

STABILITÉ DES COUPOLES EN PIERRES SÈCHES ÉDIFIÉES SANS CINTRE

André TIRET*

Cet exposé concerne l'étude de la stabilité des constructions en pierres sèches, de forme hémisphérique ou ogivale, édifiées sans interposition de mortier, sans enduit, sans utilisation de coffrages ou d'un cintre.

Ces constructions sont très nombreuses et diversifiées sur le pourtour méditerranéen. On les rencontre dans les régions arides, dépourvues de végétation, d'économie pauvre ; elles ne demandent pas une main d'œuvre spécialisée pour leur mise en œuvre ; elles se sont développées sur les plateaux calcaires sur lesquels on peut prélever des blocs ou des dalles, et elles ne nécessitent aucun autre apport pour leur édification.

Ces constructions étant des structures spatiales (en 3 dimensions), l'étude de leur équilibre peut être résolue par le calcul, certes laborieux, mais dont les résultats sont d'application facile.

L'étude permet donc de calculer les contraintes dans les sections les plus sollicitées,

d'établir les règles de bonne construction, de définir les constructions autostables, de dresser un tableau-guide pour l'amateur-constructeur et, enfin, de percer le secret de Brunelleschi, le génial constructeur du Duomo (coupole) de la cathédrale Sainte-Marie-de-la-Fleur à Florence.

Un promeneur curieux et aventureux

Un promeneur attentif qui parcourt la campagne méditerranéenne, la Provence (dont le Lubéron), l'Ardèche, l'Aveyron et quelques autres régions du sud de la France, est frappé de rencontrer sur son chemin des constructions en forme de coupoles, édifiées en pierres sèches, c'est-à-dire sans interposition de mortier et sans enduit. Leur nom local est agréable à l'oreille : "bories" en Provence, "capitelles" en Ardèche, "cazelles" en Aveyron...

(*) Ingénieur des Arts et Métiers.

