

Introduction

On se propose dans ce projet de simuler numériquement la propagation de perturbations aéroacoustiques dans un guide d'onde bidimensionnel.

Une telle étude, théoriquement en domaine libre, pose le problème incontournable de la limitation du domaine qui sera abordé sous deux aspects totalement différents: le premier consistera à écrire des conditions aux limites absorbantes à l'ordre 1 alors que le second utilisera une méthode PML.

On examinera dans un premier temps les linéarisations naturelles des équations d'Euler, en s'intéressant plus particulièrement au cas des perturbations barotropes pour lesquelles on indiquera les conditions aux limites qui mènent à un problème bien posé.

On introduira ensuite les méthodes de Galerkin discontinues appliquées à ce problème et l'on explicitera le schéma utilisé pour les simulations numériques dont certains résultats seront présentés (une condition d'absorption des ondes normales étant utilisée).

Le modèle PML, d'une grande importance pour la suite de ce travail, sera présenté en troisième partie, discrétisé puis mis en œuvre numériquement.

2 Etude des problèmes instationnaires

On considère un écoulement porteur stationnaire subsonique régulier vérifiant les équations d'Euler stationnaires (la convention d'Einstein sur les indices répétés sera systématiquement utilisée):

$$\begin{cases} \partial_j(\rho_0 U_0^j) = 0 \\ \partial_j(\rho_0 U_0^j U_0^i + P_0 \delta_{ij}) = 0 & i = 1, 2, 3 \\ \partial_j \left((\rho_0 (e_0 + \frac{\|U_0\|_2^2}{2}) + P_0) U_0^j \right) = 0 & \text{(bilan d'énergie)} \end{cases} \quad (1)$$

avec U_0 , ρ_0 les champs de vitesse et de masse volumique de l'écoulement, e_0 son énergie interne et $P_0 = P_0(\rho_0, e_0)$ la loi d'état du champ de pression.

Remarque 1 *En l'absence de choc dans l'écoulement porteur, le bilan d'entropie:*

$$\partial_j(\rho_0 \sigma_0 U_0^j) = 0$$

(σ_0 étant l'entropie volumique) et le bilan d'énergie pourront être indifféremment utilisés, la loi d'état s'écrivant alors soit $P_0 = P_0(\rho_0, e_0)$ soit $P_0 = P_0(\rho_0, \sigma_0)$. De plus, si le fluide porteur est barotrope, la loi d'état s'écrit $P_0 = P_0(\rho_0)$ et seules les quatre premières équations sont à considérer.

Au temps $t = 0$, on perturbe l'écoulement qui est alors supposé vérifier les équations d'Euler instationnaires au sens des distributions:

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_j f^j(w) = g \\ w(0) = w_0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{où } w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U^i \\ \rho(e + \frac{\|U\|_2^2}{2}) \end{pmatrix} \text{ et } f^j(w) = \begin{pmatrix} \rho U^j \\ \rho U^i U^j + P \delta_{ij} \\ (\rho(e + \frac{\|U\|_2^2}{2}) + P) U^j \end{pmatrix}.$$

On se propose dans un premier temps de donner une linéarisation de ce système dans un cadre général et d'étudier le caractère bien posé du système obtenu. On s'intéressera ensuite plus particulièrement au cas des perturbations barotropes.

2.1 Linéarisation entropique des équations d'Euler

On peut montrer que (2) admet une entropie de Lax $S(w)$, strictement convexe en w , et par conséquent qu'il existe S^i $i = 1..3$, telles que:

$$\partial_t S(w) + \partial_i S^i(w) - g \nabla_w S(w) = 0. \quad (3)$$

D'après le théorème de Godunov-Mocke, il existe donc un changement de variables bijectif $\Phi = \nabla_w S(w)$ permettant d'obtenir une forme symétrique de (2):

$$\partial_t (\nabla_\Phi S^*(\Phi)) + \partial_i (\nabla_\Phi S^{i*}(\Phi)) = g, \quad (4)$$

avec $S^*(\Phi) = \Phi \cdot w(\Phi) - S(w(\Phi))$ et $S^{i*}(\Phi) = \Phi \cdot f^i(w(\Phi)) - S^i(w(\Phi))$.

On suppose le système (4) bien posé, donc continu par rapport aux données du problème. On pose alors $g = \varepsilon h$ et $\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \varphi$ (Φ_0 étant les variables entropiques associées à l'écoulement porteur). Après développement limité en ε de la formulation faible de (4), on obtient une expression linéarisée du problème:

$$\partial_t (H_{S^*}(\Phi_0) \varphi) + \partial_i (H_{S^{i*}}(\Phi_0) \varphi) = h. \quad (5)$$

Remarque 2 *Etablir (5) nécessite des hypothèses que l'on a supposées formellement. Il est cependant possible de contourner ce cadre formel en donnant une interprétation de (5) au sens des distributions.*

La matrice H_{S^*} est symétrique définie positive (car hessien d'une fonction S^* strictement convexe) et les $H_{S^{i*}}$ sont symétriques. En notant $A^0(x) = H_{S^*}(\Phi_0)$ et $A^i(x) = H_{S^{i*}}(\Phi_0)$, (5) prend donc la forme d'un système de Friedrichs:

$$\partial_t (A^0 \varphi) + \partial_i (A^i \varphi) = h \quad (6)$$

sur lequel on dispose de certains résultats intéressants. On a par exemple le théorème suivant (donné en espace libre), où $\mathcal{A} = A^i \partial_i$ est l'opérateur spatial:

Théorème 3 *Si les coefficients de $A^0(x)$ et de $A^i(x)$ sont dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3)^5)$ et $\varphi(0, x) \in D(\mathcal{A}) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)^5 / A^i \partial_i \varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)^5\}$, alors (5) admet une solution unique dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3)^5) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A}))$.*

