Données numériques de Hodge et convolution intermédiaire

Dans cette section, nous étudierons le comportement des données numériques de Hodge d'un $\mathcal{D}$ -module holonome régulier par l'opération de convolution intermédiaire. Le plan de ce chapitre 6 sera le suivant :

1. Dans un premier temps, nous raisonnerons localement au voisinage d'un point singulier et définirons les données numériques locales de Hodge.
2. Dans un deuxième temps, nous définirons les données numériques de Hodge sur la droite affine, qui seront les invariants qui nous intéresseront par la suite.
3. Dans un troisième temps, nous étudierons le comportement des données numériques de Hodge par convolution intermédiaire additive par un module de Kummer. Comme dans le chapitre 4 sans filtration de Hodge, de nombreux résultats ont été obtenus dans cette direction par Dettweiler et Sabbah [DS13, §3.1]. Seul le comportement des données numériques locales de Hodge cycles proches à l'infini n'a pas été explicité par Dettweiler et Sabbah, dans la mesure où ces derniers font l'hypothèse d'une monodromie scalaire à l'infini, leur objectif étant d'appliquer l'algorithme de Katz qui fait cette hypothèse. Nous détaillerons ce résultat dans le théorème 6.3.1, en reprenant l'approche et les idées de la preuve du théorème 4.2.5. Nous compléterons ensuite les résultats de Dettweiler-Sabbah en donnant également des formules pour les invariants locaux h^p et globaux δ^p sans faire l'hypothèse de monodromie scalaire à l'infini, qui découlent du théorème 6.3.1 et généralisent le théorème 3.1.2 de [DS13].
4. Dans un quatrième et dernier temps, nous expliciterons le comportement des données numériques de Hodge par convolution intermédiaire multiplicative par un module de Kummer. Pour cela, nous utiliserons là encore la formule obtenue à la proposition 2.8.1, ce qui nous permettra de transposer certains des résultats additifs au cadre multiplicatif.

6.1 Données numériques locales de Hodge au voisinage d'un point singulier

Soient Δ un petit disque centré en 0 de coordonnée t , $(V, F^\bullet V, \nabla)$ une variation de structure de Hodge polarisable sur Δ^* et $j : \Delta^* \hookrightarrow \Delta$ l'inclusion. On note $V^{-\infty}$ l'extension méromorphe de Deligne : il s'agit du $\mathcal{O}_\Delta[t^{-1}]$ -module libre formé des sections locales de j_*V dont les coefficients dans une base (ou de manière équivalente dans toute base) de sections horizontales multivaluées sont à croissance modérée sur tout secteur angulaire borné.

On sait, grâce à un résultat dû à Borel (voir le lemme 4.5 de [Sch73]), que les valeurs propres du résidu de ∇ sont réelles. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note alors V^a (resp. $V^{>a}$) le $\mathcal{O}_\Delta$ -module libre sur lequel le résidu de ∇ a ses valeurs propres dans $[a, a+1[$ (resp. $]a, a+1]$), que l'on munit de la filtration $F^p V^a = j_* F^p V \cap V^a$ (resp. $F^p V^{>a} = j_* F^p V \cap V^{>a}$).

On note M l'extension minimale de $V^{-\infty}$, elle correspond au sous- $\mathcal{O}_\Delta$ -module de $V^{-\infty}$ qui est ∇_{∂_t} -engendré par $V^{>-1}$ d'après la proposition 2.2.6. Le $\mathcal{D}_\Delta$ -module M vérifie $\text{DR}M = j_* \mathcal{V}$, où $\mathcal{V} = V^\nabla$ est le système local des sections horizontales pour ∇ , et est muni de la filtration

$$F^p M = \sum_{k \geq 0} \nabla_{\partial_t}^k F^{p+k} V^{>-1}.$$

On rappelle que les cycles proches à l'origine $\psi_\lambda(M)$ sont définis pour $\lambda = e^{-2i\pi a}$ et $a \in]-1, 0]$ par $\psi_\lambda(M) = V^a / V^{>a}$ et sont munis de l'endomorphisme nilpotent $N = -2i\pi(t\partial_t - a)$. On les munit de la filtration $F^p \psi_\lambda(M) = F^p V^a / F^p V^{>a}$, qui vérifie $N F^p \psi_\lambda(M) \subset F^{p-1} \psi_\lambda(M)$.

On sait d'après [Sch73] que

$$\operatorname{rg} F^p V = \sum_{\lambda \in S^1} \operatorname{rg} F^p \psi_\lambda(M)$$

dont on déduit, en notant $h^p(V) = \operatorname{rg} \operatorname{gr}_F^p V$, l'égalité suivante :

$$h^p(V) = \sum_{\lambda \in S^1} h^p \psi_\lambda(M).$$

La filtration de monodromie induite par N nous permet de définir les espaces $P_\ell \psi_\lambda(M)$ de vecteurs primitifs, qui sont munis d'une structure de Hodge polarisable d'après [Sch73]. On définit alors les données numériques locales de Hodge cycles proches par

$$\nu_{\lambda,\ell}^p(M) := h^p(P_\ell \psi_\lambda(M)) = \dim \operatorname{gr}_F^p P_\ell \psi_\lambda(M).$$

En posant de manière similaire $\nu_\lambda^p(M) = h^p \psi_\lambda(M)$, on a

$$\nu_\lambda^p(M) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\lambda,\ell}^{p+k}(M)$$

On pose également

$$\nu^p(M) = \sum_{\lambda} \nu_\lambda^p(M), \quad \nu_{\lambda,\text{prim}}^p(M) = \sum_{\ell \geq 0} \nu_{\lambda,\ell}^p(M) \quad \text{et} \quad \nu_{\lambda,\text{coprim}}^p(M) = \sum_{\ell \geq 0} \nu_{\lambda,\ell}^{p+\ell}(M).$$

Les cycles évanescents à l'origine $\phi_\lambda(M)$ sont quant à eux définis par

$$\begin{cases} \phi_\lambda(M) = \psi_\lambda(M) \text{ pour } \lambda \neq 1 \\ \phi_1(M) = V^{-1}/V^{>-1}, \end{cases}$$

et sont munis dans le second cas, ainsi que ses parties primitives, des filtrations

$$F^p \phi_1(M) = \frac{F^{p-1} M \cap V^{-1}}{F^{p-1} M \cap V^{>-1}} \quad \text{et} \quad F^p P_\ell \phi_1(M) = N(F^p P_{\ell+1} \psi_1(M)).$$

De manière similaire aux cycles proches, on définit les données numériques locales de Hodge cycles évanescents par $\mu_{\lambda,\ell}^p(M) := h^p(P_\ell \phi_\lambda(M)) = \dim \operatorname{gr}_F^p P_\ell \phi_\lambda(M)$, ce qui donne

$$\begin{cases} \mu_{\lambda,\ell}^p(M) = \nu_{\lambda,\ell}^p(M) \text{ pour } \lambda \neq 1 \\ \mu_{1,\ell}^p(M) = \nu_{1,\ell+1}^p(M). \end{cases}$$

On pose alors

$$\mu_\lambda^p(M) := h^p \phi_\lambda(M) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \mu_{\lambda,\ell}^{p+k}(M)$$

ainsi que

$$\mu^p(M) = \sum_{\lambda} \mu_\lambda^p(M), \quad \mu_{\lambda,\text{prim}}^p(M) = \sum_{\ell \geq 0} \mu_{\lambda,\ell}^p(M) \quad \text{et} \quad \mu_{\lambda,\text{coprim}}^p(M) = \sum_{\ell \geq 0} \mu_{\lambda,\ell}^{p+\ell}(M).$$

Définition 6.1.1 Les données numériques locales de Hodge de M sont :

- (i) les invariants locaux $h^p(V)$ ($p \in \mathbb{Z}$)
- (ii) les données numériques locales de Hodge cycles évanescents $\mu_{\lambda, \ell}^p(M)$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$).

