
FONDEMENTS DE L'ANALYSE FRACTALE

1.1. Introduction

C'est en 1975, avec la parution de son illustre ouvrage, intitulé "Les Objets fractals - Forme, hasard et dimension", que le mathématicien Benoît Mandelbrot apporta une avancée significative dans le domaine de la géométrie non euclidienne. Il faut toutefois noter, que c'est dans les années 60, que Mandelbrot inventa la géométrie fractale.

Au coeur de ses préoccupations, figurait l'incapacité pour la géométrie classique, de modéliser et de concevoir la rugosité ou la fragmentation des objets naturels. L'introduction de la géométrie fractale, a ainsi permis la description et l'analyse d'objets fragmentés et à structure invariante par changement d'échelle.

L'analyse de la morphologie des surfaces de rupture, initiée par Mandelbrot, dans son ouvrage intitulé: "Fractal character of fracture surfaces of metals." [Mandelbrot, B. B. et al, 1984], suscite, de nos jours, l'intérêt très marqué de nombreux chercheurs.

C'est ainsi, que Bouchaud [Bouchaud E., 1997] a pu observer l'universalité des propriétés des surfaces de rupture, en dépit de la différence des mécanismes de rupture à l'échelle microscopique, lorsqu'on passe d'un matériau à l'autre.

Il faut noter que la notion de "structure fractale " introduite pour la première fois par Mandelbrot en 1975, repose sur l'adjectif latin, *fractus*, du verbe, *frangere*, voulant dire: briser, présenter des irrégularités, fragmenter à toutes les échelles, fractionner à l'infini.

C'est le domaine d'échelles d'observation de la structure analysée, qui caractérise le principe des mesures utilisées dans l'analyse fractale, avec une forte corrélation des résultats relevant des différentes échelles.

La structure fractale est, cependant, traduite par des résultats dépendant de l'échelle d'observation, selon une loi de type puissance, avec un exposant caractéristique de ces derniers.

Une structure sera dite fractale, si elle présente des irrégularités à toutes ses échelles d'observation, tant au niveau macroscopique, que microscopique. En régime dynamique, en particulier, le caractère de la rupture d'une structure relève d'un examen de type fractographique. Il consiste en une inspection visuelle de la surface

de rupture, lorsqu'on est à l'échelle macroscopique, en un examen stéréoscopique, plutôt aux échelles réduites, et en une visualisation par un microscope électronique, lorsqu'on se trouve à des échelles d'observation très grandes.

L'effort réalisé par Mandelbrot, pour l'unification dans une même science, des courbes de longueur infinie et des surfaces présentant des irrégularités à toutes leurs échelles d'observation, a été et demeure, d'un très grand intérêt scientifique, comme en témoigne, l'organisation pendant plusieurs années, au Canada, du congrès sur "L'ingénieur et les fractals".

L'analyse fractale a ouvert de nouveaux champs de prospection et d'investigation en ingénierie, autour de questions, notamment centrées sur:

- la rugosité de certaines surfaces élaborées par des techniques aléatoires de finissage (sablage, rodage);
- le transfert de matière pendant les essais de frottement et d'usure qui libèrent des particules dont la forme et la distribution de surface est fractale;
- les phénomènes non linéaires ou turbulents qui présentent une évolution temporaire classique ;
- le phénomène de croissance fractale qui apparaît généralement, dans le cas de substances organiques ou de dépôts sur électrolytes [Vicsek T., 1989], [Barabási A.L.1995].

1.2. Le concept de fractal

Falconer K. ***affirmait que nous ne devons pas essayer de définir strictement les fractales, mais nous devons considérer comme fractal, toute structure qui possède un certain nombre de caractéristiques minimales*** [Falconer K., 1990].

Plus généralement, une fractale est définie comme "une figure dont la dimension de Hausdorff est plus grande que la dimension topologique" [Mandelbrot B., 1982].