Le problème (5) étant bien posé, il serait maintenant intéressant d'en étudier la stabilité. Pour cela, on multiplie scalairement (6) par φ dans \mathbb{R}^5 et on intègre sur \mathbb{R}^3 , ce qui donne une équation de bilan supplémentaire:

$$\frac{1}{2} \partial_t (A^0 \varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i (A^i \varphi, \varphi)_{\mathbb{R}^5} + \frac{1}{2} ((\partial_i A^i) \varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5} = (h, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5}. \quad (7)$$

C'est l'étude du signe de $\frac{1}{2}\partial_t(A^0\varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5}$ qui renseignera ensuite sur la stabilité du système. Or celui-ci est fonction du signe des deux autres termes quadratiques en φ de l'équation, à savoir $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_i(A^i\varphi, \varphi)_{\mathbb{R}^5}$ et $\frac{1}{2}((\partial_i A^i)\varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5}$. Cependant, si la positivité du premier de ces deux termes peut être garantie par certaines conditions aux limites, le signe du second dépend entièrement de l'écoulement porteur. Par conséquent, la positivité de $\frac{1}{2}\partial_t(A^0\varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5}$ n'est pas toujours garantie, ce qui rend incertaine la stabilité du système.

Conclusion 4 *Sous des hypothèses convenables sur les données du problème, il est toujours possible, par linéarisation à l'ordre 1 des équations d'Euler, d'obtenir un système linéaire symétrique (de Friedrichs) bien posé. Celui-ci, non nécessairement stable, dépend de la loi d'état de l'écoulement porteur.*

On se propose maintenant de montrer que l'hypothèse supplémentaire des perturbations barotropes conduit également à un système symétrique linéaire, bien posé pour un certain nombre de conditions aux limites, et indépendant de la loi d'état de l'écoulement porteur.

2.2 Hypothèse de perturbations barotropes

2.2.1 Linéarisation du système

On considère un écoulement porteur vérifiant (1) de loi d'état P_0 quelconque. On se place désormais dans le cadre d'une perturbation barotrope qui consiste à supposer l'influence des variations entropiques négligeable devant celle des variations de la masse volumique, c'est-à-dire à écrire que si $\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho' + o(\varepsilon)$, alors $P = P_0 + \varepsilon c_0^2\rho' + o(\varepsilon)$ (où c_0 est la vitesse du son dans le milieu).

En posant $U^i = U_0^i + \varepsilon u^i$ et $\bar{\rho} = \frac{c_0\rho'}{\rho_0}$, les équations d'Euler générales (2) s'écrivent, après linéarisation en ε :

$$\partial_t\varphi + A^i\partial_i\varphi + B\varphi = f, \quad (8)$$

avec

$$A^i\partial_i = (U_0^i\partial_i)I_4 + c_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} u^i \\ \bar{\rho} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \partial_1 U_0^1 & \partial_2 U_0^1 & \partial_3 U_0^1 & \frac{1}{c_0} \left(\partial_1(c_0\rho_0) - \frac{1}{c_0}\partial_1 P_0 \right) \\ \partial_1 U_0^2 & \partial_2 U_0^2 & \partial_3 U_0^2 & \frac{1}{c_0} \left(\partial_2(c_0\rho_0) - \frac{1}{c_0}\partial_2 P_0 \right) \\ \partial_1 U_0^3 & \partial_2 U_0^3 & \partial_3 U_0^3 & \frac{1}{c_0} \left(\partial_3(c_0\rho_0) - \frac{1}{c_0}\partial_3 P_0 \right) \\ \frac{c_0}{\rho_0}\partial_1\rho_0 & \frac{c_0}{\rho_0}\partial_2\rho_0 & \frac{c_0}{\rho_0}\partial_3\rho_0 & \sum_k \frac{-1}{c_0}(U_0^k\partial_k c_0) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$f = \frac{1}{\rho_0} \begin{pmatrix} h_1 - U_0^1 h_0 \\ h_2 - U_0^2 h_0 \\ h_3 - U_0^3 h_0 \\ c_0 h_0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 5 *On obtient ces équations en utilisant la formule de dérivation d'un produit donc elle n'ont de sens distributionnel que si l'écoulement porteur est régulier.*

Remarque 6 $(U_0^i \partial_i) I_4$, partie diagonale de la partie principale de l'opérateur spatial, est un opérateur de convection. La partie non diagonale l'opérateur de l'équation des ondes sous forme d'un système d'ordre 1 .

En multipliant (8) scalairement par φ et en intégrant sur \mathbb{R}^3 , on obtient une équation de bilan d'énergie globale:

$$\partial_t \frac{1}{2} (\varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i (A^i \varphi, \varphi)_{\mathbb{R}^5} + \left((B - \frac{1}{2} \partial_i A^i) \varphi, \varphi \right)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5} = (f, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5}. \quad (9)$$

On remarque que le terme $(\varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5}$ peut être interprété comme une énergie. En effet, on a:

$$\frac{1}{2} (\varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5} = \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{c_0^2 \rho'^2}{\rho_0^2},$$

somme de l'énergie cinétique massique et de l'énergie acoustique massique du problème linéarisé. Ici encore, la conservation de l'énergie n'est pas assurée. En effet, (9) s'écrit aussi:

$$\partial_t \frac{1}{2} (\varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i (A^i \varphi, \varphi)_{\mathbb{R}^5} + \frac{1}{2} (K \varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5} = (f, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^3)^5}$$

où $K = B + B^T - \partial_i A^i$. Comme précédemment, les conditions aux limites peuvent garantir la positivité du terme $\int_{\mathbb{R}^3} \partial_i (A^i \varphi, \varphi)_{\mathbb{R}^5}$. Le signe de la matrice K détermine donc la stabilité du système, mais n'est en général pas connu. Cependant, en posant $\varphi = \varphi' e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$, on obtient l'équation:

$$\partial_t \frac{1}{2} (\varphi', \varphi')_{L^2(\mathbb{R}^3)^5} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i (A^i \varphi', \varphi')_{\mathbb{R}^5} + \frac{1}{2} ((K + 2\alpha I_4) \varphi', \varphi')_{L^2(\mathbb{R}^3)^5} = (e^{-\alpha t} f, \varphi')_{L^2(\mathbb{R}^3)^5}.$$

