Dispositifs expérimentaux

Deux types de dispositifs expérimentaux ont été employés dans le cadre de ces travaux : un dispositif d'impact par masse tombante et un dispositif d'indentation hors-plan du stratifié.

2.1.1. Impact par masse tombante

Le dispositif d'impact par masse tombante utilisé dans le cadre de ces travaux est une tour de chute Dynatup 8250 [Instron, 1999]. Cette machine est initialement conçue pour réaliser des essais d'impact tels que ceux décrits dans la norme ASTM D 7136 [ASTM, 2007]. Cette norme permet de représenter la chute d'un outil sur un élément de peau en composite d'un fuselage, compris entre deux cadres et deux lisses. En effet, le fuselage des avions est constitué d'une peau, métallique ou plus récemment composite, rivetée sur des cadres et des lisses. Les lisses sont des poutres parallèles à l'axe du fuselage. Elles permettent de reprendre les efforts de flexion de la voilure, transmis au fuselage par le caisson central, où sont implantées les ailes. Les cadres sont des anneaux fixés perpendiculairement aux lisses. Ils permettent de donner au fuselage sa forme aérodynamique.

La norme ASTM D 7136 permet de standardiser les essais d'impact par masse tombante et est plus particulièrement adaptée aux applications composites aéronautiques. Elle fixe les dimensions de la plaque à impacter à (150±0,25) x (100±0,25) mm² (Figure 2.1). L'épaisseur de la plaque peut varier, en fonction du matériau et, pour un stratifié, de l'empilement considéré. La cible est centrée sur une fenêtre d'impact de (125±1) x (75±1) mm². Elle est maintenue sur cette fenêtre par quatre sauterelles mécaniques recouvertes d'un embout en caoutchouc, afin de ne pas abîmer la plaque lors du serrage des sauterelles. L'impacteur doit avoir un embout de forme hémisphérique. En effet, dans la littérature [Mitrevski, 2006], c'est cette géométrie d'impacteur qui a engendré le plus de dommages internes, à dommage visible de l'extérieur équivalent. Le diamètre de l'embout est fixé à (16±0,1) mm par la norme. Cet embout est fixé sur une colonne qui glisse le long de deux guides lors de la chute. Ces guides assurent la verticalité de l'impacteur au moment de l'impact. La masse totale de l'impacteur, constitué de l'embout hémisphérique et de la colonne à laquelle est fixé cet embout, doit valoir (5,5±0,25) kg. La hauteur de chute, notée h, est réglée de manière à atteindre l'énergie d'impact souhaitée (2.1).

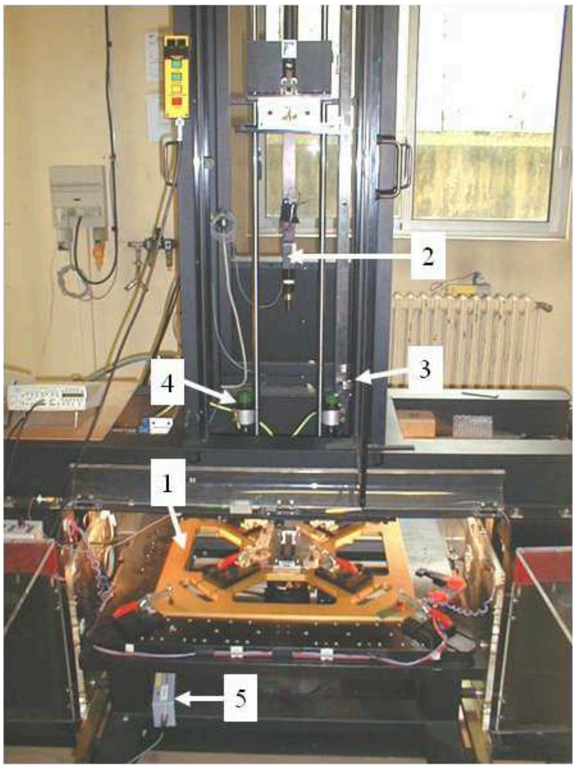
$$h = \frac{E_i}{M_i g} \tag{2.1}$$

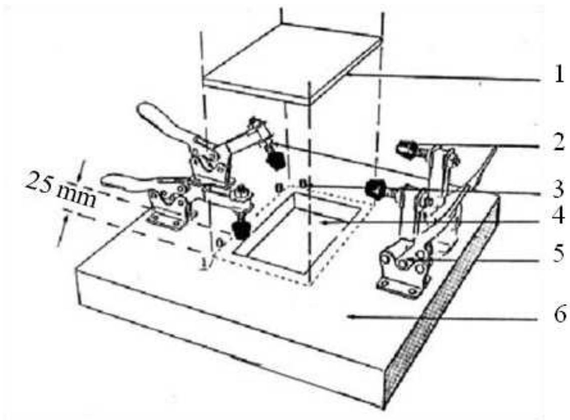
E_i est l'énergie d'impact recherchée, M_i la masse de l'impacteur et g la constante de gravité du lieu où l'essai est réalisé.

Au cours de l'essai, la vitesse de l'impacteur doit pouvoir être mesurée à un point fixe, juste avant le choc avec la cible. La précision de cette mesure est fixée à 5 mm/s par la norme.

La machine Dynatup 8250 disponible comporte plusieurs éléments :

- un dispositif porte échantillon permettant de réaliser des essais d'impact suivant la norme ASTM D 7136 (repère 1 sur la Figure 2.1 a),
- un équipage mobile de masse variable (2,93 à 45,5 kg) portant un impacteur hémisphérique de diamètre 16 mm équipé d'un capteur de force par pont de jauges permettant de mesurer la force axiale exercée sur l'impacteur pendant la durée de l'impact, jusqu'à 220 kN (repère 2 sur la Figure 2.1 a),
- une cellule photoélectrique équipée d'un réflecteur à double bord permettant de mesurer la vitesse de l'impacteur juste avant l'impact (repère 3 sur la Figure 2.1 a),
- un dispositif anti-rebond, afin d'éviter les impacts multiples sur l'échantillon (repère 4 sur la Figure 2.1 a),
- un capteur de déplacement sans contact par triangulation laser, modèle C1L/20 de ATI, permettant de mesurer les déplacements du point opposé à l'impact, c'est-à-dire le milieu de la face non impactée (repère 5 sur la Figure 2.1 a). Ce capteur possède une sensibilité de 0,5 V/mm.





1. Spécimen testé
2. Embout en caoutchouc
3. Fiche de guidage permettant de centrer la plaque sur la fenêtre dimpact
4. Fenêtre d'impact
5. Sauterelle mécanique
6. Base de fixation

(a) (b)

Figure 2.1. *Machine d'impact Dynatup (a) et configuration imposée par la norme ASTM D 7136 (b)*

Ce dispositif permet d'atteindre, par gravité, des vitesses d'impact allant de 0,7 à 4,7 m/s et des énergies d'impact allant de 0,76 à 500 J. Au cours de l'essai, la vitesse de l'impacteur juste avant l'impact, la force axiale d'impact sur l'impacteur et les déplacements du point opposé à l'impact sont mesurés. L'énergie, au moment de l'impact, est calculée par le logiciel IMPULSE [Instron, 2003] à partir de la force au moment de l'impact et de la vitesse d'impact. Ce logiciel est fourni avec la machine. La vitesse et les déplacements de l'impacteur au cours de l'essai sont calculés en intégrant la force mesurée au cours du temps, par la méthode des trapèzes. De même, une estimation de l'énergie absorbée par le spécimen est calculée par intégration, selon la règle des trapèzes, de la courbe représentant la force mesurée sur l'impacteur en fonction de son déplacement calculé.

2.1.2. Indentation hors-plan

Le dispositif d'indentation hors-plan est réalisé sur une machine de traction/compression (Figure 2.2 a). Cet essai doit permettre de quantifier la part de l'aspect dynamique de l'essai d'impact. Il s'agit de reproduire les mêmes conditions expérimentales en quasi-statique. Ainsi, un embout hémisphérique de diamètre 16 mm est monté sur la traverse de la machine (repère 1 sur la Figure 2.2 a). Les vitesses de déplacement de la traverse portant l'indenteur sont comprises entre 2.10^{-8} et 8.10^{-3} m/s. Un capteur de force axiale permet de mesurer la force appliquée sur la traverse, jusqu'à 50 kN. Les déplacements du point opposé à l'indentation sont mesurés par un capteur mécanique linéaire de déplacements (ou capteur LVDT pour Linear Variable Differential Transformer – repère 1 sur la Figure 2.2 b). Pour les plus hautes vitesses de chargement, ce capteur est remplacé, par mesure de sécurité, par le capteur de déplacement sans contact par triangulation laser de la machine d'impact par masse tombante.

(a) (b)

Figure 2.2. *Dispositif d'indentation hors-plan et instrumentation supplémentaire*

L'instrumentation des essais d'indentation hors-plan est enrichie par une chaîne d'émission acoustique (repère 2 sur la Figure 2.2 b). Cette chaîne est constituée de deux capteurs piézoélectriques permettant de capter des signaux de fréquences comprises entre 125 et 750 kHz. La notion de capteurs de garde évitant de considérer les bruits venant des mors n'a pas été utilisée ici. La chaîne d'émission acoustique permet, via le logiciel d'acquisition et de traitement du signal acoustique Mistras, d'accéder aux caractéristiques du signal. La chaîne d'émission acoustique permet d'avoir un suivi de l'endommagement (rupture de fibres, rupture matricielle, délaminage) au cours de l'essai, notamment à travers la notion d'énergie cumulée. L'énergie cumulée correspond à la somme des énergies des signaux acoustiques émis jusqu'à un instant donné.

2.2. Modèles matériaux

L'Onera a développé depuis plusieurs années des modèles tridimensionnels de comportement, d'endommagement et de rupture des matériaux composites stratifiés [Huchette, 2005] [Laurin, 2005] [Laurin, 2007] : la famille de modèles phénoménologiques Onera Progressive Failure Model (OPFM). Ces modèles permettent de prévoir l'amorçage et l'accroissement des dommages. Leurs paramètres sont identifiables par des essais quasi-statiques pour la plupart classiquement réalisés en industrie. Ils ont été validés sur des configurations quasi-statiques planes, tels des essais de traction, de compression ou de cisaillement sur plaques lisses, mais également sur des cas plus complexes, comme la rupture en traction ou en compression de plaques trouées, pour des composites stratifiés [Laurin, 2005].

Les critères de rupture de ces modèles distinguent les différents modes d'endommagement et de rupture observés dans les matériaux composites : les ruptures matricielles (en traction, en compression et en cisaillement) et les ruptures de fibres (en traction et en compression). Les dernières améliorations apportées à ces modèles permettent de prendre en compte l'effet des délaminages dans le comportement du pli [Charrier, 2011].

Les modèles OPFM permettent actuellement de décrire le comportement thermo-viscoélastique non linéaire initial du pli, puis, lorsque surviennent les premières fissures, le comportement endommagé du stratifié. Lorsqu'un mode de rupture catastrophique est atteint, le caractère adoucissant du comportement du stratifié passant de l'état endommagé à sa rupture finale est également traduit (Figure 2.3).

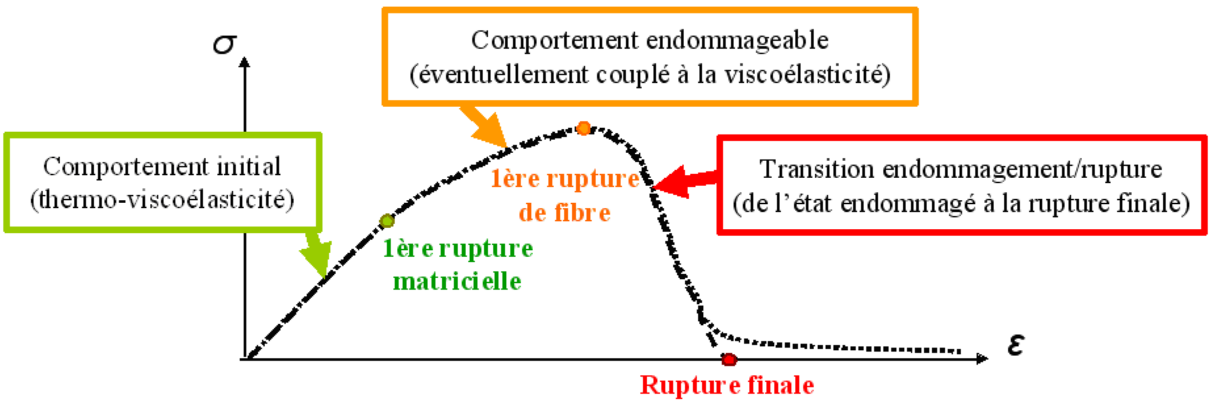


Figure 2.3. *Modèle OPFM pour le comportement endommageable et homogénéisé du pli*

Les modèles de comportement du pli à matrice organique développés à l'Onera rendent ainsi compte des mécanismes ayant lieu au sein du pli et de leurs effets. Ces mécanismes, de complexités variables, peuvent être activés ou non, selon leur prépondérance au cours d'un chargement donné.

