

Discussion sur le choix de la transformation

Comme cela a été signalé précédemment, le choix du domaine E et de la transformation \mathbf{T} ont une influence sur la qualité de la solution numérique. Concernant le choix du domaine E , on prend en pratique le domaine E défini par (2.7) qui correspond à la réalisation moyenne du domaine D . L'explication de ce choix est le suivant : Si on considère une transformation discrète \mathbf{T}_{dis} , elle est équivalente à une déformation de maillage où les nœuds du maillage du domaine E se déplacent en gardant la même connectivité. Le maillage sur D issue de la transformation \mathbf{T}_{dis} est conforme. Le choix le plus adéquat pour le domaine E est celui qui conduit à une déformation minimale sur D du maillage. Le choix de E comme la réalisation moyenne (géométrie nominale) du domaine initial D semble intuitivement une bonne solution. Pour essayer d'évaluer en vue de limiter l'impact de l'erreur numérique sur la solution obtenue par la méthode de transformation, nous allons dans la suite montrer les limitations introduites par l'utilisation d'une transformation discrète et proposer un estimateur d'erreur *a priori*.

2.2.1. Transformation continue ou transformation discrète

Dans cette partie, l'exemple présenté dans la partie 2.1.3.1 est repris pour comparer les transformations continue et discrète. Le domaine E présenté sur la Figure 50 est utilisé comme domaine de référence. Le problème initial était un domaine D avec une perméabilité constante. Le problème est résolu dans le domaine de référence où la perméabilité n'est plus uniforme. Puis, la solution est ramenée sur le domaine initial par (2.54). Rappelons que le champ solution doit être uniforme sur tout le domaine D (2.52).

En utilisant la transformation continue \mathbf{T}_1^{-1} (2.57) (transformation 1), on obtient le champ magnétique présenté sur la Figure 54.

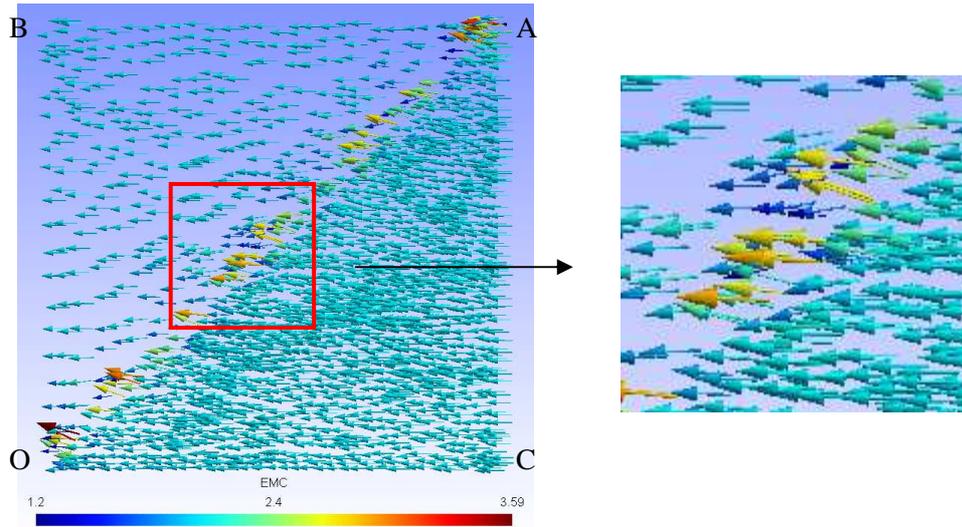


Figure 54. Champ magnétique obtenu en appliquant la transformation 1

On peut constater qu'il existe des erreurs numériques importantes localisées autour de la diagonale OA. Ce phénomène peut être expliqué de la façon suivante. La matrice jacobienne de \mathbf{T}_1^{-1} prend deux valeurs selon la position du point considéré dans le domaine E (Figure 55) avec :

$$\mathbf{M}_1^{-1}(P') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ si } P' \in E_1 \quad (2.58)$$

et

$$\mathbf{M}_2^{-1}(P') = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ si } P' \in E_2 \quad (2.59)$$

En conséquence, la perméabilité du domaine E obtenue par (2.53) présente une discontinuité sur les éléments traversés par le segment OA' (Figure 55) :

$$\mu'_1 = \frac{\mathbf{M}_1' \mu \mathbf{M}_1}{\det(\mathbf{M}_1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mu'_2 = \frac{\mathbf{M}_2' \mu \mathbf{M}_2}{\det(\mathbf{M}_2)} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1.25 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Cette discontinuité est équivalente à une utilisation d'un maillage non conforme au niveau des interfaces des matériaux. Comme cela a été abordé dans la partie 1.4.1.3, l'utilisation d'un maillage non conforme au niveau des interfaces donne lieu à une erreur numérique importante. En effet, on voit sur la Figure 54 que le champ magnétique obtenu dans le domaine D présente une erreur localisée autour du segment OA (correspond à OA' dans le domaine E).

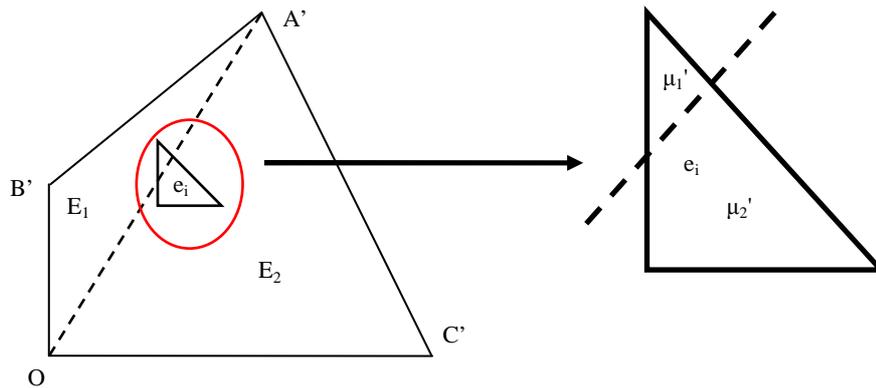


Figure 55. Élément coupé par OA'

Ensuite, la même transformation (2.57) est utilisée. Par contre, le domaine E est divisé en deux sous domaines E_1 et E_2 par OA' (transformation 2). On obtient alors le problème suivant à résoudre :

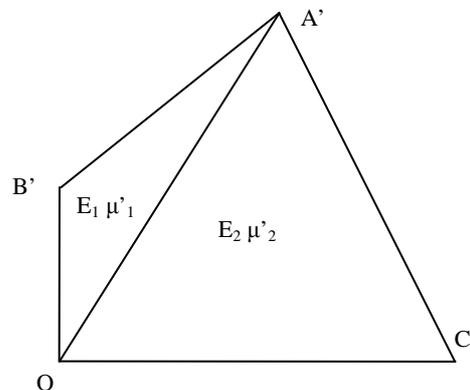


Figure 56. Division du domaine E

Les perméabilités μ'_1 et μ'_2 prennent la forme (2.60). En conséquence, il n'existe pas d'éléments traversés par OA' et la perméabilité est alors continue dans chaque élément. Cette fois, on obtient un champ qui est bien uniforme sur D :

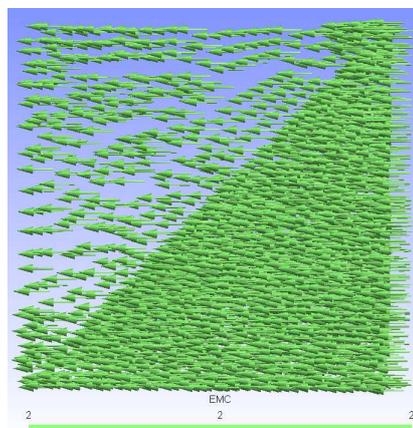


Figure 57. Champ magnétique obtenu en appliquant la transformation 2

Une autre possibilité de choix de la transformation pour éviter une discontinuité de la matrice jacobienne est représentée sur la Figure 58 (transformation 3):

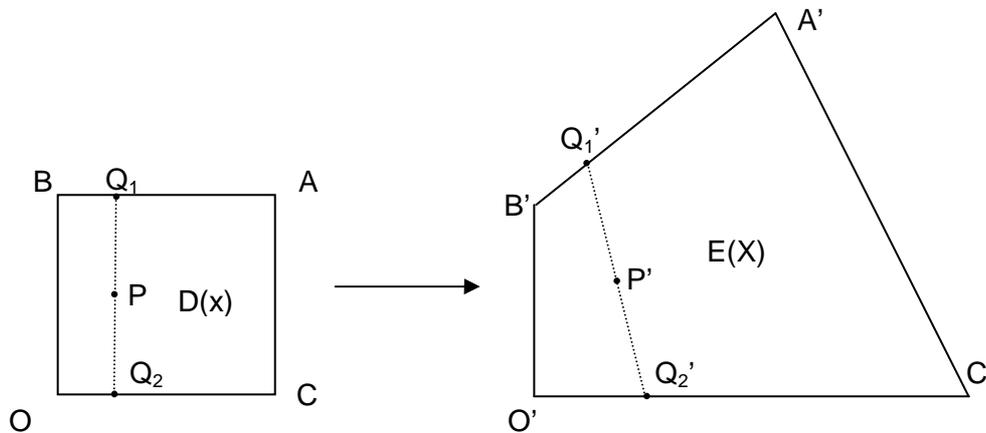


Figure 58. Description de la transformation 3

Le domaine E (respectivement D) est considéré comme l'ensemble des segments Q_1Q_2 (respectivement $Q'_1Q'_2$) avec:

$$\begin{cases} x_{1Q_1} = c, x_{2Q_1} = a \\ X_{1Q'_1} = c, X_{2Q'_1} = a + c \end{cases} ; \begin{cases} x_{1Q_2} = c, x_{2Q_2} = 0 \\ X_{1Q'_2} = 2c, X_{2Q'_2} = 0 \end{cases} \quad \text{avec } c \in [0, a] \quad (2.61)$$

L'utilisation de cette transformation, qui conduit à une matrice jacobienne continue sur E, nous donne encore un champ pratiquement uniforme présenté sur la Figure 59.