Il s'agit d'une équation similaire à la précédente avec une matrice $K' = K + 2\alpha I_4$ qui, en choisissant α de manière convenable, sera toujours définie positive. Ainsi, si les coefficients des A^i et de B sont par exemple dans $W^{1,\infty}$, on pourra supposer par la suite que $K \succ 0$. Ceci est à la base du choix des conditions aux limites rendant (8) bien posé. Remarquons toutefois que les résultats d'existence et d'unicité qui seront établis par la suite ne seront valables que pour un intervalle de temps compact $[0, T]$ et non sur tout \mathbb{R}_t^+ , le changement d'inconnue $\varphi = \varphi' e^{\alpha t}$ étant bijectif mais non homéomorphe dans ce cas.

Remarque 7 Le déterminant du symbole principal $A^i \partial_i$ (soit $A^i \eta_i$, $\eta \in \mathbb{R}^3$) vaut:

$$\det(A^i \eta_i) = ((U_0 \cdot \eta)^2 - c_0^2 \|\eta\|_2^2) (U_0 \cdot \eta)^2.$$

L'opérateur n'est donc pas elliptique, ce qui présente certaines difficultés, notamment quant à l'étude du caractère bien posé du problème et à l'approximation. On montrera cependant que pour une large classe de conditions aux limites, (8) est un problème bien posé pour lequel on sait définir des approximations pertinentes.

2.2.2 Conditions aux limites

On considère le problème (8) posé sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$, Ω étant un domaine régulier de \mathbb{R}^3 borné ou non. On suppose les coefficients des A^i et de B dans $W^{1,\infty}$ et on note $\mathcal{A} = A^i \partial_i + B$ l'opérateur spatial. On a $D(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})^5 / \varphi|_{\partial\Omega} \in \mathcal{N}(x)\}$ où $\mathcal{N}(x)$ ($x \in \partial\Omega$) est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 définissant des conditions aux limites homogènes.

On peut montrer que $\mathcal{A}^\#$, l'adjoint formel de \mathcal{A} , s'écrit:

$$\mathcal{A}^\# = -A^i \partial_i - \partial_i(A^i) + B^T$$

avec

$$D(\mathcal{A}^\#) = \{\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})^5 / \varphi|_{\partial\Omega} \in (A^i n_i(\mathcal{N}(x)))^\perp\},$$

où n est la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$.

On a alors le théorème suivant [2]:

Théorème 8 (de Rauch) *Si $A^i n_i$ est de rang constant sur chaque composante connexe de $\partial\Omega$, alors*

$$(\overline{\mathcal{A}})^* = \overline{\mathcal{A}^\#} \quad \text{dans } L^2(\Omega)^5.$$

On déduit de ce théorème, en utilisant le théorème de Hille-Yoshida, un résultat d'existence d'une solution du problème instationnaire.

Théorème 9 *Si Ω satisfait aux conditions du théorème de Rauch, si $\forall x \in \partial\Omega$ $\mathcal{N}(x)$ est maximal (pour l'inclusion des sous espaces vectoriels) dans $\mathcal{C} = \{\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})^5 / (A^i n_i \varphi, \varphi) \geq 0\}$ et si $K = B + B^T - \partial_i A^i$ est positive, alors $(-\overline{\mathcal{A}})$ est le générateur d'un semi-groupe contractant de $L^2(\Omega)^5$.*

Avec ce théorème, on peut montrer que le problème:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + A^i \partial_i \varphi + B \varphi = h \\ \varphi(t, 0) = \varphi_0 \in D(\mathcal{A}) \\ \varphi|_{\partial\Omega} \in \mathcal{N}(x) \end{cases} \quad (10)$$

avec $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)^5)$, admet une unique solution dans $\mathcal{C}^1([0, T], L^2(\Omega)^4) \cap \mathcal{C}^0([0, T], D(\mathcal{A}))$ donnée par la formule de Duhamel:

$$\varphi(t) = e^{-\mathcal{A}t} \varphi(0) + \int_0^t e^{-\mathcal{A}(t-s)} h(s) ds. \quad (11)$$

Remarque 10 *Le système (10) ne vérifie pas les hypothèses du théorème (9). On peut cependant utiliser le système en φ' décrit précédemment et obtenir le résultat.*

Il reste maintenant à caractériser les conditions aux limites qui satisfont aux hypothèses du théorème (9). Généralement, on représente $\mathcal{N}(x)$ par le noyau d'une matrice carrée de taille 4. Ceci revient en fait à décrire les conditions aux limites en

terme de flux, et s'avère utile pour l'approximation et l'écriture de conditions aux limites non homogènes. On pose donc:

$$\mathcal{N}(x) = \ker(M).$$

Les conditions aux limites de (8) s'écrivent alors:

$$M\varphi = 0,$$

et on a le résultat suivant:

Proposition 11 *Soit N la matrice telle que $M = -\frac{1}{2}(A^i n_i - N)$. On a alors: \mathcal{N} satisfait aux hypothèses du théorème (9) si et seulement si $\forall x \in \partial\Omega$:*

- (i) $(N\varphi, \varphi) \geq 0$ (ie: $N + N^* \succeq 0$)
- (ii) $\ker(A^i n_i + N) + \ker(A^i n_i - N) = \mathbb{R}^4$

On distingue alors deux catégories de conditions aux limites, caractérisées par les cas suivants:

- $N + N^* = 0 \Leftrightarrow N$ antisymétrique. Ce sont des conditions d'obstacles (qui réfléchissent l'énergie).
- $N + N^* \succ 0 \Leftrightarrow N$ non négative. Ce sont des conditions d'impédance généralisées. C'est le cas par exemple des conditions aux limites absorbantes à l'ordre 1 dont on se servira par la suite.