Il n'existe, cependant, aucune définition du concept de fractal qui soit unanimement acceptée. Les définitions de la dimension fractale, les propriétés d'autosimilarité et d'autoaffinité, aident à la compréhension de ce concept.

Les conditions de base en vertu desquelles, une surface de rupture peut être reconnue comme fractale sont les suivantes [Falconer, 1990] :

a). La surface doit avoir une "structure fine", c'est à-dire qu'elle doit présenter "des détails à toutes les échelles". Plus l'échelle est petite, et plus on doit pouvoir remarquer plusieurs éléments.

b). La structure d'une surface doit être "trop irrégulière pour être décrite dans le langage de la géométrie euclidienne".

Les surfaces de rupture par ses formes diverses, manifestent des représentations qui ne peuvent être comprises et expliquées, selon les critères de la géométrie classique euclidienne.

c). Autosimilarité et autoaffinité. Les proportions de la structure sont modifiées par le même facteur d'échelle, à divers niveaux d'observation. Les microstructures autosimilaires ont été, respectivement mises en évidence sur le métal, par Mandelbrot

[Mandelbrot et al., 1984], sur les composites, les roches poreuses, le béton et le mortier par Carpinteri [Carpinteri, 1994].

Bien que les profils des sections verticales des surfaces réelles soient statistiquement autosimilaires, ils devraient, cependant, être analysés aux échelles différentes de représentation, tant sur la direction verticale, que sur la direction du plan de la surface nominale, introduisant ainsi la notion d'autoaffinité.

d). La priorité accordée à la dimension fractale, par rapport à la dimension topologique. Notons que la dimension fractale du profil d'une surface de rupture en caractérise l'aspect bruité.

e). S'agissant exclusivement de fractales mathématiques, l'existence de règles simples, éventuellement récursives, pour la description des formes structurales.

La dimension fractale ne suffit nullement à caractériser une surface de rupture.

On peut également lui associer la lacunarité, qui en est la mesure de la présence de trous [Gouyet JF, 1992].

La propriété de lacunarité des fractals peut être prise en considération pour comparer des structures de même dimension, mais n'admettant pas une même distribution de trous (défauts, microfissures) [Secrieru C, 2007]. Il a été en effet observé, que des matériaux présentant différentes distributions de trous, ont généralement des comportements mécaniques différents, comme l'attestent des recherches menées sur le béton.

1.3. Définition de la dimension fractale

Les concepts de fractal et de dimension fractale peuvent être davantage mis en oeuvre, par l'exercice consistant à mesurer la longueur de côtes (mesures effectuées par Richardson, dans le cadre de l'établissement de cartes géographiques) (voir Chapitre 2). Richardson a ainsi proposé de préciser, dans le cas de la mesure de corps réels, la valeur numérique trouvée, ainsi que l'identification d'une échelle propre à l'objet analysé, dont la mesure ne peut être effectuée en m , m^2 , m^3 ,... mais plutôt, dans une unité de mesure propre.

L'importance de l'échelle d'observation (longueur de la jauge) a été particulièrement mise en évidence dans ce processus de mesure, dans le sens où: la longueur L mesurée avec une jauge de mesure plus petite, est plus grande que la longueur obtenue avec une jauge plus grande.

Dans son ouvrage "*How Long Is the Coast of Britain?*", Mandelbrot a étudié des courbes autosimilaires, dont la dimension de Hausdorff s'est trouvée comprise entre 1 et 2. Ces courbes étaient déjà des exemples très significatifs de structures fractales, bien que Mandelbrot n'ait utilisé ce terme, que bien plus tard, en 1975.

Dans cet ouvrage, Mandelbrot a passé en revue les résultats des études menées par Richardson L.F, concernant la longueur mesurée de la Côte de Grande Bretagne. D'une manière plus générale, Richardson avait, en effet, observé que la longueur mesurée des contours de différents pays, dépend de l'échelle de mesure envisagée, selon une loi dite de puissance, mettant en évidence la dimension fractale Δ de la côte considérée. C'est ainsi qu'il obtint pour Δ , respectivement pour les Côtes d'Afrique du Sud et de la de Grande Bretagne, 1,02 et 1,25.