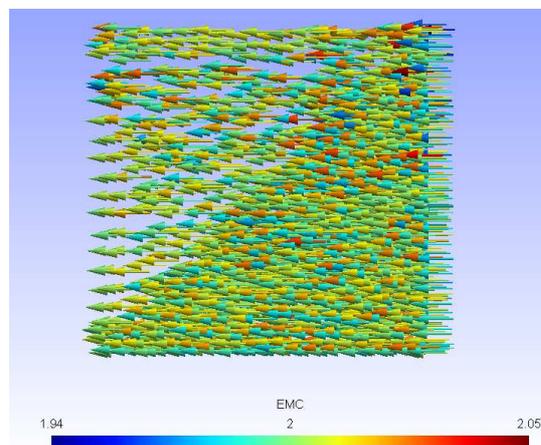


Figure 59. Champ magnétique obtenu en appliquant la transformation 3

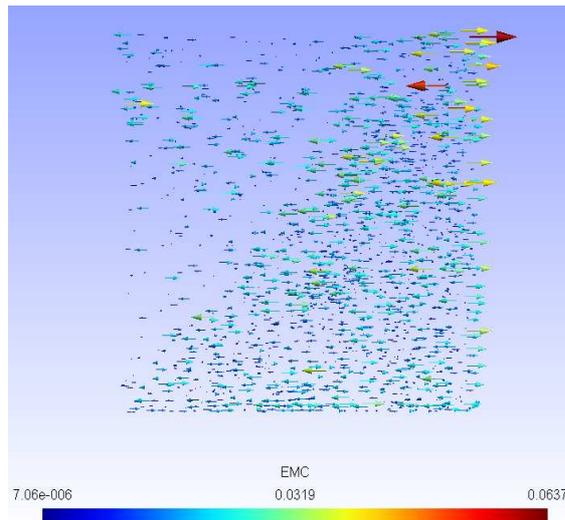


Figure 60. Ecart entre le champ exact et le champ obtenu en appliquant la transformation 3

Sur la Figure 60, nous avons représenté la différence entre le champ calculé en utilisant la transformation 3 et le champ exact. On constate néanmoins l'apparition d'un écart. La transformation 3 conduit donc à un champ de moins bonne qualité que le champ obtenu par la transformation 2 ou une transformation discrète (2.1.3.1).

Ce phénomène peut être expliqué par le fait que la matrice jacobienne de la transformation 3 n'est pas constante dans chaque élément ce qui est le cas pour la transformation discrète et la transformation 2. En conséquence, la méthode de quadrature utilisée pour calculer les coefficients de la matrice de raideur (2.46) introduit des erreurs numériques dans le cas de la transformation 3. Avec l'utilisation d'une transformation continue, dans un problème 2D, il existe toujours une façon de diviser de manière efficace le domaine étudié en plusieurs sous domaines pour éviter toute discontinuité de la matrice jacobienne sur chaque élément. Par contre, pour un problème 3D ce n'est pas toujours évident. Dans le cas où le problème de discontinuité de la matrice jacobienne ne peut pas être résolu, une transformation discrète peut être utilisée. Rappelons qu'avec l'utilisation de la transformation discrète, la matrice jacobienne est constante dans chaque élément du maillage.

Cependant, avec la transformation discrète, dans le cas de grandes déformations de la géométrie du domaine aléatoire réel, certains éléments peuvent « se retourner », ce qui conduit à une matrice jacobienne dont le déterminant est négatif. La transformation n'est alors plus bijective et le problème défini dans le domaine de référence présente une perméabilité tensorielle n'étant plus définie positive. Ce problème est alors mal posé. Si on regarde ce phénomène du point de vue de la déformation de maillage, il est équivalent au cas d'éléments qui se chevauchent. Pour illustrer ce phénomène, on considère l'exemple suivant :

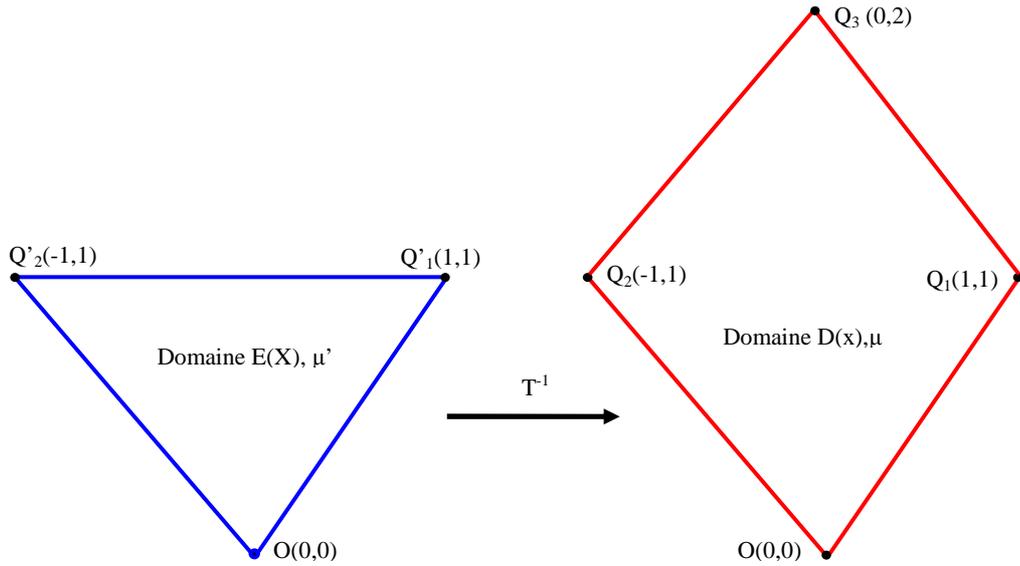


Figure 61. Définition du domaine initial D et du domaine de référence E

On s'intéresse à un problème magnétique défini dans le domaine D de perméabilité constante μ . On s'intéresse d'abord à une transformation continue \mathbf{T}^{-1} qui permet de ramener ce problème à un problème défini sur le domaine E de perméabilité μ' (Figure 61). La relation entre μ' et μ est donnée par (2.53) avec \mathbf{M} la matrice jacobienne de la transformation \mathbf{T} . Concernant la transformation \mathbf{T}^{-1} , elle est déterminée de la façon suivante (Figure 62) :

$$\overline{OP} = \chi \overline{OQ} \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{OP'}{OQ'} \quad (2.62)$$

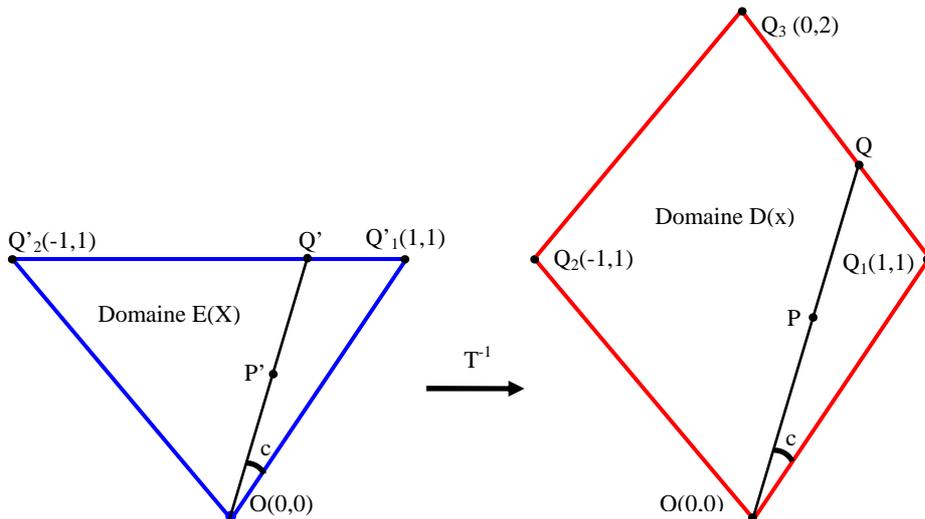


Figure 62. Transformation du domaine E en domaine D

On considère maintenant un maillage du domaine E présenté dans les Figure 63 et Figure 64. On s'intéresse aux éléments triangulaires $P'_1P'_2P'_3$, $OP'_2P'_3$ et $OP'_1P'_3$ du maillage du domaine E