Il est nécessaire, au vu de la mise en œuvre numérique, d'explicitier la matrice M . On a:

$$A^i n_i = V_n I_4 + c_0 \begin{pmatrix} 0 & n \\ n^T & 0 \end{pmatrix}$$

où $V_n = U_0 \cdot n$ est la vitesse sortante de l'écoulement porteur. Il convient alors de distinguer trois cas:

- $V_n = 0$ (écoulement porteur glissant)
On retrouve la partie non diagonale de l'opérateur, qui correspond, comme dit précédemment, à l'équation des ondes sous forme d'un système d'ordre 1. On peut alors définir différentes conditions d'obstacle: $\rho = 0$ (nœud de pression), ou encore $u \cdot n = 0$ (obstacle parfaitement glissant). La matrice M associée à cette dernière condition est:

$$M = c_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -n^T & 0 \end{pmatrix}.$$

- $V_n > 0$ (écoulement porteur subsonique sortant)
Les conditions aux limites nous intéressant particulièrement dans ce cas sont les conditions de non réflexion à l'ordre 1 (parfaitement absorbantes pour les ondes normales), approximation au premier ordre de l'opérateur de non réflexion. Si l'on décompose la matrice $A^i n_i$ en la somme de sa partie positive $(A^i n_i)^+$

(associée aux valeurs propres positives) et de sa partie négative $(A^i n_i)^-$, la matrice M associée est alors $M = -(A^i n_i)^-$. Des calculs effectués avec Maple (dont le code est donnée en annexe) donnent:

$$(A^i n_i)^- = \frac{1}{2}(V_n - c_0) \begin{pmatrix} n \otimes n & -n \\ -n^T & 1 \end{pmatrix}.$$

- $V_n < 0$ (écoulement porteur subsonique entrant)

Ce cas est similaire au cas précédent. La matrice associée à une condition parfaitement absorbante pour les ondes normales est encore $M = -(A^i n_i)^-$ avec:

$$(A^i n_i)^- = \begin{pmatrix} V_n I_3 - \frac{1}{2}(V_n + c_0)n \otimes n & -\frac{1}{2}(V_n - c_0)n \\ -\frac{1}{2}(V_n - c_0)n^T & \frac{1}{2}(V_n - c_0) \end{pmatrix}.$$

3 Mise en œuvre d'une méthode de Galerkin discontinue: volumes finis

On cherche à présent une approximation pertinente du problème (10). Celui-ci étant symétrique, on peut utiliser des approximations de type Galerkin discontinu, qui ont l'avantage de pallier à la non ellipticité de l'opérateur spatial \mathcal{A} . Ces méthodes, que l'on peut présenter comme une généralisation des méthodes de volumes finis, ont été introduites par Lesaint dès 1975 et sont aujourd'hui fortement utilisées. Dans un souci de continuité avec le stage, les méthodes de Galerkin générales, bien que restreintes aux simples volumes finis dans ce projet, seront sommairement présentées dans ce chapitre.

3.1 Explicitation du schéma

3.1.1 Formulation variationnelle

On met le problème (10) sous la forme:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + A^i \partial_i \varphi + B \varphi = h \\ M \varphi = f \quad \text{sur } \partial \Omega \times [0, T] \\ \varphi(0, x) = \varphi_0. \end{cases} \quad (12)$$

Les conditions aux limites peuvent éventuellement être inhomogènes et f est une fonction donnée telle que $\forall x \in \partial \Omega \times [0, T]$, $f(x) \in \text{Im}(M)$ et telle que l'on puisse effectuer un relèvement dans $D(\mathcal{A})$ pour se ramener à un problème avec conditions aux limites homogènes.

En utilisant le théorème (9), et en faisant des hypothèses de régularité en temps suffisantes sur h et sur f , on a existence et unicité de la solution de (12) dans $\mathcal{C}^1([0, T], L^2(\Omega)^4) \cap \mathcal{C}^0([0, T], D(\mathcal{A}))$. Cependant, afin d'établir la formulation variationnelle du problème (12), on suppose que la solution est en fait dans $\mathcal{C}^1([0, T], H_m^1(\Omega)^4)$.

Remarque 12 *L'espace $H_m^1(\Omega)^4$ de recherche de la solution $\varphi(t, \cdot)$ n'étant pas inclus dans $D(\mathcal{A})$, il faudra, pour s'assurer de l'appartenance à $D(\mathcal{A})$ d'une solution $\varphi(t, \cdot)$ de la formulation variationnelle, rajouter à celle-ci un terme sur les discontinuités de φ .*

Afin d'établir la formulation variationnelle de (12), on considère des fonctions test $\psi \in H_m^1(\Omega)^4$ et on suppose φ solution du système (12). Par la suite, on notera D_φ la surface de discontinuités de φ et $R_\varphi = \Omega \setminus D_\varphi$.

En prenant l'équation principale du système (12) au sens des distributions, on a:

$$\{\partial_t \varphi + A^i \partial_i \varphi + B\varphi - h\}_{pp} + A^i n_i[\varphi] \delta_{D_\varphi} = 0,$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + A^i \partial_i \varphi + B\varphi = h & \text{pp sur } R_\varphi \\ A^i n_i[\varphi] = 0 & \text{sur } D_\varphi. \end{cases}$$

En conséquence, on obtient:

$$\forall \psi \in H_m^1(\Omega)^4, \int_{R_\varphi} (\partial_t \varphi + A^i \partial_i \varphi + B\varphi) \cdot \psi = 0.$$

De plus, du fait que les sous-espaces propres de $A^i n_i$ sont en somme directe, on montre que:

$$A^i n_i[\varphi] = 0 \text{ sur } D_\varphi \Rightarrow \begin{cases} (A^i n_i)^-[\varphi] = 0 & \text{sur } D_\varphi \\ (A^i n_i)^+[\varphi] = 0 & \text{sur } D_\varphi, \end{cases}$$

d'où,

$$\forall \psi \in H_m^1(\Omega)^4, \int_{D_\varphi} ((A^i n_i)^-(\varphi^+ - \varphi^-) \cdot \psi^- + (A^i n_i)^+(\varphi^+ - \varphi^-) \cdot \psi^+) = 0.$$