Remarque. On obtient les $\nu_{1, \ell}^p(M)$ avec la formule

$$\nu_{1, \ell}^p(M) = \begin{cases} \mu_{1, \ell-1}^p(M) & \text{si } \ell \geq 1 \\ h^p(V) - \mu^p(M) - \mu_{1, \text{coprim}}^{p+1}(M) & \text{si } \ell = 0. \end{cases}$$

6.2 Données numériques de Hodge sur la droite affine

Soient $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble fini de points de $\mathbb{A}^1$, $x_{r+1} = \infty \in \mathbb{P}^1$, $(V, F^\bullet V, \nabla)$ une variation de structure de Hodge complexe polarisable sur $\mathbb{A}^1 \setminus \mathbf{x}$ et M le $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -module extension minimale en chacun des points de $\mathbf{x}$.

On considère les fibrés holomorphes $\text{gr}_F^p V^0$, qui sont de rang $h^p(V)$. En plus des données numériques locales de Hodge, on définit l'invariant global suivant :

Définition 6.2.1 On définit les données numériques globales de Hodge de M par

$$\delta^p(M) = \deg \text{gr}_F^p V^0.$$

Définition 6.2.2 Les données numériques de Hodge de M sont :

- (i) les invariants locaux $h^p(M)$ ($p \in \mathbb{Z}$)
- (ii) les données numériques locales de Hodge cycles proches $\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M)$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$)
- (iii) les données numériques locales de Hodge cycles évanescents $\mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(M)$ ($i \in \{1, \dots, r\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$)
- (iv) les données numériques globales de Hodge $\delta^p(M)$ ($p \in \mathbb{Z}$).

Comme précédemment, on souhaite également définir les données numériques de Hodge dans le cas où l'on travaille sur $\mathbb{G}_m$. Dans ce cas, on considère $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble de points de $\mathbb{G}_m$, $x_0 = 0$, $(V, F^\bullet V, \nabla)$ une variation de structure de Hodge complexe polarisable sur $\mathbb{G}_m \setminus \mathbf{x}$ et M le $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ -module extension minimale en chacun des points de $\mathbf{x}$.

Définition 6.2.3 Les données numériques de Hodge de M dans ce cas sont :

- (i) les invariants locaux $h^p(M)$ ($p \in \mathbb{Z}$)
- (ii) les données numériques locales de Hodge cycles proches $\nu_{0, \lambda, \ell}^p(M)$, $\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M)$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$)
- (iii) les données numériques locales de Hodge cycles évanescents $\mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(M)$ ($i \in \{1, \dots, r\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$)
- (iv) les données numériques globales de Hodge $\delta^p(M)$ ($p \in \mathbb{Z}$).

6.3 Comportement des données $\nu_{\infty,\lambda,\ell}^p$ par convolution intermédiaire additive

On souhaite maintenant expliciter le comportement des données numériques locales de Hodge cycles proches à l'infini par convolution intermédiaire additive. Ce comportement n'est pas explicité par Dettweiler et Sabbah dans [DS13], dans la mesure où ces derniers font l'hypothèse d'une monodromie scalaire à l'infini, leur objectif étant d'appliquer l'algorithme de Katz qui fait cette hypothèse. Les principaux arguments de la preuve seront la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge et l'utilisation du théorème de Riemann-Roch.

Soient $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble de points de $\mathbb{A}^1$, $\mathcal{V}$ un $\mathbb{C}$ -système local sur $U = \mathbb{A}^1 \setminus \mathbf{x}$ induit par une variation de structure de Hodge complexe polarisable $(V, F^\bullet V, \nabla)$ sur U et M le $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -module extension minimale en les points de $\mathbf{x}$. On fixe $\gamma_0 \in]0, 1[$ et $\lambda_0 = \exp(-2i\pi\gamma_0)$ et on suppose que $M \in \mathcal{C}$. Nous reprenons l'approche et les idées de la preuve du théorème 4.2.5 avec l'ajout ici de la filtration de Hodge, et allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.3.1 *On note $\gamma \in [0, 1[$, $\lambda = \exp(-2i\pi\gamma)$ et $\mathcal{M}^{\min}$ le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ -module extension minimale de M à l'infini. On a les données suivantes pour $\text{MC}_{\lambda_0}(M)$:*

$$\nu_{\infty,\lambda,\ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty,\lambda\lambda_0,\ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty,\lambda\lambda_0,\ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[\\ \nu_{\infty,\lambda_0,\ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty,1,\ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1 \\ h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}\mathcal{M}^{\min}) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell = 0. \end{cases}$$

On reprend dans la preuve de ce théorème les notations et conventions de la sous-section 4.2.

Remarque préliminaire. Sans que cela ne soit utile dans la preuve mais néanmoins intéressant pour fixer les idées, nous allons expliciter la filtration $F^p T$ dans le cas générique $\lambda \notin \{1, \overline{\lambda_0}\}$. En premier lieu, détaillons l'expression de la filtration sur M_∞ . Au $\mathbb{C}[x]$ -module filtré de départ $(M, F^p M)$, on associe naturellement le $\mathbb{C}[x', x'^{-1}]$ -module filtré $(M_\infty, \tilde{F}^p M_\infty)$. Le problème est que ce dernier terme n'est pas nécessairement $\mathbb{C}[x]$ -cohérent mais seulement $\mathbb{C}[x', x'^{-1}]$ -cohérent.

Pour remédier à cela, on utilise le fait que

$$M_\infty = \sum_{k \geq 0} \partial_{x'}^k V^{>-1} M_\infty$$

et que sur $V^{>-1} M_\infty$ la filtration est définie par $F^p V^{>-1} M_\infty = \tilde{F}^p M_\infty \cap V^{>-1} M_\infty$. On a alors

$$F^p M_\infty = \sum_{k \geq 0} \partial_{x'}^k F^{p+k} V^{>-1} M_\infty.$$

Notons par ailleurs qu'en définissant la filtration $F^p M_\infty$ de la sorte, on a pour tout $\beta \geq -1$ l'identité $F^p M_\infty \cap V^\beta M_\infty = \tilde{F}^p M_\infty \cap V^\beta M_\infty$, ce qui permet de faire de nombreux raisonnements indifféremment avec F^p ou $\tilde{F}^p$.