Le modèle d'endommagement pour les chargements 3D comporte cinquante-six paramètres à identifier pour une résolution statique, auxquels il faut ajouter la masse volumique du pli pour une résolution dynamique. Cette dernière est identifiée d'après les données du fournisseur [Hexcel, 2010] à 1580 kg/m^3. Les paramètres à identifier apparaissent en gras dans les équations à venir.

À ces modèles de comportement du pli peuvent être associés des modèles de zones cohésives. Ces modèles permettent de décrire à la fois l'amorçage et la propagation des délaminages survenant aux interfaces entre deux plis, le plus souvent, d'orientations différentes.

2.2.1. Modèle de comportement homogénéisé du pli

Afin de modéliser les endommagements survenant sous des sollicitations complexes dans les composites à matrice organique (CMO) stratifiés, il faut tout d'abord modéliser la partie élastique de ce comportement, que l'on considère comme similaires dans les sens autres que le sens fibre et qui diffère d'une couche à l'autre. Pour cela, une loi de comportement matériau isotrope transverse et homogénéisée à l'échelle du pli est appliquée à chaque pli du modèle numérique du stratifié, selon son orientation, pour traduire le caractère multicouche des structures stratifiées. Plusieurs sources de non linéarité sont prises en compte dans ce modèle.

1) Elasticité non linéaire dans le sens longitudinal

a) Loi de comportement

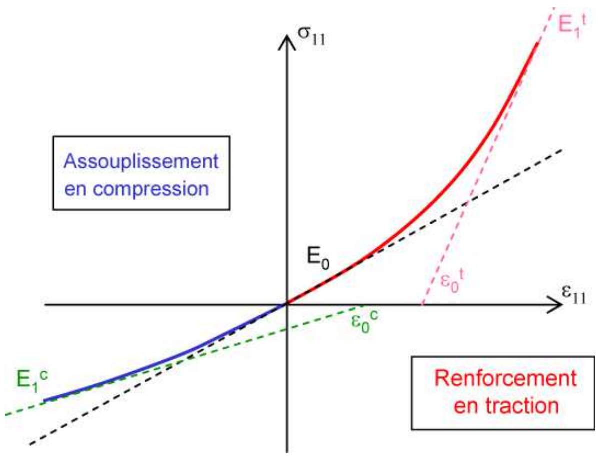
Dans le sens fibre, un comportement non linéaire réversible est observé pour les matériaux composites à fibres de carbone, alors qu'un assouplissement est constaté en compression [Yokozeki, 2006]. De plus, Allix *et al.* [Allix, 1994] ont montré que cet assouplissement correspondait à de l'élasticité non linéaire, puisque la décharge suit le même chemin que la charge. D'autre part, un renforcement est observé en traction pour les composites à fibres de carbone associées à des matrices de troisième génération comportant des nodules thermoplastiques, tel le T700GC/M21 [Huchette, 2005] [Wisnom, 2008]. Afin de décrire cette non linéarité dans la direction longitudinale, une loi élastique non linéaire a été proposée [Laurin, 2009] (Équation (2.**2**) et Figure 2.4).

$$\tilde{E}_{11} = \eta_{11} E_{11}^t + (1-\eta_1) E_{11}^c \; avec \; \eta_1 = \begin{cases} 1 \; si \; \sigma_{11} \geq 0 \\ 0 \; si \; \sigma_{11} < 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

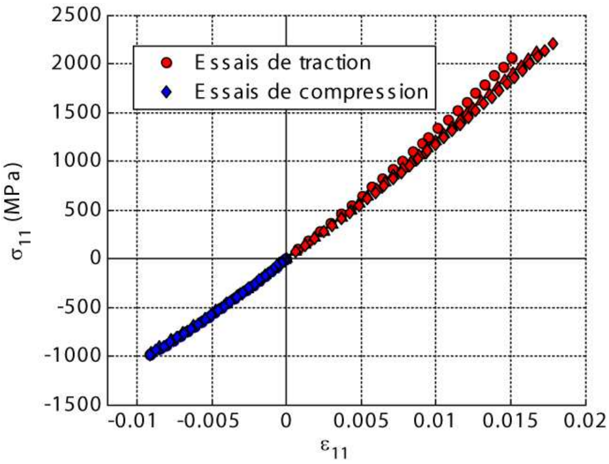
Le module d'Young longitudinal en traction, E_{11}^t, et le module d'Young longitudinal en compression, E_{11}^c, évoluent entre le module d'Young initial E_l, défini pour σ_{11}=0, et le module d'Young asymptotique E_1^t en traction ou E_1^c en compression (2.3).

$$\begin{aligned} E_{11}^t &= \boldsymbol{E_1^t} \frac{\sigma_{11} + E^t \boldsymbol{\varepsilon_0^t}}{\sigma_{11} + (E^t + \boldsymbol{E_1^t})\boldsymbol{\varepsilon_0^t}} \; avec \; E^t = \frac{\boldsymbol{E_1^t E_l}}{\boldsymbol{E_1^t} - \boldsymbol{E_l}} \\ E_{11}^c &= \boldsymbol{E_1^c} \frac{\sigma_{11} + E^c \boldsymbol{\varepsilon_0^c}}{\sigma_{11} + (E^c + \boldsymbol{E_1^c})\boldsymbol{\varepsilon_0^c}} \; avec \; E^c = \frac{\boldsymbol{E_1^c E_l}}{\boldsymbol{E_1^c} - \boldsymbol{E_l}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Les déformations associées, $\boldsymbol{\varepsilon_0^t}$ ou $\boldsymbol{\varepsilon_0^c}$ sont celles respectivement obtenues pour $\sigma_{11} = 0$ avec le comportement longitudinal asymptotique en traction ou en compression.



(a)



(b)

Figure 2.4. *Comportement longitudinal élastique non linéaire des composites à fibres de carbone (a) et essais de traction et de compression permettant d'identifier les paramètres de la loi de comportement longitudinal élastique non linéaire (b)*

b) Identification

Un essai de traction et un essai de compression sur des plis unidirectionnels orientés à 0° permet d'identifier les trois modules d'Young longitudinaux : initial, E_l, en traction, E_l^t, et en compression, E_l^c (Figure 2.4). L'essai de traction permet également d'identifier le coefficient de Poisson dans le plan du stratifié, ν_{12}. L'hypothèse d'isotropie transverse (renfort unidirectionnel à 0°) implique que les coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{13} ont la même valeur. C'est pourquoi ils sont par la suite notés ν_{lt}. Pour le comportement élastique non linéaire dans le sens fibre, le module d'Young initial est calculé par régression linéaire sur les points des courbes contraintes/déformations en traction et en compression, inférieurs à 10 % de contrainte, quand le comportement longitudinal peut encore être considéré comme linéaire. La moyenne des modules d'Young calculés par régression linéaire pour chaque essai est ensuite identifiée comme le module d'Young initial de la loi de comportement élastique non linéaire longitudinale. Les modules d'Young asymptotiques et leurs déformations associées sont identifiés sur la dernière partie des courbes contraintes/déformations en traction et en compression.

Les valeurs des paramètres de l'élasticité non linéaire pour le T700GC/M21 sont reportées dans le tableau 2.1. Dans les tableaux présentant les valeurs identifiées pour chaque paramètre, seules les valeurs moyennes sont indiquées. En effet, dans le cadre du travail réalisé pour cette thèse, seul les capacités de prévision des dommages étaient recherchées. Dans un bureau d'études, il faudrait tenir compte de l'incertitude sur les mesures, notamment l'incertitude sur les résistances, par l'utilisation des valeurs A ou B [Léon-Dufour, 2008], selon la fiabilité recherchée. D'autre part, pour le sens longitudinal, la variabilité observée sur les mesures est faible.

E_l (MPa)	E_1^t (MPa)	E_1^c (MPa)	ε_0^t	ε_0^c	ν_{lt}
115000	308000	41000	0.040	0.24	0.32

Tableau 2.1. *Valeurs des paramètres de l'élasticité non linéaire longitudinale et du coefficient de Poisson plan, identifiées pour le T700GC/M21*

2) Viscoélasticité de la matrice

a) Loi de comportement

Le caractère viscoélastique de la matrice organique est également pris en compte pour modéliser la réponse non linéaire d'un pli unidirectionnel sous sollicitation de cisaillement et surtout pour considérer la dépendance du comportement vis-à-vis du temps. La viscoélasticité de la matrice est introduite sous la forme d'une déformation viscoélastique, ε_{ve}, qui s'ajoute à la déformation élastique, $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ (2.4).

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve}, avec\ \dot{\varepsilon}_{ve} = g(\sigma)\sum_{i=1}^{\boldsymbol{N}} \dot{\xi}_i \tag{2.4}$$

Cette déformation visqueuse est décomposée en un ensemble de mécanismes élémentaires, ξ_i [Maire, 1992]. La fonction non linéarisante $g(\sigma)$ permet de tenir compte du caractère non linéaire de la viscosité des CMO [Schieffer, 2003]. Elle dépend du tenseur des souplesses visqueuses, S^R, et de la contrainte appliquée, σ (2.5). γ et n sont des paramètres à identifier.

$$g(\sigma) = 1 + \boldsymbol{\gamma}\left(\sqrt{\sigma^t : S^R : \sigma}\right)^{\boldsymbol{n}}$$

$$avec\ S^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & \boldsymbol{\beta_{22}} S^0_{22} & \boldsymbol{\beta_{23}} S^0_{23} & & 0 & \\ 0 & \boldsymbol{\beta_{23}} S^0_{23} & \boldsymbol{\beta_{33}} S^0_{33} & & & \\ & & & \boldsymbol{\beta_{44}} S^0_{44} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \boldsymbol{\beta_{55}} S^0_{55} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \boldsymbol{\beta_{66}} S^0_{66} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Les S^0_{ij} sont des éléments du tenseur des souplesses élastiques initiales, S^0. Les β_{ij} sont des facteurs d'effet de la viscosité sur ce tenseur. La viscoélasticité étant liée à la matrice, elle n'agit pas sur le sens longitudinal. C'est pourquoi les β_{1j} sont nuls. ξ_i est le i^{ème} mécanisme visqueux élémentaire de l'ensemble des N mécanismes visqueux élémentaires caractérisant la viscoélasticité de la matrice. À chacun de ces mécanismes est associé un temps de relaxation, τ_i, et un facteur de pondération, μ_i (2.6).

$$\dot{\xi}_i = \frac{1}{\tau_i}(\mu_i g(\sigma) S^R : \sigma + \xi_i) \tag{2.6}$$

Afin de réduire le nombre de degrés de liberté liés à la caractérisation des mécanismes visqueux, un spectre de relaxation gaussien lie les poids des mécanismes élémentaires, μ_i, à leur temps de relaxation respectif, τ_i (2.7). C'est ce spectre gaussien qui est identifié.

$$\tau_i = \exp(i)\ et\ \bar{\mu}_i = \frac{1}{\boldsymbol{n_0}\sqrt{\pi}} exp\left(-\left(\frac{i - \boldsymbol{n_0}}{\boldsymbol{n_c}}\right)^2\right)\ avec\ \mu_i = \frac{\bar{\mu}_i}{\sum_i \bar{\mu}_i} \tag{2.7}$$

Le spectre gaussien est défini par la moyenne n_0 et par l'écart-type n_c (Figure 2.5). Il est borné par les paramètres n_1 et n_2, qui sont choisis de manière à ne pas prendre en compte les mécanismes visqueux élémentaires dont le poids est négligeable. La discrétisation du spectre en N mécanismes visqueux élémentaires est ainsi centrée sur la partie du spectre où les mécanismes ont un poids non négligeable.

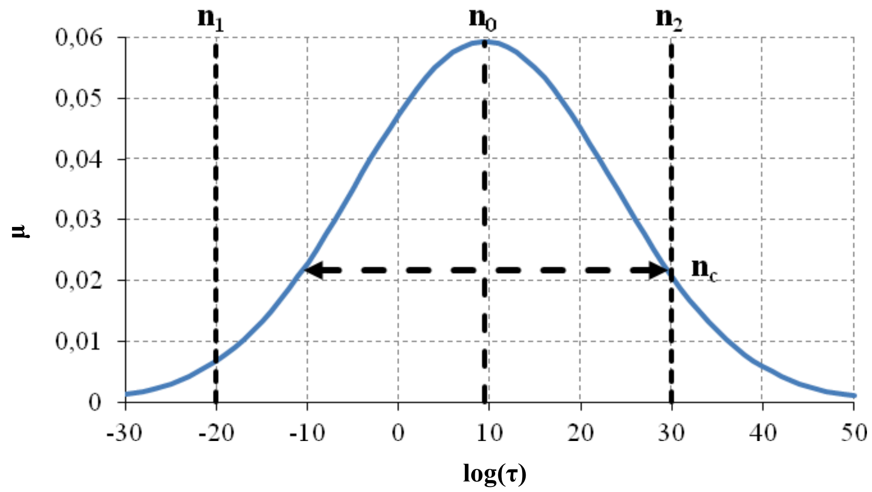


Figure 2.5. *Spectre visqueux liant les poids et les temps de relaxation des mécanismes visqueux élémentaires*

b) Identification

Les procédures d'identification sont détaillées, pour la partie visqueuse, dans les travaux de [Rémy-Petipas, 2000] et [Lévêque, 2000]. Les paramètres à identifier pour la modélisation de la viscosité du pli, liée à sa matrice, sont ceux du spectre gaussien liant les poids et les temps de relaxation des mécanismes visqueux élémentaires (n_c et n_0), ceux de la fonction non linéarisante (γ et n), les coefficients des composantes non nulles du tenseur des souplesses visqueuses (β_{22}, β_{23}, β_{33}, β_{44}, β_{55}, β_{66}) et le nombre de mécanismes visqueux élémentaires. Les paramètres n_1 et n_2 sont choisis en fonction des valeurs de n_0 et n_c identifiées, de sorte à ne considérer que les mécanismes dont les temps caractéristiques sont de l'ordre de la durée de la sollicitation (pour l'impact à basse vitesse et à faible énergie, la sollicitation est de l'ordre de la milliseconde, soit $log(\tau) < -3$).