Pour Mandelbrot, Δ est, dans un sens plus large, un "nombre qui quantifie le degré d'irrégularité ou de fragmentation d'une structure géométrique ou d'un objet naturel; nombre qui, dans le cas d'objets géométriques euclidiens, se réduit à la

dimension traditionnelle" [Mandelbrot B., 1982], tandis qu'il correspond, dans le cas particulier des surfaces de rupture, à une mesure de la rugosité.

1.4. Types de dimensions fractales

La dimension fractale est une généralisation de la notion de dimension entière, propre à la géométrie euclidienne.

Il en existe divers types: la dimension d'autosimilarité Δ_a , la dimension du Box Counting Δ_b , la dimension du compas Δ_C , la dimension de Hausdorff Δ_H et la dimension de Minkowski-Bouligand Δ_{MB} .

Pour une structure fractale donnée, ces dimensions fournissent en général des valeurs proches de la valeur théorique de la dimension fractale.

1.4.1. Dimension d'autosimilarité Δ_a

La dimension d'autosimilarité caractérise l'irrégularité d'objets décomposables en N_δ parties de dimension d , obtenues à partir du tout, par une homothétie de rapport $\delta=1/n$ donné. Ainsi par exemple, peut on réaliser, une partition:

- d'un segment de droite en $N_\delta=n$ sous-segments, avec $N_\delta=1/\delta$;
- d'un carré en $N_\delta=n^2$ petits carrés, avec $N_\delta=1/\delta^2$
- d'un cube en $N_\delta=n^3$ petits cubes, avec $N_\delta=1/\delta^3$

D'une manière générale, on observe que pour un objet simple et classique, l'exposant de δ correspond à la dimension topologique; ce qui nous permet d'écrire, pour un objet quelconque de dimension d :

$$N_\delta = \left(\frac{1}{\delta}\right)^d \quad (1.1.)$$

Ce qui peut encore s'écrire:

$$d = \frac{\ln(N_\delta)}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} \quad (1.2.)$$

Lorsque la dimension d prend des valeurs Δ_a , non entières, l'objet considéré est, du fait de sa structure autosimilaire, fractal de dimension d'autosimilarité Δ_a .

Remarques. La dimension topologique est une dimension associée au nombre de degrés de liberté d'un point qui se déplacerait à l'intérieur d'un objet; c'est ainsi qu'un point, une courbe, une surface et un volume, ont respectivement pour dimensions: 0, 1, 2 et 3.

Pour toute structure fractale, la dimension fractale est strictement plus grande que la dimension topologique.

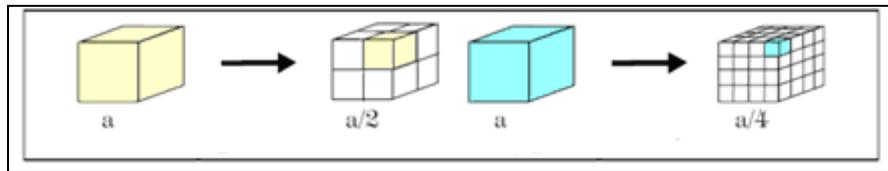


Fig.1.2. Partition d'un carré en unités jauge nécessaires à son pavage

1.4.2. Dimension de boîtes Δ_b

Cette dimension, notée Δ_b , a la particularité d'être définie à partir du comptage du nombre N_δ de pavés d'une grille interceptant un objet, et non pas, à partir de la mesure de ces pavés. Elle coïncide dans de nombreux cas, avec la dimension de Hausdorff:

$$\Delta_b(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \frac{1}{\delta}} \quad (1.3.)$$

δ – le pas de la grille qui de pavage de l'objet.

