^-$ vers $\theta_0'^+$.

On trouve alors le terme source :

$$\rho_0\,(\underline{u}_0.\underline{n})\,[\underline{u}_0] = \rho_0\,u_0\,\cos\frac{\theta'_0}{2}\begin{pmatrix} 2\sin^2\dfrac{\theta'_0}{2} \\ 2\sin\dfrac{\theta'_0}{2}\cos\dfrac{\theta'_0}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_0\,u_0\,\sin\theta'_0\begin{pmatrix} \sin\dfrac{\theta'_0}{2} \\ \cos\dfrac{\theta'_0}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lorsqu'on diminue l'angle θ'_0 en augmentant le rayon de la bande de roulement (on suppose que la taille de la zone de contact reste inchangée), l'amplitude de ce terme diminue comme $\sin\theta'_0$. On retrouve un résultat connu sur la dépendance du bruit de roulement en fonction du diamètre de la bande de roulement.

L'excitation par le déplacement quasi statique au niveau des lignes d'attaque et de fuite :
Dans la condition de saut 4.1 qui traduit l'équilibre au niveau des ondes de choc $\mathcal{A}_0(t)$ et $\mathcal{F}_0(t)$, le premier terme $+\rho_0\,(\underline{u}_0.\underline{n})\,[\underline{u}_s] = \rho_0\,(\underline{u}_0.\underline{n})\,\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}_s.[\underline{u}_0]$ varie en amplitude comme le carré de la vitesse du véhicule.

- *Effet d'un gradient de déplacement stationnaire :*
  Ce terme vient corriger l'amplitude de l'excitation par le terme précédent. Comme lui, il ne provoque une excitation que si il y a une variation du flux de masse au travers des lignes d'attaque et de fuite : ce terme ne provoque pas de vibration dans le cas d'un pneumatique lisse.

  ◇ Lorsque dans la réponse statique la gomme est comprimée (par exemple dans une expérience où la déflexion de la roue est constante et la pression de gonflement augmente), cette source de bruit diminue le bruit dû au défilement des patins de gomme. Ce qui est conforme à l'expérience.

  En effet, on a un gradient de déplacement statique de la forme :

$$\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}_s = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\epsilon_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\epsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

  ϵ_{yy} est négatif, on a tenu compte d'une incompressibilité de la gomme. Le terme d'excitation s'écrit finalement :

$$\rho_0\,(\underline{u}_0.\underline{n})\,\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}_s.[\underline{u}_0] = \rho_0\,u_0\,\sin\theta'_0\,\epsilon_{yy}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta'_0}{2} \\ \cos\dfrac{\theta'_0}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans l'approximation où l'angle définissant la position de la ligne de fuite est petit, le terme suivant la première direction est négligeable. Le terme suivant la deuxième direction s'oppose bien à l'excitation par le motif de bande de roulement. Ce terme est d'autant plus important que la gomme est souple, ce qui signifierait qu'un pneumatique à gomme souple est moins bruyant qu'un pneumatique à gomme rigide.

◇ Lorsque le couple exercé sur la jante est important, la gomme de la bande de roulement est cisaillée. Si le couple est moteur, cette source de bruit augmente le bruit dû au défilement des patins de gomme. C'est un résultat qui a été observé dans [**Schultze & all**91].

En effet, on a un déplacement $\underline{\xi}_s = \alpha y \underline{e}_x$ et un gradient de déplacement statique de la forme :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi}_s = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

α est positif dans le cas d'un couple moteur (négatif dans le cas d'un couple frein).

$$\rho_0\,(\underline{u}_0.\underline{n})\,\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi}_s.[\underline{u}_0] = \rho_0\,u_0\,\sin\theta'_0\,\alpha \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta'_0}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien un terme qui augmente l'excitation par le motif de bande de roulement.

- *Effet d'un gradient de déplacement instationnaire :*
  Lorsqu'un élément de rugosité se trouve au niveau de la ligne d'attaque ou de la ligne de fuite, en régime quasi statique il compresse la gomme, donnant lieu à un gradient de déplacement statique. Ce terme pourrait donc être interprété en régime dynamique comme l'excitation par le choc des éléments de rugosité sur le pneumatique, ou l'effet inverse, leur brutale disparition de la zone de contact. Pour passer du profil de la route à l'excitation du pneumatique, il suffit de connaître l'indentation statique.