Le nombre de mécanismes visqueux élémentaires est fixé à 50, ce qui est un bon compromis, en résolution statique, entre le coût du calcul et la précision des résultats, d'après Laurin [Laurin, 2005].

Un essai de fluage multiple sur stratifié ±45° (Figure 2.6) permet d'obtenir les paramètres n_0 et n_c, à partir de la déformation de fluage normalisée, et les paramètres de la fonction non linéarisante γ et n ainsi que le coefficient β_{66} pour le terme de cisaillement dans le tenseur des souplesses visqueuses, à partir de la déformation totale. Par hypothèse d'isotropie transverse, le coefficient β_{55} est égal au coefficient β_{66}.

Un essai de fluage multiple sur stratifié à 90° permet d'obtenir le coefficient β_{22} pour le terme transverse du tenseur des souplesses visqueuses. Cet essai permet également de valider la fonction non linéarisante obtenue avec l'essai précédent et de la corriger, le cas échéant.

Actuellement, il n'existe pas de moyen pour identifier efficacement les coefficients hors-plan du tenseur des souplesses visqueuses. C'est pourquoi les coefficients β_{23}, β_{33} et β_{44} sont fixés à 0, bien que l'on pressente qu'il y ait un effet visqueux dans ces directions. Le coefficient de Poisson hors-plan, ν_{tt}, est également difficile à identifier. À l'Onera, la mesure de ce coefficient a été réalisée sur un essai de traction sur plis à 90°. En plus de l'instrumentation classique, un suivi du rétreint de la tranche du stratifié a été effectué par corrélation d'images. Cette mesure a ainsi permis de remonter au coefficient de Poisson hors-plan.

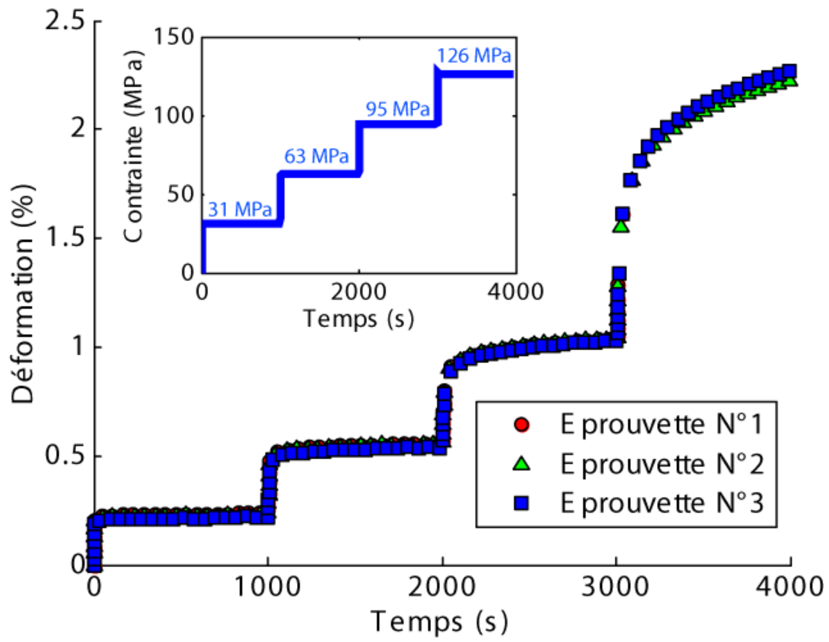


Figure 2.6. *Essai de fluage multiple sur stratifié à ±45° en T700GC/M21. Chargement et déformation mesurée, mettant en évidence le caractère viscoélastique de la matrice époxy.*

Les valeurs de ces paramètres identifiées pour le T700GC/M21 sont reportées dans le tableau 2.2.

Spectre visqueux					Fonction non linéarisante		Tenseur des souplesses visqueuses					
n_1	n_2	N	n_c	n_0	γ	N	β_{22}	β_{23}	β_{33}	β_{44}	β_{55}	β_{66}
-20	30	50	20	9.5	9	2	0.1	0.0	0.0	0.0	1.1	1.1

Tableau 2.2. *Valeurs des paramètres visqueux, identifiées pour le T700GC/M21*

Le comportement transverse du composite stratifié à matrice organique est viscoélastique, principalement à cause de la viscoélasticité de la matrice organique elle-même. C'est pourquoi l'identification des paramètres de l'élasticité transverse est réalisée en même temps que l'identification des paramètres visqueux. Le pli unidirectionnel étant considéré comme isotrope transverse, les modules d'élasticité transverses E_{22} et E_{33} sont égaux. Ils sont notés par la suite E_t. De même, les modules de cisaillement plan, G_{12} et G_{13}, sont identiques. Ils sont notés par la suite G_{lt} et le module de cisaillement hors-plan est noté $G_{tt'}$. Il est déduit par la condition d'isotropie suivante (2.8).

$$G_{tt'} = \frac{E_t}{2(1+\nu_{tt'})} \tag{2.8}$$

Du point de vue de la caractérisation, un essai de traction à rupture sur des plis orientés à 90° permet d'identifier le module d'Young transverse E_t.

Enfin, un essai de torsion sur tube unidirectionnel (0° ou 90°) ou un essai de traction sur un stratifié de plis unidirectionnels à ± 45° permet d'identifier le module de cisaillement plan G_{lt} (Figure 2.7). Pour l'identification de ce dernier, il faut aussi tenir compte des effets de la viscosité de la matrice. En effet, selon la vitesse de chargement, la valeur identifiée pourra être très différente de la valeur élastique recherchée.

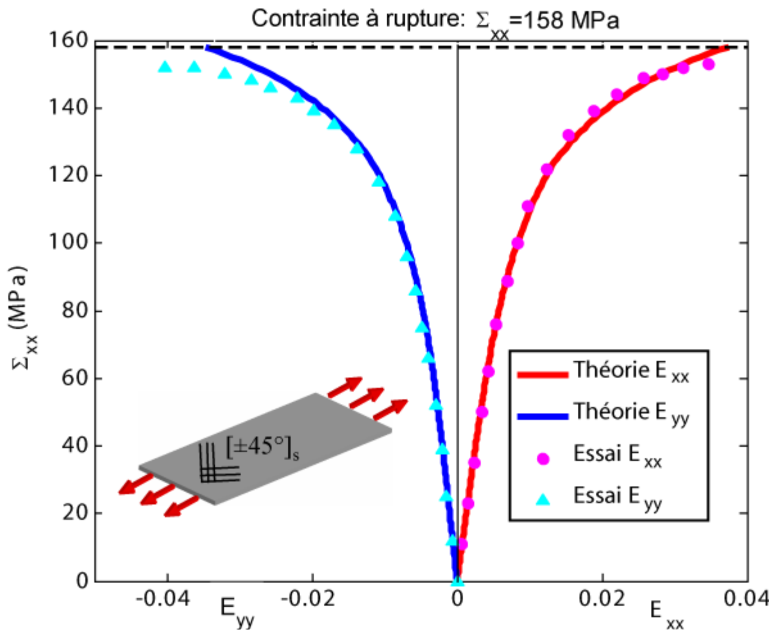


Figure 2.7. *Identification des coefficients d'élasticité transverse sur un essai de traction sur stratifié de plis unidirectionnels à ±45° en T700GC/M21*

Les valeurs identifiées pour les paramètres élastiques du comportement de T700GC/M21, tenant compte de l'isotropie transverse, sont reportées dans le Tableau 2.3.

E_t (MPa)	ν_{tt}	G_{lt} (MPa)	G_{tt} (MPa)
8500	0.51	9000	3696

Tableau 2.3. *Valeurs des paramètres du comportement élastique transverse, identifiées pour le T700GC/M21*

3) Contraintes résiduelles de cuisson

a) Loi de comportement

Les contraintes résiduelles de cuisson, liées au mode de fabrication du stratifié, ont un effet important sur la prévision du premier endommagement du pli unidirectionnel. C'est pourquoi elles sont prises en compte par l'introduction d'une déformation thermique (2.9).

$$\varepsilon^{th} = \alpha(T - T_0)\ avec\ \alpha = [\boldsymbol{\alpha_1} \quad \boldsymbol{\alpha_2} \quad \boldsymbol{\alpha_3}] \tag{2.9}$$

α est le tenseur des dilatations thermiques du pli, constitué de la dilatation longitudinale, α_1, et de la dilatations transverse, α_2, et hors-plan, α_3. T_0 est la température libre de contraintes du pli.

b) Identification

Un essai de dilatométrie sur pli unidirectionnel permet d'identifier les coefficients de dilatation longitudinale, α_l, et transverse, α_t ($\alpha_2 = \alpha_3$), qui constituent le tenseur des dilatations thermiques. La température de libre contrainte est prise égale à la moitié de la température de cuisson pour tenir compte des effets de l'humidité de l'air ambiant [Puck, 1998] [Tsai, 1998].

Les valeurs de ces paramètres identifiées pour le T700GC/M21 sont reportées dans le tableau 2.4.

α_l	α_t	T_0
-0,9.10^{-6}	31,8.10^{-6}	90°C

Tableau 2.4. *Valeurs des coefficients de dilatation et de la température libre de contrainte, identifiées pour le T700GC/M21*

4) Critères de rupture et dégradation des propriétés mécaniques du pli unidirectionnel

a) Loi de comportement

La modélisation de l'endommagement du stratifié est faite dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles et de la mécanique continue de l'endommagement [Lemaitre, 1985] [Maire, 1997]. Les critères de rupture sont basés sur les hypothèses d'Hashin [Hashin, 1973], qui distinguent, dans le plan du composite, la rupture des fibres de la rupture de la matrice, en traction et en compression. Ces critères de rupture en contraintes, dans le plan du pli unidirectionnel, ont été enrichis afin de prendre en compte les couplages entre les modes de sollicitations et les mécanismes de rupture [Laurin, 2005] et de décrire des sollicitations tridimensionnelles plus complexes [Charrier, 2011]. Les critères de rupture de fibres en traction et en compression sont donnés dans le tableau 2.5.

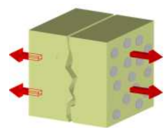
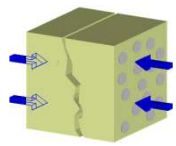
Rupture en traction **(σ_{11}≥0)**	$f_1^+ = \left(\dfrac{\sigma_{11}}{\tilde{X}_t(d_2,d_3)}\right)^2 = 1$ avec $\tilde{X}_t = \boldsymbol{X_t^{UD}} e^{-(\boldsymbol{h_{2r}} d_2 + \boldsymbol{h_{3r}} d_3)} + \boldsymbol{X_t^{dry}}\left(1 - e^{-(\boldsymbol{h_{2r}} d_2 + \boldsymbol{h_{3r}} d_3)}\right)$	
Rupture en compression **(σ_{11}<0)**	$f_1^- = \left(\dfrac{\sigma_{11}}{\boldsymbol{X_c}}\right)^2 + \left(\dfrac{\tau_{12}}{S_{12}^f(1-p_{12}\sigma_{22})}\right)^2 + \left(\dfrac{\tau_{13}}{S_{13}^f(1-p_{13}\sigma_{33})}\right)^2 = 1$ avec $S_{12}^f = \dfrac{\boldsymbol{S_{12}^R}}{\sqrt{1-\boldsymbol{f_{6\to1}^2}}}$ et $S_{13}^f = \dfrac{\boldsymbol{S_{13}^R}}{\sqrt{1-\boldsymbol{f_{5\to1}^2}}}$	
	X_t^{UD} et X_t^{dry} : résistances en traction longitudinale du pli et des fibres sèches X_c : résistance en compression longitudinale S_{12}^R et S_{13}^R : résistances en cisaillement plan $f_{6\to1}$ et $f_{5\to1}$: paramètres de forme h_{2r} et h_{3r} : paramètres de pondération de l'influence des endommagements matriciels plan et hors-plan	

Tableau 2.5. *Critères tridimensionnels de rupture de fibres dans le pli unidirectionnel [Charrier, 2011]*

La rupture des fibres dans les plis à 0° d'un stratifié chargé en traction est souvent considérée comme le critère de ruine finale du stratifié. Leroy [Leroy, 1997] a mis en évidence que la résistance en traction d'un toron de fibres T800 était deux fois inférieure à celle obtenue pour un pli unidirectionnel en T800/5250. D'autre part, Lévêque [Lévêque, 2002] a montré que la résistance d'un pli unidirectionnel en T800H/F655-2 était diminuée suite à un vieillissement thermique, bien que ce vieillissement n'affecte que la matrice. Ces études prouvent que l'état de la matrice influe sur la résistance en traction longitudinale du pli. C'est pourquoi la résistance en traction longitudinale dépend de l'état d'endommagement de la matrice, pour la rupture en traction. Les paramètres h_{2r} et h_{3r} permettent de pondérer l'influence de l'endommagement matriciel transverse d_2 et de l'endommagement matriciel hors-plan d_3 (équivalent au délaminage). La valeur de la résistance des fibres sèches est supposée égale à la moitié de la résistance longitudinale du pli unidirectionnel, d'après l'étude de Leroy [Leroy, 1997].