1.4.3. Dimension de Hausdorff, Δ_H

La dimension de Hausdorff, Δ_H , est la plus ancienne des dimensions fractales. Elle a la particularité d'être applicable, notamment, aux objets non rigoureusement autosimilaires. Elle est, de ce fait, plus étendue que la dimension d'autosimilarité. Par ailleurs, elle vient, théoriquement, pallier l'impossibilité de comparaison de courbes, pour lesquelles, la longueur estimée par la méthode de Richardson (voir chapitre 2), tend vers l'infini, lorsque la jauge de mesure d'espace utilisée tend vers 0.

La dimension Δ_H est définie par:

$$\Delta_H = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta}{\ln \left(\frac{1}{\delta} \right)} \quad (1.4.)$$

où N_δ est le nombre minimal de boules de diamètre δ , nécessaires au pavage de l'objet.

Elle est par ailleurs, telle que:

si $d < \Delta_H$, le contenu de l'objet est infini;

si $d > \Delta_H$, le contenu de l'objet est infini.

Cette dimension n'a pas d'application pratique dans l'étude des courbes qui relèvent des sciences telles que la physique, la biologie et l'ingénierie [Tricot, 1995].

Il est, par ailleurs, à noter que la dimension du Box Counting n'est pas toujours égale à la dimension de Hausdorff; et on a:

$$\Delta_H \leq \Delta_b \quad (1.5.)$$

1.4.4. Dimension de Minkowski-Bouligand

La dimension de Minkowski-Bouligand Δ_{MB} est le rapport logarithmique au rapport des rayons, du volume minimal $N_{\eta,\gamma}$ de boules nécessaires au recouvrement d'un objet pouvant lui même, être contenu dans une boule de rayon r ; soit:

$$\Delta_{MB} = \frac{\ln(N_{\eta,\gamma})}{\ln\left(\frac{r}{\eta}\right)} \quad (1.6.)$$

où r est le rayon de la boule extérieure, elle même recouverte de boules de rayon η ($\eta < r$).

Nous reviendrons, plus en détails, sur cette dimension, à travers sa modalité la plus fréquente, dans le chapitre 2.

1.5. Mesures multi-fractales

La description de la structure géométrique non homogène d'un objet, peut nécessiter plusieurs dimensions fractales; on parle alors de multi- fractalité.

Ainsi, d'une structure fractale donnée, on peut extraire des sous-structures fractales de dimension fractale bien définie, en discriminant les ensembles de points présentant les mêmes propriétés d'autosimilarité [Botet R., dossier AF 4500].

Le fait que deux ensembles soient identiques par translation, ne préjuge nullement de l'homogénéité de leurs masses respectives. Par ailleurs, il est nécessaire, pour passer des ensembles fractals aux mesures multi-fractales, de bien spécifier la distribution de la mesure utilisée [Dubois J.& Chaline J.,2006], [Mandelbrot B., 1975].

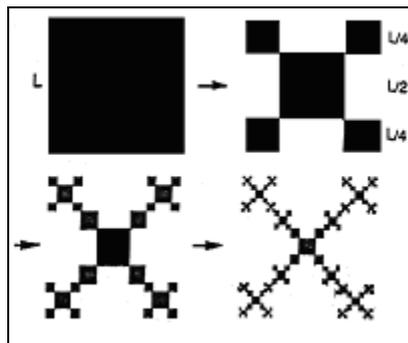


Fig.1.3. Exemple de multi-fractale

La structure de la figure 1.3. est complexe et appartient à la catégorie des multi-fractales.

1.6. Surfaces fractales

L'extension aux surfaces, du concept de dimension fractale, relève généralement de la modification de la forme d'une surface, par un processus physique d'actions locales.