L'excitation par les forces de volume :
Dans l'équation d'équilibre sur $\mathcal{D}_0(t)$ le terme d'excitation $\rho_0\,(\underline{a}_s + \underline{a}_0)$ modélise l'excitation due à l'évolution du déplacement statique pour une particule.

Si on suppose que l'indentation pour une particule donnée ne change pas tout au long de la zone de contact, ce terme source représente l'excitation par le glissement de la frontière du pneumatique. Et si ce glissement ne dépend que de la position de la particule dans la zone de contact, la vitesse de glissement est stationnaire.

En conclusion, on a fait apparaître trois types de sources :

1. une source d'excitation par le défilement du motif de bande de roulement : elle est localisée au niveau de la ligne de fuite et de la ligne d'attaque de la zone de contact, elle varie comme le carré de la vitesse de roulement.

2. une source d'excitation par la déformation de la gomme : elle est localisée au niveau de la ligne de fuite et de la ligne d'attaque de la zone de contact, elle varie comme le carré de la vitesse de roulement. Elle a deux effets différents : une déformation stationnaire amplifie ou diminue l'excitation par le défilement des patins de gomme, et une déformation instationnaire modélise l'excitation par le mouvement de la frontière du pneumatique au niveau des lignes d'attaque et de fuite.

3. une source d'excitation par le mouvement des particules dans la zone de contact : elle varie comme le carré de la vitesse. Comme on n'a pas observé de source importante des vibrations à ce niveau là, il est probable que cette source soit négligeable.

