

Énergie d'un béton atteint de la réaction alcali-silice

Sommaire

10.1 Introduction	230
10.2 Rappel des expressions de l'énergie potentielle	230
10.2.1 Rappel sur la morphologie considérée	230
10.2.2 Expressions des énergies	230
10.3 Calcul des pressions et énergie	232
10.3.1 Site de <i>Type I</i>	233
10.3.2 Site de <i>Type II</i>	233
10.3.3 Utilisation du calcul des pressions	234
10.3.4 Énergie totale	234
10.4 Élasticité non drainée, précontrainte chimique	235
10.5 Calcul des contraintes et des déformations macroscopiques pour les différents cas de chargement	235
10.5.1 Déformation imposée	236
10.5.2 Contrainte imposée	236
10.5.3 Chargement mixte	236
10.5.4 Restriction du gonflement par des anneaux	237
10.5.5 Conclusion sur la détermination des contraintes et des déformations	238
10.6 Conclusion	238

10.1 Introduction

Ce chapitre est le pendant du chapitre précédent, pour ce qui est des énergies. Nous allons reprendre les expressions générales écrites dans le chapitre 6, et les adapter au cas précis de milieu poreux que l'on considère ici. Nous souhaitons aussi, comme nous l'avons fait dans le chapitre 7, écrire les énergies en fonction de nos véritables paramètres de chargement que sont les degrés d'attaque, et non en fonction des pressions dans les pores qui ne sont que des intermédiaires de calcul très pratiques pour écrire l'énergie élastique du squelette. Nous détaillerons donc, en fonction du type de chargement extérieur, le calcul des pressions dans les pores, et le calcul des contraintes et des déformations.

10.2 Rappel des expressions de l'énergie potentielle

L'écriture de l'énergie potentielle dépend du chargement imposé. Nous rappelons dans cette partie un certain nombre d'écritures utiles.

10.2.1 Rappel sur la morphologie considérée

Comme nous l'avons exposé dans le chapitre 9 consacré au détail du calcul des propriétés homogénéisées du béton atteint de RAG, les familles de granulats et leur voisinage ont été classés en deux types. Les sites de *Type I* ont subi une attaque sans que celle-ci n'ait encore provoqué la décohésion entre les grains et la pâte de ciment, tandis que les sites de *Type II* ont subi cette décohésion et sont maintenant susceptibles d'apparition de fissure dans la pâte de ciment environnante. Les couplages entre les différents sites ont été limités, puisque l'on ne prend pas en compte la déformation induite dans la porosité d'un site lorsqu'une pression est présente dans un autre site. On écrit ici les énergies sans distinguer explicitement les deux types de sites, qui sont au nombre de N^s . Il est en conséquence assez facile d'écrire les énergies potentielles et élastiques de notre squelette.

10.2.2 Expressions des énergies

Les énergies potentielles sont propres à chaque mode de chargement. Nous donnons d'abord l'énergie élastique, qui elle est valable quel que soit le chargement, mais dont les écritures peuvent être diverses en fonction des variables que l'on choisit d'utiliser. On a omis les primes utilisés dans les chapitres 6 et 9 pour matérialiser la différence entre les coefficients déterminés depuis les expressions de l'énergie du solide élastique trouvé (sans prime) et les coefficients déterminés à partir de l'expression de l'énergie du solide poreux (avec prime).