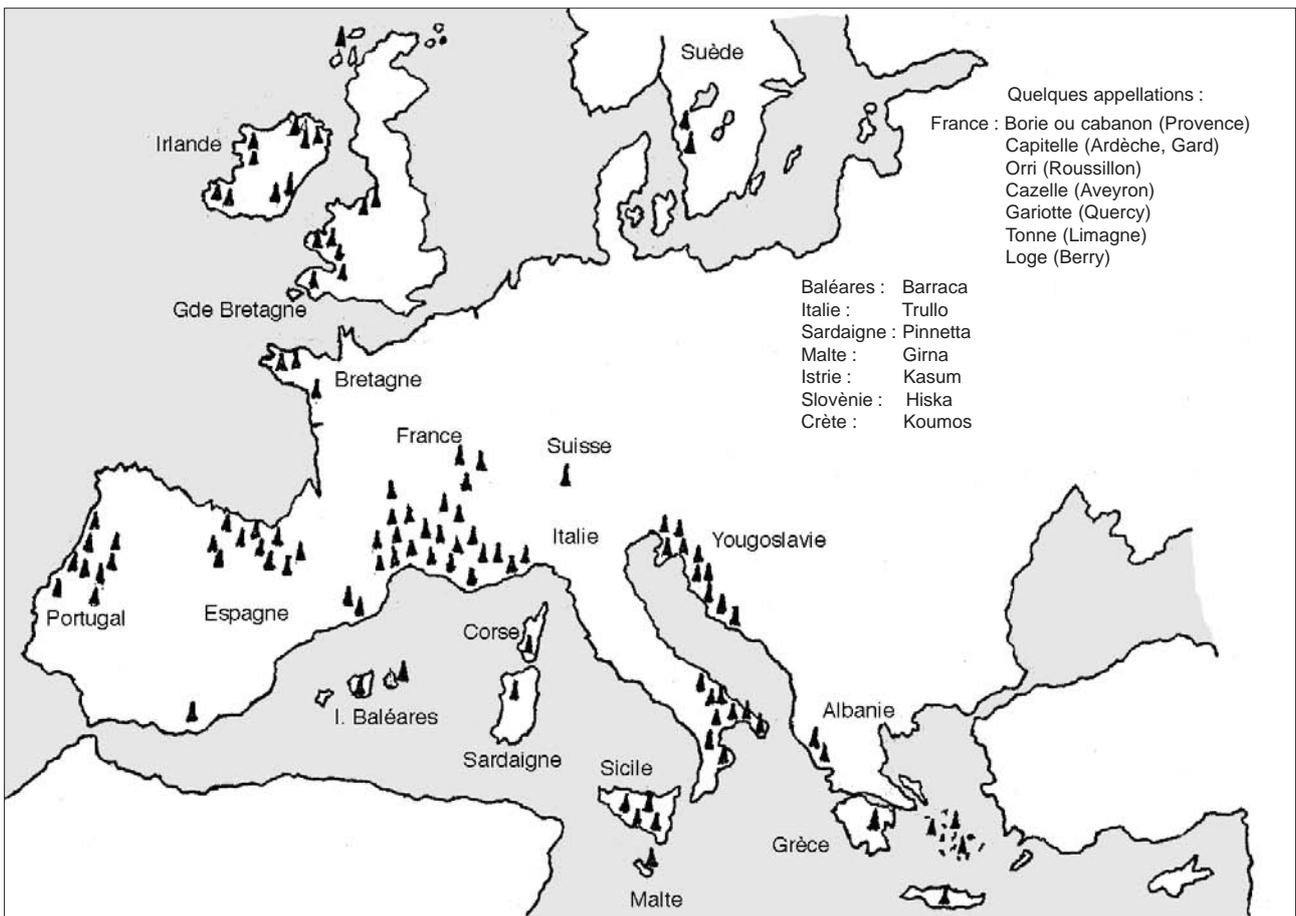
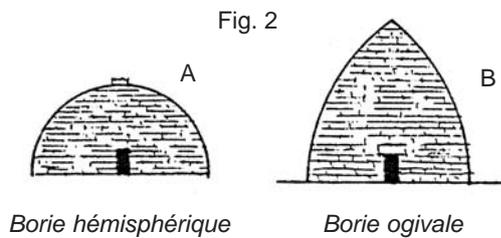


Fig. 1 - Les constructions à coupole et en pierres sèches en Europe.



Les pierres utilisées sont généralement plates, d'épaisseur variable de 4 à 12 cm, soigneusement empilées. La surprise de notre promeneur est d'autant plus grande lorsqu'il apprend que ces constructions ont été montées par des ouvriers locaux, sans étaie-ment et sans coffrage. La base est généralement circulaire, d'un diamètre intérieur inférieur à 4 m, la forme en élévation est soit hémisphérique (fig. 2 A), soit ogivale (fig. 2 B), d'une hauteur totale de 2 à 5 m.

Notre promeneur observe que si certaines constructions sont en bon état, beaucoup d'autres, dont les plus petites, sont effondrées.



Fig. 3 - Barraca minorquine.

S'il s'aventure dans l'île de Minorque (Baléares), au milieu d'une campagne aride, dépourvue de toute végétation, il sera stupéfait de rencontrer d'énormes constructions nommées "barracas"(fig. 3), toujours en pierres sèches, en gradins, réservant dans leur intérieur un espace libre d'un diamètre à la base variant de 4,50 à 9 m et d'une hauteur extérieure de 6 à 8 m. Ces constructions ont été édifiées probablement au XIX^e siècle. Les pierres utilisées sont de toutes formes.

Enfin, si notre promeneur se risque en Grèce, à Mycènes, il découvrira le tombeau d'Agamemnon, dit Trésor d'Atrée, vaste coupole

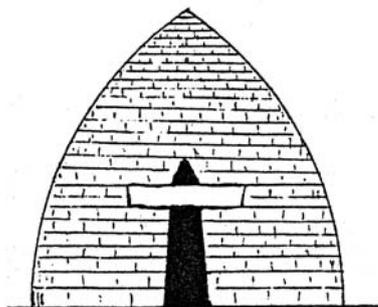


Fig. 4 - Tombeau d'Agamemnon.