On est maintenant en mesure de définir les filtrations sur $(M_\infty)_\gamma$ et $(M_\infty)^\lambda$ par

$$F^p(M_\infty)_\gamma = (M_\infty)_\gamma \cap F^p M_\infty \quad \text{et} \quad F^p(M_\infty)^\lambda = (M_\infty)^\lambda \cap F^p M_\infty.$$

On a alors

$$\begin{aligned} F^p(M_\infty)^\lambda &= \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x'^k (M_\infty)_\gamma \right) \cap F^p M_\infty \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (x'^k (M_\infty)_\gamma) \cap F^p M_\infty \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x'^k ((M_\infty)_\gamma \cap F^p M_\infty) \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x'^k F^p(M_\infty)_\gamma, \end{aligned}$$

autrement dit $F^p(M_\infty)^\lambda = (F^p(M_\infty)_\gamma)[x', x'^{-1}]$. On reprend dans la suite les notations de 4.2.1.

(i) Commençons par raisonner dans la carte (u_2, v_2) . On sait que

$$N_{\lambda_0} = e^+ M_\infty \otimes \left(\mathbb{C}[u_2, u_2^{-1}, v_2, v_2^{-1}, (u_2 - 1)^{-1}], d + \gamma_0 \left(-\frac{du_2}{u_2} - \frac{dv_2}{v_2} + \frac{du_2}{u_2 - 1} \right) \right),$$

et on en déduit la filtration de Hodge sur le produit tensoriel

$$F^p N_{\lambda_0} = \sum_{q \geq 0} F^{p+q}(e^+ M_\infty) \otimes F^{-q} \left(\mathbb{C}[u_2, u_2^{-1}, v_2, v_2^{-1}, (u_2 - 1)^{-1}], d + \gamma_0 \left(-\frac{du_2}{u_2} - \frac{dv_2}{v_2} + \frac{du_2}{u_2 - 1} \right) \right).$$

Le terme de droite est donné par la filtration par l'ordre du pôle, à savoir

$$F^{-q}(\star) = (u_2 v_2 (u_2 - 1))^{-(q+1)} \mathbb{C}[u_2, v_2],$$

ce qui donne

$$F^p N_{\lambda_0} = \sum_{q \geq 0} (u_2 v_2 (u_2 - 1))^{-(q+1)} F^{p+q}(e^+ M_\infty).$$

Maintenant, on sait que

$$(N_{\lambda_0})_\gamma = (e^+ M_\infty)_{\gamma+\gamma_0} \otimes \left(\mathbb{C}[u_2, u_2^{-1}, (u_2 - 1)^{-1}], d + \gamma_0 \left(-\frac{du_2}{u_2} + \frac{du_2}{u_2 - 1} \right) \right),$$

ce dont on déduit que

$$F^p(N_{\lambda_0})_\gamma = F^p N_{\lambda_0} \cap (N_{\lambda_0})_\gamma = \left(\sum_{q \geq 0} (x'(x' - 1))^{-(q+1)} F^{p+q} M_\infty \right) \cap (M_\infty)_{\gamma+\gamma_0}[x', x'^{-1}, (x' - 1)^{-1}],$$

ce qui donne finalement

$$F^p(N_{\lambda_0})_\gamma = \sum_{q \geq 0} (x'(x' - 1))^{-(q+1)} F^{p+q}(M_\infty)^{\lambda \lambda_0}.$$

On en conclut que, pour $\lambda \neq 1$, les cycles proches $\psi_{v_2, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0}$ sont munis de la filtration

$$F^p(\psi_{v_2, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0}) = \sum_{q \geq 0} (x'(x' - 1))^{-(q+1)} F^{p+q}(M_\infty)^{\lambda \lambda_0}.$$

(ii) Il n'y a aucun raisonnement à faire dans la carte (u_1, v_1) au voisinage de l'axe $u_1 = 0$ privé du point $(u_1, v_1) = (0, 0)$, puisque $T = 0$ pour $\lambda \neq \overline{\lambda_0}$.

(iii) Raisonnons enfin au voisinage du point $(u_1, v_1) = (0, 0)$. On a précédemment explicité dans le lemme 4.2.4 la décomposition de $T = \psi_{u_1 v_1, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0}$, mais en ajoutant la filtration de Hodge, il n'y a aucune raison a priori pour que $F^p T$ soit isomorphe à $\bigoplus_{\beta} F^p T_{\beta}$. Néanmoins, on a montré dans le cas $\lambda \neq \overline{\lambda_0}$ qu'un seul terme apparaissait dans la décomposition. En reprenant le raisonnement fait dans ce cas, on a alors $F^p T = F^p(M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}$.

Toutes ces considérations permettent d'expliciter $F^p T$ dans le cas générique $\lambda \notin \{1, \overline{\lambda_0}\}$, en ce sens il s'agit d'un raffinement de la partie (i) du lemme 4.2.4. Néanmoins, comme précisé au début de la remarque, nous n'utiliserons pas cette expression explicite dans la preuve qui va suivre. Les raisons sont les suivantes : d'une part l'explicitation de $F^p T$ dans les cas $\lambda = 1$ et surtout $\lambda = \overline{\lambda_0}$ est loin d'être aisée, et d'autre part nous raisonnons sur des données numériques qui sont des dimensions et il n'est pas indispensable d'explicitier complètement les objets à cette fin.

Preuve du théorème 6.3.1. Nous allons traiter chacun des cas séparément. On reprend dans toute la suite les notations de la sous-section 4.2 et en particulier les notations introduites en 4.2.1.

(i) Cas $\lambda \notin \{1, \overline{\lambda_0}\}$. Nous commençons par traiter la situation sans filtration de monodromie, et allons faire un raisonnement global. Comme T est irréductible, on sait que

$$\nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \text{gr}_F^p \psi_{\infty, \lambda}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \text{DRT}) = -\chi(\text{gr}_F^p \mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{DRT})).$$

Par dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham en E_1 , on a

$$\chi(\text{gr}_F^p \mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{DRT})) = \chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{gr}_F^p \text{DRT})).$$

On sait maintenant d'après la proposition 3.10 (iib) de [Sab08] que l'inclusion du complexe filtré

$$F^{\bullet} V^0 \text{DRT} = \{0 \rightarrow F^{\bullet} V^0 T \xrightarrow{\nabla} \Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \otimes F^{\bullet-1} V^{-1} T \rightarrow 0\}$$

dans le complexe

$$F^{\bullet} \text{DRT} = \{0 \rightarrow F^{\bullet} T \xrightarrow{\nabla} \Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \otimes F^{\bullet-1} T \rightarrow 0\}$$

est un quasi-isomorphisme, ce qui donne

$$\chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{gr}_F^p \text{DRT})) = \chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{gr}_F^p V^0 \text{DRT})).$$

Par $\mathcal{O}$ -linéarité de la différentielle, on obtient que

$$\chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{gr}_F^p V^0 \text{DRT})) = \chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{gr}_F^p V^0 T)) - \chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \otimes \text{gr}_F^{p-1} V^{-1} T)).$$

Il résulte maintenant du théorème de Riemann-Roch que

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{gr}_F^p \text{DRT})) &= \deg(\text{gr}_F^p V^0 T) + h^p(T) - \deg(\Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \otimes \text{gr}_F^{p-1} V^{-1} T) - h^{p-1}(T) \\ &= \deg(\text{gr}_F^p V^0 T) + h^p(T) - \deg(\text{gr}_F^{p-1} V^{-1} T) + h^{p-1}(T) \\ &= \delta^p(T) + h^p(T) - \deg(\text{gr}_F^{p-1} V^{-1} T) + h^{p-1}(T). \end{aligned}$$

En outre, on a

$$\begin{aligned}
\deg(\mathrm{gr}_F^{p-1}V^{-1}T) &= \delta^{p-1}(T) + \dim \mathrm{gr}_F^{p-1}(V^{-1}T/V^0T) \\
&= \delta^{p-1}(T) + \sum_{a \in [-1, 0[} \dim \mathrm{gr}_F^{p-1}(\mathrm{gr}_V^a T) \\
&= \delta^{p-1}(T) + \sum_{x \in \mathbf{x}} \sum_{\mu \neq 1} \nu_{x, \mu}^{p-1}(T) + \sum_{x \in \mathbf{x}} \mu_{x, 1}^p(T),
\end{aligned}$$

en notant $\mathbf{x} = \{0, 1, \infty\}$ l'ensemble des singularités de T .