10.2.2.1 Énergie élastique et loi de comportement

On donne d'abord l'énergie élastique, écrite en fonction des variables $(\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:N^s})$. Dans cette écriture les termes de couplage entre les déformations imposées et les pressions imposées dans les espaces poreux ne sont pas visibles :

$$E_{ske}^{el} (\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:N^s}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} + \frac{1}{2} \sum_i^{N^s} (p^i)^2 M^i \quad (10.1)$$

Pour écrire cette énergie élastique en fonction d'autres variables (contrainte macroscopique, variation du volume poreux), on utilise simplement la loi de comportement macroscopique du milieu poreux, que l'on a établie dans la partie dédiée aux énergies (chapitre 6) :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \sum_i^{Ns} p^i \underline{\underline{B}}^i \\ (\phi - f)^i = \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} + M^i p^i \end{cases} \quad (10.2)$$

10.2.2.2 Énergie potentielle à déformation et pressions imposées

L'énergie potentielle à déformation macroscopique et pressions imposées s'obtient à partir de l'énergie élastique par la formule suivante, où le second terme est le travail des efforts de pression (on repère les variables imposées par un indice d). La variation de volume dépend des variables imposées :

$$E_{ske}^{pot} \left(\underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s} \right) = E_{el} \left(\underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s} \right) - \sum_{i=1}^{Ns} p_d^i (\phi - f)^i \left(\underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s} \right) \quad (10.3)$$

En utilisant la loi de comportement, cela nous donne :

$$E_{ske}^{pot} \left(\underline{\underline{E}}_d, (p^i)_{i=1:N^s} \right) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}_d : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}}_d - \underline{\underline{E}}_d : \sum_i^{Ns} p_d^i \underline{\underline{B}}^i - \frac{1}{2} \sum_i^{Ns} (p_d^i)^2 M^i \quad (10.4)$$

C'est cette énergie potentielle que nous utiliserons dans notre critère de rupture en cas de déformation et pression imposées. Cependant il est possible d'imposer aussi la contrainte, comme nous le voyons dans la section suivante.

10.2.2.3 Énergie potentielle à contrainte et pressions imposées

L'énergie potentielle à contrainte macroscopique et pressions imposées s'obtient à partir de l'énergie potentielle à déformation et pression imposées par soustraction des travaux des efforts imposés, ou d'un point de vue plus mathématique, par transformée de Legendre. On note $\underline{\underline{E}} \left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s} \right)$ la déformation moyenne liée par la loi de comportement à une contrainte et des pressions imposées.

$$\begin{aligned} E_{ske}^{pot} \left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s} \right) &= E_{el,ske} \left(\underline{\underline{E}} \left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s} \right), (p_d^i)_{i=1:N^s} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{Ns} p_d^i (\psi - f)^i \left(\underline{\underline{E}} \left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s} \right), (p_d^i)_{i=1:N^s} \right) \\ &\quad - \underline{\underline{E}} \left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s} \right) : \underline{\underline{\Sigma}}_d \end{aligned} \quad (10.5)$$

10.2.2.4 Énergie potentielle à chargement extérieur mixte et pression imposée

Il est enfin possible de charger macroscopiquement le matériau poreux par des conditions aux limites mixtes, en imposant dans certaines directions des déformations, dans d'autres des contraintes. On note alors $\underline{\underline{\Sigma}}_d$ la contrainte imposée, $\underline{\underline{E}}_d$ la déformation imposée, et ce sont deux tenseurs orthogonaux (leur produit doublement contracté est nul). On peut cependant calculer la déformation dans toutes les directions en fonction des contraintes, des déformations et des pressions imposées, ce que l'on écrit comme précédemment $\underline{\underline{E}} \left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, \underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s} \right)$. L'expression du paragraphe précédent est alors toujours valide :

$$\begin{aligned}
 E_{ske}^{pot}\left(\underline{\Sigma}_d, \underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) &= E_{ske}^{el}\left(\underline{\underline{E}}\left(\underline{\Sigma}_d, \underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right), (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{N^s} p_d^i (\psi - f)^i \left(\underline{\underline{E}}\left(\underline{\Sigma}_d, \underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right), (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) \\
 &\quad - \underline{\underline{E}}\left(\underline{\Sigma}_d, \underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) : \underline{\Sigma}_d
 \end{aligned} \tag{10.6}$$

La méthode de calcul du tenseur complet des déformations macroscopiques en fonction des contraintes et déformations imposées sera abordée au § 10.5.