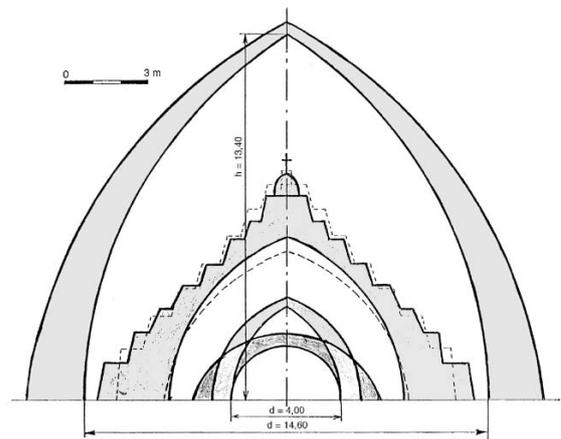


Fig. 5 - Comparaison des constructions étudiées.

d'un diamètre intérieur de 14,60 m et d'une hauteur intérieure de 13,40 m (fig. 4). La construction a été réalisée en 1400 av. J.-C., en 32 lits de pierres sèches équarries, parfaitement assisées et ajustées.

Notre promeneur ne peut que rester perplexe devant ces constructions qui, dans leur simplicité, défient le temps. Il va donc chercher à définir les conditions nécessaires pour assurer leur stabilité, et, pour y parvenir, il va faire appel aux mathématiques.

Etude de la stabilité

(Les développements mathématiques sont donnés dans les annexes en fin de l'exposé)

Principe du calcul

On considère une coque à base circulaire. Comme dans un planisphère terrestre, on découpe la coque en méridiens et en cercles parallèles (appelés plus simplement parallèles). On isole un élément de surface de coque abcd, infiniment petit, délimité par 2 méridiens et par 2 parallèles très voisins (fig. 6)

On étudie l'équilibre de cet élément (par le calcul différentiel), puis on étend le calcul par intégration à l'ensemble de la surface de la coque.

On détermine ainsi l'effort N_ϕ (N phi) qui se développe dans un méridien et l'effort N_θ (N téta) qui se développe dans un parallèle sous l'effet du poids propre de la coque (fig. 7).

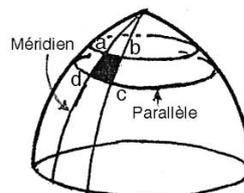


Fig. 6

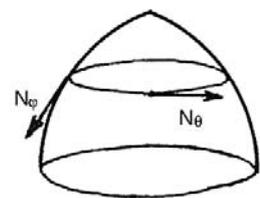


Fig. 7

Tableau-guide pour la construction de coupôles

Les constructions sont classées en fonction de leur élancement h/d .

Les constructions dont le diamètre de base d est supérieur au diamètre d_{mini} (dernière colonne) sont autostables.

h = hauteur intérieure (au sommet).

d = diamètre intérieur de la base.

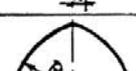
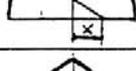
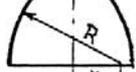
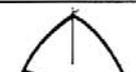
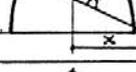
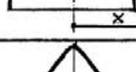
p = poids moyen unitaire de la coupole (en t/m^2).

R = rayon de la génératrice de la paroi intérieure.

X = distance du centre du rayon R à l'axe de la coupole.

N_{φ} = effort dans un méridien.

N_{θ} = effort dans un parallèle.