La condition aux limites de (12) amène quant à elle à la relation suivante:

$$\forall \psi \in H_m^1(\Omega)^4, \int_{\partial\Omega} (M(\varphi) - f) \cdot \psi = 0.$$

On obtient donc finalement le problème variationnel:

$$\begin{cases} \forall \psi \in H_m^1(\Omega)^4, \\ \int_{R_\varphi} (\partial_t \varphi + A^i \partial_i \varphi + B\varphi) \cdot \psi + \int_{\widetilde{D_\varphi}} (A^i n_i)^-(\varphi^+ - \varphi^-) \cdot \psi^- + \int_{\partial\Omega} (M\varphi - f) \cdot \psi = \int_{R_\varphi} h \cdot \psi. \end{cases}$$

Remarque 13 La notation $\int_{\widetilde{D_\varphi}}$ signifie que l'on doit considérer les normales à D_φ orientées dans les deux sens (entrantes et sortantes). Si l'on utilisait seulement les normales sortantes, ce terme s'écrirait comme précédemment:

$$\int_{D_\varphi} ((A^i n_i)^-(\varphi^+ - \varphi^-) \cdot \psi^- + (A^i n_i)^+(\varphi^+ - \varphi^-) \cdot \psi^+).$$

Vérifions maintenant que (13) \Rightarrow (12). Ceci se montre par localisation. Soit φ solution du problème variationnel. En prenant $\psi \in \mathcal{D}(R_\varphi) \subset H_m^1(\Omega)^4$; on obtient:

$$\int_{R_\varphi} (\partial_t \varphi + A^i \partial_i \varphi + B\varphi) \cdot \psi = 0,$$

et ce pour tout $\psi \in \mathcal{D}(R_\varphi)$. On a donc:

$$\partial_t \varphi + A^i \partial_i \varphi + B\varphi = 0 \quad \text{pp dans } \Omega \text{ (car pp dans } R_\varphi),$$

ce qui implique que φ vérifie:

$$\begin{cases} \forall \psi \in H_m^1(\Omega)^4, \\ \int_{\widetilde{D}_\varphi} (A^i n_i)^-(\varphi^+ - \varphi^-) \cdot \psi^- + \int_{\partial\Omega} (M(\varphi) - f) \cdot \psi = 0. \end{cases}$$

Dans le cas particulier de fonctions test $\psi \in H_m^1(\Omega)^4$ qui s'annulent d'un côté de D_φ et qui sont nulles sur $\partial\Omega$, cette relation s'écrit:

$$\forall \psi|_{\partial\Omega} \in \mathcal{D}(D_\varphi), \quad \int_{D_\varphi} (A^i n_i)^-(\varphi^+ - \varphi^-) \cdot \psi^- = 0,$$

ce qui donne

$$(A^i n_i)^-(\varphi^+ - \varphi^-) = 0 \quad \text{pp sur } D_\varphi.$$

De même, en prenant des fonctions ψ qui s'annulent de l'autre côté de D_φ et qui sont nulles sur $\partial\Omega$, on obtient:

$$(A^i n_i)^+(\varphi^+ - \varphi^-) = 0 \quad \text{pp sur } D_\varphi.$$

On retrouve donc, puisque $A^i n_i = (A^i n_i)^+ + (A^i n_i)^-$, la relation de saut

$$(A^i n_i)[\varphi] = 0,$$

et φ est bien solution au sens des distributions de l'équation $\partial_t \varphi + A^i \partial_i \varphi + B\varphi = 0$. Finalement, la formulation variationnelle donne:

$$\forall \psi \in H_m^1(\Omega)^4, \quad \int_{\partial\Omega} (M(\varphi) - f) \cdot \psi,$$

donc:

$$M\varphi = f \quad \text{pp sur } \partial\Omega.$$

Il y a donc bien équivalence entre le système (12) et sa formulation faible, résultat qui fait l'objet du théorème suivant:

Théorème 14 φ est solution de (12) dans $\mathcal{C}^1([0, T], H_m^1(\Omega)^4)$ si et seulement si $\forall \psi \in H_m^1(\Omega)^4$,

$$\int_{R_\varphi} (\partial_t \varphi + A^i \partial_i \varphi + B\varphi) \cdot \psi + \int_{\widetilde{D}_\varphi} (A^i n_i)^-(\varphi^+ - \varphi^-) \cdot \psi^- + \int_{\partial\Omega} (M(\varphi) - f) \cdot \psi = \int_{\Omega} h \cdot \psi. \quad (13)$$

3.1.2 Discrétisation et approximation

Présentation des méthodes de Galerkin discontinues

On cherche à présent une discrétisation du problème, qui, pour les méthodes de Galerkin discontinu, est issue de la formulation variationnelle. Pour cela, on partitionne le domaine borné Ω en $\Omega = \bigcup_{e=1}^N \omega_e$, et l'on suppose que φ_e , la restriction de φ à ω_e , appartient à un espace de dimension $4k$.

Remarque 15 Pour $k = 1$, φ_e est constante et l'on retrouve la méthode des volumes finis.

En notant $\{E_r^e\}_{r=1..k}$ une base de l'espace de restriction de φ à ω_e , et en prenant successivement les fonctions de base E_r^e comme fonctions test dans la formulation variationnelle (13), on obtient le système de $4kN$ équations différentielles:

$$\forall e = 1..N, \forall r = 1..k, \int_{\omega_e} (\partial_t \varphi_e + A^i \partial_i \varphi_e + B \varphi_e) E_r^e + \int_{\partial \omega_e \setminus \partial \Omega} (A^i n_i)^- (\varphi_e^+ - \varphi_e) E_r^e + \int_{\partial \omega_e \cap \partial \Omega} (M \varphi_e - f) E_r^e = \int_{\omega_e} h E_r^e, \quad (14)$$

où φ_e^+ est la valeur de φ à l'extérieur (au sens de la normale sortante) de ω_e .