Abordons la question du calcul de la pression dans le cas précis de l'alcali-réaction.

10.3 Calcul des pressions et énergie

Dans notre section précédente, nous donnons l'énergie élastique et les différentes énergies potentielles pour le squelette du béton attaqué par la RAG. Cela suppose que nous connaissons le chargement extérieur ainsi que les pressions dans les pores. Cependant, lors de la RAG, les pressions sont le résultat de l'accumulation de gel produit par l'attaque. Nous devons donc être capables de les calculer en fonction de l'état d'avancement de l'attaque. Nous avons déjà fait ce travail dans notre chapitre illustrant l'utilisation du critère de Francfort-Marigo en microporomécanique (chapitre 7), dans le cas un peu plus simple où une masse connue de fluide était progressivement injectée dans des cavités sphériques. Le principe est ici exactement le même. Il faut simplement différencier les deux types de sites en cohérence avec les choix que nous avons faits concernant les coefficients poroélastiques.

Rappelons tout d'abord quelques définitions. On a N^s sites au total. Chaque site i est formé des voisinages des grains sphériques de même taille R^i . Les grains du site i ont une fraction volumique f^i , et sont donc en nombre $N^i = F^i / (\frac{4\pi}{3}(R^i)^3)$ par unité de volume poreux. Chaque grain est entouré d'une auréole de transition ITZ d'épaisseur l_c et de porosité ρ_{itz} . À un instant donné le degré d'attaque des grains de la famille i est α^i , de telle sorte que la calotte sphérique comprise entre les rayons $R^i(1 - \alpha^i)$ et R^i a une porosité ρ^i . Appelons pour chaque site F^i le volume par unité de volume poreux attaqué. Ce volume vaut :

$$F^i = f^i \rho^i [1 - (1 - \alpha^i)^3] \tag{10.7}$$

Le volume de porosité dans l'ITZ par unité de volume poreux V_{itz}^i est lui égal à :

$$V_{itz}^i = 3f^i \frac{l_c \rho_{itz}}{R^i} \tag{10.8}$$

Le volume de gel est calculé à partir de la porosité créée par l'attaque, par multiplication par un coefficient rendant compte de son gonflement, δ , de façon à ce que le volume de gel à pression nulle dans un site est δ fois plus grand que la porosité créée par l'attaque. Ainsi le volume relâché de gel au site i par unité de volume poreux est :

$$V_0^i = \delta F^i \tag{10.9}$$

La déformation de ce gel à une pression p^i donnée est décrite par une loi linéaire élastique en fonction du module d'incompressibilité du gel K_g . On peut ainsi écrire le volume déformé de gel au site i par unité de volume poreux :

$$V^i = \delta F^i \left(1 - \frac{p^i}{K_g}\right) \tag{10.10}$$

Il est nécessaire de comparer ce volume de gel au volume disponible, qui prend en compte la déformation de la pâte de ciment environnant le site, ainsi que celle du granulat. Cette prise en compte se fait de manière légèrement différente en fonction de la décohésion ou non au site considéré. On présente donc distinctement le calcul de la pression dans les deux cas.

La différence entre les deux types est que pour le *Type I*, la porosité considérée dans les équations de comportement est celle du grain attaqué et de l'auréole de transition, tandis que pour le *Type II*, c'est toute la cavité, comme si elle était entièrement remplie de fluide. Il faudra donc pour ce second type de sites prendre explicitement en compte la présence d'un granulat attaqué dans le fluide qui remplit la cavité.