Il existe trois catégories de surfaces fractales [Boutot A., 1993, Russ J.C., 1994]:

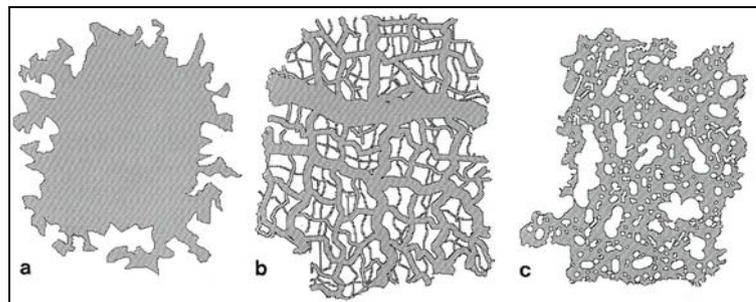


Fig.1.4. La classification en trois catégories, de surfaces fractales [Boutot A., 1993, Russ J.C., 1994] :

- (a) Les fractales de surface ou "contour fractal" de type réseau (par exemple les systèmes vasculaire et nerveux humains);
- (b) La fractale de masse (un réseau ou faisceaux de particules résultant d'un phénomène d'agglomération);
- (c) La fractale de porosité (un objet dense qui contient des pores)

a) *Les fractales de surface ou "contour fractal"* peuvent être de type réseau de fibres (par exemple le système vasculaire et nerveux humain), ou plutôt sous la forme d'un ensemble de différents types de fibres, comme le serait par exemple, l'ensemble de celles utilisées pour filtrer les matériaux absorbants. La perméabilité, la capacité d'absorption et d'autres propriétés de telles structures sont liées probablement à la structure fractale. Toutefois, cette classe d'objets n'a pas de surface (dans le sens commun de l'ingénierie) qui puisse être mesurée.

Par contre, les faisceaux de particules agglomérées par des processus de diffusion, engendrent le même type de réseau ramifié, et peuvent être décrits par la géométrie fractale.

(b). *Les fractales de masse* représentent, quant à elles, une structure dans laquelle différentes surfaces présentent une invariance au changement de l'échelle de représentation. Ces surfaces peuvent être *autosimilaires*, lorsqu'elles peuvent résulter, dans un grand nombre de cas, de l'addition ou de l'éloignement de matériaux), ou *autoaffines*, lorsqu'elles résultent de la suite de processus industriels.

La notion d'autosimilarité ou d'autosimilitude régissant certaines fractales est particulièrement importante. Elle signifie, comme d'ailleurs pour certaines courbes fractales, que toute partie de la surface, excepté sa taille, a la même forme que le tout;

par contre, l'autoaffinité traduit, pour la surface étudiée, un agrandissement égal dans toutes les directions.

Du fait de sa lacunarité, une fractale de masse doit vérifier la relation : $1 < \Delta < 3$. Plus il est lacunaire, plus sa dimension fractale est petite, tout en restant supérieure à 1, parce que l'objet est continu.

Si la structure est discontinue, celle-ci pourra être assimilée à un ensemble de points de dimension fractale $\Delta > 0$.

(c). *La fractale de porosité* représente un objet dense contenant des pores, comme par exemple, les céramiques poreuses, les sols sédimentaires et les pierres qui contiennent des réserves souterraines de pétrole.

Ce sont les caractéristiques fractales de son réseau de pores qui déterminent sa perméabilité.

Il est à noter, que les mesures sur la surface, bien que parfaitement définie, d'une fractale de porosité, n'en dévoilent nullement l'aire totale, encore moins, l'importance de la typologie tridimensionnelle, ni les dimensions de la structure du pore.

1.7. La notion de courbe

Les notions de mesure et de dimension sont à la base de la formalisation mathématique des objets dits irréguliers, notamment, par l'introduction du concept de dimension fractale.

En 1872, alors que les mathématiciens pensaient que toutes les courbes continues étaient différentiables, le mathématicien Karl Weierstrass (1815 -1897) provoqua un profond bouleversement dans l'histoire des mathématiques, en exprimant une affirmation contraire.