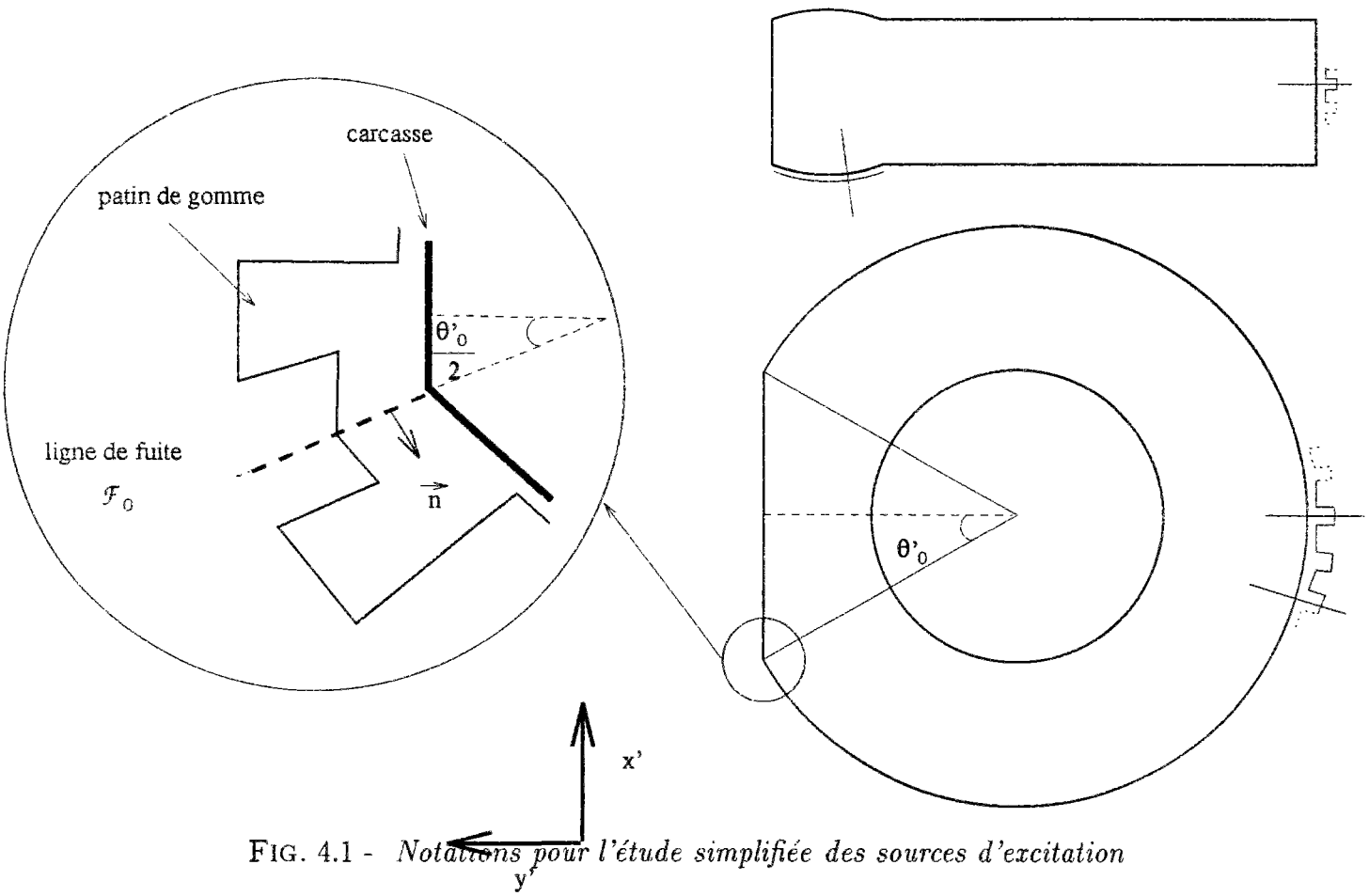

FIG. 4.1 - *Notations pour l'étude simplifiée des sources d'excitation*

4.2 Analyse des amplifications

Dans ce paragraphe, le comportement dynamique va être étudié à partir des coefficients d'amplification, calculés pour un choix particulier de temps initial t_i, et un choix particulier de période.

On veut aussi s'assurer du caractère intrinsèque des coefficients d'amplification.

Enfin, on va ébaucher une interprétation expérimentale des coefficients d'amplification.

• Utilisation des coefficients d'amplification

Dans le cas du roulement sur chaussée lisse, on avait trouvé la solution de la forme :

$$\boxed{\underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{1-\lambda_n} \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)}$$

Les vibrations de ce système s'analysent à partir des vibrations libres. La partie des vibrations libres qui se fait en phase avec l'excitation périodique est la plus amplifiée. Les autres contributions se superposent de manière plus ou moins destructive.

Les modes propres de résonance sont associés à la valeur propre 1. Notre étude qualitative du comportement vibratoire de ce système mécanique pourrait être réduite à rechercher les espaces propres de l'opérateur de propagation $\mathcal{L}(t_i, t_i + N)$ proches de 1.

Cette expression de la solution s'interprète de la façon suivante. On étudie la solution des vibrations avec source d'excitation suivant et on regarde la composante suivant un mode propre :

◇ Au bout d'un tour de roue, elle vaut e_n.

◇ Au second tour de roue, elle est la somme de la propagation libre de l'excitation due au tour précédent, $\lambda_n\, e_n$, et d'une nouvelle excitation e_n. Cette somme vaut $(1+\lambda_n)e_n$.

◇ Au bout de trois tours, elle est la somme de la propagation libre de l'excitation due aux deux tours précédents, $\lambda_n\,(1+\lambda_n)\,e_n$, et d'une nouvelle excitation e_n. Cette somme vaut $(1+\lambda_n+{\lambda_n}^2)e_n$.

◇ Et ainsi de suite jusqu'au $p^{\text{ième}}$ tour, où la solution vaut $(1+\lambda_n+{\lambda_n}^2+\ldots+{\lambda_n}^{p-1})e_n$.