10.3.1 Site de *Type I*

Pour ces sites, le volume disponible pour le gel doit être égal au volume de gel V^i . Ce volume est, en configuration relâchée, composé du volume de porosité dans les grains F^i et du volume de l'auréole de transition V_{itz}^i . Rappelons la deuxième équation de la loi de comportement du milieu poreux :

$$(\phi^i - \tilde{f}^i) = \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} + M^i p^i \quad (10.11)$$

Où \tilde{f}^i , le volume en configuration relâchée de l'espace poreux, est donc égal à $\tilde{f}^i = F^i + V_{itz}^i$. On peut donc exprimer la porosité en configuration déformée ϕ^i et l'égaliser avec le volume déformé de gel, ce qui donne :

$$(F^i + \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} + M^i p^i) + V_{itz}^i = V^i \quad (10.12)$$

Et écrire la pression résultant de l'égalité des volumes de gel et disponible :

$$p^i (\underline{\underline{E}}, \alpha^i) = \frac{(\delta - 1)F^i - \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} - 3f^i \rho_{itz} \frac{l_c}{R^i}}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g}} \quad (10.13)$$

10.3.2 Site de *Type II*

Pour ces sites la démarche est la même, sauf que lorsque l'on écrit la loi de comportement

$$(\phi^i - \tilde{f}^i) = \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} + M^i p^i \quad (10.14)$$

ϕ^i représente le volume de la cavité sphérique laissée par la décohésion du granulat en configuration déformée, et non le volume disponible pour le gel. Il faut simplement corriger ceci en tenant compte du fait que cet espace est occupé par le gel et ce qu'il reste de granulat. On écrit pour cela le volume actuel du granulat :

$$V_a^i = (f^i - F^i) \left(1 - \frac{p^i}{K_a} \right) \quad (10.15)$$

Et l'équilibre entre le volume de gel V^i et l'espace disponible, qui fait intervenir le volume de l'auréole de transition ainsi que le volume de granulat :

$$(f^i + \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} + M^i p^i) + V_{itz}^i - V_a^i = V^i \quad (10.16)$$

On obtient ainsi :

$$p^i (\underline{\underline{E}}, \alpha^i) = \frac{(\delta - 1)F^i - \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} - 3f^i \rho_{itz} \frac{l_c}{R^i}}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g} + \frac{f^i - F^i}{K_a}} \quad (10.17)$$

10.3.3 Utilisation du calcul des pressions

On a donc montré dans cette section comment, à degré d'attaque donné (représenté par α^i pour chaque site), on est capable, dès lors que l'on connaît les modules poroélastiques homogénéisés du milieu poreux (qui dépendent de l'état d'endommagement et dont on a détaillé l'écriture dans le chapitre 9), et la déformation macroscopique, de calculer la pression dans chacun des sites. Ceci nous permet d'écrire l'énergie potentielle totale de notre milieu poreux, et non plus seulement du squelette comme on l'a fait dans la partie précédente, puisque la connaissance de la pression dans le gel permet de calculer l'énergie élastique du gel et celle des granulats ayant subi la décohésion. À pression donnée, l'énergie élastique du gel par unité de volume de matériau poreux s'écrit :

$$E_g^{el} (\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}) = \frac{1}{2} \frac{\delta F^i}{K_g} (p^i)^2 (\underline{\underline{E}}, \alpha^i) \quad (10.18)$$

Tandis que si le granulat est séparé du squelette par décohésion et qu'il faut donc compter son énergie élastique séparément, celle-ci s'écrit par unité de volume de matériau poreux :

$$E_a^{el} (\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}) = \frac{1}{2} \frac{f^i - F^i}{K_a} (p^i)^2 (\underline{\underline{E}}, \alpha^i) \quad (10.19)$$

On peut ainsi écrire, comme on l'a fait dans le chapitre 7, l'énergie potentielle en fonction de nos véritables variables de chargement : chargement extérieur, et degré d'attaques au niveau de chaque site. On a alors dans le cas d'un chargement extérieur mixte (pour compacter l'expression on note simplement $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \left(\sum_d \underline{\underline{E}}_d, (p^i (\underline{\underline{E}}, \alpha^i))_{i=1:N^s} \right)$) :

$$\begin{aligned} E^{pot} \left(\sum_d \underline{\underline{E}}_d, (\alpha^i)_{i=1:N^s} \right) &= E_{ske}^{pot} (\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}) \\ &\quad + E_g^{el} (\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}) \\ &\quad + E_a^{el} (\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}) \end{aligned} \quad (10.20)$$