Les effets des cisaillements plan et hors-plan sur la compression longitudinale sont également pris en compte. Les résistances en cisaillement plan S_{12}^f et S_{13}^f sont supérieures aux résistances identifiées, afin de ne pas prévoir une rupture en mode fibre pour un cas de chargement en cisaillement pur. Les paramètres p_{12} et p_{13} permettent de tenir compte du renforcement du matériau en compression.

Les critères de la rupture matricielle transverse sont reportés dans le tableau 2.6.

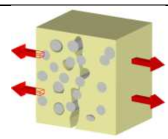
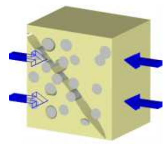
Rupture en traction **($\sigma_{22} \geq 0$)**	$f_2^+ = \left(\frac{\sigma_{22}}{\boldsymbol{Y_t}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\boldsymbol{S_{12}^R}(1 - p_{12}\sigma_{22})}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{\boldsymbol{S_{23}^R}(1 - p_{23}\sigma_{33})}\right)^2 = \left(1 - d_{12f}\right)^2$	
Rupture en compression **($\sigma_{22} < 0$)**	$f_2^- = \left(\frac{\sigma_{22}}{\boldsymbol{Y_c}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\boldsymbol{S_{12}^R}(1 - p_{12}\sigma_{22})}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{\boldsymbol{S_{23}^R}(1 - p_{23}\sigma_{33})}\right)^2 = \left(1 - d_{12f}\right)^2$	
	Y_t : résistance en traction transverse Y_c : résistance en compression transverse S_{12}^R, S_{13}^R et S_{23}^R : résistances en cisaillement plan et hors-plan	

Tableau 2.6. *Critères tridimensionnels de rupture transverse de la matrice dans le pli unidirectionnel [Charrier, 2011]*

L'effet de la rupture prématurée de fibres est pris en compte dans le seuil du critère transverse, par l'introduction de la variable d_{12f}. Le couplage entre la compression transverse et les cisaillements plan et hors-plan sont également pris en compte. Les variables p_{12} et p_{23} permettent de tenir compte du renforcement du matériau en fort cisaillement et faible compression transverse, ainsi que de l'affaiblissement en fort cisaillement et faible traction transverse.

Les critères de rupture matricielle hors-plan sont reportés dans le tableau 2.7.

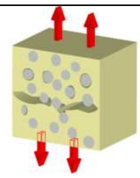
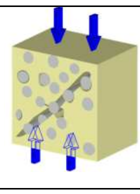
Rupture en traction **($\sigma_{33} \geq 0$)**	$f_3^+ = \left(\frac{\sigma_{33}}{\tilde{Z}_t}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{\tilde{S}_{13}^R(1 - p_{13}\sigma_{33})}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{\tilde{S}_{23}^R(1 - p_{23}\sigma_{33})}\right)^2 = \left(1 - d_{13f}\right)^2$	
Rupture en compression **($\sigma_{33} < 0$)**	$f_3^- = \left(\frac{\sigma_{33}}{\tilde{Z}_c}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{\tilde{S}_{13}^R(1 - p_{13}\sigma_{33})}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{\tilde{S}_{23}^R(1 - p_{23}\sigma_{33})}\right)^2 = \left(1 - d_{13f}\right)^2$ avec $\tilde{Z}_t = \frac{Z_t}{1+\boldsymbol{h_{33}^t}d_2}, \tilde{Z}_c = \frac{Z_c}{1+\boldsymbol{h_{33}^c}d_2}, \tilde{S}_{13} = \frac{S_{13}^R}{1+\boldsymbol{h_{13}}d_2}$ *et* $\tilde{S}_{23} = \frac{S_{23}^R}{1+\boldsymbol{h_{23}}d_2}$	
	Z_t : résistance en traction hors-plan Z_c : résistance en compression hors-plan	

Tableau 2.7. *Critères tridimensionnels de rupture hors-plan de la matrice dans le pli unidirectionnel [Charrier, 2011]*

Huchette [Huchette, 2005] a montré l'influence des fissures transverses sur les résistances effectives hors-plan. Un couplage entre les endommagements matriciels intralaminaire (d_2) et interlaminaire (d_3) est donc nécessaire. Il est réalisé en utilisant, dans les critères hors-plan, les résistances effectives. Les paramètres h_{33}^{t}, h_{33}^{c}, h_{13} et h_{23} quantifient l'influence des dommages intralaminaires sur les résistances hors-plan.

Chaque mécanisme de rupture, à l'échelle du pli, engendre un mode de dégradation des propriétés élastiques du stratifié. Cette dégradation est prise en compte via un tenseur des souplesses effectives, $\tilde{S}$ (2.10).

$$\tilde{S} = S^0 + d_1\boldsymbol{H_1} + d_2\boldsymbol{H_2} + d_3\boldsymbol{H_3} \quad (2.10)$$

H_1, H_2 et H_3 sont les tenseurs d'effets associés à ces endommagements respectifs. Ils permettent de prendre en compte des effets de la rupture sur le comportement mésoscopique. Les effets diffèrent en fonction du mode de rupture, d'autant plus si ce mode entraîne la ruine complète du pli. Les tenseurs d'effets des dommages diffèrent également selon le mode de chargement du pli, c'est-à-dire en traction, où les fissures sont ouvertes, et en compression, où les fissures sont fermées (Figure 2.8).

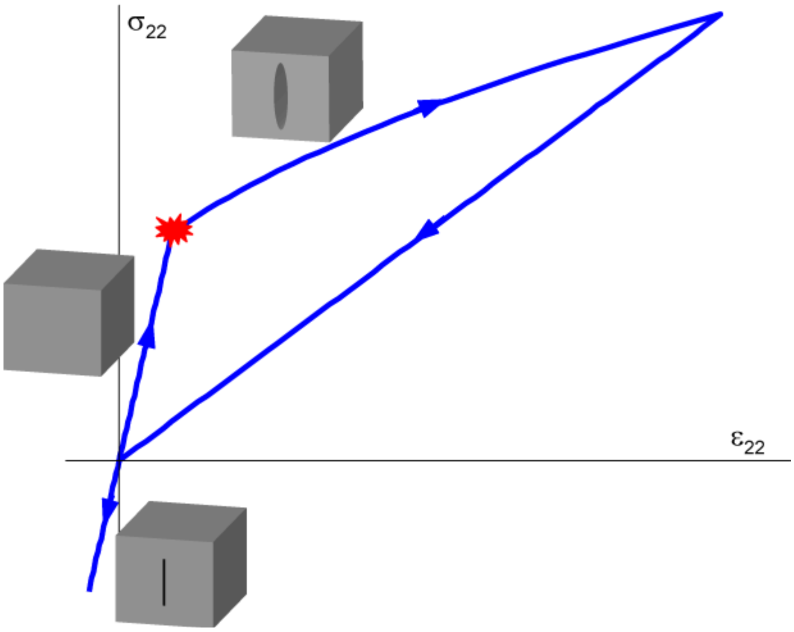


Figure 2.8. *Schéma du comportement en traction transverse lors du chargement puis lors de la décharge, où les fissures sont progressivement refermées*

d_1, d_2 et d_3 sont les variables scalaires d'effets des endommagements respectifs des fibres, de la matrice en mode transverse et de la matrice en mode hors-plan (Équations (2.**11** – (2.**13**). Ces variables conduisent la cinétique de dégradation du pli, qui décrit l'évolution de la rigidité effective du pli, au sein du stratifié et au cours du chargement.

$$d_1 = \boldsymbol{\alpha}\langle\sqrt{f_1} - 1\rangle^+ \ avec \ f_1 = \eta_1 f_1^+ + (1-\eta_1)f_1^-, \eta_1 = \begin{cases} 1 \ si \ \sigma_{11} \geq 0 \\ 0 \ si \ \sigma_{11} < 0 \end{cases} et \ \dot{d}_1 \geq 0 \quad (2.11)$$

$$d_2 = \boldsymbol{\beta}\langle\sqrt{f_2} - 1\rangle^+ \ avec \ f_2 = \eta_2 f_2^+ + (1-\eta_2)f_2^-, \eta_2 = \begin{cases} 1 \ si \ \sigma_{22} \geq 0 \\ 0 \ si \ \sigma_{22} < 0 \end{cases} et \ \dot{d}_2 \geq 0 \quad (2.12)$$

$$d_3 = \boldsymbol{\delta}\langle\sqrt{f_3} - 1\rangle^+ \ avec \ f_3 = \eta_3 f_3^+ + (1-\eta_3)f_3^-, \eta_3 = \begin{cases} 1 \ si \ \sigma_{33} \geq 0 \\ 0 \ si \ \sigma_{33} < 0 \end{cases} et \ \dot{d}_3 \geq 0 \quad (2.13)$$

Les coefficients η_i sont les indices d'activation permettant de distinguer la rupture en traction de celle en compression.

b) Identification

Les procédures d'identification sont détaillées, pour la partie endommageable, dans les travaux de Laurin [Laurin, 2007] et Charrier [Charrier, 2011].

Les essais de traction et de compression à rupture sur des plis orientés à 0°, utilisés pour identifier les module d'Young longitudinaux, permettent d'identifier les résistances à rupture longitudinales en traction, X_t, et en compression, X_c.

L'essai de traction à rupture utilisé pour identifier le module d'Young transverse et un essai de compression à rupture sur des plis orientés à 90° permettent d'identifier les résistances à rupture transverses en traction, Y_t, et en compression, Y_c.

L'essai de torsion sur tube unidirectionnel (0° ou 90°) ou l'essai de traction sur stratifié de plis unidirectionnels à ± 45° sont utilisés pour l'identification de la résistance en cisaillement plan S_{12}^R.

Enfin, un essai de flexion quatre points sur cornière, associé à une simulation par la méthode des éléments finis de cet essai, permet d'estimer la résistance de traction hors-plan Z_t [Charrier, 2011]. Les résistances en cisaillement hors-plan S_{13}^R et S_{23}^R sont déterminées, respectivement, à l'aide d'un essai de pliage de cornière unidirectionnelle $[(0°)_8]_s$ et d'un essai de dépliage sur cornière stratifiée d'empilement $[0_3/45/90_2/\text{-}45/0]_s$.

La caractérisation des cinétiques de dégradation est réalisée sur stratifié quasi-isotrope ou orienté, avec plus de plis à 90° et à ± 45°, afin d'observer les effets de l'endommagement matriciel sur le comportement du matériau. En effet, la rupture étant brutale sur un pli unidirectionnel, l'effet de l'endommagement matriciel ne peut être caractérisé. La vitesse de dégradation en mode transverse, β, et les coefficients h_2^r et h_3^r sont ainsi identifiés sur un essai de traction sur stratifié quasi-isotrope, pour le T700GC/M21.

L'endommagement fibre étant considéré comme catastrophique, la vitesse de dégradation en mode longitudinal est maximale. La vitesse de dégradation en mode hors-plan, quant à elle, est calée pour obtenir l'énergie de restitution critique en mode I mesurée lors d'un essai d'ouverture (essai Double Cantilever Beam décrit page 50).

Les tenseurs des effets du dommage sont déterminés par une approche micromécanique basée sur la mécanique de la rupture.

Les valeurs des paramètres des critères de rupture identifiées pour le T700GC/M21 sont reportées dans les tableaux tableau 2.8 à Tableau 2.11.

Sens longitudinal			Sens transverse				Hors-plan		
X_t^{UD}	X_t^{dry}	X_c	Y_t	Y_c	S_{12}^R	S_{13}^R	Z_t	Z_c	S_{23}^R
2000	1000	-1300	76	-260	81	100	51	-220	46

Tableau 2.8. *Résistances du pli unidirectionnel (MPa)*

Paramètres de forme		Influence des dommages intralaminaires				Influence de l'endommagement matriciel sur la rupture fibre	
$f_{6\to1}$	$f_{5\to1}$	h_{33}^t	h_{33}^c	h_{13}	h_{23}	h_{2r}	h_{3r}
0,8	0,8	0	0	0	0	0,01	0,01

Tableau 2.9. *Paramètres de forme et influence des dommages intralaminaires sur les résistances hors-plan*

α	β	δ
100	10	50

Tableau 2.10. *Cinétiques de dégradation*

Tenseur d'effet du dommage fibre H_1				Tenseur d'effet du dommage matriciel H_2				Tenseur d'effet du dommage hors-plan H_3			
h_{11}^t	h_{11}^c	h_{55}	h_{66}	h_{22}^t	h_{22}^c	h_{44}	h_{66}	h_{33}^t	h_{33}^c	h_{44}	h_{55}
2	0	0,085	0,13	1	0	0,28	0,42	1	0	0,28	0,42

Tableau 2.11. *Tenseurs d'effets des dommages*

Au final, seuls sept essais sont nécessaires à la caractérisation de l'ensemble des paramètres du modèle. Parmi ces sept essais, cinq sont couramment utilisés dans l'industrie aéronautique. Deux essais de fluage plus originaux sont utilisés pour caractériser la viscoélasticité de la matrice. Une fois identifié, le modèle est capable de prévoir les enveloppes de rupture (Figure 2.9).