La plupart du temps, on choisit comme espace d'interpolation des espaces polynômiaux. Si l'on considère des polynômes de degré r , et si l'on suppose que la solution φ a la régularité spatiale $H_m^r(\Omega)^4$, on peut montrer que l'erreur d'approximation dans $L^2([0, T], L^2(\Omega)^4)$ est en $O(h^{r+\frac{1}{2}})$ où $h = \sup_e \text{diam}(\omega_e)$, c'est à dire que

$$\|\varphi - \varphi_e\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega)^4)} \leq C(T, \Omega) h^{r+\frac{1}{2}}.$$

Cependant, cet ordre d'erreur ne pourra être conservé que si la dérivée en temps de (14) est bien approchée. On montre par exemple que pour $r = 0$ (volumes finis), l'erreur reste en $O(h^{\frac{1}{2}})$ si l'on utilise le schéma d'Euler explicite. La condition de stabilité est alors $\Delta t \leq c h$, avec c qui dépend de la forme des éléments ω_e et des valeurs propres de $A^i n_i$.

Ordre 0 de la méthode de Galerkin discontinue: volumes finis

On s'intéresse à présent au cas particulier des volumes finis, pour lequel on va expliciter le schéma. Pour cela, on considère la formulation variationnelle spatio-temporelle de (12), qui s'obtient de la même manière que (13) en prenant $[0, T] \times \Omega$ au lieu de Ω . En conséquence, les sommations sur i seront à présent faites pour $i = 0..3$, avec $A^0 = Id$, $\partial_0 = \partial_t$ et $n_0 = n_t$.

Remarque 16 Pour établir le schéma d'approximation des volumes finis, on pourrait également considérer la formulation variationnelle spatiale uniquement, la discrétiser spatialement en utilisant les fonctions de base comme fonctions test, et utiliser le schéma d'Euler explicite pour discrétiser le problème temporel obtenu. Cependant, le choix de la semi-discrétisation spatiale ne permettant pas d'envisager facilement la propagation de discontinuités, on utilisera une formulation spatio-temporelle de (13) en considérant que les solutions appartiennent à $H_m^1([0, T] \times \Omega)^4$.

Soit un domaine cartésien bidimensionnel $\Omega = \bigcup_{e=1}^N \omega_e$, ω_e rectangle de taille $\Delta x \times \Delta y$. On considère un pavage $(q_{e,k})_{e=1..N, k=0..n-1}$ de $\Omega \times [0, T]$, avec $q_{e,k} = \omega_e \times [t_k, t_k + \Delta t]$, $t_k = k \Delta t$. On se place dans le cadre des volumes finis: la restriction des quantités manipulées est une constante sur chaque élément $q_{e,k}$ (prise comme valeur au centre du pavé $q_{e,k}$). De ce fait, on a:

$$A^i \partial_i \varphi = 0.$$

On suppose par commodité que les discontinuités de φ sont portées par les frontières $\partial q_{e,k}$ des éléments $q_{e,k}$. Les trois fonctions de base d'un élément spatio-temporel $q_{e,k}$ sont $(\mathbb{I}_{q_{e,k}}, 0, 0)$, $(0, \mathbb{I}_{q_{e,k}}, 0)$, $(0, 0, \mathbb{I}_{q_{e,k}})$.

En prenant dans la formulation variationnelle (13) ces fonctions de base pour fonctions test et ce pour tout $q_{e,k}$, on obtient le système:

$$\int_{q_{e,k}} (B\varphi - h) + \int_{\partial q_{e,k}} (A^i n_i)^- (\varphi^+ - \varphi^-) + \int_{(\partial\Omega \times [0,T]) \cap \partial q_{e,k}} (M\varphi - f) = 0.$$

On note alors φ_e^k (respectivement h_e^k et f_e^k) la valeur de φ (respectivement h et f) sur q_e^k , et B_e la valeur de B sur ω_e (rappelons que B ne dépend que de l'écoulement porteur). On obtient ainsi une approximation de chacun des trois termes:

- $\int_{q_{e,k}} (B\varphi - h)$ est approché par $(B_e \varphi_e^k - h_e^k) \text{mes}(q_{e,k})$ c'est-à-dire par

$$\Delta t \Delta x \Delta y (B_e \varphi_e^k - h_e^k).$$

Remarque 17 Cette approximation n'est valable que pour h fonctionnel. Si par exemple $h = \delta_{x_0, y_0} \sin(\omega t)$, elle s'écrira:

$$\Delta t \Delta x \Delta y B_e \varphi_e^k - \Delta t \sin(\omega(t_k + \Delta t)).$$

- $\int_{\partial q_{e,k}} (A^i n_i)^- (\varphi^+ - \varphi^-)$ se traite en distinguant chacune des faces du pavé $q_{e,k}$.
 - $n = (n_t, n_x, n_y) = (1, 0, 0)$: alors $A^i n_i = Id$, donc $(A^i n_i)^- = 0$. L'intégrale est donc nulle.
 - $n = (-1, 0, 0)$: alors $(A^i n_i)^- = -Id$.
On a donc pour approximation de l'intégrale :

$$\Delta x \Delta y (\varphi_e^k - \varphi_e^{k-1}).$$

- $n = (0, 0, -1)$: alors $(A^i n_i)^- = (-A^2)^-$. En notant $(-A_b^2)^-$ la valeur de $(-A^2)^-$ au milieu de la frontière "du bas" de l'élément spatial ω_e , et $\varphi_{b,e}^k$ la valeur de φ sur le pavé d'espace-temps spatialement en dessous de ω_e , on a alors l'approximation:

$$\Delta x \Delta t (-A_b^2)^- (\varphi_{b,e}^k - \varphi_e^k).$$

Les mêmes notations seront utilisées par la suite avec comme indices h , g , ou d pour "haut", "gauche" ou "droite".