10.3.4 Énergie totale

Il faut enfin écrire l'énergie totale de notre matériau, comme nous l'avons fait au § 7.3.6.2, en ajoutant à l'énergie potentielle donnée précédemment l'énergie dissipée à un état de fissuration donnée. L'énergie dissipée est calculée par une somme pondérée par les énergies de fissuration de la surface de fissure pour un état d'endommagement virtuel $(d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3})$ donné :

$$E^{diss} (d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}) = \sum_{i=1}^{N^s} \frac{f^i}{\frac{4\pi}{3} (R^i)^3} \left[d^{i*} 4\pi (R^i)^2 G^{dec} + \sum_{k=1}^3 \pi ((x_k^{i*})^2 - (R^i)^2) G^{fiss} \right] \quad (10.21)$$

où G^{dec} est l'énergie surfacique de fissuration pour la décohésion, tandis que G^{fiss} est l'énergie surfacique de fissuration pour la fissuration de la pâte de ciment. L'écriture de l'énergie dissipée est faite selon la description du schéma de fissuration donnée au § 9.3.1.2 du chapitre 9 où l'on détaille l'écriture des propriétés homogénéisées du matériau endommagé. L'état de fissuration apparaît ici explicitement par l'intermédiaire de variables d'endommagement virtuelles $(d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3})$ représentant l'état de décohésion et les trois tailles de fissures possibles pour chaque site i .

La dépendance en ces variables d'endommagement était jusqu'ici, pour l'énergie totale, cachée dans les coefficients poroélastiques homogénéisés. Pour conclure sur l'expression de l'énergie totale, nous donnons son expression en écrivant explicitement toutes les dépendances. On

note $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, \underline{\underline{E}}_d, (p^i(\underline{\underline{E}}, \alpha^i, d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}), d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3})_{i=1:N^s}\right)$ la déformation macroscopique. Dans la partie suivante on explique comment calculer la déformation concrètement. L'énergie totale s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & E^{pot}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, \underline{\underline{E}}_d, (\alpha^i)_{i=1:N^s}, d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}\right) \\ &= E_{ske}^{pot}(\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}, d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}) \\ &+ E_g^{el}(\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}, d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}) \\ &+ E_a^{el}(\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}, d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}) \\ &+ E^{diss}(d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}) \end{aligned} \quad (10.22)$$

Il ne nous manque plus qu'à savoir calculer la déformation dans toutes les situations de chargement pour en terminer avec l'écriture de l'énergie. On définit d'abord le tenseur des modules d'élasticité non drainée et le tenseur de précontrainte chimique qui vont nous aider dans cette démarche.

10.4 Élasticité non drainée, précontrainte chimique

Si l'on repart de la première partie de la loi de comportement

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \sum_i^{N^s} p^i \underline{\underline{B}}^i \quad (10.23)$$

et que l'on y injecte l'expression de la pression obtenue par équilibre du gel dans la partie précédente, qui diffère légèrement selon le type du site, on obtient une loi d'élasticité affine :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}_{nd}^{hom} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Sigma}}^* \quad (10.24)$$

Où le tenseur des modules d'élasticité non drainée est :

$$\mathbb{C}_{nd}^{hom} = \mathbb{C}^{hom} + \sum_i^{N_I^s} \frac{\underline{\underline{B}}^i \otimes \underline{\underline{B}}^i}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g}} + \sum_i^{N_{II}^s} \frac{\underline{\underline{B}}^i \otimes \underline{\underline{B}}^i}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g} + \frac{f^i - F^i}{K_a}} \quad (10.25)$$