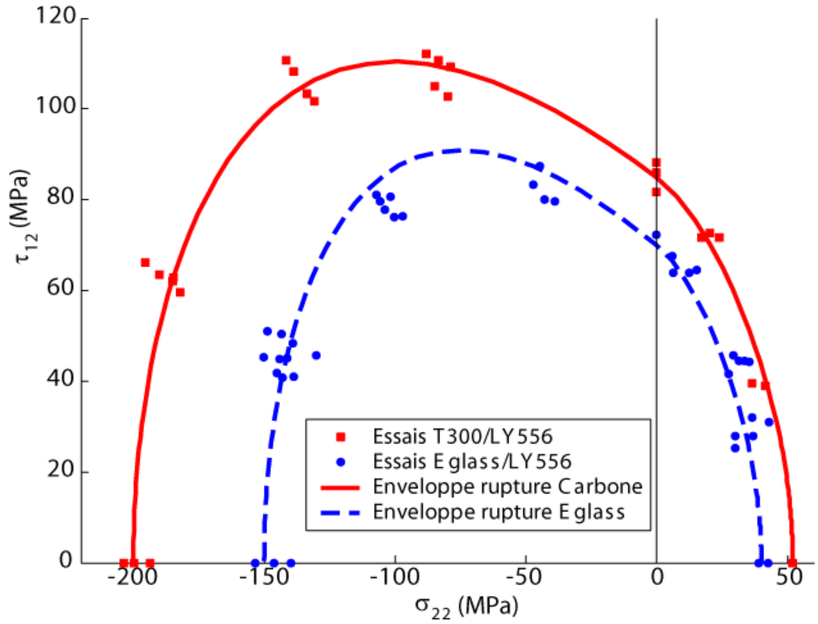


Figure 2.9. *Enveloppe de rupture en cisaillement transverse pour des fibres de carbone T300 et des fibres de verre [Laurin, 2005]. Le modèle prévoit bien un renforcement en compression.*

Afin de faciliter l'interprétation des résultats, les variables d'effet des endommagements du modèle OPFM tridimensionnel, d_1, d_2 et d_3, qui vont de 0 à l'infini et caractérisent l'assouplissement du pli, sont transformées par le changement de variable des équations (2.14), (2.15) et (2.16) pour tendre vers 1 lorsque l'élément du pli est cassé.

$$d_{1\_bis} = \frac{d_1}{(d_1 + 1)} \tag{2.14}$$

$$d_{2\_bis} = \frac{d_2}{(d_2 + 1)} \tag{2.15}$$

$$d_{3\_bis} = \frac{d_3}{(d_3 + 1)} \tag{2.16}$$

Dans la suite du mémoire, le seuil d'endommagement indiquant une rupture longitudinale, transverse ou hors plan est fixé arbitrairement à 0,9. Cela signifie qu'il y a rupture de fibre, fissuration matricielle ou délaminage lorsque, respectivement, d_{1_bis}, d_{2_bis} ou d_{3_bis} est supérieure à 0,9.

Le caractère multicouche des stratifiés induit une forme supplémentaire d'endommagement, le délaminage. Il s'agit d'une fissure parallèle au plan du stratifié et localisée le plus souvent à l'interface entre deux plis dont l'orientation des fibres diffère. Dans le modèle OPFM qui vient d'être décrit, l'effet du délaminage est pris en compte directement dans le comportement du pli unidirectionnel, de manière volumique, via la variable d'effet du délaminage, d_3. Cette variable peut être désactivée en posant δ égal à zéro. Il est ainsi possible d'associer le modèle OPFM à d'autres méthodes de modélisation du délaminage et de sa localisation dans les plans des interfaces du stratifié.

2.2.2. Modèles de zones cohésives

Les principales méthodes permettant de traiter le problème des délaminages sont les critères de rupture, formulés en contrainte ou en déformation, adaptés à la prévision de l'amorçage du délaminage, l'usage de la mécanique élastique linéaire de la rupture pour étudier la propagation de la fissure de délaminage, les bi-critères, qui permettent de prévoir l'amorçage de la fissure de délaminage en vérifiant à la fois un critère en contrainte et un critère en énergie et les modèles de zones cohésives, pour décrire à la fois l'amorçage et la propagation des délaminages. Elder *et al.* [Elder, 2004] ont comparé ces méthodes pour la prévision du délaminage dans le cas d'impacts basses vitesses.

1) Méthodes de prévision du délaminage

Les critères de rupture, tels ceux proposés par Hashin [Hashin, 1980] ou Brewer [Brewer, 1988], sont basés sur la mécanique de l'endommagement. Ils permettent de déterminer s'il y a ou non amorçage du délaminage en fonction du niveau de contrainte ou de déformation. Si celui-ci est supérieur à la résistance interfaciale, c'est-à-dire à la contrainte maximale que peut supporter l'interface, il y a bien amorçage. Les critères de rupture peuvent être utilisés en post-traitement d'un calcul ou bien au cours du calcul. Ils sont faciles à mettre en œuvre mais, en post-traitement, ils ne permettent pas de tenir compte de l'apparition du délaminage et de son influence sur l'état de contrainte ou de déformation. D'autre part, utilisés en cours de calcul, du fait de la rupture brutale qu'ils impliquent, ils peuvent entraîner des problèmes de convergence ou des oscillations importantes de la solution, en dynamique. De plus, leurs performances sont intéressantes dans des cas particuliers, notamment lorsque l'apparition du délaminage entraîne une ruine catastrophique de la structure. Ce n'est pas le cas lors d'un impact basse vitesse, où le délaminage est d'abord amorcé puis croît progressivement.

Un inconvénient majeur lié à l'utilisation des critères de rupture est la nécessité d'utiliser la notion de longueur interne difficile à identifier. Afin de contourner ce problème, Leguillon *et al.* [Leguillon, 2002] ont développé des approches bi-critères. Ce type de critère permet de prévoir l'amorçage du délaminage en vérifiant à la fois un critère en contrainte et un critère en énergie. Cependant, les bi-critères sont difficilement extensibles aux cas tridimensionnels car ils nécessitent d'émettre une hypothèse sur la forme du front de fissure. De plus, cette approche n'est valable qu'avec des comportements linéaires. Or, dans le cas de l'impact, les sollicitations sont tridimensionnelles et présentent de fortes non linéarités (comportement du pli, non linéarités géométriques, contact). De plus, cette méthode étant limitée à l'étude de l'amorçage du délaminage, elle n'est pas adaptée au problème de l'impact, où les délaminages peuvent se propager.

La mécanique élastique linéaire de la rupture permet d'estimer s'il y a propagation ou non de la fissure de délaminage. Elle est basée sur des considérations énergétiques. Le taux de restitution d'énergie par unité de surface doit être supérieur ou égal, pour qu'il y ait rupture, au taux de restitution d'énergie nécessaire à la rupture d'une unité de surface, aussi appelé ténacité de l'interface ou taux de restitution d'énergie critique [Griffith, 1921]. Une méthode couramment employée pour estimer s'il y a ou non propagation d'un front de fissure est la Virtual Crack Closure Technique (VCCT) [Krueger, 2002]. Cette méthode est simple à mettre en œuvre dans les codes de résolution par éléments finis et son efficacité a été prouvée pour les matériaux métalliques comme pour les matériaux composites [Shen, 2001] [Krueger, 2009]. La mécanique élastique linéaire de la rupture présume cependant de l'existence d'une fissure initiale. Dans le cas de l'impact, le matériau est supposé initialement sain et ne présente pas de fissure. Cette mécanique de la rupture ne semble donc pas adaptée pour décrire les délaminages d'impact.

Les modèles de zones cohésives sont basés sur la mécanique de l'endommagement et permettent à la fois de prévoir l'amorçage du délaminage puis sa propagation dans le plan de l'interface, pour des cas tridimensionnels et en présence de non linéarités géométriques ou liées au comportement du matériau. Le principe des modèles de zones cohésives consiste à décrire la relation entre les sauts de déplacement de deux nœuds initialement superposés et les efforts cohésifs associés à l'aide d'une loi adoucissante. Les modes classiques de la mécanique de la rupture sont décrits au niveau de l'interface : le mode normal ou mode I ou mode d'ouverture et deux modes tangentiels, les modes II et III ou modes de cisaillement (Figure 2.10).

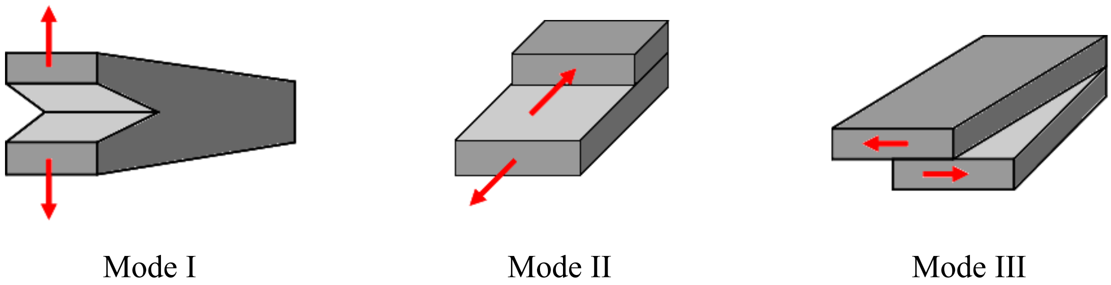


Figure 2.10. *Modes de sollicitation de l'interface*

Tout comme les bi-critères, les modèles de zones cohésives reposent sur la vérification simultanée d'un critère en contrainte et d'un critère en énergie pour prévoir l'amorçage du délaminage [Carrère, 2005]. En effet, les résistances interfaciales sont utilisées dans le critère en contrainte tandis que les ténacités de l'interface sont utilisées dans le critère énergétique. De plus, les ténacités permettent de décrire la propagation du délaminage par le biais du critère énergétique. Si le principe des modèles de zones cohésives reste le même, leur formulation et leur mise en œuvre peuvent différer d'un code de calcul par éléments finis à l'autre.

2) Mise en œuvre des modèles de zones cohésives dans le code de calcul par éléments finis *Z-set*

Dans le code de calcul par éléments finis utilisés dans cette étude, *Z-set*, les lois de comportement cohésives sont associées à des éléments surfaciques. Les nœuds de ces éléments sont dédoublés et initialement confondus. Lorsqu'un déplacement est appliqué à ces éléments, ils se déforment en accord avec la loi de comportement qui leur est associée, jusqu'à la rupture, où les efforts cohésifs deviennent nuls. Le comportement des éléments en compression hors-plan est maintenu, afin d'empêcher l'interpénétration des bords de la fissure. La variable de mesure de l'endommagement des lois de comportement est calculée aux points de Gauss des éléments cohésifs.

Les modèles de zones cohésives nécessitent une loi de comportement permettant de décrire les relations entre les sauts de déplacements et les efforts cohésifs. Plusieurs modèles de zones cohésives ont été développés dans la littérature [Dugdale, 1960] [Needleman, 1987]

[Allix, 1992] [Xu, 1993] [Ladevèze, 1998] [Crisfield, 2001] [Gornet, 2007]. Deux modèles, implémentés dans le code de calcul par éléments finis Z-set, ont été retenus.

3) Lois de comportement cohésives continues et bi-linéaires implémentées dans *Z-set*

Deux modèles intrinsèques, c'est-à-dire avec raideur initiale de l'interface, disponibles dans le code de calcul par éléments finis *Z-set*, ont été initialement retenus : celui de Needleman [Needleman, 1987] et celui proposé par Alfano et Crisfield [Alfano, 2001].

a) Loi de comportement cohésive continue de Needleman [Needleman, 1987]

Needleman [Needleman, 1987] propose un modèle d'endommagement continu de l'interface. L'endommagement de l'interface est décrit par la variable scalaire λ, qui représente l'ouverture de fissure relative (2.17).