Ce n'est que bien plus tard, près de soixante dix ans après, que le mathématicien français Benoît Mandelbrot, réussit à établir l'importance d'une telle pathologie mathématique, dans la compréhension de la géométrie de l'Univers [Mandelbrot B., 1975], [Mandelbrot B., 1982].

Intéressons nous aux deux modalités de définition d'une courbe: la définition mathématique et la définition au sens physique.

1.7.1. La définition d'une courbe (sens mathématique)

a) Définition algébrique :

Une courbe est un ensemble de points (x,y) du plan vérifiant une équation cartésienne de la forme : $F(x,y)=0$, où F est une fonction de x et de y ;

b) Définition géométrique :

Une courbe représente l'intersection de deux surfaces.

1.7.2. La définition d'une courbe (sens physique)

Une courbe, dans son acception physique, est l'image, dans le plan ou dans l'espace, d'un intervalle $[a,b]$ de nombre réels t , par une application continue γ .

Le paramètre t représente la variable temps, lorsqu'il s'agit du mouvement d'un mobile sur une trajectoire.

L'exemple d'une telle courbe est illustré dans la figure 1.5.

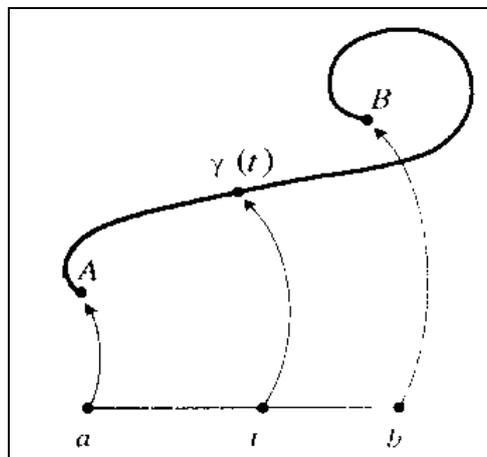


Figure 1.5. La courbe $A \frown B$ [Tricot C., 1999]

La courbe $A \frown B$ est paramétrée par le temps, au moyen d'une application γ , qui fait correspondre la position A au temps a , et la position $\gamma(t)$, au temps t [Tricot C., 1999].

1.7.3. Courbes fractales

Les deux premières caractéristiques d'une courbe fractale sont la continuité et la non rectifiabilité, c'est à dire l'impossibilité qu'elle a, d'être finement approximée par une ligne polygonale de longueur finie. Une autre caractéristique est son invariance à tout changement de son échelle de représentation.

Deux propriétés caractéristiques essentielles d'une courbe fractale, sont l'autosimilarité et l'autoaffinité.

L'autosimilarité statistique pour les matériaux réels, ou exacte pour les structures représentant des modèles mathématiques, traduit leur invariance sous une dilatation ou une contraction isotropique; l'autoaffinité traduisant plutôt une invariance, sous une dilatation ou une contraction anisotropique. On peut illustrer l'autosimilarité exacte, par l'examen de cas suivants:

a) Cas d'un segment de ligne

Bien qu'un segment de ligne ne possède d'invariance par translation, sa transformation par une η -similitude ($\eta < 1$) représentant une réduction d'échelle, fournit une image qui lui est géométriquement semblable. On en déduit, au facteur d'échelle η , que la ligne est autosimilaire à elle-même, et que le segment de départ peut donc être totalement recouvert par N segments identiques, obtenus par la réduction d'échelle mise en oeuvre.

b) Cas d'une surface plane rectangulaire et d'un volume

Dans le cas d'une surface plane rectangulaire ou d'un volume, le mode opératoire basé sur la même η -similitude, peut conduire à la mise en oeuvre d'une autosimilarité, par utilisation cette fois, de pavés ou de cubes, présentant des facteurs d'échelle correspondant.