Et la précontrainte d'origine chimique (que l'on appelle ainsi car c'est aussi la contrainte si la déformation est nulle) vaut :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^* = - \sum_i^{N_I^s} \frac{(\delta - 1)F^i - 3f^i \rho_{itz} \frac{l_c}{R^i}}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g}} \underline{\underline{B}}^i - \sum_i^{N_{II}^s} \frac{(\delta - 1)F^i - 3f^i \rho_{itz} \frac{l_c}{R^i}}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g} + \frac{f^i - F^i}{K_a}} \underline{\underline{B}}^i \quad (10.26)$$

10.5 Calcul des contraintes et des déformations macroscopiques pour les différents cas de chargement

Nous détaillons ici la façon d'obtenir les contraintes et les déformations pour les différents cas de chargements qui nous intéressent, à degré d'attaque donné. Notre point de départ est donc la loi de comportement non drainé obtenue dans la partie précédente, qui s'écrit de manière condensée :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}_{nd}^{hom} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Sigma}}^* \quad (10.27)$$

10.5.1 Déformation imposée

Le premier cas, le plus simple, est celui de la déformation imposée. Rappelons d'abord l'expression de la précontrainte chimique :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^* = - \sum_i^{N_I^s} \frac{(\delta - 1)F^i - 3f^i \rho_{itz} \frac{l_c}{R^i}}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g}} \underline{\underline{B}}^i - \sum_i^{N_{II}^s} \frac{(\delta - 1)F^i - 3f^i \rho_{itz} \frac{l_c}{R^i}}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g} + \frac{f^i - F^i}{K_a}} \underline{\underline{B}}^i \quad (10.28)$$

Elle ne dépend que de l'état d'avancement de l'attaque et de l'état de fissuration. Si la déformation est imposée dans toutes les directions égale à $\underline{\underline{\Sigma}}_d$, on a alors simplement :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}_{nd}^{hom} : \underline{\underline{\Sigma}}_d + \underline{\underline{\Sigma}}^* \quad (10.29)$$

10.5.2 Contrainte imposée

Ici on suppose que la contrainte est imposée dans toutes les directions égale à $\underline{\underline{\Sigma}}_d$. On a, directement depuis la loi de comportement,

$$\underline{\underline{E}} = \left(\mathbb{C}_{nd}^{hom} \right)^{-1} : \left(\underline{\underline{\Sigma}}_d - \underline{\underline{\Sigma}}^* \right) \quad (10.30)$$

10.5.3 Chargement mixte

Nous allons ici traiter deux cas, les autres s'en déduisant facilement par des rotations appropriées.

10.5.3.1 Une contrainte et deux déformations imposées

Supposons que l'on travaille dans le repère d'orthotropie de notre matériau, et que l'on impose uniquement les éléments diagonaux de la contrainte et la déformation, en l'occurrence ici Σ_1^d , E_2^d et E_3^d . On peut donc réduire la loi de comportement, en notation de Voigt (où l'on oublie les lignes 4, 5 et 6 qui ne nous intéressent pas), à un système très simple :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_1^d \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2^d \\ E_3^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_1^* \\ \Sigma_2^* \\ \Sigma_3^* \end{pmatrix} \quad (10.31)$$

Où par souci de simplicité on a nommé a, b, c, d, e, f les six composantes $\mathbb{C}_{nd,1111}^{hom}, \mathbb{C}_{nd,2222}^{hom}, \mathbb{C}_{nd,3333}^{hom}, \mathbb{C}_{nd,2211}^{hom}, \mathbb{C}_{nd,3311}^{hom}, \mathbb{C}_{nd,3322}^{hom}$ du tenseur des modules d'élasticité non drainée.