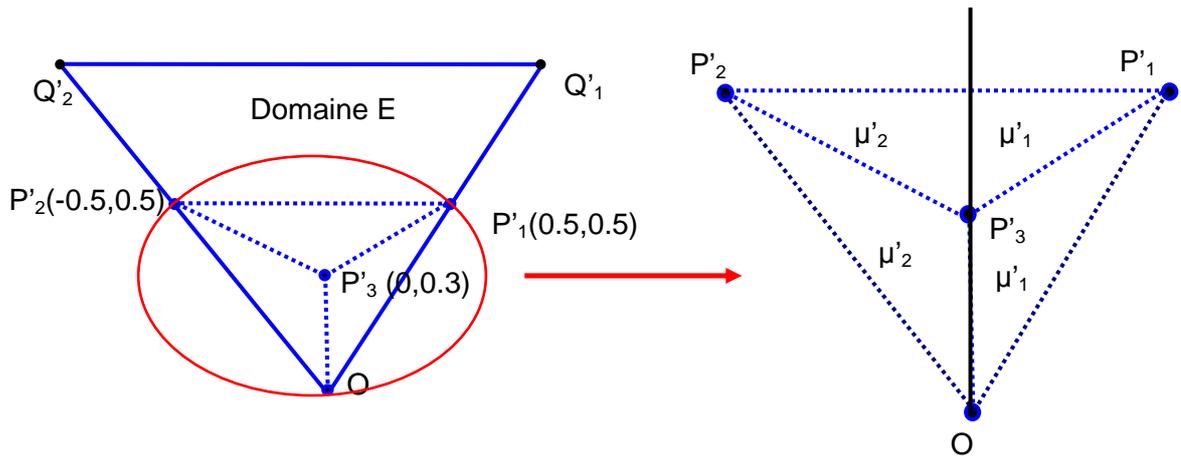


Figure 63. Eléments du domaine E

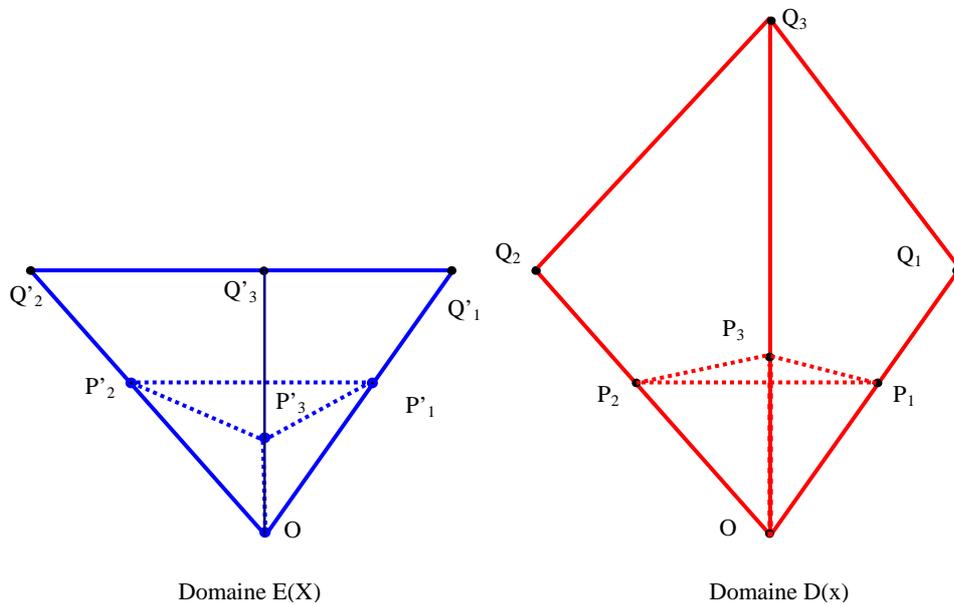


Figure 64. Déformation du maillage

L'application numérique nous donne les valeurs de perméabilités μ'_1 et μ'_2 sur ces éléments du domaine E (Figure 65):

$$\mu'_1 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} ; \mu'_2 = \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

On peut constater que μ'_1 et μ'_2 sont définies positives. Le problème défini sur le domaine E est alors bien posé.

Ensuite, on s'intéresse à la transformation discrète \mathbf{T}_{dis} basée sur la transformation \mathbf{T} . La détermination de la matrice jacobienne de \mathbf{T}_{dis} est réalisée dans chaque élément du maillage en fonction de la nouvelle position des nœuds de l'élément (2.50). L'application numérique nous donne les valeurs de perméabilités μ'_1 , μ'_2 et μ'_3 (Figure 65) de la forme suivante :

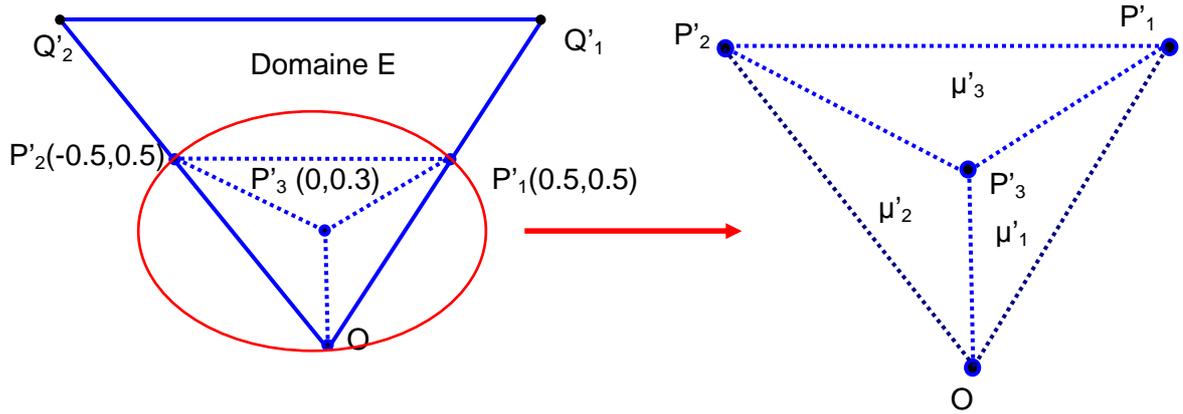


Figure 65. Eléments du domaine E

$$\mu'_1 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}; \mu'_2 = \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}; \mu'_3 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

On peut constater que la perméabilité tensorielle μ'_3 n'est plus définie positive, ce qui conduit à un problème défini sur E mal posé.

Si on considère la transformation discrète \mathbf{T}_{dis} comme une déformation de maillage, on obtient la nouvelle position des points P_i avec $i=1, 2, 3$ (Figure 64) qui vérifient:

$$P_2 \equiv P'_2, P_1 \equiv P'_1, \frac{OP_3}{OQ_3} = \frac{OP'_3}{OQ'_3} \quad (2.65)$$

On peut constater que l'élément $P'_1P'_2P'_3$ et son image $P_1P_2P_3$ n'ont pas la même orientation, ce qui constitue une explication visuelle du problème décrit précédemment.

Pour assurer alors de bonne condition d'application de la méthode transformation discrète, la matrice jacobienne de la transformation doit toujours avoir un déterminant positif dans chaque élément. Dans le cas où on considère une transformation discrète comme équivalente à une déformation du maillage, tous les éléments doivent alors conserver la même orientation, après application de la transformation.

Dans cette partie, une comparaison entre une transformation continue et une transformation discrète a été faite. On peut constater que l'utilisation d'une transformation continue nous oblige à diviser les domaines E et D d'une façon efficace pour éviter toute discontinuité de la matrice jacobienne de transformation dans les éléments du maillage sur E. D'un autre côté, pour la transformation discrète, une grande déformation de la géométrie de D peut donner lieu à un problème mal posé puisque la perméabilité peut être non définie-positive sur le domaine de référence E. Dans un problème avec des incertitudes portées par la géométrie, où la variation de la géométrie est faible, la méthode de transformation discrète semble la plus adaptée. Dans le reste de ce mémoire de thèse, nous nous focaliserons principalement sur la méthode de transformation discrète en prenant soin lors des applications de vérifier que le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation est toujours positif.

Dans la suite, nous allons proposer un estimateur d'erreurs *a priori* permettant d'estimer une borne de l'écart entre la solution exacte et la solution numérique dans le cas où est employée une méthode de transformation discrète. Cet estimateur devrait nous permettre d'extraire des critères pour choisir la transformation qui semble la mieux adaptée.

2.2.2 Estimation d'erreur a priori

Dans cette partie, on va étudier l'influence de la forme de la transformation ou plus concrètement la forme de la matrice jacobienne sur l'erreur numérique. On donnera une estimation d'erreur *a priori* qui pourra constituer un critère de choix de transformations. L'analyse qui suit est basée sur les travaux de I.Tsukerman sur l'influence de la forme des éléments sur l'erreur numérique dans la méthode des éléments finis [62]. On présente d'abord la démarche qui nous conduit à une expression de l'erreur *a priori*. Puis, un exemple de magnétostatique sera traité pour illustrer les résultats obtenus. Dans cette étude, on suppose que la matrice jacobienne est constante dans chaque élément ce qui correspond aux cas de la transformation discrète. Néanmoins, certains résultats obtenus peuvent être étendus au cas des transformations continues.

2.2.2.1. Etudes théoriques

On s'intéresse au problème de magnétostatique avec des incertitudes portées par la géométrie, défini dans la partie 1.4.1.1 et 1.4.1.2. Pour un même domaine de référence E , il existe une infinité de transformations. Par conséquent, on obtient différents problèmes, correspondant aux différentes perméabilités équivalentes, définis sur le domaine E (Figure 66). Dans le cas continu, tous ces problèmes donnent la même solution qui correspond à la solution exacte lorsqu'on la ramène au domaine initial (1.134). Cependant, lorsqu'on utilise une méthode numérique, ceci n'est plus vrai. Pour un même maillage du domaine E , deux transformations conduisent à deux résultats différents. Ceci est dû à des erreurs numériques différentes que l'on souhaite bien entendu minimiser.

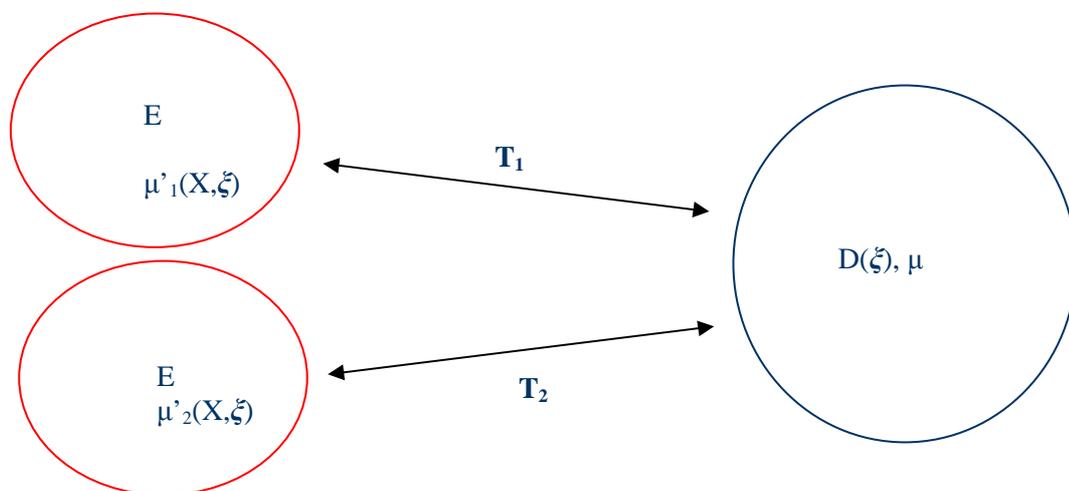


Figure 66. Différentes transformations du domaine D en E

Dans la suite, on va analyser l'influence du choix de la transformation sur l'erreur numérique de ces solutions dans le cas des deux formulations (voir la partie 1.2.1.3). On traitera en détail le cas de la formulation en potentiel scalaire pour un problème 2D pour plus de simplicité. Puis, des expressions de l'erreur *a priori* seront données dans le cas de deux formulations pour un problème 3D.