- $n = (0, 0, 1)$: alors $(A^i n_i)^- = (A^2)^-$ et on approche l'intégrale par:

$$\Delta x \Delta t (A_h^2)^- (\varphi_{h,e}^k - \varphi_e^k).$$

- $n = (0, -1, 0)$: alors $(A^i n_i)^- = (-A^1)^-$. On approche donc par:

$$\Delta y \Delta t (-A_g^1)^- (\varphi_{g,e}^k - \varphi_e^k).$$

– $n = (0, 1, 0)$: alors $(A^i n_i)^- = (A^1)^-$. On a alors l'approximation:

$$\Delta y \Delta t (A_d^1)^- (\varphi_{d,e}^k - \varphi_e^k).$$

- $\int_{(\partial\Omega \times [0,T]) \cap \partial q_{e,k}} (M\varphi - f)$ sera quant à lui, puisque M est généralement indépendante du temps, approché par $\text{mes}(\partial\Omega \cap \partial\omega_e) \Delta t (M_e \varphi_e^k - f_e^k)$, avec M_e valeur de M au milieu de $\partial\Omega \cap \partial\omega_e$.

Le schéma que l'on obtient alors est implicite. Cependant, par commodité, on utilisera la formulation explicite de celui-ci:

$$\forall e = 1..N, \forall k,$$

$$\begin{aligned} \varphi_e^k = & \varphi_e^{k-1} - \Delta t (B_e \varphi_e^{k-1} - h_e^{k-1}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} [(-A_b^2)^- (\varphi_{b,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (A_h^2)^- (\varphi_{h,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1})] \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(A_d^1)^- (\varphi_{d,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (-A_g^1)^- (\varphi_{g,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1})] - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \text{mes}(\partial\Omega \cap \partial\omega_e) (M_e \varphi_e^{k-1} - f_e^{k-1}), \end{aligned}$$

Remarque 18 Une étude de la convergence de la méthode aux volumes finis explicites en temps a été faite dans [5].

3.2 Résultats numériques

On présente dans cette section quelques résultats numériques obtenus avec ce schéma dans un domaine rectangulaire de dimension $[0, 3] \times [0, 1]$. La célérité du milieu a été prise égale à 1. Afin de simuler un guide d'onde théoriquement infini, des conditions d'absorption à l'ordre 1 sur les frontières $\{x = 0\}$ et $\{x = 3\}$ ont été utilisées, les frontières $\{y = 0\}$ et $\{y = 1\}$ étant quant à elles munies de condition de glissement (on pourra se référer à la première partie du rapport pour l'expression de la matrice M correspondante). La longueur du domaine a été choisie de manière à laisser aux ondes le temps de se normaliser avant d'arriver sur les bords absorbants. Afin de ne pas surcharger le rapport, seuls les profils de pression ont été présentés ici (les axes ayant été inversés par commodité).

La source de perturbation est une pyramide spatiale tensoriel un sinus de fréquence 1. Un maillage correspondant à 60 éléments par longueur d'onde a été utilisé. Trois simulations sont présentées. La masse volumique ρ est représentée pour les temps $t = 0.21s, 0.46s, 0.71s, \dots, 2.57s$ pour la simulation sans convection, et $t = 0.3s, 0.6s, 0.9s, \dots, 3.6s$ avec convection.

La première simulation, visible en figure 1, est une simulation en acoustique pure (l'écoulement porteur est au repos), on retrouve alors une propagation régie par l'équation des ondes. La propagation de la perturbation au centre est clairement visible, avec réflexion sur les bords verticaux (axe des x) et quasi-absence de réflexion sur les bords horizontaux (axe des y).

La deuxième simulation, visible en figure 2, traite d'un cas de convection constante: $U_0^1 = 0,5$ et $U_0^2 = 0$; les vitesses de propagation différentes au-dessus et au dessous de la source sont clairement visibles, ceci étant dû à la convection. L'absorption quasi-parfaite des bords horizontaux traduit là encore l'efficacité de la condition d'impédance du premier ordre dans la configuration considérée (ondes sortantes quasi-normales au bord).

Enfin, la figure 3 montre la simulation d'un écoulement porteur cisailé: $U_0 = U_0(y) = 0,5(1 + 0,3 \tanh(5(y - 0,5)))$, présentant un point d'inflexion¹; les vitesses de propagation sont alors asymétriques. On peut remarquer en particulier en fin de simulation (3 dernières images) la très bonne absorption d'une onde légèrement oblique par le bord horizontal inférieur.

Remarque 19 *Dans tous les cas, la condition d'impédance du premier ordre est efficace: ceci est dû aux conditions favorables des simulations, à savoir la fréquence basse de la perturbation qui ne permet pas une visualisation fine des phénomènes, et, surtout, l'incidence des ondes sortantes aux bords horizontaux, proche de la normale (pour laquelle l'absorption est parfaite).*

¹En pratique, ce point d'inflexion est à l'origine d'une instabilité dite convective [6]; la discrétisation spatiale choisie ne permet pas de visualiser cette instabilité: il faudrait en effet pour cela affiner le maillage du domaine et optimiser les calculs [7];