Au final, on obtient que

$$(\star) \quad \nu_{\infty, \lambda}^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \delta^{p-1}(T) - \delta^p(T) - h^p(T) - h^{p-1}(T) + \sum_{x \in \mathbf{x}} \left(\sum_{\mu \neq 1} \nu_{x, \mu}^{p-1}(T) + \mu_{x, 1}^p(T) \right).$$

Comme $\lambda\lambda_0 \neq 1$ par hypothèse, on a $\dim \mathrm{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}((M_\infty)^{\lambda\lambda_0})) = 0$. En faisant maintenant le même raisonnement que précédemment avec $(M_\infty)^{\lambda\lambda_0}$ au lieu de T , on obtient

$$(\star\star) \quad \delta^{p-1}((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) - \delta^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) - \nu_{\infty, \lambda\lambda_0}^p(M) = 0.$$

On sait grâce au lemme 4.2.4 que

$$T = (M_\infty)^{\lambda\lambda_0} \otimes \left(\mathbb{C}[x', x'^{-1}, (x' - 1)^{-1}], d + \gamma_0 \left(-\frac{dx'}{x'} + \frac{dx'}{x' - 1} \right) \right).$$

On peut alors appliquer la proposition 2.3.2 de [DS13] :

$$\delta^p(T) = \delta^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) - \nu_{\infty, \lambda\lambda_0}^p(M) + \sum_{\alpha \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, e^{-2i\pi\alpha}}^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) + \sum_{\alpha \in [1 - \gamma_0, 1[} \underbrace{\nu_{1, e^{-2i\pi\alpha}}^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0})}_{=0 \text{ car } \alpha \neq 0}.$$

Comme

$$\sum_{\alpha \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, e^{-2i\pi\alpha}}^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda\lambda_0}^p(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ 0 & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[, \end{cases}$$

on en déduit que

$$\delta^p(T) = \begin{cases} \delta^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \delta^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) - \nu_{\infty, \lambda\lambda_0}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[. \end{cases}$$

En outre, en utilisant la formule 2.2.13 de [DS13], on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathbf{x}} \sum_{\mu \neq 1} \nu_{x, \mu}^{p-1}(T) &= \sum_{\mu \neq 1} \left(\nu_{\infty, \mu\lambda_0}^{p-1}((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) + \nu_{1, \mu\lambda_0}^{p-1}((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) \right) \\
&= \nu_{\infty, \lambda\lambda_0}^{p-1}((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) + \nu_{1, 1}^{p-1}((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) \\
&= 2\nu_{\infty, \lambda\lambda_0}^{p-1}(M).
\end{aligned}$$

La formule 2.2.14 de [DS13] donne quant à elle

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu_{x,1}^p(T) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \left(\underbrace{\mu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}^{p+k}((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0})}_{=0} + \underbrace{\mu_{1, \lambda_0, \ell+1}^p((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0})}_{=0} \right) = 0.$$

On est maintenant en mesure d'appliquer la formule $(\star)$.

(i) Pour $\gamma \in]0, 1 - \gamma_0[$, on a :

$$\begin{aligned} \nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \underbrace{\delta^{p-1}((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}) - \delta^p((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}) - \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^p(M) - \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) + 2\nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M)}_{=0 \text{ d'après } (\star\star)} \\ &= \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M). \end{aligned}$$

(ii) Pour $\gamma \in]1 - \gamma_0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \left(\delta^{p-1}((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}) - \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) \right) - \left(\delta^p((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}) - \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^p(M) \right) - \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^p(M) \\ &\quad - \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) + 2\nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) \\ &= \delta^{p-1}((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}) - \delta^p((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}) \\ &= \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^p(M). \end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant les deux derniers points, on a

$$\nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[\end{cases}$$

Ajoutons maintenant la filtration de monodromie. On a démontré dans la preuve du théorème 4.2.5 que

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim P_{\ell} \psi_{\infty, \lambda}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}(P_{\ell}T)).$$

On fixe maintenant $\ell \geq 0$ et on ajoute la filtration de Hodge au complexe $P_{\ell}K^{\bullet}$. Comme la connexion envoie le filtré d'ordre p dans celui d'ordre $p-1$, on a $H^j(\text{gr}_F^p P_{\ell}K^{\bullet}) = 0$ pour $j \neq 0$ et $p \in \mathbb{Z}$ similairement au lemme 4.2.7. Comme précédemment, on applique le résultat de suite spectrale obtenu au lemme 4.2.6, ce qui donne

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim H^0(\text{gr}_F^p P_{\ell}K^{\bullet}) = \dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}(P_{\ell}T)).$$

Comme $\text{DR}(P_{\ell}T)$ est bien ici de la forme $j_* \mathcal{V}$, on peut lui appliquer le même raisonnement que celui qu'on a fait pour T , et obtenir un analogue de $(\star)$ pour $P_{\ell}T$:

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \delta^{p-1}(P_{\ell}T) - \delta^p(P_{\ell}T) - h^p(P_{\ell}T) - h^{p-1}(P_{\ell}T) + \sum_{x \in \mathfrak{X}} \left(\sum_{\mu \neq 1} \nu_{x, \mu}^{p-1}(P_{\ell}T) + \mu_{x,1}^p(P_{\ell}T) \right).$$

Maintenant, comme on a d'une part

$$P_\ell T = P_\ell(M_\infty)^{\lambda\lambda_0} \otimes \left(\mathbb{C}[x', x'^{-1}, (x' - 1)^{-1}], d + \gamma_0 \left(-\frac{dx'}{x'} + \frac{dx'}{x' - 1} \right) \right),$$

et une identité semblable à (***) avec $P_\ell(M_\infty)^{\lambda\lambda_0}$ d'autre part, on peut exactement reproduire le calcul précédent et on obtient finalement

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda\lambda_0, \ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda\lambda_0, \ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[. \end{cases}$$

(ii) Cas $\lambda = 1$. La différence avec le cas précédent est locale : on a ici une extension minimale en 0. On a montré dans la preuve du théorème 4.2.5 que $P_\ell T$ est localement autour de 0 donné par le carquois

$$(P_\ell H)[x'] \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{0} \end{array} (P_\ell G)[\partial_{x'}],$$

où $H = (M_\infty)_{\gamma_0}$ et $G = N(H)$.