Considérons une transformation $\mathbf{T}(X, \xi)$ qui transforme D en E, de matrice jacobienne $\mathbf{M}(X, \xi)$. On obtient alors un problème défini sur E avec une perméabilité modifiée $\mu'(X, \xi)$ donnée par (1.135). On note le potentiel scalaire $\Omega_{ex}(X, \xi)$ la solution exacte du problème défini sur le domaine E. Par conséquent $\Omega_{ex}(x, \xi) = \Omega_{ex}(X(x, \xi), \xi)$ est la solution exacte du problème initial sur le domaine D (voir la partie 1.4.2.3). Le maillage \mathcal{M} du domaine déterministe E possède n_0 nœuds, et n_3 éléments. On rappelle l'espace fonctionnel :

$$W_0 = \text{span}\{w_{0i} / i = 1 : n_0\} \quad (2.66)$$

avec w_{0i} la fonction de forme associée au nœud i . On introduit l'espace fonctionnel :

$$W'_0 = \{f / f \in W_0, f = 0 \text{ sur } \Gamma_{H1} \text{ et } f = \gamma_0 \text{ sur } \Gamma_{H2}\} \quad (2.67)$$

On cherche à borner la distance entre $\Omega_{ex}(X, \xi)$ et la solution $\tilde{\Omega}(X, \xi)$ obtenue par la méthode des éléments finis en utilisant la méthode de Galerkin. Cette distance représente l'erreur numérique et est donnée par :

$$er_{abs}(\xi) = \int_E \mathbf{grad}_X(\tilde{\Omega}(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'(X, \xi) \cdot \mathbf{grad}_X(\tilde{\Omega}(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (2.68)$$

On peut constater que l'erreur est la même sur le domaine D du fait de la relation entre μ et μ' (1.135):

$$er_{abs}(\xi) = \int_{D(\xi)} \mathbf{grad}_x(\tilde{\Omega}(x, \xi) - \Omega_{ex}(x, \xi)) \cdot \mu(x, \xi) \cdot \mathbf{grad}_x(\tilde{\Omega}(x, \xi) - \Omega_{ex}(x, \xi)) \cdot dx \quad (2.69)$$

avec $\tilde{\Omega}(x, \xi) = \tilde{\Omega}(X(x, \xi), \xi)$. On note $\Omega^*(X, \xi)$ la fonction linéaire telle que:

$$\Omega^*(X, \xi) = \sum_{i=1}^{n_0} \Omega_{ex}^i(\xi) \cdot w_{0i}(X) \quad (2.70)$$

où $\Omega_{ex}^i(\xi)$ sont les valeurs de la solution exacte aux nœuds i . On peut constater que $\Omega^*(X, \xi)$ appartient à W'_0 . La solution « éléments finis » minimise la distance au sens de la norme d'énergie à la solution exacte parmi les fonctions appartenant à W'_0 . Par conséquent, on obtient :

$$er_{abs}(\xi) \leq \int_E \mathbf{grad}_X(\Omega^*(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'(X, \xi) \cdot \mathbf{grad}_X(\Omega^*(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (2.71)$$

Si on note $e_i, i=1 : n_3$ les éléments du maillage \mathcal{M} , on obtient alors :

$$er_{abs}(\xi) \leq \sum_{i=1}^{n_3} \int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'(X, \xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (2.72)$$

On s'intéresse à l'erreur sur un élément e_i définie de la façon suivante:

$$er_i(\xi) = \int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (2.73)$$

On peut constater, puisque nous avons supposé la matrice jacobienne constante sur chaque élément, que la transformation prend la forme suivante sur l'élément e_i :

$$X = \mathbf{T}(x, \xi) = \mathbf{M}(\xi) \cdot x + c_0(\xi) \quad (2.74)$$

avec $c_0(\xi)$ une constante et $\mathbf{M}(\xi)$ la matrice jacobienne de la transformation sur cet élément. Dans un problème de deux dimensions, la matrice $\mathbf{M}'(\xi) \cdot \mathbf{M}(\xi)$ possède deux valeurs propres $0 < \lambda_{\min}(\xi) \leq \lambda_{\max}(\xi)$.

On note X_0 le centre du cercle de rayon h_e , circonscrit à l'élément e_i .

$$h_e = \max_{X \in e_i} (\|X - X_0\|) = \|X_1 - X_0\| \quad (2.75)$$

avec X_1 le point le plus éloigné de X_0 dans e_i et $\|v\|$ signifie la longueur du vecteur v . Comme e_i est un triangle, alors le point X_1 se situe sur un des sommets de l'élément e_i (Figure 68).

On note également $x_0(\xi) = \mathbf{T}^{-1}(X_0, \xi)$ et $d_i(\xi) = \mathbf{T}^{-1}(e_i, \xi)$ les images respectives de X_0 et e_i par la transformation \mathbf{T}^{-1} . Alors, $d_i(\xi)$ est inscrit dans un cercle de centre x_0 et de rayon h_d (Figure 67- Figure 68).

$$h_d(\xi) = \max_{x \in d_i} (\|x(\xi) - x_0(\xi)\|) = \|x_1(\xi) - x_0(\xi)\| \quad (2.76)$$

avec $x_1(\xi)$ est le point le plus éloigné de x_0 dans d_i . Comme d_i est également un triangle, le point $x_1(\xi)$ se situe sur un des sommets de d_i et on peut choisir le point X_1 parmi les sommets de l'élément e_i tel que le point $x_1(\xi)$ soit l'image de X_1 (Figure 68).

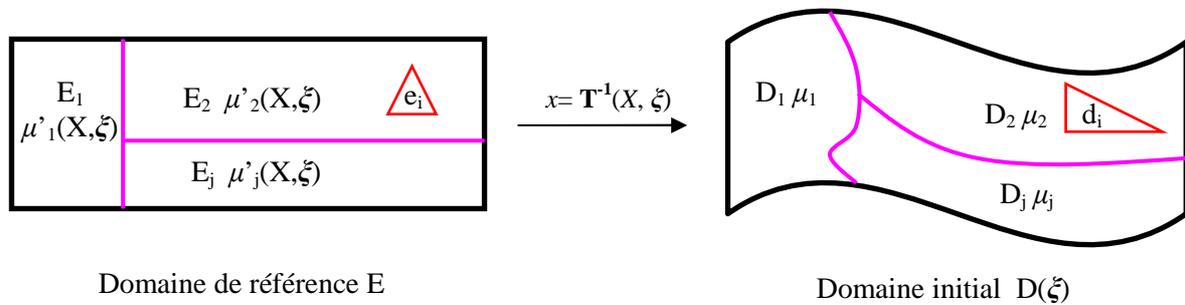


Figure 67. Transformation T

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega^* (X, \xi) - \Omega_{ex} (X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^* (X, \xi) - \Omega_{ex} (X, \xi)) \cdot dX} \leq \\
& \sqrt{\int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega_r (X, \xi) - \Omega_{ex} (X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega_r (X, \xi) - \Omega_{ex} (X, \xi)) \cdot dX} + \\
& \sqrt{\int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega^* (X, \xi) - \Omega_r (X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^* (X, \xi) - \Omega_r (X, \xi)) \cdot dX}
\end{aligned} \tag{2.81}$$

On analyse maintenant chaque terme de la partie droite de (2.81). Pour le premier terme, en utilisant (2.79), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega_r (X, \xi) - \Omega_{ex} (X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega_r (X, \xi) - \Omega_{ex} (X, \xi)) \cdot dX = \\
& \int_{d_i} \mathbf{grad}_x (\Omega_r (x, \xi) - \Omega_{ex} (x, \xi)) \cdot \mu \cdot \mathbf{grad}_x (\Omega_r (x, \xi) - \Omega_{ex} (x, \xi)) \cdot dx \leq \\
& \leq C_2(\xi) \cdot \mu \cdot V_{d_i}(\xi) \cdot h_d^2(\xi) = C_3(\xi) \cdot V_{d_i}(\xi) \cdot h_d^2(\xi) = C_3(\xi) \cdot \frac{V_{e_i}}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \cdot h_d^2(\xi)
\end{aligned} \tag{2.82}$$

avec $C_3(\xi) = C_2(\xi) \cdot \mu$ et $V_{d_i}(\xi)$, V_{e_i} les volumes des éléments d_i et e_i respectivement. Concernant le deuxième terme de la partie droite de (2.81), on peut constater que la fonction linéaire $\Omega_r (X, \xi)$ (2.77) peut s'écrire dans l'élément e_i sous la forme suivante :

$$\Omega_r (X, \xi) = \sum_{k=1}^3 \Omega_r^k(\xi) \cdot w_{0ik}(X) \tag{2.83}$$

On note :

$$\mathbf{GRAD} = [\mathbf{grad}_X w_{0i1}(X) \quad \mathbf{grad}_X w_{0i2}(X) \quad \mathbf{grad}_X w_{0i3}(X)] \tag{2.84}$$