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\langle u_N \rangle}{\boldsymbol{\delta_N}}\right)^2 + \left(\frac{\|\vec{u}_{T_1}\|}{\boldsymbol{\delta_{T_1}}}\right)^2 + \left(\frac{\|\vec{u}_{T_2}\|}{\boldsymbol{\delta_{T_2}}}\right)^2}\ , avec\ \langle x \rangle = \begin{cases} x\ si\ x > 0 \\ 0\ si\ x\ \leq 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Le déplacement normal et les déplacements en cisaillement sont notés, respectivement, u_N, pour le mode I, u_{T1}, pour le mode II, et u_{T2}, pour le mode III. Les déplacements relatifs pour lesquels l'interface est rompue sont notés, respectivement, δ_N, δ_{T1} et δ_{T2}. La variable d'endommagement, λ_{max}, correspond à la valeur maximale de l'endommagement atteinte jusqu'à l'instant courant. Cette variable d'endommagement permet de s'assurer que l'inéquation suivante est toujours vérifiée :

$$\dot{\lambda} \geq 0 \tag{2.18}$$

Cette inéquation exprime l'irréversibilité du dommage. La variable d'endommagement λ_{max} varie de la valeur 0, qui représente l'état non endommagé, à la valeur 1, qui correspond à la rupture de l'interface au point de Gauss considéré. La contrainte de traction cohésive est décomposée en une composante normale à l'interface, T_N, associée au mode I, et deux composantes de cisaillement, T_{T1} et T_{T2}, associées, respectivement, aux modes II et III. Ses composantes sont des fonctions de l'état d'endommagement de l'interface et du saut de déplacement associé (Équations (2.**19** – (2.**21**).

$$\vec{T}_N = \frac{\vec{u}_N}{\boldsymbol{\delta_N}} F(\lambda_{max}) \tag{2.19}$$

$$\vec{T}_{T_1} = \boldsymbol{\alpha_1} \frac{\vec{u}_{T_1}}{\boldsymbol{\delta_{T_1}}} F(\lambda_{max}) \qquad avec\ F(\lambda) = \frac{27}{4} \boldsymbol{\sigma_{max}} (1-\lambda)^2 \tag{2.20}$$

$$\vec{T}_{T_2} = \boldsymbol{\alpha_2} \frac{\vec{u}_{T_2}}{\boldsymbol{\delta_{T_2}}} F(\lambda_{max}) \tag{2.21}$$

Les constantes α_1 et α_2 représentent les rapports d'amplitude entre la contrainte maximale admissible en mode I, σ_{max}, qui correspond à la résistance en traction hors-plan, Z_t, du modèle OPFM, et, respectivement, les contraintes maximales admissibles en mode II, $\alpha_1\sigma_{max}$, qui correspond à la résistance en cisaillement plan, S_{13}, du modèle OPFM et en mode III, $\alpha_2\sigma_{max}$, qui correspond à la résistance en cisaillement hors-plan, S_{23}, du modèle OPFM. Il est à noter que pour ce modèle de comportement de l'interface, la raideur interfaciale est intrinsèque au modèle et ne peut être modifiée. En effet, cette dernière dépend uniquement de la valeur des résistances et des ténacités de l'interface. En compression hors-plan (u_N<0), la raideur interfaciale en mode I est multipliée par un facteur de pénalisation, α_c, pour tenir compte de la fermeture de la fissure due au délaminage (2.22).

$$\vec{T}_N = \frac{27}{4} \boldsymbol{\alpha_c} \frac{\vec{u}_N}{\boldsymbol{\delta_N}} \boldsymbol{\sigma_{max}} \tag{2.22}$$

Il est à noter que l'interface ne s'endommage pas en compression pure. La loi de comportement et l'évolution du dommage associée sont illustrées sur la Figure 2.11.

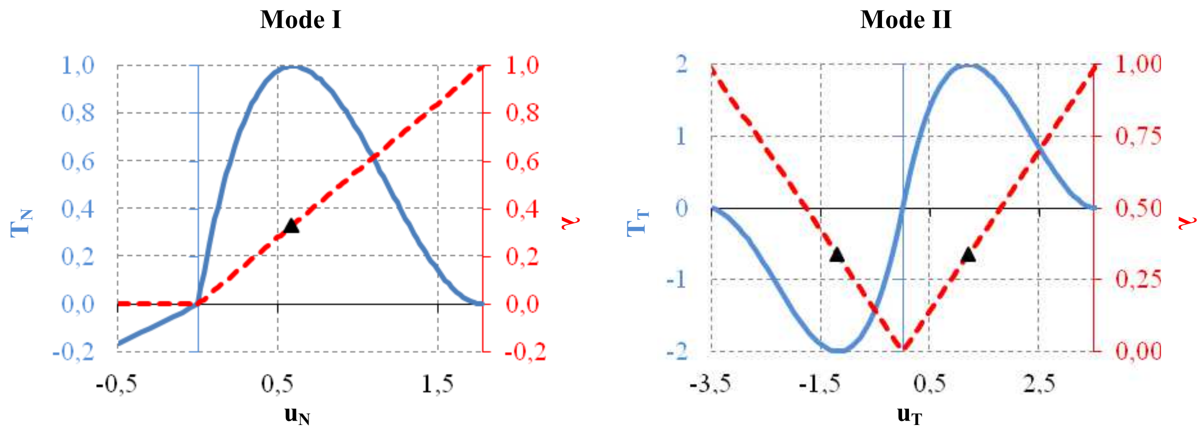


Figure 2.11. *Loi de comportement de Needleman [Needleman, 1987] et évolution de l'endommagement associée en ouverture (mode I) et en cisaillement (mode II). Les triangles noirs indiquent la valeur de l'endommagement lorsque la résistance interfaciale est atteinte.*

Une difficulté majeure des lois adoucissantes, telles les lois cohésives, est qu'elles peuvent engendrer des sauts de solution. Afin d'illustrer cette notion, un modèle éléments finis à deux dimensions est considéré [Chaboche, 2001]. Ce modèle est constitué d'un élément d'interface relié à un élément surfacique élastique, ABA'B', chargé dans le sens normal à l'interface (Figure 2.12).

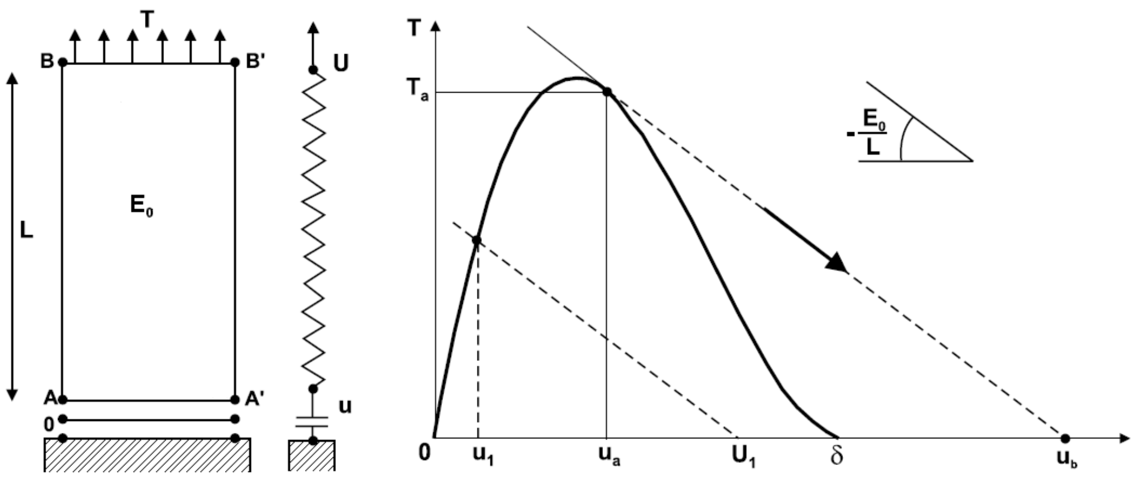


Figure 2.12. *Configuration uniaxiale simple illustrant la notion de saut de solution au cours d'une décohésion interfaciale : modèle éléments finis 2D et réponse locale de l'interface [Chaboche, 2001]*

Le module d'Young et la longueur de l'élément surfacique sont notés, respectivement, E_0 et L. Le déplacement total de la structure, U, correspond à la somme de l'ouverture de l'interface, notée u, et de la déformation normale élastique de l'élément surfacique (2.23).

$$U = u + \frac{L}{E_0} T \tag{2.23}$$

Le comportement de l'interface, dans le cas de la loi de comportement de Needleman, est donné par l'équation (2.19). Dans le repère des coordonnées locales de l'interface, (*T*,*u*), pour un déplacement imposé *U*, la réponse de l'interface est donnée par l'intersection de la droite d'équation (2.23) et la relation entre la contrainte reprise par l'interface, *T*, et son ouverture, *u*, donnée par la loi de comportement de l'interface (2.19). Au-delà du pic de la courbe de réponse locale de l'interface, deux situations peuvent se présenter. Si la raideur de l'élément élastique (E_0/L) est suffisamment grande pour qu'il y ait une intersection entre la droite d'équation (2.23) et la réponse locale d'équation (2.19), alors la réponse est toujours stable. En revanche, si cette raideur est plus faible que la raideur tangente maximale de la partie adoucissante de la réponse locale de l'interface, alors il peut y avoir un saut de solution (de u_a à u_b ou de T_a à T=0 en terme de chargement, sur la Figure 2.12). Dans ce cas, l'énergie dépensée pour rompre l'interface est plus grande que le taux de restitution d'énergie critique et est propagée sous forme d'énergie cinétique.

La continuité du modèle de Needleman permet de limiter la probabilité d'apparition des sauts de solution inhérents aux modèles de comportement discontinus. Elle implique cependant que l'endommagement débute dès que la contrainte appliquée n'est plus nulle. La valeur de la variable d'endommagement vaut 0,33 lorsque la composante normale de la force de traction est maximale, c'est-à-dire à l'amorçage du délaminage. Le fait que l'endommagement débute dès le début du chargement induit une perte de rigidité en flexion du modèle du stratifié bien avant le début avéré de l'endommagement. Or, la rigidité en flexion a une influence importante dans le comportement à l'impact, comme cela a été rappelé dans le chapitre 1. C'est pourquoi un autre modèle de zones cohésives présentant une raideur interfaciale initiale contrôlable a été également utilisé.

b) Loi de comportement cohésive bi-linéaire proposée par Alfano et Crisfield [Alfano, 2001]

Le modèle de zone cohésive bi-linéaire proposé par Alfano et Crisfield [Alfano, 2001] comporte une partie linéaire élastique, dans laquelle l'interface se déforme sans s'endommager. Lorsque la contrainte maximale admissible, soit la résistance interfaciale du mode considéré, est atteinte, l'endommagement est initié. Les efforts cohésifs décroissent alors linéairement, jusqu'à ce que l'énergie nécessaire à la rupture d'une unité de surface soit atteinte. La fissure de délaminage est alors créée pour cette surface.

Le modèle bi-linéaire utilise des variables similaires à celles du modèle de Needleman. Il propose toutefois une première partie linéaire élastique non-endommageable par le biais d'une raideur interfaciale *K*. Le modèle d'Alfano et Crisfield s'exprime par les équations suivantes (Équations (2.**24** – (2.**27**).

$$\lambda = \frac{1}{\eta}\frac{\kappa}{1+\kappa}$$

$$avec\ \kappa = \langle \sqrt{\left(\frac{\langle u_N \rangle}{\boldsymbol{u_{0_N}}}\right)^2 + \left(\frac{\|\vec{u}_{T_1}\|}{\boldsymbol{u_{0_{T_1}}}}\right)^2 + \left(\frac{\|\vec{u}_{T_2}\|}{\boldsymbol{u_{0_{T_2}}}}\right)^2} - 1 \rangle \tag{2.24}$$

$$et\ \eta = 1 - \frac{u_{0_N}}{\boldsymbol{\delta_N}} = 1 - \frac{u_{0_{T_1}}}{\boldsymbol{\delta_{T_1}}} = 1 - \frac{u_{0_{T_2}}}{\boldsymbol{\delta_{T_2}}}$$

$$\vec{T}_N = \begin{cases} \dfrac{\vec{u}_N}{\boldsymbol{u_{0N}}} F(\lambda_{max}) \; si \; u_N \geq 0 \\ \boldsymbol{\alpha_c} \dfrac{\vec{u}_N}{\boldsymbol{u_{0_N}}} \boldsymbol{\sigma_{max}} \; si \; u_N < 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

$$avec \; F(\lambda) = \boldsymbol{\sigma_{max}}(1-\lambda)$$

$$\vec{T}_{T_1} = \boldsymbol{\alpha_1} \frac{\vec{u}_{T_1}}{\boldsymbol{u_{0T_1}}} F(\lambda_{max}) \tag{2.26}$$

$$\vec{T}_{T_2} = \boldsymbol{\alpha_2} \frac{\vec{u}_{T_2}}{\boldsymbol{u_{0T_2}}} F(\lambda_{max}) \tag{2.27}$$

Les paramètres u_{0N}, u_{0T1} et u_{0T2} correspondent aux ouvertures de l'interface pour lesquels la résistance interfaciale est atteinte. Ces paramètres permettent de régler la raideur interfaciale initiale (2.28).

$$K = \frac{\sigma_{max}}{u_{0_N}} \tag{2.28}$$

Le modèle bi-linéaire, tel qu'il est implémenté dans *Z-set*, implique que les rapports u_{0N}/δ_N, u_{0T1}/δ_{T1} et u_{0T2}/δ_{T2} soient égaux. La loi de comportement et l'évolution de l'endommagement associée au modèle bi-linéaire sont illustrées sur la Figure 2.13.