En régime permanent, on a la limite :

$$(1+\lambda_n+{\lambda_n}^2+\ldots+{\lambda_n}^{p-1}+\ldots) = \frac{1}{1-\lambda_n}$$

Dans le cas du roulement sur chaussée rugueuse, on retrouve une conclusion similaire au cas du roulement sur chaussée lisse en ce qui concerne la *composante moyenne* des vibrations, à savoir, une amplification des modes proches de 1 :

$$\boxed{\langle \mathring{\underline{\Upsilon}}\,(t_i, \underline{x}_0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle e_n \rangle}{1-\lambda_n} \underline{\Upsilon}^n_{t_i}(\underline{x}_0)}$$

Pour *la fluctuation autour de la composante moyenne*, on avait établi la formule suivante :

$$\boxed{\mathbf{C}(t_i, \underline{x}_0, \underline{y}_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle e_n\, e_m\rangle - \langle e_n\rangle\,\langle e_m\rangle}{1-\lambda_n\lambda_m}\, \underline{\Upsilon}^n_{t_i}(\underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}^m_{t_i}(\underline{y}_0)}$$

On trouve que le pneumatique amplifie toutes les composantes de l'effet de l'indentation et du glissement instationnaire. La limitation de cette excitation ne serait due qu'à la dissipation visqueuse, dont on a pas tenu compte dans les équations.

Entre deux tours de roue, une composante n de la fluctuation est tournée dans le plan complexe par multiplication par λ_n de module 1, et elle est incrémentée par une variable aléatoire centrée. Ce processus ressemble à une marche aléatoire. Pour une marche aléatoire, on s'éloigne de l'origine comme $\sqrt{n}$. Cela pourrait expliquer que la fluctuation des vibrations soit très importante en régime stationnaire.

• Relation avec l'analyse modale classique

On va utiliser l'analyse de l'opérateur de propagation libre dans des cas où la solution est connue. Bien sûr, cette façon de procéder est un peu trop compliquée pour traiter des cas aussi simples, mais ces exemples permettrons de se représenter la signification des coefficients d'amplification.

Supposons qu'on ait un système oscillant décrit par l'équation :

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -ku + F$$

soumis à une force d'excitation F de période N. Regardons comment s'applique l'analyse développée au chapitre 3 et vérifions qu'on retrouve les conclusions auxquelles on s'attend.

Les vibrations libres sont décrites par l'équation :

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -ku$$

On pose $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. La solution de la propagation libre est de la forme :

$$u(t) = A\cos(\omega t) - \frac{B}{\omega}\sin(\omega t)$$

L'opérateur de propagation libre $\mathcal{L}$ est une matrice 2 x 2 qui relie le déplacement et la vitesse au temps 0 au déplacement et à la vitesse au temps N.

◇ Si au temps 0, le déplacement vaut 1 et la vitesse 0, la solution est $u_1(t) = \cos(\omega t)$ et au temps N, on a $u_1(N) = \cos(\omega N)$ et $\dot{u}_1(N) = -\omega \sin(\omega N)$.

◇ Si au temps 0, le déplacement vaut 0 et la vitesse 1, la solution est $u_2(t) = -\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$ et au temps N, on a $u_2(N) = -\frac{1}{\omega}\sin(\omega N)$ et $\dot{u}_2(N) = \cos(\omega N)$.

On a donc :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \cos(\omega N) & -\frac{1}{\omega}\sin(\omega N) \\ -\omega \sin(\omega N) & \cos(\omega N) \end{pmatrix}$$

Cette matrice a deux valeurs propres :

$$\det\left|\mathcal{L} - \lambda\right| = \lambda^2 - 2\cos(\omega N)\lambda + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \cos(\omega N) + i\sin(\omega N) = e^{i\omega N} \\ \lambda_2 = \cos(\omega N) - i\sin(\omega N) = e^{-i\omega N} \end{cases}$$

On retrouve deux coefficients d'amplification de module 1, conjugués un par rapport à l'autre. On prédit une amplification si $\omega = \frac{2k\pi}{N}$, c'est à dire si la pulsation propre est un multiple de la pulsation fondamentale de l'excitation.

Pour un système à plusieurs degrés de liberté, on aurait trouvé deux séries de nombres, $e^{i\omega_n N}$ et $e^{-i\omega_n N}$. Si le système est stable, ω_n est une pulsation propre et les nombres $e^{i\omega_n N}$ sont de module 1. Par contre, si le système est instable, il existe des nombres ω_n imaginaires purs et $e^{i\omega_n N}$ est réel.