On en déduit alors:

$$\begin{aligned}
& \int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega^* (X, \xi) - \Omega_r (X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^* (X, \xi) - \Omega_r (X, \xi)) \cdot dX \\
& = \int_{e_i} \mu \cdot (\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi))' \mathbf{GRAD}' \cdot \frac{\mathbf{M}'(\xi) \cdot \mathbf{M}(\xi)}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \cdot \mathbf{GRAD} \cdot (\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi)) \cdot dX \\
& \leq \int_{e_i} \mu \cdot (\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi))' \mathbf{GRAD}' \cdot \frac{\lambda_{\max}(\xi)}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \cdot \mathbf{GRAD} \cdot (\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi)) \cdot dX \\
& = \mu \cdot (\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi))' \mathbf{GRAD}' \cdot \frac{\lambda_{\max}(\xi)}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \cdot \mathbf{GRAD} \cdot (\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi)) \cdot V_{e_i}(\xi) \\
& \leq \mu \cdot \|\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi)\|^2 \cdot \lambda_{1\max} \cdot \lambda_{\max}(\xi) \cdot \frac{V_{e_i}(\xi)}{\det(\mathbf{M}(\xi))}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

où $\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi) = [\Omega_{ex}^1(\xi) - \Omega_r^1(\xi) \quad \Omega_{ex}^2(\xi) - \Omega_r^2(\xi) \quad \Omega_{ex}^3(\xi) - \Omega_r^3(\xi)]$ est le vecteur contenant la différence de $\Omega_{ex}(X, \xi)$ et $\Omega_r(X, \xi)$ aux 3 sommets du triangle e_i . Le terme $\lambda_{1\max}$ est la valeur propre maximale de $\mathbf{GRAD}' \cdot \mathbf{GRAD}$.

En utilisant (2.80)(a), on obtient :

$$\|\Theta^*(\xi) - \Theta_r(\xi)\|^2 \leq 3C_1^2(\xi) \cdot h_d^4(\xi) \quad (2.86)$$

En remplaçant (2.86) dans (2.85), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_r(X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_r(X, \xi)) \cdot dX \\ & \leq C_4(\xi) \cdot h_d^4(\xi) \cdot \lambda_{1\max} \cdot \lambda_{\max}(\xi) \cdot \frac{V_{e_i}(\xi)}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Avec $C_4(\xi) = 3C_1^2(\xi) \cdot \mu$. A partir de (2.73), (2.79), (2.81), (2.82) et (2.87), on obtient:

$$\begin{aligned} er_i & \leq (\sqrt{C_3(\xi)} \cdot h_d(\xi) + \sqrt{C_4(\xi) \cdot \lambda_{\max}(\xi) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_d^2(\xi))^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\det(\mathbf{M}(\xi))} = \\ & = (\sqrt{C_3(\xi)} \cdot h_d(\xi) + \sqrt{C_4(\xi) \cdot \lambda_{\max}(\xi) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_d^2(\xi))^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\sqrt{\lambda_{\max}(\xi) \lambda_{\min}(\xi)}} \end{aligned} \quad (2.88)$$

L'étape finale consiste à représenter $h_d(\xi)$ en fonction de h_e . Cette étape est réalisée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} h_e^2 & = \|X_1 - X_0\|^2 = \|\mathbf{T}(x_1, \xi) - \mathbf{T}(x_0, \xi)\|^2 \\ & = (\mathbf{T}(x_1, \xi) - \mathbf{T}(x_0, \xi))^t \cdot (\mathbf{T}(x_1, \xi) - \mathbf{T}(x_0, \xi)) \\ & = (x_1(\xi) - x_0(\xi))^t \cdot \mathbf{M}'(\xi) \cdot \mathbf{M}(\xi) \cdot (x_1(\xi) - x_0(\xi)) \\ & \geq \lambda_{\min}(\xi) \|x_1(\xi) - x_0(\xi)\|^2 = \lambda_{\min}(\xi) h_d^2(\xi) \end{aligned} \quad (2.89)$$

Rappelons que $\lambda_{\min}(\xi)$ est la valeur propre minimale de la matrice $\mathbf{M}'(\xi) \cdot \mathbf{M}(\xi)$. En utilisant (2.89) et (2.88), on obtient l'encadrement final suivant:

$$\begin{aligned} er_i(\xi) & \leq (\sqrt{C_3(\xi)} \cdot h_d(\xi) + \sqrt{C_4(\xi) \cdot \lambda_{\max}(\xi) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_d^2(\xi))^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\sqrt{\lambda_{\max}(\xi) \lambda_{\min}(\xi)}} \\ & \leq (\sqrt{C_3(\xi)} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\xi)}{\lambda_{\min}(\xi)}} \sqrt{C_4(\xi) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_e)^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\lambda_{\min}(\xi) \sqrt{\lambda_{\max}(\xi) \lambda_{\min}(\xi)}} \cdot h_e^2 \end{aligned} \quad (2.90)$$

A partir de (2.90), on peut constater que pour diminuer la borne supérieure de l'erreur numérique, il faut augmenter $\lambda_{\min}(\xi)$ et diminuer $\lambda_{\max}(\xi)$. Sachant qu'on a la contrainte suivante pour ces valeurs propres :

$$V_D(\xi) = \int_E \frac{1}{\det(\mathbf{M}(X, \xi))} dX = \int_E \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}(X, \xi) \lambda_{\min}(X, \xi)}} dX = \sum_{i=1}^{n_3} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}^i(\xi) \lambda_{\min}^i(\xi)}} V_{e_i} \quad (2.91)$$

avec $\lambda_{\max}^i(\xi)$, $\lambda_{\min}^i(\xi)$ les deux valeurs propres de $\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}$ dans l'élément e_i et V_E , V_D les volumes des domaines E et D.

D'une façon similaire, dans le cas 3D où la matrice $\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}$ est de dimension 3×3 , on peut obtenir un estimateur d'erreur suivant :

$$\begin{aligned} er_i(\xi) &\leq (\sqrt{C_3(\xi)} \cdot h_d(\xi) + \sqrt{C_4(\xi) \cdot \lambda_{\max}(\xi) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_d(\xi))^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\sqrt{\lambda_{\max}(\xi) \lambda_{\text{mil}}(\xi) \lambda_{\min}(\xi)}} \\ &\leq (\sqrt{C_3(\xi)} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\xi)}{\lambda_{\min}(\xi)}} \sqrt{C_4(\xi) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_e)^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\lambda_{\min}(\xi) \sqrt{\lambda_{\max}(\xi) \lambda_{\text{mil}}(\xi) \lambda_{\min}(\xi)}} \cdot h_e^2 \end{aligned} \quad (2.92)$$

où $0 < \lambda_{\min}(\xi) \leq \lambda_{\text{mil}}(\xi) \leq \lambda_{\max}(\xi)$ les valeurs propres de $\mathbf{M}'(\xi) \cdot \mathbf{M}(\xi)$. On a la contrainte suivante sur les valeurs propres :

$$V_D(\xi) = \int_E \frac{1}{\det(\mathbf{M}(X, \xi))} dX = \sum_{i=1}^{n_3} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}^i(\xi) \lambda_{\text{mil}}^i(\xi) \lambda_{\min}^i(\xi)}} V_{e_i} \quad (2.93)$$

On peut obtenir en effectuant des développements similaires une borne supérieure de l'erreur dans le cas de formulation en potentiel vecteur :

$$er'_i(\xi) = \int_{e_i} \mathbf{rot}_X (A^*(X, \xi) - A_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'^{-1}(\xi) \cdot \mathbf{rot}_X (A^*(X, \xi) - A_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (2.94)$$

avec $A_{ex}(x, \xi) = A_{ex}(X(x, \xi), \xi)$ le potentiel vecteur exact du problème défini dans le domaine E avec une perméabilité modifiée μ' et A^* l'interpolation de A_{ex} aux arêtes. La formulation obtenue prend la forme suivante (voir l'annexe 4 pour plus de détail) :

$$er'_i(\xi) \leq (\sqrt{C'_3(\xi)} + \sqrt{\frac{\lambda_{\text{mil}}(\xi) \lambda_{\max}(\xi)}{\lambda_{\min}(\xi)}} \sqrt{C'_4(\xi) \cdot \lambda'_{1\max}} \cdot h_e)^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\lambda_{\min}(\xi) \sqrt{\lambda_{\max}(\xi) \lambda_{\text{mil}}(\xi) \lambda_{\min}(\xi)}} \cdot h_e^2 \quad (2.95)$$

Avec $\lambda'_{1\max}$ la valeur propre maximale de la matrice $\mathbf{ROT}^t \cdot \mathbf{ROT}$ avec :

$$\mathbf{ROT} = [\mathbf{rot}_X w_{i1}(X) \quad \mathbf{rot}_X w_{i2}(X) \quad \mathbf{rot}_X w_{i3}(X) \quad \mathbf{rot}_X w_{i4}(X) \quad \mathbf{rot}_X w_{i5}(X) \quad \mathbf{rot}_X w_{i6}(X)] \quad (2.96)$$

Dans la suite, une application numérique pour illustrer les résultats ci-dessus sera présentée.