On peut donc écrire que $P_\ell T$ est localement donné par la somme directe de $P_\ell^1 T$ défini par le carquois

$$(P_\ell H)[x'] \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{0} \end{array} 0$$

et de $P_\ell^2 T$ défini par le carquois

$$0 \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{0} \end{array} (P_\ell G)[\partial_{x'}].$$

On obtient en fait une décomposition globale en somme directe $P_\ell T = P_\ell^1 T \oplus P_\ell^2 T$, où $P_\ell^1 T$ est donné par le même terme que dans le cas $\lambda \notin \{1, \bar{\lambda}_0\}$, et $P_\ell^2 T$ est supporté en 0 et donné par $(P_\ell G)[\partial_{x'}]$.

On a alors

$$\begin{aligned} \nu_{\infty, 1, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}(P_\ell^1 T \oplus P_\ell^2 T)) \\ &= \dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}(P_\ell^1 T)) + \dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}(P_\ell^2 T)), \end{aligned}$$

ce qui donne deux dimensions à calculer.

La première dimension s'obtient en raisonnant de manière similaire au cas précédent car $\text{DR}(P_\ell^1 T)$ est de la forme $j_* \mathcal{V}$. D'une part, comme

$$\sum_{\alpha \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, e^{-2i\pi\alpha}}^p(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) = \nu_{\infty, \lambda_0, \ell}^p(M),$$

on a alors

$$\delta^p(P_\ell^1 T) = \delta^p(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbf{x}} \sum_{\mu \neq 1} \nu_{x,\mu}^{p-1}(P_\ell^1 T) &= \sum_{\mu \neq 1} \left(\underbrace{\nu_{\infty,\mu\lambda_0}^{p-1}(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0})}_{=0 \text{ car } \mu \neq 1} + \nu_{1,\mu\lambda_0}^{p-1}(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) \right) \\ &= \nu_{1,1}^{p-1}(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) \\ &= \nu_{\infty,\lambda_0,\ell}^{p-1}(M), \end{aligned}$$

ainsi que

$$\sum_{x \in \mathbf{x}} \mu_{x,1}^p(P_\ell^1 T) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \left(\underbrace{\mu_{\infty,\lambda_0,\ell+1}^{p+k}(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0})}_{=0} + \underbrace{\mu_{1,\lambda_0,\ell+1}^p(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0})}_{=0} \right) = 0.$$

En rassemblant le tout, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \operatorname{DR}(P_\ell^1 T)) &= \delta^{p-1}(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) - \delta^p(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) - \nu_{\infty,\lambda_0,\ell}^p(M) - \nu_{\infty,\lambda_0,\ell}^{p-1}(M) + \nu_{\infty,\lambda_0,\ell}^{p-1}(M) \\ &= \delta^{p-1}(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) - \delta^p(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) - \nu_{\infty,\lambda_0,\ell}^p(M) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cherchons maintenant à déterminer $\dim \operatorname{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \operatorname{DR}(P_\ell^2 T))$. On sait que $P_\ell^2 T$ est supporté en 0 et donné par $(P_\ell G)[\partial_{x'}]$. La filtration de Hodge est ici donnée par

$$F^p((P_\ell G)[\partial_{x'}]) = \sum_{k \geq 0} \partial_{x'}^k \cdot F^{p+1+k}(P_\ell G).$$

On a alors $\mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \operatorname{DR}(P_\ell^2 T))$ qui est donné par le conoyau de

$$(P_\ell G)[\partial_{x'}] \xrightarrow{\partial_{x'}} (P_\ell G)[\partial_{x'}]$$

qui s'identifie à $P_\ell G$ muni de la filtration

$$F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \operatorname{DR}(P_\ell^2 T)) = F^p(P_\ell G).$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \operatorname{DR}(P_\ell^2 T)) &= \dim \operatorname{gr}_F^p(P_\ell G) \\ &= \dim \operatorname{gr}_F^p(P_{\ell+1} H) \\ &= \nu_{\infty,\lambda_0,\ell+1}^p(M). \end{aligned}$$

En sommant les deux dimensions, on obtient

$$\nu_{\infty,1,\ell}^p(\operatorname{MC}_{\lambda_0}(M)) = 0 + \nu_{\infty,\lambda_0,\ell+1}^p(M) = \nu_{\infty,\lambda_0,\ell+1}^p(M).$$

(iii) Si $\lambda = \overline{\lambda_0}$, on reprend la suite exacte

$$0 \rightarrow T_0 \rightarrow T \rightarrow T_1 \rightarrow 0.$$

D'après la proposition 5.1.3, les morphismes de cette suite exacte sont strictement compatibles à la filtration de Hodge. Il en résulte qu'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_F^p T_0 \rightarrow \mathrm{gr}_F^p T \rightarrow \mathrm{gr}_F^p T_1 \rightarrow 0,$$

ce qui donne

$$\nu_{\infty, \lambda_0}^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \mathrm{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_{\mathrm{exc}}^1, \mathrm{DR}(T_0)) + \dim \mathrm{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_x^1, \mathrm{DR}(T_1)).$$

Le cas du terme de gauche se traite comme dans le cas $\gamma \in]1 - \gamma_0, 1[$ de la partie (i), ce qui donne $\dim \mathrm{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_{\mathrm{exc}}^1, \mathrm{DR}(T_0)) = \nu_{\infty, 1}^p(M)$. Concernant le terme de droite, on a

$$\dim \mathrm{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_x^1, \mathrm{DR}(T_1)) = \dim \mathrm{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}) = h^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}(M)).$$

On a le lemme suivant :

Lemme 6.3.2 $h^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}(M)) = h^p H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\min}) + \nu_{\infty, 1, \mathrm{prim}}^{p-1}(M)$.

Preuve. D'après le lemme 2.2.8 et la remarque 2.3.5 de [DS13], on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{M}^{\min} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0,$$

strictement compatible à la filtration de Hodge, où $\mathcal{N}$ est supporté à l'infini, ainsi qu'une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_F^p H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\min}) \rightarrow \mathrm{gr}_F^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}(M)) \rightarrow \mathrm{gr}_F^p H^1(\mathrm{DR}\mathcal{N}) \rightarrow 0,$$

avec

$$h^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}(M)) = h^p H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\min}) + \nu_{\infty, 1, \mathrm{prim}}^{p-1}(M).$$

□

En sommant, on obtient finalement

$$(\diamond) \nu_{\infty, \lambda_0}^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \nu_{\infty, 1}^p(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}(M)) = \nu_{\infty, 1}^p(M) + h^p H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\min}) + \nu_{\infty, 1, \mathrm{prim}}^{p-1}(M).$$

D'autre part, comme on l'a vu dans la preuve du lemme 4.2.7, on est dans la situation d'un carquois d'extension minimale

$$T_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow[N]{\quad} \end{array} T$$

avec $P_\ell T \simeq P_{\ell-1} T_0$ pour $\ell \geq 1$. Comme N est strictement compatible à la filtration de Hodge, avec un décalage $F^\bullet \rightarrow F^{\bullet-1}$, on a également pour $\ell \geq 1$

$$\mathrm{gr}_F^p P_\ell T \simeq \mathrm{gr}_F^{p-1} P_{\ell-1} T_0$$

et par suite

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_{\text{exc}}^1, \text{DR}(P_\ell T)) = \dim \text{gr}_F^{p-1} \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_{\text{exc}}^1, \text{DR}(P_{\ell-1} T_0)).$$