On propose enfin une explication du rôle de l'amortissement. Si on introduisait après calcul des modes propres et des fréquences propres sans dissipation une dissipation faible, la théorie de l'amortissement modal permettrait de recaler les fréquences propres. Par conséquent on trouverait les valeurs différentes pour les valeurs propres de l'opérateur de propagation libre sur une période N :

$$e^{i\omega_n(1+i\epsilon_n)N} = e^{-\epsilon_n\omega_n N}e^{i\omega_n N} \text{ et}$$

$$e^{-i\omega_n\overline{(1+i\epsilon_n)}N} = e^{-\epsilon_n\omega_n N}e^{-i\omega_n N}.$$

Les valeurs propres seraient de module $e^{-\epsilon_n\omega_n N}$, d'autant plus petit que le produit de la fréquence propre par l'amortissement modal ϵ_n est petit.

• Indépendance des coefficients d'amplification par rapport au temps initial

On a introduit un temps t_i dont tous les calculs dépendent. On peut montrer que les coefficients d'amplification n'en dépendent pas.

On prend la suite chronologique d'instants t_i, t'_i, t_i+N, t'_i+N. Dans le dernier chapitre, on a utilisé la diagonalisation de $\mathcal{L}(t_i, t_i+N)$. Supposons qu'on choisisse maintenant d'utiliser la diagonalisation de $\mathcal{L}(t'_i, t'_i+N)$ l'opérateur de propagation entre les temps t'_i et t'_i+N. On va montrer que les vecteurs propres obtenus dans ce cas sont les états du système au temps t'_i correspondant à un vecteur propre de $\mathcal{L}(t_i, t_i+N)$ l'opérateur de propagation entre les temps t_i et t_i+N.

On étudie la solution des équations de propagation sans force de volume à partir de l'instant t_i jusqu'à l' instant t'_i+N. Pour cela, nous pouvons soit intégrer les équations de t_i à t'_i puis de t'_i à t'_i+N, soit les intégrer de t_i à t_i+N puis de t_i+N à t'_i+N :

$$\mathcal{L}(t'_i, t'_i+N) \circ \mathcal{L}(t_i, t'_i) = \mathcal{L}(t_i+N, t'_i+N) \circ \mathcal{L}(t_i, t_i+N)$$

En utilisant la condition de périodicité, nous pouvons déduire qu'intégrer la solution de t_i+N à t'_i+N revient à l'intégrer de t_i à t'_i :

$$\mathcal{L}(t_i, t'_i) = \mathcal{L}(t_i+N, t'_i+N)$$

En appliquant cette relation à un vecteur propre de $\mathcal{L}(t_i, t_i+N)$, nous obtenons :

$$\mathcal{L}(t'_i, t'_i+N) \left\{ \mathcal{L}(t_i, t'_i).\underline{\Upsilon}^n_{t_i}(\underline{x}_0) \right\} = \lambda_n \left\{ \mathcal{L}(t_i, t'_i).\underline{\Upsilon}^n_{t_i}(\underline{x}_0) \right\}$$

Aussi, avec un raisonnement similaire on peut montrer qu' un vecteur propre de $\mathcal{L}(t'_i, t'_i+N)$ se propage en t_i+N (qui est équivalent à t_i) en un vecteur propre de $\mathcal{L}(t_i, t_i+N)$ associé à la même valeur propre.

• Dépendance des coefficients d'amplification par rapport à la longueur de la période

Dans cette analyse, nous avons écrit la condition de périodicité sur la plus petite période. Nous en avons déduit des modes résonants. Que se passe-t-il quand on choisit une période plus grande, double par exemple?

l'effet de l'excitation :
La solution particulière des équations du mouvement avec une donnée initiale de Cauchy nulle à t_i se déduit de la façon suivante.

A t_i+N, la solution est celle déjà calculée : $\underline{\Upsilon}(t_i+N, \underline{x}_0)$.