Élancement h/d	Coques	h	R	X	Contrainte sur la base		$d_{\text{mini}} = 4 \frac{N_{\theta}}{N_{\varphi}}$
					N_{φ}	N_{θ}	
$\frac{h}{d} = 0,50$		$0,50 d$	$0,50 d$	0	pR	pR	$4,00 m$
$\frac{h}{d} = 0,60$		$0,60 d$	$0,61 d$	$0,11 d$	$0,894 pR$	$- 0,733 pR$	$3,28 m$
$\frac{h}{d} = 0,70$		$0,70 d$	$0,74 d$	$0,24 d$	$0,805 pR$	$- 0,544 pR$	$2,70 m$
$\frac{h}{d} = 0,80$		$0,80 d$	$0,89 d$	$0,89 d$	$0,728 pR$	$- 0,409 pR$	$2,24 m$
$\frac{h}{d} = 0,90$		$0,90 d$	$1,06 d$	$0,56 d$	$0,664 pR$	$- 0,313 pR$	$1,89 m$
$\frac{h}{d} = 1$		d	$1,25 d$	$0,75 d$	$0,609 pR$	$- 0,244 pR$	$1,60 m$
$\frac{h}{d} = 1,20$		$1,20 d$	$1,69 d$	$1,19 d$	$0,521 pR$	$- 0,154 pR$	$1,18 m$
$\frac{h}{d} = 1,50$		$1,50 d$	$2,50 d$	$2d$	$0,426 pR$	$- 0,085 pR$	$0,80 m$
$\frac{h}{d} = 2$		$2 d$	$4,25 d$	$3,75 d$	$0,325$	$- 0,038$	$0,47 m$

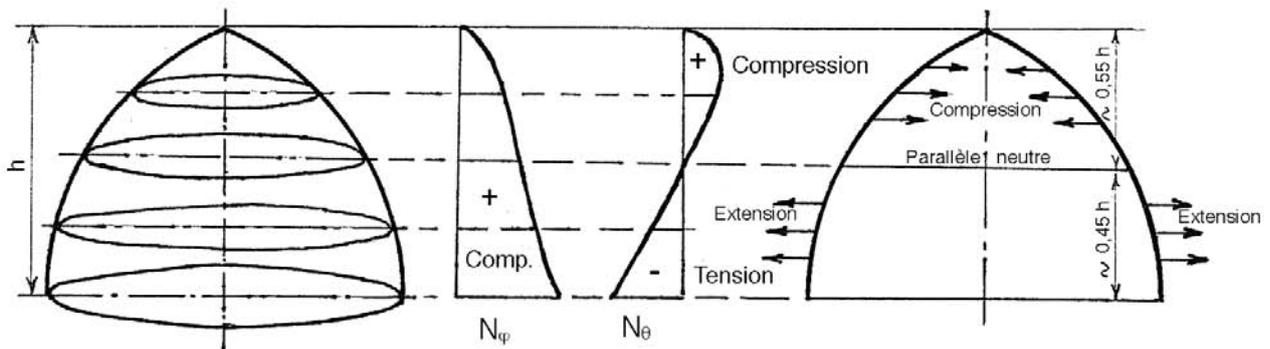


Fig. 8

Résultats du calcul (voir annexe 1)

1. Valeur de N_ϕ et de N_θ

$$N_\phi = pR \times \frac{(\cos\phi_0 - \cos\phi) - (\phi - \phi_0) \sin\phi_0}{(\sin\phi - \sin\phi_0) \sin\phi}$$

$$N_\theta = pR \times \frac{1}{\sin^2\phi} [(\phi - \phi_0) \sin\phi_0 - (\cos\phi_0 - \cos\phi)]$$

$$= (\sin\phi - \cos\phi_0) \sin\phi \cos\phi$$

On établit les diagrammes de N_ϕ et de N_θ (fig. 8).

On observe :

- que les méridiens sont toujours comprimés ;
- que les parallèles de la partie supérieure de la coque sont comprimés ;
- que les parallèles de la partie inférieure de la coque sont en extension.

C'est le premier résultat capital du calcul qui est général, quelles que soient la forme et les dimensions de la coque.