On peut alors maintenant refaire exactement le raisonnement effectué dans le cas (i), à savoir

$$\dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_{\text{exc}}^1, \text{DR}(P_\ell T_0)) = \nu_{\infty, 1, \ell}^p(M),$$

ce qui donne finalement pour $\ell \geq 1$ l'expression

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \nu_{\infty, 1, \ell-1}^{p-1}(M).$$

Il reste à traiter le cas $\ell = 0$. Comme on a

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \sum_{\ell \geq 1} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell}^{p+k}(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$$

on obtient, en utilisant la formule $(\diamond)$, que

$$\nu_{\infty, 1}^p(M) + h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) = \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \sum_{\ell \geq 1} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, 1, \ell-1}^{p-1+k}(M).$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \geq 1} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, 1, \ell-1}^{p-1+k}(M) &= \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, 1, \ell}^{p-1+k}(M) + \sum_{\ell \geq 0} \nu_{\infty, 1, \ell}^{p+\ell}(M) \\ &= \nu_{\infty, 1}^{p-1}(M) + \nu_{\infty, 1, \text{coprim}}^p(M), \end{aligned}$$

il en résulte donc que

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{\infty, 1, \text{coprim}}^p(M) + \nu_{\infty, 1}^p(M) - \nu_{\infty, 1}^{p-1}(M).$$

En outre, un calcul général montre immédiatement que

$$\nu_{\infty, 1, \text{coprim}}^p(M) - \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) = \nu_{\infty, 1}^p(M) - \nu_{\infty, 1}^{p-1}(M),$$

et par conséquent $\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min})$, ce qui termine la démonstration du théorème 6.3.1. $\square$

Remarque. Si l'on somme sur $p \in \mathbb{Z}$ les identités du théorème précédent, on retrouve bien les expressions de la partie (2) du théorème 4.2.5.

Pour complètement terminer l'étude du comportement des données numériques de Hodge par convolution additive, il reste à expliciter le comportement des données locales h^p et des données globales δ^p . Cela revient à généraliser les points (1) et (3) du théorème 3.1.2 de [DS13] sans l'hypothèse de monodromie scalaire à l'infini. C'est l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 6.3.3 *Les invariants locaux $h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$ sont donnés par :*

$$h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma \in]0, \gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M)) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{prim}}^{p-1}(M).$$

Preuve. On sait que $h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\lambda \in S^1} \nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$, il suffit donc de sommer les expressions obtenues au théorème 6.3.1. En utilisant directement l'identité $(\diamond)$ dans le cas $\lambda = \overline{\lambda_0}$, on obtient

$$\begin{aligned} h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in]1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^p(M) + \underbrace{\sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}^{p+k}(M)}_{\nu_{\infty, \lambda_0}^p(M) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{coprim}}^p(M)} \\ &+ \nu_{\infty, 1}^p(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M)). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in [0, \gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M)) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{coprim}}^p(M) \\ &= \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in [0, \gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M)) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{prim}}^{p-1}(M). \end{aligned}$$

□

Remarque. D'une part, si l'on somme sur $p \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien en utilisant le lemme 6.3.2 la troisième formule de la proposition 1.3.5 de [DS13]. D'autre part, si l'on ajoute l'hypothèse de Dettweiler et Sabbah de monodromie scalaire à l'infini égale à $\lambda_0 \text{Id}$, on a $\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M) = 0$ sauf si $\lambda = \lambda_0$ et $\ell = 0$. Ainsi

$$\sum_{\gamma \in [0, \gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) = \nu_{\infty, \lambda_0}^{p-1}(M) = \nu_{\infty, \lambda_0, \text{prim}}^{p-1}(M) = h^{p-1}(M),$$

et donc $h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M))$, ce qui permet de retrouver le point (1) du théorème 3.1.2 de [DS13].

Proposition 6.3.4 *Les invariants globaux $\delta^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$ sont donnés par :*

$$\delta^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) - \sum_{i=1}^r \left(\mu_{x_i, 1}^p(M) + \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \mu_{x_i, \lambda}^{p-1}(M) \right).$$

Preuve. On note $\gamma^p = \delta^p - \delta^{p-1}$. D'après l'identité (2.3.5*) de [DS13], on a

$$h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M)) = -\gamma^p(M) - h^p(M) + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \mu_{x_i, \mu}^{p-1}(M) + \mu_{x_i, 1}^p(M) \right).$$

On déduit donc de la proposition 6.3.3 (écrite avec *coprim* plutôt que *prim*) que

$$(1) \quad h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + h^p(M) = -\gamma^p(M) + \sum_{\gamma \in [0, \gamma_0]} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{coprim}}^p(M) \\ + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \mu_{x_i, \mu}^{p-1}(M) + \mu_{x_i, 1}^p(M) \right).$$

D'après la proposition 3.1.1 de [DS13], on a $h^p(\text{MC}_{\overline{\lambda_0}}(\text{MC}_{\lambda_0}(M))) = h^{p-1}(M)$, donc en écrivant la même formule que ci-dessus avec $\text{MC}_{\overline{\lambda_0}}(M)$ puis en l'appliquant en $\text{MC}_{\lambda_0}(M)$, cela donne

$$h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + h^{p-1}(M) = -\gamma^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \sum_{\gamma \in [0, 1-\gamma_0]} \nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \sum_{\gamma \in]1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \\ - \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \text{coprim}}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \mu_{x_i, \mu}^{p-1}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \mu_{x_i, 1}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \right).$$

D'après le théorème 6.3.1, on a

$$\sum_{\gamma \in [0, 1-\gamma_0]} \nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) + \nu_{\infty, 1}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \\ = \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) + \nu_{\infty, 1}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$$

et

$$\sum_{\gamma \in]1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma \in]0, \gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M).$$

De même, on a

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) - \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \text{coprim}}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\ell \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell}^{p+k}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) - \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell}^{p+\ell}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \right) \\ = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell+1}^{p+k}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \\ = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, 1, \ell}^{p-1+k}(M) \\ = \nu_{\infty, 1}^{p-1}(M)$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
\nu_{\infty,1}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty,1,\ell}^{p+k}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \\
&= \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty,\lambda_0,\ell+1}^{p+k}(M) \\
&= \nu_{\infty,\lambda_0}^p(M) - \nu_{\infty,\lambda_0,\text{coprim}}^p(M).
\end{aligned}$$

Enfin, en appliquant le point (2) du théorème 3.1.2 de [DS13], on a

$$\sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \mu_{x_i,\mu}^{p-1}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \mu_{x_i,1}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \right) = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-2}(M) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0,1]} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) \right).$$

Finalement, en regroupant le tout, cela donne

$$\begin{aligned}
h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= -\gamma^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) - \nu_{\infty,\lambda_0,\text{coprim}}^p(M) + \nu_{\infty,\lambda_0}^p(M) - \nu_{\infty,\lambda_0}^{p-1}(M) \\
&\quad + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-2}(M) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0,1]} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) \right).
\end{aligned}$$