Pour connaître la solution au temps $t_i + 2N$, on applique la même analyse que pour un couple déplacement-vitesse normal entre les instants t_i et $t_i + N$: on doit sommer l'effet de la propagation libre sur le terme $\underline{\Upsilon}(t_i + N, \underline{x}_0)$ et ajouter l'effet de l'excitation entre $t_i + N$ et $t_i + 2N$ qui est le même que l'effet de l'excitation entre t_i et $t_i + N$:

$$\begin{aligned}\underline{\Upsilon}_{\mathbf{e}}(t_i + 2N, \underline{x}_0) &= \underline{\Upsilon}_{\mathbf{e}}(t_i + N, \underline{x}_0) + \mathcal{L}(t_i, t_i + N).\underline{\Upsilon}_{\mathbf{e}}(t_i + N, \underline{x}_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1 + \lambda_n)e_n\underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)\end{aligned}$$

l'effet de la propagation :
A cause de la périodicité, le nouvel opérateur de propagation est le carré de l'ancien :

$$\mathcal{L}(t_i, t_i + 2N) = \mathcal{L}(t_i + N, t_i + 2N) \circ \mathcal{L}(t_i, t_i + N) = \mathcal{L}(t_i, t_i + N) \circ \mathcal{L}(t_i, t_i + N)$$

Les vecteurs propres sont donc les $\underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$ et les valeurs propres sont ${\lambda_n}^2$.

La nouvelle décomposition modale de la solution $\underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0)$ développée en raisonnant sur une période double s'écrit alors :

$$a_n = (1 + \lambda_n)e_n + {\lambda_n}^2 a_n$$

On pourrait penser qu'on a introduit des nouveaux modes résonants dont la valeur propre est -1. Cependant, pour ces modes, le terme correspondant à l'effet de l'excitation est aussi annulé : $(1 + \lambda_n)e_n = 0$

On a juste introduit une indétermination.

Le raisonnement aurait pu être mené avec une autre multiplicité. On aurait trouvé :

$$a_n = \frac{(1 + \lambda_n + \lambda_n^2 + ... + \lambda_n^p)e_n}{(1 - \lambda_n)(1 + \lambda_n + \lambda_n^2 + ... + \lambda_n^p)}$$

qui aurait introduit une indétermination pour tous les modes propres dont la valeur propre est une racine $p + 1$ ème de l'unité.

En conclusion, il apparaît préférable de faire l'analyse sur la période fondamentale, pour ne pas introduire des indéterminations dans la résolution.

• Eléments d'une procédure d'identification expérimentale

On considère l'expérience suivante : on fait rouler un pneumatique sur un cylindre lisse (métallique) à vitesse constante. On relève N, la période de rotation de la roue en régime stationnaire.

1. Au temps t_i, on mesure la position ou la vitesse d'un point $P(\underline{x}_0)$ du pneumatique :

$$\underline{\Upsilon}_0 = \underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0)$$

C'est la vibration stationnaire.

2. Entre les instants t_i et t_i+N, on crée une perturbation (par exemple un choc sur le pneumatique). A partir de ce moment, le déplacement des particules du pneumatique est la superposition de la vibration stationnaire et de la vibration due à la perturbation : à l'instant $t_i + N$, on mesure à nouveau la position et la vitesse du point P et on la compare à la vibration stationnaire :

$$\underline{\Upsilon}(t_i + N, \underline{x}_0) - \underline{\Upsilon}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{X}_0)$$

Le second membre de l'égalité représente l'effet de la perturbation au temps $t_i + N$ et au point P. Cette perturbation est écrite ici avec la décomposition modale, mais cette décomposition n'est pas connue.

On peut vérifier à cette étape la validité de la linéarité de la perturbation.