c) Cas d'un espace fractal de dimension d'autosimilarité Δ_a

En effet, dans le cas d'un espace de dimension d'autosimilarité Δ_a , le facteur d'échelle est lié au nombre N_η d'éléments du pavage, par la loi d'échelle suivante:

$$\eta(N) \sim \left(\frac{1}{N_\eta} \right)^{1/\Delta_a} \quad (1.7.)$$

On a trouvé trois définitions de la courbe fractale [Le Méhauté A., 1990, Tricot, 1999]:

- a) Courbe qui vérifie une loi d'échelle ;
- b) Courbe qui présente des singularités en tous les points;
- c) Courbe nulle part dérivable

Nous pouvons ainsi conclure que la fractale représente une courbe continue nulle part dérivable, ni différentiable.

1.7.3.1. Dimension fractale d'une courbe

La dimension fractale d'une courbe est l'extension à des nombres non entiers, de la dimension classiquement utilisée en géométrie euclidienne.

C'est ainsi que pour une courbe irrégulière, la dimension fractale est un nombre fractionnaire, tendant vers 2; traduisant ainsi, intuitivement, une sorte d'évolution des courbes lisses, et faisant dire à certains auteurs, au risque d'une certaine confusion entre les géométries fractale et euclidienne, que la dimension fractale d'un objet, exprime la manière plus ou moins dense, dont celui-ci remplit l'espace.

Selon *Le Méhauté* [Le Méhauté A., 1990], la dimension fractale peut-être considérée comme une valeur de coupure γ , dans l'ensemble des nombres réels, entre deux comportements limites relatifs à la "mesure" de la ligne polygonale d'approximation d'une courbe, lorsque la jauge de mesure tend vers 0.

1.8. L'influence du changement de l'échelle de représentation sur une structure fractale

Les travaux de Mandelbrot sur la mesure de la côte de la Bretagne, ont mis en évidence l'influence particulière de l'instrument de mesure utilisée, dans le sens où, il a été observé une augmentation de la longueur mesurée de la côte, avec le grossissement ou la finesse de l'image.

A l'échelle microscopique, en effet, cette longueur va jusqu'à tendre vers l'infini; alors qu'à l'échelle atomique, la question d'une telle méthode de mesure, reste très sérieusement posée.

Très probablement, que l'étape la plus importante dans l'histoire du changement de l'échelle de représentation, a été franchie, pour la première fois, par Griffith, en 1921, lorsqu'il a posé les bases de la Mécanique de la Rupture Linéaire Elastique.

Galileo Galilei a ensuite étudié l'effet de ce changement, en Résistance des Matériaux [Carpinteri A. et al., 2004].

D'une manière générale, l'invariance au changement d'échelle implique le fait que les objets conservent leur géométrie, à toute échelle d'observation.

Pour mieux illustrer l'influence du changement de l'échelle de représentation sur une structure fractale, envisageons le cas élémentaire d'une courbe rectifiable [Le Méhauté, 1984], tout en nous inspirant des notations du sous-paragraphe 1.7.3. Si l'on désigne par λ_η , la longueur de la ligne polygonale d'approximation de cette courbe à l'échelle η , on peut écrire:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (\lambda_\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} (N_\eta \cdot \eta) = L \quad (1.8.)$$

Pour une aire et un volume, le volume étant pris dans un espace de dimension d , on a, respectivement:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (A_\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} (N_\eta \cdot \eta^2) = S \quad (1.9.)$$

et,...

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (V_\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} (N_\eta \cdot \eta^d) = V \quad (1.10)$$

Considérons à présent, un changement de l'échelle de représentation, en introduisant une nouvelle échelle η/α .