En combinant maintenant cette dernière égalité avec l'identité (1), on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \gamma^p(M) + h^p(M) - \sum_{\gamma \in [0,\gamma_0]} \nu_{\infty,\lambda}^p(M) - \sum_{\gamma \in]\gamma_0,1[} \nu_{\infty,\lambda}^{p-1}(M) + \nu_{\infty,\lambda_0}^p(M) - \nu_{\infty,\lambda_0}^{p-1}(M) \\
&\quad - \sum_{i=1}^r \left((\mu_{x_i,1}^p(M) - \mu_{x_i,1}^{p-1}(M)) + \sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} (\mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) - \mu_{x_i,\lambda}^{p-2}(M)) \right)
\end{aligned}$$

ce qui donne finalement que la quantité $\gamma^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$ est égale à

$$\gamma^p(M) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0,1[} (\nu_{\infty,\lambda}^p(M) - \nu_{\infty,\lambda}^{p-1}(M)) - \sum_{i=1}^r \left((\mu_{x_i,1}^p(M) - \mu_{x_i,1}^{p-1}(M)) + \sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} (\mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) - \mu_{x_i,\lambda}^{p-2}(M)) \right)$$

En sommant maintenant ces égalités pour $p' \leq p$, on en déduit que

$$\delta^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0,1[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M) - \sum_{i=1}^r \left(\mu_{x_i,1}^p(M) + \sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) \right),$$

ce qui termine la preuve de la proposition. $\square$

Remarque. Si l'on ajoute l'hypothèse de Dettweiler et Sabbah de monodromie scalaire à l'infini égale à $\lambda_0 \text{Id}$, on a $\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M) = 0$ sauf si $\lambda = \lambda_0$ et $\ell = 0$. Ainsi

$$\sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) = \nu_{\infty, \lambda_0}^p(M) = h^p(M)$$

et donc

$$\delta^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M) + h^p(M) - \sum_{i=1}^r \left(\mu_{x_i, 1}^p(M) + \sum_{\gamma \in]0, 1 - \gamma_0[} \mu_{x_i, \lambda}^{p-1}(M) \right),$$

ce qui permet de retrouver le point (3) du théorème 3.1.2 de [DS13].

6.4 Comportement des données numériques de Hodge par convolution intermédiaire multiplicative

Soient $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble de points de $\mathbb{G}_m$, $x_0 = 0$, $\mathcal{V}$ un système local sur $U = \mathbb{G}_m \setminus \mathbf{x}$ induit par une variation de structure de Hodge complexe polarisable $(V, F^\bullet V, \nabla)$ sur U et M le $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ -module extension minimale en les points de $\mathbf{x}$. On note $\mathcal{M}^{\min}$ le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ -module extension minimale de M en 0 et à l'infini.

Soient $\gamma_0 \in]0, 1[$ et $\lambda_0 = \exp(-2i\pi\gamma_0)$. On suppose dans cette sous-section que $M \in C'_{\lambda_0}$ (catégorie introduite à la définition 2.8.2), et on va chercher à exprimer les données numériques de Hodge de $\text{MC}'_{\lambda_0}(M)$ en fonction de celles de M . Il s'agit donc de donner un analogue du théorème 4.3.1 avec filtration de Hodge.

La proposition suivante donne le comportement des données numériques locales de Hodge cycles évanescents par convolution intermédiaire multiplicative :

Proposition 6.4.1 *Soit $\lambda = e^{-2i\pi\gamma}$ avec $\gamma \in]0, 1[$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a :*

$$\mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]0, \gamma_0[\\ \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]\gamma_0, 1[. \end{cases}$$

Preuve. Avec $j : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ l'inclusion, la formule obtenue à la proposition 2.8.1 donne

$$\text{MC}'_{\lambda_0}(M) = j^+(\text{MC}_{\lambda_0}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\lambda_0}^-))).$$

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $x_i \neq 0$ et

$$\mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\lambda_0}^-))).$$

On a vu lors de la preuve de la proposition 2.8.3 que si $M \in C'_{\lambda_0}$, alors $j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\lambda_0}^-) \in \mathcal{C}$. De plus, l'hypothèse de monodromie scalaire à l'infini faite dans le théorème 3.1.2 de [DS13] ne sert que pour les parties (1) et (3) du théorème, nous permettant bien d'appliquer (2) sans cette hypothèse.

On a alors

$$\mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) & \text{si } \gamma \in]0, \gamma_0] \\ \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) & \text{si } \gamma \in]\gamma_0, 1]. \end{cases}$$

Comme le système local $\mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}$ n'a pas de monodromie autour de x_i , on a $\mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) = \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^p(M)$, ce qui termine la preuve de la proposition. $\square$

Remarque. En sommant sur $p \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien l'expression de la partie (1) du théorème 4.3.1.

Les deux propositions suivantes donnent le comportement des données numériques locales de Hodge cycles proches à l'infini par convolution intermédiaire multiplicative.

Proposition 6.4.2 Soit $\lambda = e^{-2i\pi\gamma}$ avec $\gamma \in [0, 1[$. On a les données suivantes :

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda, \ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[\\ \nu_{\infty, 1, \ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1. \end{cases}$$

Preuve. En utilisant la proposition 2.8.1 et le théorème 6.3.1, on a

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda\lambda_0, \ell}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda\lambda_0, \ell}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[\\ \nu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, 1, \ell-1}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1. \end{cases}$$

Le système local $\mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}$ a pour monodromie λ_0 autour de l'infini, ainsi en appliquant l'identité 2.2.13 de [DS13], on a

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda, \ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[\\ \nu_{\infty, 1, \ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1, \end{cases}$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. $\square$

Remarque. En sommant sur $p \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien l'expression de la partie (2) du théorème 4.3.1.

Proposition 6.4.3

$$\begin{aligned} \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) &= h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) - h^{p-1}(M) + h^p(M) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) + \nu_{0, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) \\ &- \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} (\nu_{0, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{0, \lambda}^p(M)) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0, 1[} (\nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{\infty, \lambda}^p(M)). \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant la proposition 2.8.1 et le théorème 6.3.1, on a

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}^{\text{an}}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})^{\min}).$$

Rappelons la formule (*) démontrée pendant la preuve du théorème 6.3.1 (ou de manière équivalente l'identité (2.3.3*) de [DS13]) :

$$\begin{aligned} h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) &= \delta^{p-1}(M) - \delta^p(M) + h^{p-1}(M) - h^p(M) - \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) \\ &+ \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \nu_{x_i, \mu}^{p-1}(M) + \mu_{x_i, 1}^p(M) \right), \end{aligned}$$

et appliquons-la avec $(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})^{\min}$:

$$\begin{aligned} h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}^{\text{an}}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})^{\min}) &= \delta^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) - \delta^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + h^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) - h^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) \\ &- \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) - \nu_{0, 1, \text{prim}}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \nu_{x_i, \mu}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + \mu_{x_i, 1}^p((M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})^{\min}) \right), \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.3.2 de [DS13], on a

$$\delta^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) = \delta^p(M) - h^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{0, \lambda}^p(M) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M).$$

En utilisant les identités 2.2.12 et 2.2.13 de [DS13], on a alors

$$\begin{aligned} h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}^{\text{an}}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})^{\min}) &= \delta^{p-1}(M) - \delta^p(M) - \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}^{p-1}(M) \\ &+ \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} (\nu_{0, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{0, \lambda}^p(M)) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0, 1[} (\nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{\infty, \lambda}^p(M)) + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \nu_{x_i, \mu}^{p-1}(M) + \mu_{x_i, 1}^p(M) \right), \end{aligned}$$

ce dont on déduit finalement que

$$\begin{aligned} h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}^{\text{an}}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})^{\min}) &= h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) - h^{p-1}(M) + h^p(M) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) + \nu_{0, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) \\ &- \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} (\nu_{0, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{0, \lambda}^p(M)) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0, 1[} (\nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{\infty, \lambda}^p(M)). \end{aligned}$$

□

Remarque. En sommant sur $p \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien l'expression de la partie (3) du théorème 4.3.1.