On montre assez facilement que les composantes inconnues de la déformation et de la contrainte s'expriment en fonction des composantes connues et de la précontrainte chimique par les expressions :

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -d/a & -e/a \\ d/a & b - d^2/a & f - de/a \\ e/a & f - de/a & c - e^2/a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Sigma_1^d \\ E_2^d \\ E_3^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/a & 0 & 0 \\ -d/a & 1 & 0 \\ -e/a & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Sigma_1^* \\ \Sigma_2^* \\ \Sigma_3^* \end{pmatrix} \quad (10.32)$$

10.5.3.2 Deux contraintes et une déformation imposées

Ici on part de l'équation :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_1^d \\ \Sigma_2^d \\ \Sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_1^* \\ \Sigma_2^* \\ \Sigma_3^* \end{pmatrix} \quad (10.33)$$

10.5. CALCUL DES CONTRAINTES ET DES DÉFORMATIONS MACROSCOPIQUES POUR LES DIFFÉRENTS CAS DE CHARGEMENT

Comme les expressions sont un peu plus lourdes, on n'utilise pas l'écriture matricielle comme dans le paragraphe précédent. On donne successivement les quantités recherchées en fonction des quantité connues :

$$\begin{cases} E_2 = \frac{(\Sigma_2^d - \Sigma_2^*) - d/a (\Sigma_1^d - \Sigma_1^*) - (f - ed/a) E_3^d}{b - d^2/a} \\ E_1 = 1/a (\Sigma_1^d - \Sigma_1^*) - d/a E_2 - e/a E_3^d \\ \Sigma_3 = \Sigma_3^* + eE_1 + fE_2 + cE_3^d \end{cases} \quad (10.34)$$

10.5.4 Restriction du gonflement par des anneaux

Ce chargement est celui utilisé par Multon [18] pour plusieurs de ses essais de gonflement lors de l'alcali-réaction. Nous nous plaçons dans le cas suivant : une éprouvette cylindrique de génératrice parallèle à la direction 1 est soumise dans cette direction à une contrainte imposée Σ_1^d , tandis que les directions 2 et 3 voient leur gonflement restreint par des anneaux d'épaisseur variable. Les contraintes et déformations dans ces directions, que nous nommons ici Σ_r et E_r , sont donc reliées par l'élasticité de l'anneau. Il faut donc tout d'abord étudier la déformation de l'anneau.

10.5.4.1 Déformation de l'anneau

Cette analyse de la déformation des anneaux est calée sur celle de Multon, qui a introduit cette expérience et un modèle mécanique pour l'analyser dans sa thèse [18]. On suppose que le champ de déplacement dans les anneaux est radial. Les équations d'équilibre imposent la forme :

$$\underline{u} = \left(Cr + \frac{D}{r} \right) \underline{e}_r \quad (10.35)$$

La continuité de la contrainte normale et du déplacement entre l'éprouvette en béton (au rayon $r = R_i$) et la nullité du vecteur contrainte (au rayon $r = R_e$) permettent, en introduisant les coefficients de Lamé des anneaux (λ_s, μ_s), de déterminer les deux constantes C et D soit en fonction de la contrainte macroscopique radiale dans l'éprouvette :

$$\begin{cases} D = \frac{\Sigma_r}{2\mu_s(\frac{1}{R_e^2} - \frac{1}{R_i^2})} \\ C = \frac{\mu_s}{\lambda_s + \mu_s} \frac{1}{R_e^2} \frac{\Sigma_r}{2\mu_s(\frac{1}{R_e^2} - \frac{1}{R_i^2})} \end{cases} \quad (10.36)$$

On peut introduire la rigidité k_s de l'anneau, définie par la relation $\Sigma_r = -k_s E_r$, on a alors :

$$k_s = \frac{2(\lambda_s + \mu_s)\mu_s(R_e^2 - R_i^2)}{(\lambda_s + \mu_s)R_e^2 + \mu_s R_i^2} \quad (10.37)$$

Ce qui permet de réexprimer les constantes en fonction de la déformation :

$$\begin{cases} D = \frac{R_i^2 R_e^2 (\lambda_s + \mu_s) E_r}{(\lambda_s + \mu_s) R_e^2 + \mu_s R_i^2} \\ C = \frac{\mu_s R_i^2 E_r}{(\lambda_s + \mu_s) R_e^2 + \mu_s R_i^2} \end{cases} \quad (10.38)$$

Le choix de l'utilisation de l'une ou l'autre de ces expressions des constantes d'intégration dépend de la rigidité des anneaux.