3. Entre les instants $t_i + N$ et $t_i + 2N$, la perturbation se propage en suivant les équations du mouvement sans excitation. Au temps $t_i + 2N$, on mesure de nouveau la vitesse ou la position du point P, et on a la relation théorique:

$$\underline{\Upsilon}(t_i + 2N, \underline{x}_0) - \underline{\Upsilon}_0 = \mathcal{L}(t_i, t_i + N).\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{X}_0)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda_n \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{X}_0)$$

4. Et ainsi de suite, on mesure au temps $t_i + qN$ la vitesse ou la position du point P :

$$\underline{\Upsilon}(t_i + qN, \underline{x}_0) - \underline{\Upsilon}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (\lambda_n)^{q-1} \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{X}_0)$$

5. Avec un analyseur de signal, on calcule à chaque acquisition, et pour des valeurs de φ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, le nombre complexe suivant :

$$(\underline{\Upsilon}(t_i + qN, \underline{x}_0) - \underline{\Upsilon}_0) \exp(i\varphi)^{q-1} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_n \exp(i\varphi)]^{q-1} d_n \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

Si on somme ces nombres pour $q = 0$ jusqu'à $q = Q$ très grand, on tend vers la limite :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{1 - \lambda_n \exp(i\varphi)} \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

6. Pour N donné, λ_n a un module proche de 1 $(1 - \epsilon_n)$ et un argument φ_n. La somme précédente tend vers un nombre très grand (de l'ordre de $\frac{1}{\epsilon_n}$) pour la valeur $\varphi = -\varphi_n$. On mesurerait donc φ_n par ce moyen.

7. Avec une mesure de largeur de bande, on peut mesurer $|\lambda_n| = 1 - \epsilon_n$, le module du coefficient d'amplification.

4.3 Interprétation d'une expérience complexe

Dans ce paragraphe, on va modéliser une expérience citée dans [**Walker & Cortès**88]. Dans cet article, les auteurs étudient le bruit émis par un pneumatique en roulement en fonction du poids appliqué sur la roue (ou de façon équivalente la longueur de la zone de contact).

Dans l'expérience suivante (figure 4.2), un pneumatique ayant deux rainures longitudinales et 64 rainures transversales de 10 mm (64 blocs de gomme de 18,5 mm de long) roule sur un cylindre lisse, à une vitesse de 30 km/h. Le bruit est mesuré par un microphone situé sur le coté de la roue à 0,8 m, filtré à l'harmonique principale et reporté en dBa. La mesure du bruit ne mesure pas l'énergie émise, et il se pourrait que suivant la directivité de lémission on mesure le bruit en un points ou les contributions des différentes réflexions s'annulent ou se superposent. On suppose néanmoins que ce n'est pas le cas, et que les auteurs nous fournissent un élément significatif du bruit émis dans tout l'espace.

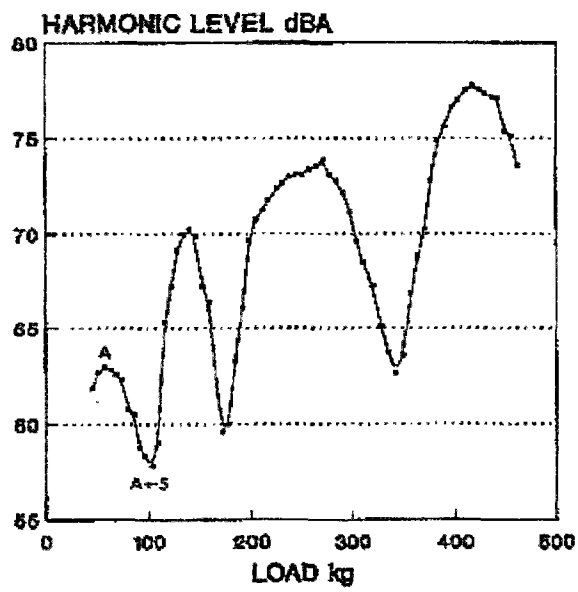

FIG. 4.2 - *Effet du poids sur le bruit émis par un pneumatique à sculpture périodique*

Le résultat montre une augmentation générale du bruit émis sauf pour certaines longueurs. Les auteurs expliquent ce phénomène avec la théorie "air pumping". Pour certaines longueurs, quand une rainure entre dans la zone de contact et expulse de l'air, une autre en sort et aspire de l'air. Les deux sources ponctuelles équivalentes ont une amplitude proportionnelle à la dérivée seconde du volume d'air échangé. Suivant si ces amplitudes sont en phase ou en opposition de phase, le bruit émis diminue ou augmente.