2.2.2.2. Exemple d'application

Dans cette partie, on va illustrer les résultats obtenus sur l'estimation d'erreur présentées dans la partie 2.2.2.1 sur un exemple de magnétostatique présenté sur la Figure 69:

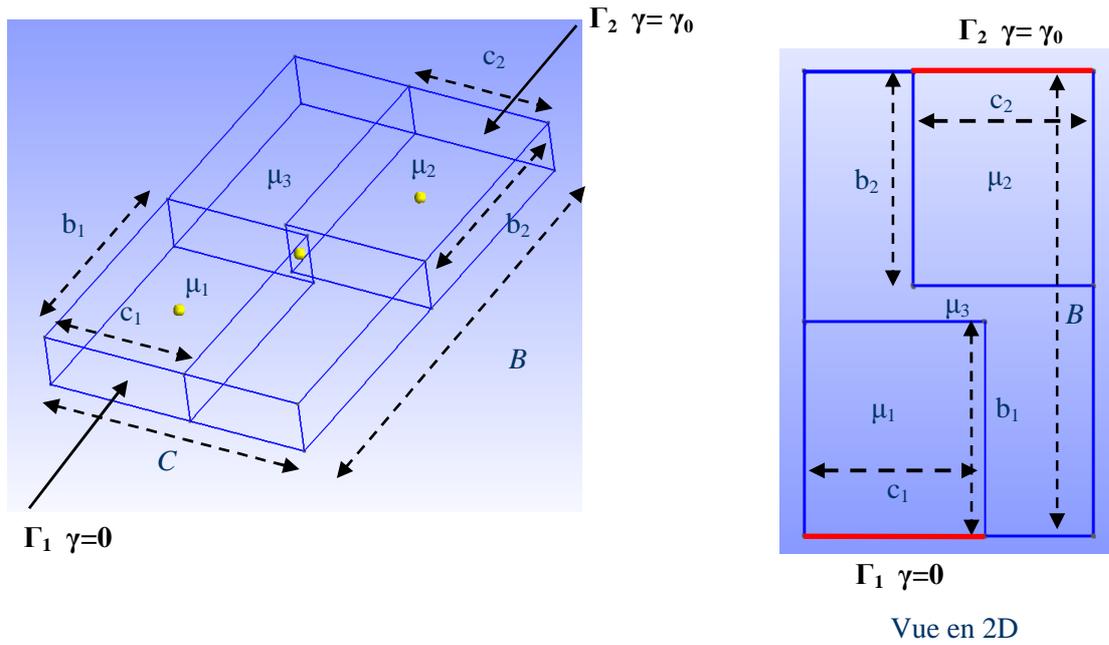


Figure 69. Système étudié

On impose une force magnétomotrice $\gamma_0=2$ entre les deux faces opposées Γ_1, Γ_2 et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur le reste de la frontière. Les incertitudes sur la géométrie sont portées par les variables aléatoires c_1 et c_2 . On prend $B=6.5, C=4, b_1=b_2=3.235, \mu_1=\mu_2=1000$ et $\mu_3=1$. Les variables aléatoires c_1 et c_2 varient dans l'intervalle $[2.05, 2.5]$. On se propose de comparer les deux transformations présentées sur les Figure 70 et Figure 71:

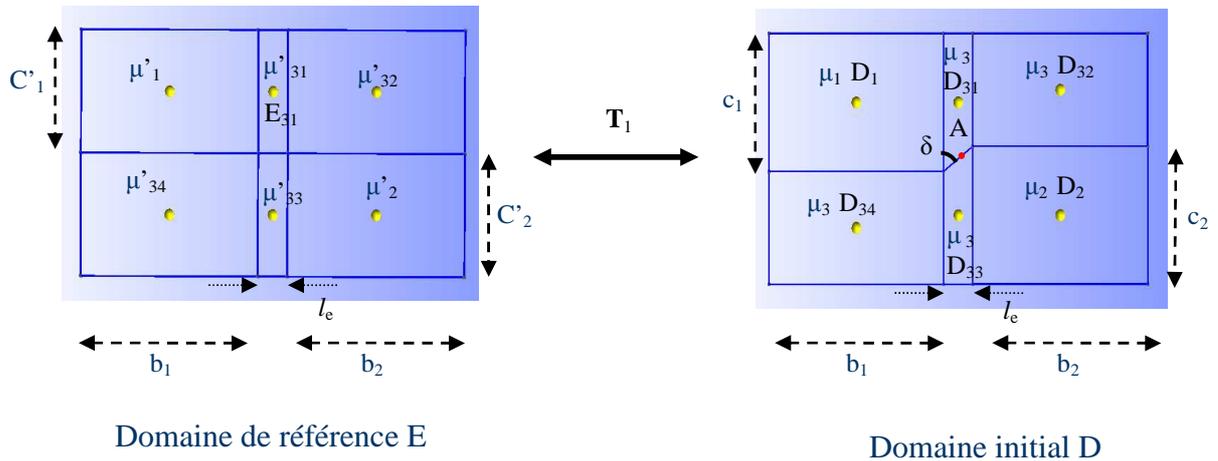


Figure 70. Transformation 1

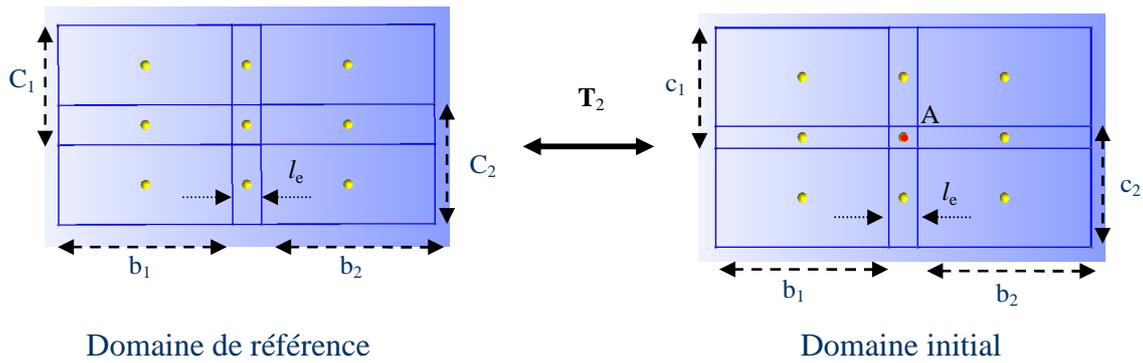


Figure 71. Transformation 2

On prend $C_1=C_2=2.1$ pour la transformation T_2 et $C'_1=C'_2=2$ pour la transformation T_1 . On peut constater que la transformation T_2 correspond à une « dilatation-compression » de chaque sous-domaine. Par contre, la transformation T_1 présente une déformation de type « cisaillement » pour transformer les sous-domaines E_{31} en D_{31} et E_{33} en D_{33} . Cette transformation génère une matrice $M'M$ avec un grand ratio r entre la valeur propre maximum et la valeur propre minimum comme on peut constater sur la Figure 72. Sur cette figure, on trace l'évolution du logarithme de ce ratio au point $A(B/2, C/2)$ (voir la Figure 70, la Figure 71) en fonction de la cotangente de l'angle δ qui correspond à la valeur de $(c_1 + c_2 - C)/l_e$ pour les deux transformations.

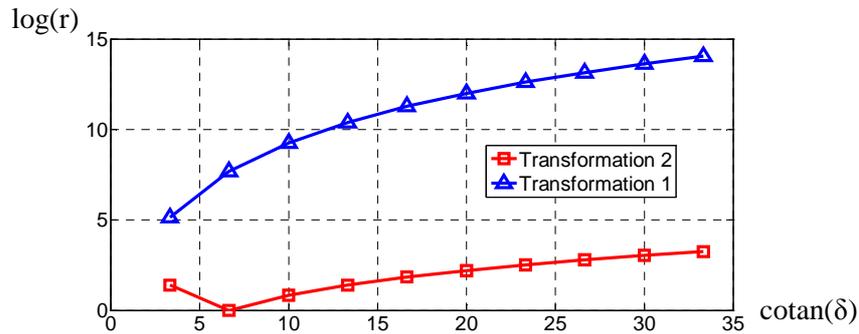


Figure 72. Rapport $r = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ au point A

Sur la Figure 73, on trace $r_2 = \log(1/\lambda_{min})$ au point A qui intervient dans l'expression de l'erreur numérique pour les deux formulations (2.90), (2.95) en fonction de $\cotan(\delta)$. On peut constater aussi que ce ratio est plus important dans le cas de la transformation 1 que dans le cas de la transformation 2.

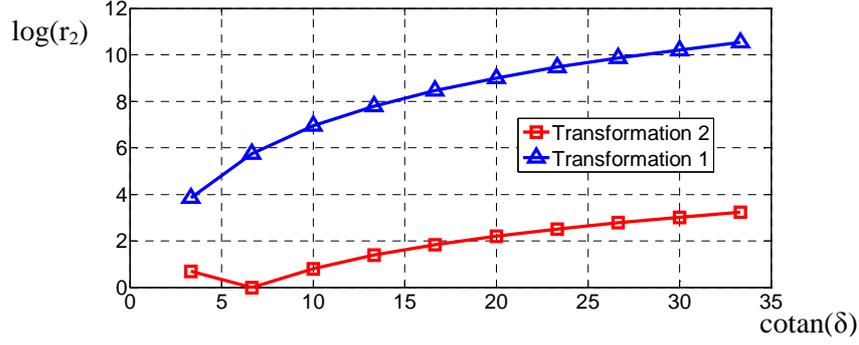


Figure 73. Rapport $r_2 = \log(1/\lambda_{\min})$ au point A

Maintenant, on trace sur la Figure 74 la répartition du rapport $r = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ dans le cas $c_1=c_2=2.2$. On constate que pour la transformation 1, il existe une zone (MNPQ) où ce ratio présente des valeurs très élevées.