En conséquence :

- la structure de la coque est comprimée dans le sens vertical ;
- les lits de pierres sont comprimés horizontalement dans la partie supérieure de la coque ; ils devront donc être réalisés en anneaux indéformables par des pierres bien bloquées les unes contre les autres ;
- les lits de pierres sont en extension horizontalement dans la partie inférieure de la coque ; les pierres ayant une cohésion nulle entre elles, la stabilité de la paroi sera obtenue par le frottement des lits de pierres entre eux.

2. On observe dans le diagramme de N_θ que le parallèle de base est le plus sollicité à l'effet d'extension.

On démontre (voir annexes) qu'une coque dont le diamètre intérieur d de la base est supérieur à $d_{\text{mini}} = \frac{2 N_\theta}{d N_\phi}$ est autostable.

C'est le 2^e résultat capital du calcul. Il va intervenir dans le " secret de Brunelleschi ".

En fonction de l'élançement des coques :

$$\frac{h}{d} = \frac{\text{hauteur intérieure}}{\text{diamètre intérieure de la base}}$$

on établit le tableau-guide de la page précédente qui donne les valeurs de d_{mini} à partir desquelles les coques sont autostables.

Les règles de bonne construction

1. Qualité et forme des pierres

Les pierres utilisées peuvent être calcaires ou siliceuses (schistes), de faible gélivité. Les plus faciles à mettre en place sont les pierres plates, en dalles d'épaisseur de 4 à 15 cm environ.

Les pierres équarries sommairement conviennent également.

Les pierres " rondes " requièrent une main-d'œuvre qualifiée pour obtenir des parois stables.

2. Mise en œuvre des pierres

Les pierres doivent être posées bien à plat, sans effet de bascule.

Elles doivent être disposées en lits d'épaisseur sensiblement constante.

Les joints d'un lit supérieur doivent être décalés par rapport aux joints du lit inférieur, les " coups de sabre " (joints verticaux alignés) sont à proscrire.

Dans chaque lit, les pierres doivent être soigneusement bloquées transversalement les unes contre les autres de façon à former des anneaux horizontaux indéformables, capables de résister à l'effet de compression auquel ils sont soumis dans la moitié supérieure des voûtes en encorbellement (fig. 9).

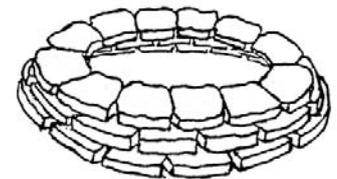


Fig. 9

L'emploi de boutisses (2 ou 3 par m²) liant les anneaux extérieur et intérieur d'un même lit contribue beaucoup à la pérennité d'une paroi (fig. 10).

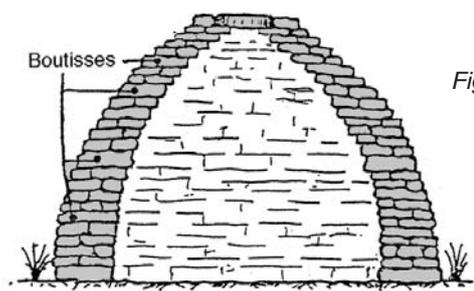
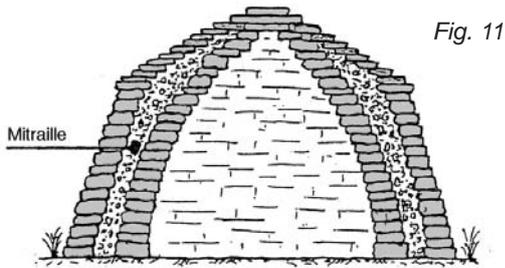
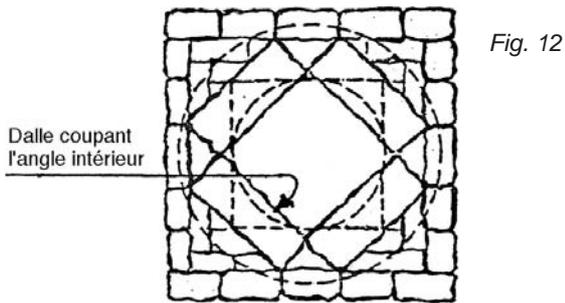


Fig. 10



La construction d'une paroi par un anneau extérieur et un anneau intérieur créant un vide entre eux rempli de déchets de pierres (dits mitraille) est à éviter en raison de la poussée latérale exercée par cette mitraille qui tend à ouvrir l'espace entre les 2 anneaux (fig. 11).