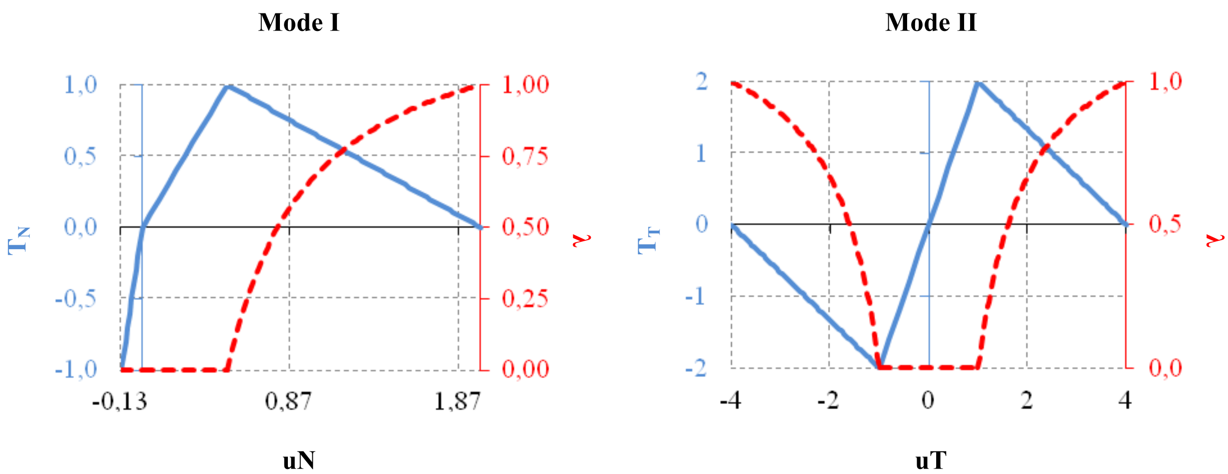


Figure 2.13. *Loi de comportement proposée par Alfano et Crisfield [Alfano, 2001] et évolution de l'endommagement associée en ouverture (mode I) et en cisaillement (mode II)*

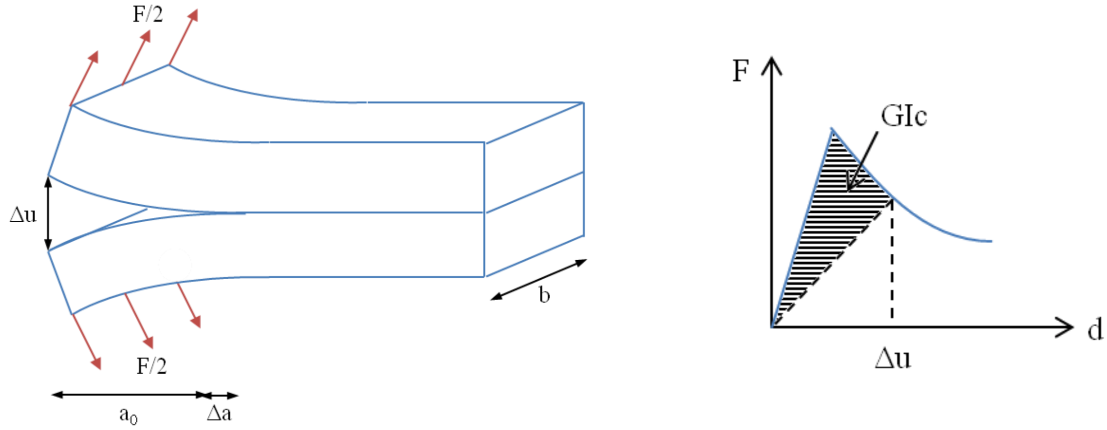
Le modèle bi-linéaire permet d'endommager l'interface uniquement à partir du moment où la contrainte atteint la résistance interfaciale dans le mode considéré. De plus, il est possible d'augmenter la raideur initiale de l'interface, afin de limiter l'assouplissement du modèle numérique du stratifié, lié à la présence des modèles de zones cohésives. Cependant, le caractère bi-linéaire adoucissant du modèle de Crisfield peut entraîner des sauts de solution et des difficultés à converger vers une solution. Son utilisation nécessite de prendre certaines précautions qui sont exposées dans le paragraphe suivant.

4) Identification des modèles de zones cohésives pour le matériau T700GC/M21

Les résistances interfaciales en traction hors-plan, Z_t, pour le mode I, en cisaillement longitudinal, S_{13}, pour le mode II, et en cisaillement transverse, S_{23}, sont identifiées à partir des mêmes essais que ceux utilisés pour l'identification du modèle de comportement du pli unidirectionnel OPFM et décrits page 42. Les ténacités de l'interface sont identifiées par des essais de propagation de fissure.

a) Identification des propriétés de l'interface en mode I

Concernant le mode normal ou mode d'ouverture de l'interface ou mode I, l'essai Double Cantilever Beam (DCB) est le plus couramment utilisé [ASTM, 1994]. Au cours de cet essai, les deux bras d'une poutre stratifiée unidirectionnelle préfissurée sont écartés l'un de l'autre de manière incrémentale. Pour chaque incrément de déplacement, l'avancée de la fissure est alors mesurée. Les courbes de la force en fonction du déplacement et de la longueur de fissure en fonction du déplacement permettent de calculer l'énergie restituée par l'avancée de la fissure (Figure 2.14).



a_0 : longueur initiale de la fissure

Δa : accroissement de la fissure

Δu : ouverture entre les deux bras

b : largeur de l'éprouvette

F : force appliquée

avec $G_{I_c} = \frac{(F \times \Delta u)}{\Delta a \times b}$

G_{Ic} : taux de restitution d'énergie critique en mode d'ouverture de la fissure

(a) **(b)**

Figure 2.14. *Schéma de l'essai Double Cantilever Beam (a) et mesure de l'énergie de restitution (b)*

La mesure du taux de restitution d'énergie critique en mode d'ouverture de la fissure, G_{Ic}, est répétée au moins trois fois (sur la même éprouvette ou sur plusieurs éprouvettes, avant l'apparition de ponts de fibres à l'interface) afin d'estimer la dispersion sur cette mesure. Les valeurs identifiées pour le T700GC/M21 sont de (400±100) J/m², soit (0,4±0,1) N/mm, pour l'énergie de restitution en mode normal. De cette valeur et de la valeur de la résistance en traction hors-plan de l'interface sont déduites les valeurs des ouvertures de l'interface à rupture, δ_N, pour les lois de de Needleman (2.29) et de Crisfield (2.30).

$$\boldsymbol{\delta_N} = \frac{16}{9}\frac{G_{I_c}}{\boldsymbol{\sigma_{max}}} \quad (2.29)$$

$$\boldsymbol{\delta_N} = \frac{2G_{I_c}}{\boldsymbol{\sigma_{max}}} \quad (2.30)$$

Dans le cas du modèle bi-linéaire, Turon [Turon, 2007] a montré que la raideur interfaciale initiale, K, devait être très grande pour ne pas influer sur les propriétés élastiques effectives du stratifié. En effet, l'expression du module d'Young hors-plan dépend de la raideur interfaciale en mode I (2.31).

$$E_{eff} = E_3 \left(\frac{1}{1 + \frac{E_3}{Ke}} \right) \tag{2.31}$$

Dans l'expression précédente, E_3 est le module d'Young hors-plan du matériau et e est l'épaisseur de la partie supérieure du stratifié qui est adjacente à la zone cohésive. Pour que le module d'Young hors-plan effectif soit proche du module d'Young hors-plan du stratifié, il faut que la raideur de l'interface en mode I soit très grande devant le module d'Young hors-plan du stratifié (2.32).

$$K = \frac{\alpha E_3}{e} \; avec \; \alpha \gg 1 \tag{2.32}$$

La valeur de la raideur interfaciale est classiquement prise à 10^6 N/mm. Cette valeur présente en effet un bon compromis entre le temps de calcul et la perte de raideur du modèle du stratifié, liée à l'introduction des zones cohésives. De la valeur de la raideur interfaciale et de la contrainte maximale en mode I est déduite la valeur de l'ouverture de l'interface à l'initiation du dommage interfacial (2.33).

$$\boldsymbol{u_{0_N}} = \frac{\boldsymbol{\sigma_{max}}}{K} \tag{2.33}$$

b) Identification des propriétés de l'interface en modes de cisaillement

Peu d'essais sont disponibles pour caractériser le mode III et aucun n'est actuellement normalisé. De plus, la ténacité en mode III semble plus grande (entre 6 et 38 % pour un stratifié en fibres de carbone T300 et résine époxy renforcée) que la ténacité en mode II [de Morais, 2009]. C'est pourquoi les propriétés de l'interface en mode III sont classiquement prises égales aux propriétés de l'interface en mode II, afin d'obtenir des résultats conservatifs.

Les propriétés du mode II de l'interface peuvent être identifiées à partir de l'essai End-Notched Flexure (ENF) [Carlsson, 1986]. Cet essai consiste à mettre en flexion une éprouvette préfissurée, afin de faire propager la fissure de l'interface en mode II (Figure 2.15).

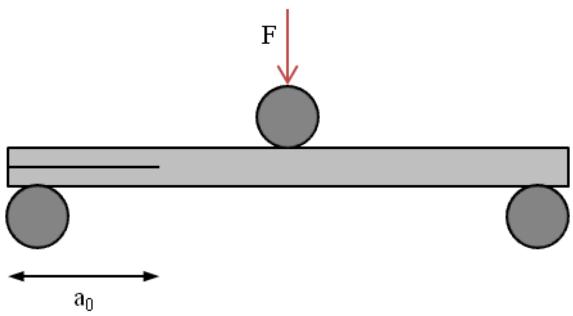


Figure 2.15. *Schéma d'un essai End-Notched Flexure (ENF)*

Le taux de restitution d'énergie critique de ce mode, G_{IIc}, est évalué comme précédemment, dans le cas du mode d'ouverture. Les valeurs identifiées pour le T700GC/M21 sont de (1200±200) J/m², soit (1,2±0,2) N/mm. De cette valeur et de celle de la résistance interfaciale en mode II, S_{13}, sont déduits l'ouverture maximale de fissure en cisaillement, δ_T, pour le modèle de Needleman (2.34) et pour le modèle de Crisfield (2.35), le rapport des contraintes maximales en mode d'ouverture et en mode de cisaillement, α, et le facteur de pénalisation en compression normale, α_c, classiquement pris égal à dix fois la valeur du rapport α.

$$\boldsymbol{\delta_{T_1}} = \frac{16}{9}\frac{G_{II_c}}{\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\sigma_{max}}} \tag{2.34}$$

$$\boldsymbol{\delta_{T_1}} = \frac{2G_{II_c}}{\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\sigma_{max}}} \tag{2.35}$$

Dans le cas de la loi de comportement bi-linéaire, l'ouverture de l'interface à l'initiation du dommage interfacial en mode II est déterminée à partir de la condition de stabilité du modèle bi-linéaire proposé par Alfano et Crisfield (2.36).

$$\boldsymbol{u_{0_{T_1}}} = \frac{\boldsymbol{\delta_{T_1} u_{0_N}}}{\boldsymbol{\delta_N}} \tag{2.36}$$

Les valeurs des paramètres des lois bi-linéaire et de Needleman identifiées pour le T700GC/M21 sont reportées, respectivement, dans les tableaux **Tableau 2.12** et **Tableau 2.13**.

σ_{max} (MPa)	δ_N (mm)	δ_T (mm)	u_{0N} (mm)	u_{0T} (mm)	α	α_c	K (N/mm^3)
46	0,0174	0,0240	0,000460	0,000635	2,17	21,7	10^5

Tableau 2.12. *Valeurs des paramètres du modèle bi-linéaire identifiés pour le T700GC/M21*

σ_{max} (MPa)	δ_N (mm)	δ_T (mm)	α	α_c
46	0,0155	0,0213	2,17	21,7

Tableau 2.13. *Valeurs des paramètres du modèle de Needleman identifiés pour le T700GC/M21*

2.3. Méthodes numériques

Les méthodes de résolutions dynamiques d'un problème aux éléments finis peuvent être classées en deux catégories : les résolutions implicites et les résolutions explicites. Dans le cas d'un problème dynamique, les forces d'inertie sont prises en compte et l'équation semi-discrète du mouvement (discrétisée en espace et continue en temps) s'écrit de la manière suivante :

$$Ma(t) + Cv(t) + F_{int}\big(d(t)\big) = F_{ext}(t) \qquad \textit{avec} \qquad \begin{aligned} v(t) &= \dot{d}(t) \\ a(t) &= \dot{v}(t) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Dans l'équation précédente, $d(t)$, $v(t)$ et $a(t)$ sont, respectivement, les vecteurs des déplacements nodaux, des vitesses nodales et des accélérations nodales. M est la matrice de masse, C la matrice d'amortissement structural, F_{int} et F_{ext} les vecteurs nodaux des forces, respectivement, internes et extérieures. Par la suite, par soucis de clarté dans les explications données, les forces d'amortissement structurales seront négligées. Les schémas d'intégration temporelle de Newmark [Hugues, 1987] seront utilisés pour mettre en évidence les différences entre les deux classes de résolutions dynamiques. Cependant, dans le code de calcul par éléments finis Z-set [Benziane, 2011], la résolution dynamique implicite d'un problème aux éléments finis est réalisée à l'aide du schéma d'intégration temporelle HHT[1], aussi appelé α-méthode [Hilber, 1976].