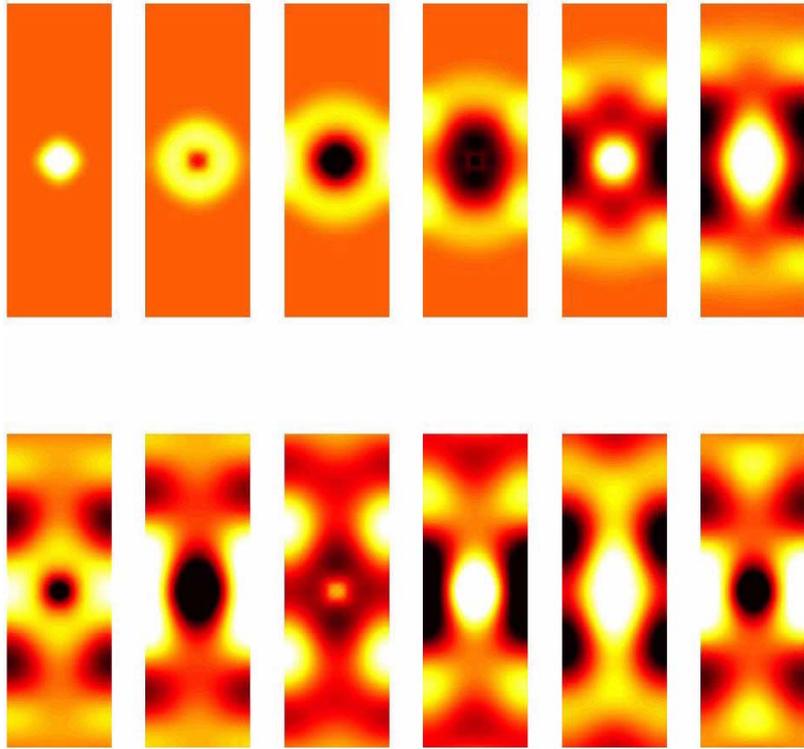


Figure 1: Evolution de ρ sans convection ($\uparrow^x \rightarrow_y$).

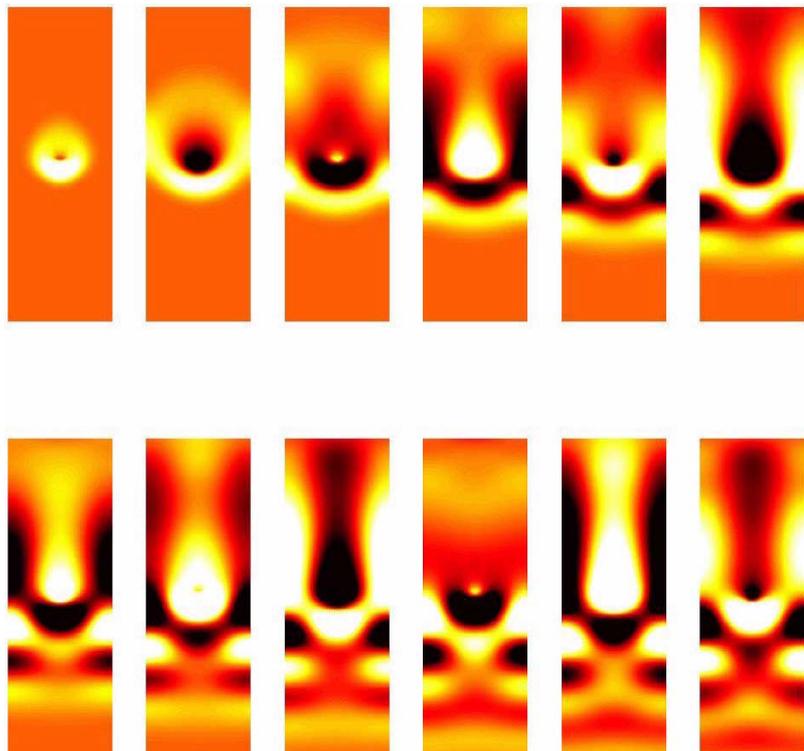


Figure 2: Evolution de ρ avec convection constante ($\uparrow^x \rightarrow_y$).

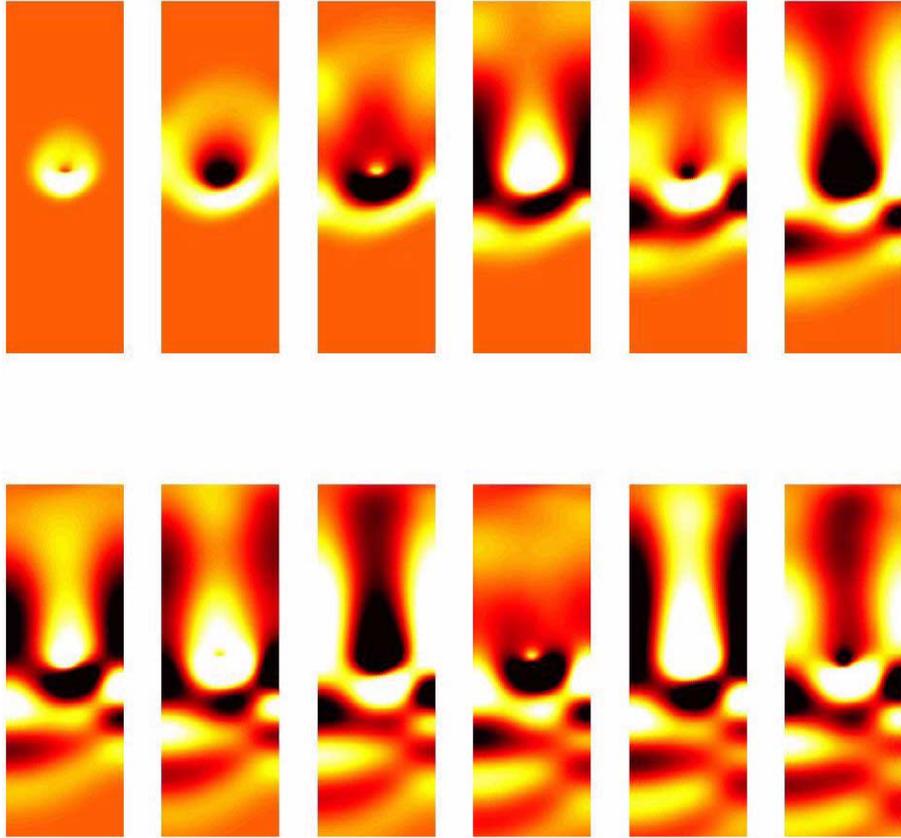


Figure 3: Evolution de ρ avec écoulement porteur cisailé ($\uparrow^x \rightarrow_y$).