La proposition suivante donne le comportement des invariants locaux h^p par convolution intermédiaire multiplicative.

Proposition 6.4.4 *Les invariants locaux $h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M))$ sont donnés par :*

$$h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = h^p(M) + h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) + \nu_{0,1,\text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} (\nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) - \nu_{0,\lambda}^p(M)).$$

Preuve. On peut sommer de manière similaire à la proposition 6.3.3 :

$$\begin{aligned} h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) &= \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \nu_{\infty,\lambda}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in]1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M) + \underbrace{\sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty,1,\ell+1}^{p+k}(M)}_{\nu_{\infty,1}^p(M) - \nu_{\infty,1,\text{coprim}}^p(M)} + \underbrace{\sum_{\ell \geq 1} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty,\lambda_0,\ell-1}^{p-1+k}(M)}_{\nu_{\infty,\lambda_0}^{p-1}(M) + \nu_{\infty,\lambda_0,\text{coprim}}^p(M)} \\ &\quad + \nu_{\infty,\lambda_0,0}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)), \end{aligned}$$

et se rappeler que pour tout $\lambda \in S^1$, on a $\nu_{\infty,\lambda,\text{coprim}}^p(M) = \nu_{\infty,\lambda,\text{prim}}^{p-1}(M) + \nu_{\infty,\lambda}^p(M) - \nu_{\infty,\lambda}^{p-1}(M)$, d'où

$$h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \nu_{\infty,\lambda}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in]1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M) + \nu_{\infty,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{\infty,1,\text{prim}}^{p-1}(M) + \nu_{\infty,\lambda_0,0}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)).$$

Il suffit alors d'injecter la formule de la proposition 6.4.3 pour conclure. $\square$

Remarque. En sommant sur $p \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien l'expression de la partie (4) du théorème 4.3.1.

La proposition suivante donne le comportement des données numériques locales de Hodge cycles proches en 0 par convolution intermédiaire multiplicative.

Proposition 6.4.5 *Soit $\lambda = e^{-2i\pi\gamma}$ avec $\gamma \in [0, 1[$. On a les données suivantes :*

$$\nu_{0,\lambda,\ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{0,\lambda,\ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]0, \gamma_0[\\ \nu_{0,\lambda,\ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]\gamma_0, 1[\\ \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = \lambda_0 \\ \nu_{0,1,\ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = 1, \ell \geq 1 \\ h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) & \text{si } \lambda = 1, \ell = 0. \end{cases}$$

Preuve. On note $\tilde{M}$ l'extension minimale de M sur $\mathbb{A}^1$ en 0. En appliquant l'identité 2.2.14 de [DS13], on obtient :

$$\mu_{0,\lambda,\ell}^p(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})) = \mu_{0,\lambda,\ell}^p((\tilde{M} \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})_{\min(\{0\})}) = \begin{cases} \mu_{0,\lambda/\overline{\lambda_0},\ell}^p(\tilde{M}) & \text{si } \lambda \neq 1, \overline{\lambda_0} \\ \mu_{0,1/\overline{\lambda_0},\ell+1}^p(\tilde{M}) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{0,1,\ell}^p(\tilde{M}) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \end{cases}$$

d'où

$$\mu_{0,\lambda,\ell}^p(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})) = \begin{cases} \nu_{0,\lambda\lambda_0,\ell}^p(M) & \text{si } \lambda \neq 1 \\ \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = 1. \end{cases}$$

En utilisant maintenant le deuxième point du théorème 3.1.2 de [DS13], on obtient :

$$\mu_{0,\lambda,\ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}))) = \begin{cases} \mu_{0,\lambda/\lambda_0,\ell}^p(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})) & \text{si } \gamma \in]0, \gamma_0] \\ \mu_{0,\lambda/\lambda_0,\ell}^{p-1}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})) & \text{si } \gamma \in]\gamma_0, 1[\cup \{0\}. \end{cases}$$

Il résulte alors de la formule de la proposition 2.8.1 que :

$$\nu_{0,\lambda,\ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{0,\lambda,\ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]0, \gamma_0[\\ \nu_{0,\lambda,\ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]\gamma_0, 1[\\ \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = \lambda_0 \\ \nu_{0,1,\ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = 1, \ell \geq 1. \end{cases}$$

On déduit la quantité $\nu_{0,1,0}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M))$ par sommation, à savoir

$$\begin{aligned} \nu_{0,1,0}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) &= h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) - \sum_{\gamma \in]0, \gamma_0[} \nu_{0,\lambda}^p(M) - \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) - \underbrace{\sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}^{p+k}(M)}_{\nu_{0,\lambda_0}^p(M) - \nu_{0,\lambda_0,\text{coprim}}^p(M)} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{\ell \geq 1} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{0,1,\ell-1}^{p-1+k}(M)}_{\nu_{0,1}^{p-1}(M) + \nu_{0,1,\text{coprim}}^p(M)} \\ &= h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) - \sum_{\gamma \in]0, \gamma_0]} \nu_{0,\lambda}^p(M) - \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1]} \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) + \nu_{0,\lambda_0,\text{coprim}}^p(M) - \nu_{0,1,\text{coprim}}^p(M) \\ &= h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) - \sum_{\gamma \in [0, \gamma_0[} \nu_{0,\lambda}^p(M) - \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) + \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0,1,\text{prim}}^{p-1}(M). \end{aligned}$$

Il suffit alors d'injecter la formule de la proposition 6.4.4 pour conclure. $\square$

Remarque. En sommant sur $p \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien l'expression de la partie (5) du théorème 4.3.1.

Pour terminer l'étude du comportement des données numériques de Hodge par convolution intermédiaire multiplicative, il reste à expliciter le comportement des données numériques globales de Hodge.

Proposition 6.4.6 *Les invariants globaux $\delta^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M))$ sont donnés par :*

$$\delta^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} (\nu_{0,\lambda}^p(M) - \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M)) + \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M) - \sum_{i=1}^r \left(\mu_{x_i,1}^p(M) + \sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) \right).$$

Preuve. On utilise encore la formule de la proposition 2.8.1. D'après la proposition 6.3.4, on a

$$\delta^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) - \sum_{i=0}^r \left(\mu_{x_i,1}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + \sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) \right).$$

On va expliciter chacun des termes. En appliquant la formule de la proposition 2.3.2 de [DS13], on obtient :

$$\delta^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) = \delta^p(M) - h^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{0,\lambda}^p(M) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M).$$

De plus, d'après l'identité 2.2.13 de [DS13], on a

$$\sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) = \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty,\lambda\overline{\lambda_0}}^p(M) = \sum_{\gamma \in [0,1-\gamma_0[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M).$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \mu_{0,1}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + \sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} \mu_{0,\lambda}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) &= \nu_{0,1}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) - \nu_{0,1,\text{prim}}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) \\ &= \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) - \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\delta^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} (\nu_{0,\lambda}^p(M) - \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M)) + \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M) - \sum_{i=1}^r \left(\mu_{x_i,1}^p(M) + \sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) \right),$$

ce qui termine la preuve de la proposition. $\square$