On propose une autre explication. Regardons parmi les phénomènes qu'on a mis en évidence ceux qui

peuvent intervenir dans cette expérience :

- comme on étudie un pneumatique à rainures, il y a une excitation par le mouvement d'entraînement. L'amplitude de cette excitation varie avec la taille de la zone de contact ;
- comme le roulement se fait sans indentation, il ne peut y avoir qu'une excitation par le déplacement quasi statique stationnaire ;
- le bruit mesuré est périodique, il est donc sensible aux coefficients d'amplification. La modification de la taille de la zone de contact, et donc de celle de la partie libre de la bande de roulement, peut avoir une influence sur les coefficients d'amplification ;
- l'excitation est la somme algébrique des excitations au niveau de la ligne d'attaque et de la ligne de fuite. Elles peuvent se renforcer ou s'annuler.

Avec ces élément, l'explication de cette expérience peut se faire en deux phénomènes.

Premièrement, l'augmentation générale de l'amplitude de bruit émis s'expliquerait par une augmentation avec le chargement de l'angle entre la partie du pneumatique en contact avec la chaussée et celle qui ne l'est pas. On a expliqué cette dépendance de l'amplitude de l'excitation par le motif de la bande de roulement dans le premier paragraphe de ce chapitre (dépendance en $\sin\theta'_0$ de l'amplitude de l'excitation par le mouvement d'entraînement).

Deuxièmement, les phénomènes d'interférences destructives qui s'observent pour certaines valeurs de la charge pourraient s'expliquer à partir des coefficients d'amplification. Quand le poids appliqué sur la roue augmente, ceux-ci varient et, dans certains cas, les coefficients d'amplification des modes qui rayonnent le plus d'énergie sont loins de 1. Ces modes rayonnants seraient donc peu amplifiés.

On pourrait aussi expliquer les phénomènes d'interférences à partir de la superposition des deux sources d'excitation au niveau de la ligne d'attaque et de la ligne de fuite. Quand la taille de la zone de contact varie, les contributions des lignes d'attaque et de fuite sont constructives ou destructives, suivant le déphasage entre ces deux sources.

Par la suite, on se propose d'étudier les coefficients d'amplification en fonction de la géométrie pour confirmer une de ces deux analyses des diminutions du bruit émis par le pneumatique.

Conclusion

En s'aidant des équations développées au chapitre 2, et de la méthode de résolution développée au chapitre 3, on a pu proposer d'une part une expression pour les sources d'excitation des vibrations, et d'autre part une analyse des amplifications des vibrations par la structure du pneumatique. Ces amplifications sont prévisibles à partir des propriétés de propagation libre, comme dans le cas de l'analyse modale classique. Cette constatation nous a permis de proposer une identification expérimentale des coefficients d'amplification.

En ce qui concerne l'analyse des sources d'excitation, on a proposé une expression pour l'excitation au niveau de la ligne d'attaque et de la ligne de fuite de la zone de contact qui semble cohérente avec les expériences. Elle est due au caractère presque anguleux de la bande de roulement à cet endroit. Pour diminuer le bruit émis par les vibrations des pneumatiques, l'ingénieur peut diminuer l'amplitude des sources d'excitation. Cependant, les effets sur l'excitation que nous avons sommairement étudiés sont déjà connus : une gomme de la bande de roulement plus tendre, un applatissement de l'angle au niveau des bords de la zone de contact en augmentant le rayon de la bande de roulement par exemple.

En ce qui concerne l'analyse des amplifications, c'est un outil nouveau pour l'ingénieur. D'après nos calculs, il semblerait que le bruit par indentation ou par glissement instationnaire sur la chaussée soit toujours amplifié. Il n'y a pas d'effet de structure notable, si ce n'est par amortissement. Par contre, pour la partie périodique du mouvement (principalement le bruit dû au défilement du motif de la bande de roulement), il semblerait qu'il y ait un effet de structure. C'est ce qu'on se propose de vérifier numériquement : nous allons développer sur un modèle de pneumatique simplifié et calculer des coefficients d'amplification.