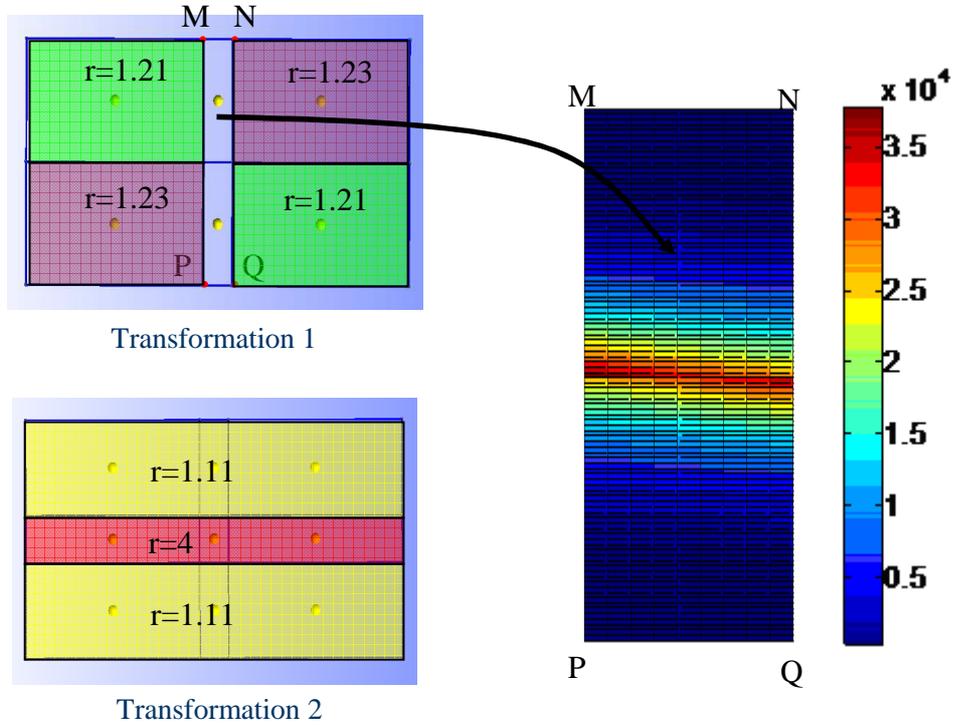


Figure 74. Répartition du rapport $r = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ dans le cas $c_1=c_2=2.2$

Finalement, il est possible d'évaluer l'erreur numérique a posteriori (er_p) en utilisant les résultats obtenus par les deux formulations en appliquant le théorème de l'hypercerce qui permet de calculer la distance de la solution numérique avec la solution exacte sans la connaître. Cet estimateur d'erreur s'écrit [18] :

$$\begin{aligned}
 er_p &= \int_E (\mathbf{H}'_{ad} - \mu'^{-1} \mathbf{B}'_{ad}) \mu' (\mathbf{H}'_{ad} - \mu'^{-1} \mathbf{B}'_{ad}) = \\
 &= \int_E (\mathbf{H}'_{ad} - \mathbf{H}'_{ex}) \mu' (\mathbf{H}'_{ad} - \mathbf{H}'_{ex}) + \int_E (\mathbf{B}'_{ad} - \mathbf{B}'_{ex}) \mu'^{-1} (\mathbf{B}'_{ad} - \mathbf{B}'_{ex})
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

où $\mathbf{H}'_{ex}, \mathbf{B}'_{ex}$ sont le champ et l'induction magnétiques exacts et $\mathbf{H}'_{ad}, \mathbf{B}'_{ad}$ sont le champ et l'induction magnétiques admissibles du problème défini dans le domaine de référence. Ces champs $\mathbf{H}'_{ad}, \mathbf{B}'_{ad}$ sont obtenus en utilisant la formulation en potentiel scalaire et la formulation en potentiel vecteur :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}'_{ad} &= \text{grad}_x \tilde{\Omega} \\ \mathbf{B}'_{ad} &= \text{rot}_x \tilde{A}\end{aligned}\tag{2.98}$$

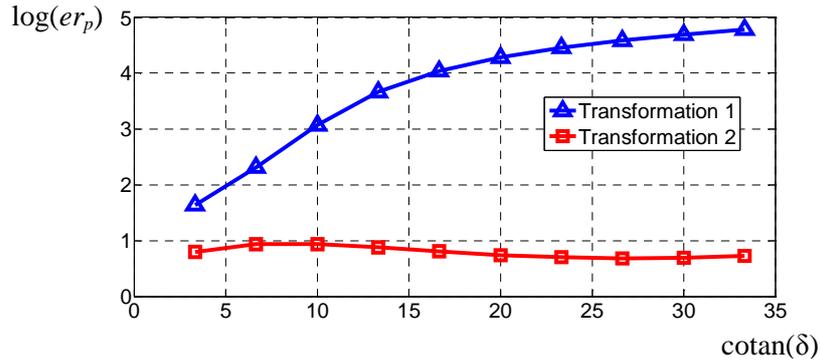


Figure 75. Erreur numérique en fonction de $\cotan(\delta)$

Sur la Figure 75, on a tracé l'évolution du logarithme de l'erreur a posteriori er_p déterminé par (2.97) en fonction de $\cotan(\delta)$. On constate que l'évolution des courbes des ratios de valeurs propres de $\mathbf{M}'\mathbf{M}$, liées à l'estimateur a priori, et celle de l'estimateur a posteriori sont cohérentes. Ceci montre que l'approche *a priori* permet d'évaluer l'influence des paramètres de la transformation en particulier les valeurs propres de $\mathbf{M}'\mathbf{M}$ sur l'erreur numérique.

De plus, la comparaison des erreurs introduites par les transformations montrent clairement l'intérêt de limiter le ratio entre les valeurs propres de $\mathbf{M}'\mathbf{M}$, ce qui revient à privilégier plutôt les transformations de type « compression » que « cisaillement ».

Dans les parties 2.1 et 2.2, des techniques de détermination de la transformation utilisée dans la méthode de transformation pour résoudre un problème aux incertitudes portées par la géométrie ont été discutées. Concernant l'exploitation des résultats, nous nous sommes jusqu'à présent focalisés principalement sur le calcul des grandeurs globales. Dans ce cas, une approche utilisant un chaos polynomial est bien adaptée pour l'approximation. Cependant, comme cela a été abordé dans la partie 1.4.1.3, pour certaines grandeurs locales, une approximation par un chaos polynomial peut ne pas être la plus pertinente. Ce phénomène peut s'expliquer par une discontinuité qui apparaît au niveau stochastique de la grandeur locale qui ne peut pas être prise en compte par un chaos polynomial classique. Rappelons que ce dernier est continu et infiniment dérivable. Une possibilité pour résoudre ce problème consiste à enrichir la base polynomiale [9, 29, 30] par des fonctions qui permettent de prendre en compte la discontinuité stochastique (voir

annexe 5). Dans la partie suivante, on va montrer que l'utilisation de la méthode de transformation permet de prendre en compte naturellement cette discontinuité.

2.3. Etude des grandeurs locales

Dans cette partie, on va montrer d'abord que la méthode de transformation est efficace pour traiter les discontinuités des grandeurs locales dans un problème aux incertitudes portées par la géométrie. Puis, un exemple analytique et un exemple numérique sont présentés pour l'illustration.

2.3.1. Discussion sur la discontinuité stochastique

On a vu dans l'exemple 2 de la partie 1.4.1.3 que l'utilisation d'un chaos polynomial pour approcher le champ magnétique dans le cas où les incertitudes sont portées par la géométrie peut ne plus être pertinente. Ce phénomène est expliqué par la discontinuité stochastique du champ magnétique. Par exemple, le champ magnétique en un point fixe du domaine D , qui peut se situer dans des sous-domaines de perméabilités différentes en fonction des réalisations possibles de la géométrie, possède cette discontinuité.

Comme on l'a vu dans la partie 1.4.2.3, la méthode de transformation consiste à transformer un problème aux incertitudes géométriques en un problème aux des incertitudes portées par la loi de comportement, défini sur un domaine de référence déterministe. Dans ce dernier problème, les points fixes du domaine de référence se situent toujours dans un même sous domaine. Il n'existe alors pas de discontinuités au niveau stochastique des grandeurs locales aux points fixes du domaine de référence. Par conséquent, dans le domaine de référence, le champ magnétique par exemple peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{H}'(X, \xi) \approx \mathbf{H}'^P(X, \xi) = \sum_{i=1}^P \mathbf{H}'_i(X) \Psi_i(\xi) \quad (2.99)$$

Puis, la solution sur le domaine D s'écrit :

$$\mathbf{H}^P(x, \xi) = \mathbf{M}(X(x, \xi), \xi) \cdot \mathbf{H}'^P(X(x, \xi), \xi) \quad (2.100)$$

On peut constater que pour un point $X = X_0$ donné, $\mathbf{M}(X, \xi)$ et $\mathbf{H}'^P(X, \xi)$ sont continus en fonction de ξ . Par contre, avec un $\xi = \xi_0$ donné $\mathbf{M}(X, \xi)$ et $\mathbf{H}'^P(X, \xi)$ peuvent être discontinus en fonction de X . Les points de discontinuité $X=X_0'$ sont ceux qui se situent sur les interfaces entre des matériaux. Par conséquent, pour un point $x=x_0$ donné, la discontinuité de $\mathbf{H}^P(x_0, \xi)$ en fonction de ξ peut être prise en compte par $\mathbf{M}(X(x_0, \xi), \xi)$ et $\mathbf{H}'^P(X(x_0, \xi), \xi)$. Dans la suite, on va illustrer cet aspect avec l'exemple analytique présenté dans la partie 1.4.1.3.