10.5.4.2 Calcul des contraintes et déformations

On suppose ici qu'il y a symétrie de révolution du matériau autour de la direction 1. Dans les directions 2 et 3, les anneaux imposent la relation suivante :

$$\Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma_r = -k_s (E_2 = E_3 = E_r) \quad (10.39)$$

Tandis que dans la direction 1, la contrainte est imposée à Σ_1^d . On peut alors en utilisant la loi de comportement non drainée, exprimer les contraintes et déformations non connues. On a ainsi :

$$\Sigma_2 = \Sigma_3 = k_s \frac{\left(\frac{d}{a}(k+c) - \frac{fe}{a}\right)(\Sigma_1^d - \Sigma_1^*) + \Sigma_2^*\left(k - \frac{e^2}{a} + c\right) + \Sigma_3^*\left(\frac{de}{a} - f\right)}{\left(k - \frac{e^2}{a} + c\right)\left(k - \frac{d^2}{a} + b\right) - \left(\frac{de}{a} - f\right)^2} \quad (10.40)$$

Et la déformation dans la direction où la contrainte est imposée est :

$$E_1 = \frac{1}{a} \left(\Sigma_1^d - \Sigma_1^* + \frac{d}{k} \Sigma_2 + \frac{e}{k} \Sigma_3 \right) \quad (10.41)$$

10.5.4.3 Contribution énergétique de l'anneau

Notre énergie totale doit enfin être modifiée par l'ajout d'un terme d'énergie élastique supplémentaire. On l'exprime ici par énergie de volume de matériau poreux, supposant que les anneaux recouvrent toute la face latérale de l'éprouvette cylindrique mais que comme dans l'expérience, il n'emmagasinent pas d'énergie longitudinalement puisqu'il s'agit d'un ensemble d'anneaux fins glissés les uns à côté des autres autour de l'éprouvette.

$$E_{anneau}^{el} = \frac{2}{R_i^2} \left[2(\lambda_s + \mu_s) C^2 (R_e^2 - R_i^2) - \mu_s D^2 \left(\frac{1}{R_e^2} - \frac{1}{R_i^2} \right) \right] \quad (10.42)$$

10.5.5 Conclusion sur la détermination des contraintes et des déformations

On sait donc, pour les différents cas de chargement macroscopique qui nous intéressent, déterminer à degré d'attaque donné la contrainte et la déformation macroscopiques résultantes. Ce calcul est très simple lorsque la déformation ou la contrainte sont imposées dans toutes les directions, mais demande un peu plus d'effort lorsque le chargement macroscopique sur l'éprouvette est mixte ou dans le cas de l'expérience de Multon. La possibilité de calculer les déformations, nous permet par les équations 10.13 et 10.17 de calculer les pressions, et donc de calculer l'énergie totale pour tout chargement.

10.6 Conclusion

Ce chapitre nous a donc permis d'écrire l'énergie totale d'un béton soumis à la RAG, à degré d'attaque et chargement extérieur donnés, en fonction de la microstructure. Cette écriture termine le travail de construction du modèle, puisque nous pouvons désormais utiliser notre critère de rupture énergétique, et ainsi rechercher l'évolution de la microstructure en fonction du degré d'attaque et des chargements extérieurs, et finalement calculer les déformations et les propriétés mécaniques du béton attaqué. Nous allons donc utiliser le modèle dans un certain nombre de cas simples tout d'abord, afin de comprendre son fonctionnement, puis en comparaison à des essais de gonflement de Multon.