2.3.1. Résolution implicite d'un problème aux éléments finis

Les méthodes de la famille de Newmark consistent à discrétiser en temps l'équation (2.37) de la manière suivante :

$$Ma^{t+\Delta t} + F_{int}(d^{t+\Delta t}) = F_{ext}^{t+\Delta t} \tag{2.38}$$

avec
$$d^{t+\Delta t} = \tilde{d}^{t+\Delta t} + \Delta t^2 \beta a^{t+\Delta t} \tag{2.39}$$

$$v^{t+\Delta t} = \tilde{v}^{t+\Delta t} + \Delta t \gamma a^{t+\Delta t} \tag{2.40}$$

Les quantités $\tilde{d}^{t+\Delta t}$ et $\tilde{v}^{t+\Delta t}$ sont, respectivement, les prédicteurs des déplacements et des vitesses nodales, connus de l'incrément temporel précédent (Équations (2.**41** et (2.**42**).

$$\tilde{d}^{t+\Delta t} = d^t + \Delta t v^t + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)a^t \tag{2.41}$$

$$\tilde{v}^{t+\Delta t} = v^t + \Delta t(1-\gamma)a^t \tag{2.42}$$

Les quantités d^t, v^t et a^t sont, respectivement, les approximations de $d(t)$, $\dot{d}(t)$ et $\ddot{d}(t)$. Les paramètres β et γ déterminent certaines propriétés de l'algorithme, comme, par exemple, sa stabilité et sa précision.

En remplaçant $a^{t+\Delta t}$ par son expression en fonction de $d^{t+\Delta t}$ (2.39), on obtient l'équation suivante à résoudre, pour $\beta \neq 0$:

$$\frac{1}{\beta \Delta t^2} M d^{t+\Delta t} + F_{int}(d^{t+\Delta t}) = F_{ext}^{t+\Delta t} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M \tilde{d}^{t+\Delta t} \tag{2.43}$$

L'équation non-linéaire (2.43) met en lumière le caractère implicite de cette expression. Celle-ci passe par un processus itératif de type Newton et donc par une ou plusieurs linéarisations mettant en œuvre un opérateur tangent. Au cours du processus itératif, on cherche à minimiser le résidu R (2.44), en choisissant une norme et en définissant un critère d'arrêt.

$$R = F_{ext}^{t+\Delta t} - F_{int}(d^{t+\Delta t}) - Ma^{t+\Delta t} \tag{2.44}$$

Le processus itératif de type Newton est bien adapté pour des solutions relativement régulières. Lorsque les solutions recherchées ne sont pas assez régulières (contact, lois à seuil…), le taux de convergence peut être dégradé, ce qui conduit à des coûts de calcul importants. Parfois, la convergence n'est pas atteinte.

Suivant le choix des paramètres β et γ, les schémas de Newmark et HHT sont inconditionnellement stables [Hugues, 1987] (Il n'y a jamais de création artificielle d'énergie). Dans la suite de l'étude, les paramètres suivants ont été retenus pour la méthode HHT : $\alpha = 0{,}05\,; \beta = \frac{(1+\alpha)^2}{4}\ ;\ \gamma = \frac{1}{2} + \alpha$. Le fait d'avoir un schéma inconditionnellement stable ne signifie pas pour autant que la solution obtenue sera nécessairement convergée.

[1] Du nom de ses inventeurs, H.M. Hilber, T.J.R. Hugues et R.L. Taylor.

2.3.2. Résolution explicite d'un problème aux éléments finis

La résolution explicite d'un problème aux éléments finis est adaptée aux phénomènes rapides, comme la propagation d'ondes. L'utilisation des algorithmes explicites est cependant fréquente pour des cas « moins rapides » mais fortement non-réguliers.

Le schéma couramment employé pour la résolution explicite est celui des différences centrées. Il fait partie des schémas d'intégration de Newmark, en posant β=0 et γ=0,5. Les déplacements nodaux à l'instant $t+\Delta t$ sont donc directement connus à partir des quantités calculées au pas de temps précédent (Équations (2.**39**) et (2.**41**)), ce qui explique le caractère explicite de ces méthodes. Afin d'éviter la résolution d'un système linéaire, la matrice de masse est diagonalisée. On déduit ainsi directement et sans itération les forces internes $F_{int}(d^{t+\Delta t})$, puis les valeurs des accélérations (2.45) et des vitesses (2.40) au pas de temps considéré.

$$a^{t+\Delta t} = M_{diag}^{-1}\left(F_{ext}^{t+\Delta t} - F_{int}(d^{t+\Delta t})\right) \tag{2.45}$$

L'inconvénient majeur des algorithmes explicites est qu'ils sont conditionnellement stables. Pour des problèmes linéaires, il est montré que le pas de temps doit vérifier une condition CFL[2] (2.46).

$$\Delta t < \Delta t_c \; avec \; \Delta t_c = \frac{2}{\omega^h} \tag{2.46}$$

Cela implique que le pas de temps est limité par un pas de temps critique qui est lié à la plus grande fréquence propre de la structure discrétisée, ω^h. Il est montré que cette fréquence est majorée par la fréquence propre de l'élément le plus discriminant du maillage, qui dépend de la taille caractéristique de cet élément, notée h, et de la célérité des ondes dans cet élément, notée c (2.47).

$$\omega^h < \omega_{el}^h \; avec \; \omega_{el}^h \approx \frac{2c}{h} \tag{2.47}$$

Ce qui implique, en analyse linéaire :

$$\Delta t \lesssim \delta \frac{h}{c} \tag{2.48}$$

δ est un paramètre de sécurité pour la stabilité. Le pas de temps critique pour la stabilité de l'algorithme dépend donc linéairement de la plus petite taille de maille du modèle discrétisé. Ceci signifie que la discrétisation spatiale du problème influence le pas de temps critique de résolution du problème et peut donc pénaliser cette résolution en termes de coût de calcul. Lorsque le maillage est raffiné dans certaines zones, comme en impact, par exemple, cette limitation des méthodes explicites peut s'avérer très coûteuse.

En présence de non-linéarités, la condition de stabilité précédente n'est pas toujours suffisante. C'est pourquoi il est primordial de considérer les résultats obtenus avec précaution. Ainsi, l'utilisation de la résolution explicite nécessite une plus grande expertise de l'utilisateur quant à la cohérence du résultat obtenu.

La résolution explicite ne requiert pas la minimisation d'un résidu. En effet, les forces internes sont calculées de manière directe. Il est généralement considéré que le pas de temps est suffisamment petit pour que l'erreur commise soit suffisamment faible. L'absence de

[2] R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy [Hugues, 1987]

processus itératif permet également de traiter des problèmes non réguliers, avec les précautions à prendre mentionnées plus haut.

2.3.3. Comparaison des résolutions explicites et implicites

Les différences entre les deux types de résolutions sont résumées dans le Tableau 2.14.

	Implicite	Explicite
Résolution d'un système linéaire (coûteux)	Lorsque le problème n'est pas suffisamment régulier ou est fortement non linéaire, le processus itératif de Newton requiert de nombreuses itérations ou des pas de temps très fins, donc un nombre important de systèmes linéaires à résoudre. Ceci engendre des coûts de calcul parfois rédhibitoires.	Aucune résolution de système linéaire n'est requise. Les quantités recherchées sont obtenues directement. Le coût de calcul par incrément est donc fortement diminué.
Convergence à l'équilibre	La validation d'un incrément passe par la minimisation du résidu. Cela ne signifie pas que la convergence du calcul sera nécessairement atteinte, quel que soit le pas de temps.	On considère souvent que le pas de temps nécessaire à la stabilité du schéma est considéré comme suffisamment faible pour que l'erreur induite par l'absence d'itérations soit compensée. Ce n'est cependant pas toujours le cas. C'est pourquoi la résolution explicite nécessite une grande expertise de l'utilisateur pour comprendre et valider ou non les résultats obtenus.
Stabilité	Les schémas implicites sont inconditionnellement stables, sous réserve d'un choix judicieux de β et γ. Cela permet d'utiliser des pas de temps plus grand qu'en explicite.	Le schéma explicite est conditionnellement stable. $$\Delta t < \frac{h}{c}$$ Cela peut conduire à un très grand nombre d'incréments et donc rendre le calcul très coûteux.
Solutions non régulières (sauts de solutions…)	Ce type de solution recherchée peut mettre en échec le processus itératif de Newton, lorsque les non régularités sont trop importantes. La convergence n'est pas assurée dans ce cas.	L'absence de processus itératif permet de traiter de tels problèmes. Cependant, une grande expertise de l'utilisateur est requise pour interpréter et valider les résultats obtenus.

Tableau 2.14. *Comparaison des résolutions implicite et explicite*

2.4. Résolution du contact dans *Z-set* : méthode de flexibilité

La gestion du contact dans *Z-set* est présentée en détails dans [Trousset, 2009]. Elle utilise un algorithme de reconnaissance d'obstacles, une méthode de résolution des équations d'équilibre en présence de contact et des lois de contact incluant des lois de frottement éventuelles, comme la loi de Coulomb. Son originalité réside dans la méthode de résolution des équations d'équilibre. En effet, plutôt que de calculer les forces de contact en même temps que les forces internes (méthodes de rigidité classiquement utilisées dans les codes de calcul par éléments finis commerciaux), ce calcul s'effectue au début de chaque itération. Les forces de contact sont ensuite considérées comme des forces extérieures appliquées au système. Ce calcul est réalisé par la méthode de flexibilité. Cette méthode consiste à faire un premier calcul des positions finales sans tenir compte du contact, ce qui donne Δx_{lib}, l'écart entre la position initiale et la position finale exprimé dans le repère local, pour tous les nœuds potentiellement en contact. Cela génère des interpénétrations entre l'impacteur et sa cible. Ces interpénétrations sont corrigées par des déplacements, dans le repère local du contact, notés u_c (**2.50**). Cette correction des positions finales est corrélée aux forces de contact, f_c, calculées dans le repère local du contact par l'intermédiaire de la matrice de flexibilité de la structure, W, qui correspond à l'inverse de la rigidité de la structure (donc à sa flexibilité), condensé aux nœuds potentiellement en contact et transposé dans les repères locaux des éléments de contact (**2.49**).

$$W = H^T K_t^{-1} H \tag{2.49}$$

H est un opérateur de trace qui permet à la fois de restreindre l'inverse de K_t, la matrice de rigidité de la structure, aux degrés de libertés en contact et d'écrire la matrice de flexibilité restreinte dans les repères locaux du contact. Une fois la matrice de flexibilité calculée, il faut donc résoudre par des itérations locales de contact le système d'équations (2.50), condensées sur la zone potentiellement en contact, les inconnues étant les forces de contact exprimées dans le repère local, f_c. Ce système est écrit dans le cadre d'un problème sans frottement, pour simplifier la compréhension. Pour prendre en compte le frottement, il faudrait ajouter au système (2.50) les conditions de frottement.

$$\begin{cases} W f_c = u_c \rightarrow flexibilit\acute{e} \\ \left.\begin{array}{r} x_n \geq 0 \\ f_{c_n} \geq 0 \\ x_n f_{c_n} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow condition\ de\ Signorini \\ x_n = x_n^0 + \Delta x_{lib_n} + u_{c_n} \end{cases} \tag{2.50}$$

x est le vecteur des positions finales des éléments de contact dans le repère local. Ces positions doivent vérifier la condition de Signorini, qui traduit la non-pénétrabilité de la matière. x^0 est le vecteur des positions initiales des éléments de contact dans le repère local. L'indice n fait référence au n$^{\text{ème}}$ élément de contact du problème.

Les forces de contact ainsi déterminées sont ensuite transposées dans le repère global du problème, via l'opérateur de trace H, et introduites dans les équations d'équilibre à résoudre comme forces extérieures appliquées au système.

$$\begin{cases} F_{cont} = H f_c \\ K_t \Delta X = F_{ext} + F_{cont} - F_{int} \end{cases} \tag{2.51}$$

X, F_{ext}, F_{cont} et F_{int} sont, respectivement le vecteur des positions finales, les forces extérieures appliquées au système, les forces de contact et les forces internes, exprimés dans le repère global du problème.

La méthode de flexibilité nécessite donc une résolution itérative locale supplémentaire au sein de la boucle d'équilibre de Newton. Celle-ci est relativement rapide mais le calcul de la matrice de flexibilité peut s'avérer coûteux, en particulier lorsque les degrés de libertés en contact sont nombreux et lorsqu'il y a de nombreuses itérations dans le calcul. En effet, dès que la matrice tangente de la structure change, la matrice de flexibilité change également et doit être recalculée (il faut faire autant de résolutions du système linéaire global qu'il y a de degrés de libertés sur les nœuds potentiellement en contact). Ceci est très préjudiciable en présence de fortes non-linéarités telles que l'endommagement de la structure.