2.3.2. Exemple analytique

Revenons à l'exemple de magnétostatique 1D de la partie 1.4.1.3 :

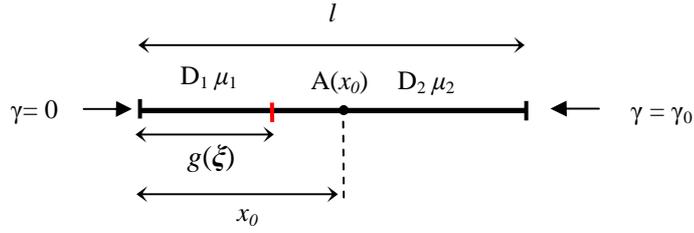


Figure 76. Système étudié

On s'intéresse à la composante suivant l'axe x_1 du champ magnétique au point A (Figure 76) qui prend analytiquement la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_A(x_0, \xi) &= \frac{\gamma_0 \mu_1}{\mu_2 g(\xi) + \mu_1 (l - g(\xi))} \quad \text{avec } g(\xi) < x_0 \\ \mathbf{H}_A(x_0, \xi) &= \frac{\gamma_0 \mu_2}{\mu_2 g(\xi) + \mu_1 (l - g(\xi))} \quad \text{avec } g(\xi) > x_0 \end{aligned} \quad (2.101)$$

Concernant la méthode de transformation, on peut ramener le problème défini sur la Figure 76 à un problème défini sur un domaine déterministe en utilisant la transformation suivante :

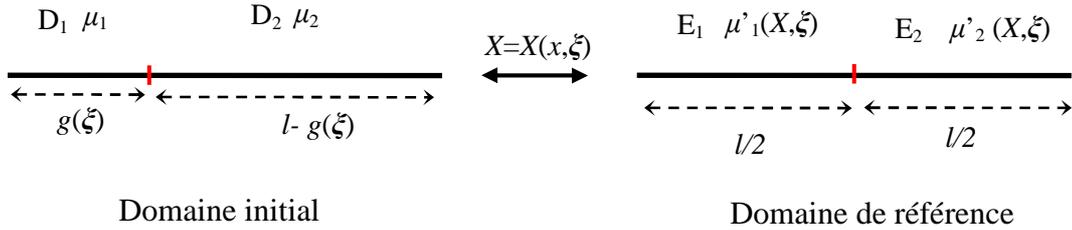


Figure 77. Transformation utilisée dans le cas 1D

$$X = \begin{cases} x \cdot \frac{l}{2g(\xi)} & \text{avec } x \leq g(\xi) \\ x \cdot \frac{l}{2(l-g(\xi))} + \frac{l(l-2g(\xi))}{2(l-g(\xi))} & \text{avec } x > g(\xi) \end{cases} \quad (2.102)$$

Cette transformation admet une matrice jacobienne (qui devient un scalaire dans ce cas 1D) suivante :

$$\mathbf{M}(X, \xi) = \frac{l}{2g(\xi)} I_{E_1}(X) + \frac{l}{2(l-g(\xi))} I_{E_2}(X) \quad (2.103)$$

avec $I_{E_i}(X)$, $i=1, 2$, la fonction indicatrice qui est égale à 1 dans le domaine E_i et zéro ailleurs. La perméabilité dans le domaine de référence prend la forme suivante :

$$\mu'(X, \xi) = \mu'_1 I_{E1}(X) + \mu'_2 I_{E2}(X) = \mu_1 \cdot \frac{l}{2g(\xi)} I_{E1}(X) + \mu_2 \cdot \frac{l}{2(l-g(\xi))} I_{E2}(X) \quad (2.104)$$

Le problème défini dans le domaine E admet la solution analytique suivante :

$$\mathbf{H}'(X, \xi) = \frac{2\gamma_0 g(\xi) \mu_2}{l(\mu_2 g(\xi) + \mu_1(l-g(\xi)))} I_{E1}(X) + \frac{2\gamma_0(l-g(\xi)) \mu_1}{l(\mu_2 g(\xi) + \mu_1(l-g(\xi)))} I_{E2}(X) \quad (2.105)$$

On peut constater que la solution (2.105) est continue en fonction de ξ pour un X donné. Par conséquent, elle peut être approchée par un chaos polynomial sous la forme (2.99). La solution dans le domaine initial D est obtenue par (2.100). On peut constater aussi que, pour une réalisation ξ donnée, le champ magnétique (2.105) est discontinu en fonction de X du fait de la présence des fonctions indicatrices $I_{E1}(X)$ et $I_{E2}(X)$. Comme X est une fonction en x et ξ le champ magnétique dans le domaine initial (2.100) peut être discontinu en fonction de ξ pour un x donné.

Sur la Figure 78, on trace l'évolution du champ magnétique au point A obtenu par la méthode d'enrichissement développée dans [9, 29, 30] (voir annexe 5) et celui obtenu par la méthode de transformation en utilisant (2.99) avec $P=8$ en comparant avec la solution exacte.

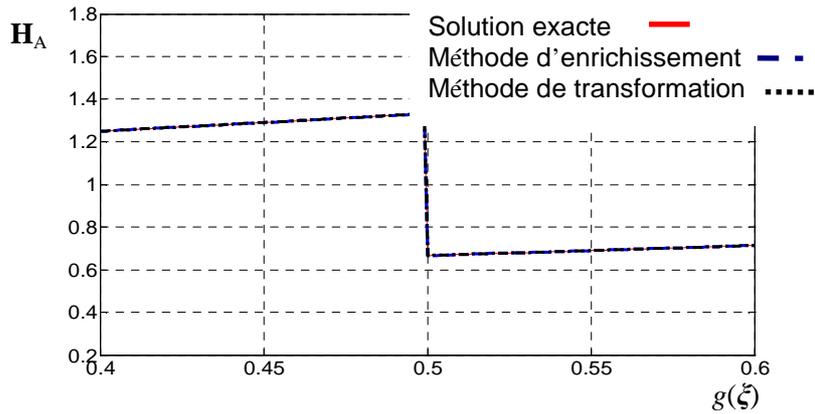


Figure 78. Champ magnétique au point A

Cet exemple montre que la méthode de transformation semble bien adaptée pour calculer des grandeurs locales.

2.3.3. Exemple numérique

On reprend le problème de magnétostatique, défini sur le domaine $D(\xi)$, présenté dans la partie 2.1.2.3 (Figure 43). Par contre, on fixe x_0, y_0, R (voir la partie 2.1.2.3). Les incertitudes géométriques sont modélisées par les variables aléatoires uniformes indépendantes $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ qui sont les rayons de deux dents en face du disque D_3 . Ces variables aléatoires uniformes sont définies dans l'intervalle $[a ; b]$. On peut alors représenter le vecteur aléatoire \mathbf{r} en fonction du vecteur aléatoire $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ avec ξ_1, ξ_2 deux variables aléatoires uniformes indépendantes dans l'intervalle $[-1,1]$.

L'objectif est de comparer la composante $\mathbf{H}_{x_2}(\xi)$ suivant l'axe Ox_2 du champ magnétique respectivement aux points Q_1, Q_2, Q_3 , obtenue par différentes méthodes. On approche d'abord la variable aléatoire $\mathbf{H}_{x_2}(\xi)$ par un chaos polynomial classique (2.99) en utilisant la méthode de transformation (méthode 1). Pour comparer les résultats obtenus par la méthode de transformation, la variable $\mathbf{H}_{x_2}(\xi)$ est approchée ensuite par un chaos polynomial en utilisant une méthode de remaillage (Figure 21) (méthode 2). Concernant la méthode 2, le chaos polynomial utilisé est soit classique ou soit enrichi (voir annexe 5) dépendant de la position du point étudié.

Le point Q_1 est fixé mais peut être localisé dans le sous domaine D_1 ou dans D_4 dépendant de la valeur de ξ_1 . Le point Q_2 est fixé mais il est localisé toujours dans D_4 pour toutes les valeurs de ξ_1 et ξ_2 . Le point Q_3 est localisé sur la surface de la dent D_1 mais reste toujours à l'intérieur de celle-ci. Ce point se déplace en fonction de la valeur de ξ_1 .

Tableau 7. Composante du champ magnétique suivant l'axe Ox_2 obtenue par les méthodes 1 et 2

	Point Q_1		Point Q_3		Point Q_2	
	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2
Valeur moyenne	1.45	1.47	3.4×10^{-3}	3.4×10^{-3}	3.12	3.14
Ecart-type	1.49	1.50	2.13×10^{-4}	2.17×10^{-4}	0.20	0.20

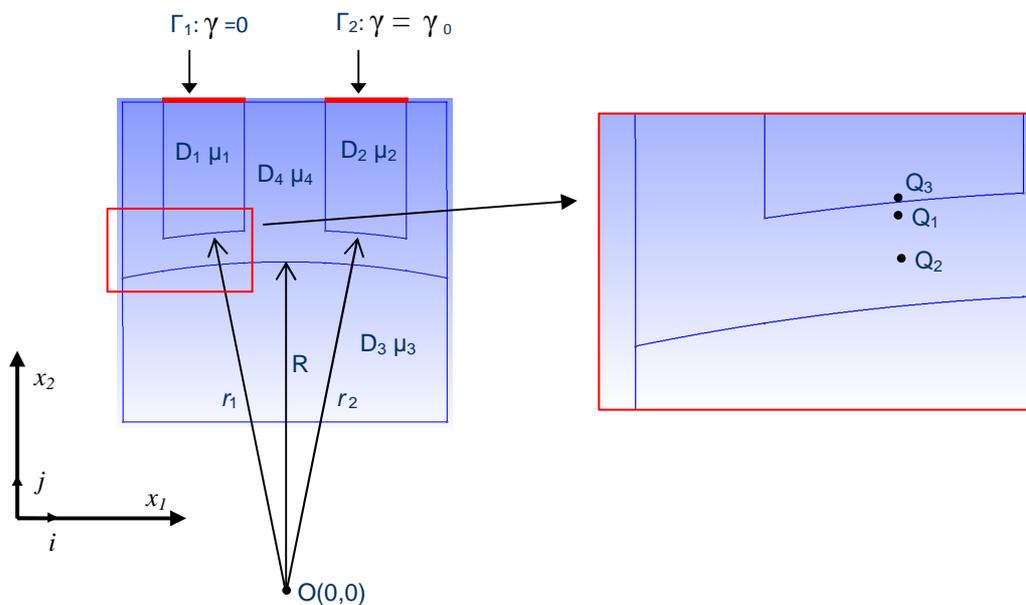


Figure 79. Problème magnétostatique