On peut écrire, pour les longueurs approximatives de l'objet mesuré:

$$\begin{cases} \lambda_\eta \sim \eta^{1-\Delta} \\ \lambda_{\eta/b} \sim (\eta/b)^{1-\Delta} = (1/b)^{1-\Delta} \cdot \eta^{1-\Delta} \end{cases} \quad (1.11.)$$

et par suite,

$$\frac{\lambda_\eta}{\lambda_{\eta/b}} \sim (b)^{1-\Delta} \quad (1.12.)$$

De la même manière, l'on obtient, pour les surfaces:

$$\begin{cases} A_\eta \sim \eta^{2-\Delta} \\ A_{\eta/b} \sim (\eta/b)^{2-\Delta} = (1/b)^{2-\Delta} \cdot \eta^{2-\Delta} \end{cases} \quad (1.13.)$$

et par suite,

$$\frac{A_\eta}{A_{\eta/b}} \sim (b)^{2-\Delta} \quad (1.14.)$$

En généralisant ce raisonnement aux volumes considérés dans un espace de dimension d , on peut écrire:

$$\frac{V_\eta}{V_{\eta/b}} = (b)^{d-\Delta} \quad (1.15.)$$

La surface apparaît ainsi comme un épaississement de la ligne polygonale, et le même mode de raisonnement peut, alors, très facilement se généraliser.

Remarques :

Les lois d'échelle peuvent donc admettre une puissance dérivant, soit de Δ , soit de $d-\Delta$, avec $d = 2$ et $d = 3$, respectivement en dimension 2 et 3.

Une telle différence s'explique, notamment, par le support de l'interface fractale.

1.9. Conclusions du chapitre 1

Ce chapitre propose une modalité originale d'approche des objets fractals, tant du point de vue mathématique, que du point de vue physique.

Dans ce chapitre est présentée, une mise à jour des études bibliographiques, concernant les notions de base de l'analyse fractale: le concept de fractal, les mesures multifractales, les surfaces fractales, la notion de courbe (dans le sens mathématique et au sens physique), les courbes fractales.

Différentes modalités de définition de la dimension fractale (dimension topologique, dimension d'autosimilarité, dimension de Hausdorff, dimension de Minkowski-Bouligand, dimension de boîtes), ont été passées en revue, en raison de l'inexistence, de nos jours, d'un point de vue qui soit unanimement accepté. Nous avons, notamment, présenté les courbes fractales comme étant des courbes continues, nulle part différentiables.

La dépendance de la dimension fractale, à la fois, de l'échelle de représentation et des méthodes de mesure, a bien été mise en évidence.

Le calcul de la dimension fractale s'appliquant aux courbes, nous avons élucidé les propriétés générales des courbes fractales (continuité, non rectifiabilité et invariance au changement de l'échelle de représentation), ainsi que des propriétés plus spéciales, comme l'autosimilarité et l'autoaffinité.

Certaines dimensions fractales, comme la dimension de Hausdorff et la dimension d'autosimilarité, sont moins fréquemment utilisées.

La difficulté d'une traduction numérique ou expérimentale de la dimension de Hausdorff, a également, été mise en oeuvre. Cette dimension peut, néanmoins, être appliquée aux courbes pures, d'un point de vue mathématique.

Il est apparu, que la dimension d'autosimilarité, n'est utilisable que pour des des objets fractals présentant une similitude interne, que la dimension du Box Counting et la dimension de Minkowski-Bouligand donnent des valeurs semblables.

La dimension topologique Δt représente, quant à elle, la dimension de référence à laquelle, la dimension fractale Δ est comparée; il est ainsi établi, que la dimension fractale est toujours strictement supérieure à la dimension topologique.

Une estimation optimale de la dimension fractale, dans le cas des surfaces de rupture, est notamment influencée par les propriétés du matériau et par l'amplitude de l'échelle de représentation. La dimension fractale mesure, en effet, le degré de fragmentation ou de non régularité, aux différentes échelles de représentation.

La notion de longueur n'ayant aucun sens pour une courbe fractale, c'est davantage la notion de dimension fractale qui devient, pour ce type de courbe, la caractéristique véritablement pertinente.