La forme générale idéale de la paroi intérieure est la construction sur une base circulaire, éventuellement elliptique. La forme intérieure carrée, quelquefois employée, oblige à couper les angles droits intérieurs par de grandes dalles plates (donc fragiles) pour appuyer au-dessus une coupole tronconique ; la construction en est plus complexe (fig. 12).

Les parements extérieurs peuvent être de forme circulaire, avec fruit (légère inclinaison), construction la meilleure, ou carrée, également avec fruit.

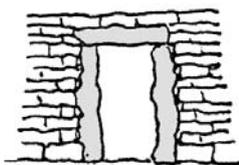


Fig. 13

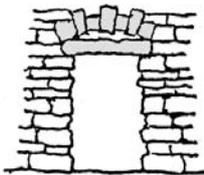


Fig. 14

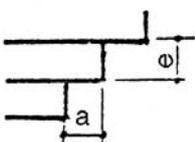


Fig. 15

Les jambages d'une ouverture peuvent être réalisés avec de longues pierres plates placées verticalement, mais on n'a pas de liaisons avec la maçonnerie adjacente (fig. 13). Les jambages constitués de pierres équarries (fig. 14) évitent cette discontinuité.

Les linteaux peuvent être réalisés par de grandes dalles épaisses (leur épaisseur doit être supérieure au $1/5^e$ de la portée), ou par un arc en pierres, ou par une poutre en bois équarrie avec un arc de décharge au-dessus (fig. 14).

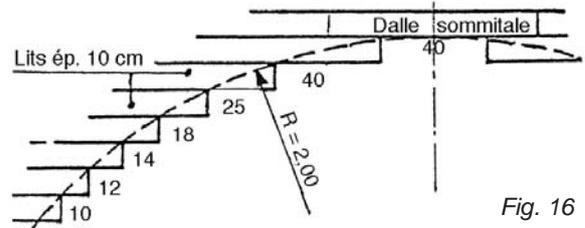


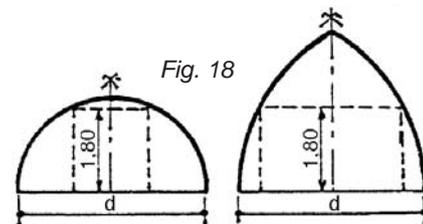
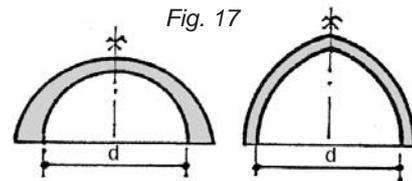
Fig. 16

Pour la construction en encorbellement de la paroi intérieure d'une coupole, le débord d'un lit supérieur sur le lit inférieur doit être sensiblement égal à l'épaisseur du lit (soit $a \sim e$) (fig. 15).

Cette disposition ne peut être réalisée dans la partie haute d'une coupole hémisphérique, ce qui peut être la cause d'une fragilité du sommet de la voûte, et, éventuellement, d'une rupture, les dalles largement débordantes résistant mal à l'effet de flexion en console (fig. 16).

3. Forme des coques

Sur une base identique, la voûte hémisphérique exerce une poussée horizontale supérieure à une voûte ogivale, ce qui nécessite l'élargissement de la surface d'appui (fig. 17).



L'espace disponible à l'intérieur d'une coque et, en particulier en largeur, est nettement plus réduit sous une voûte hémisphérique que sous une voûte ogivale d'un diamètre de base égal (fig. 18).

Ces considérations conduisent à privilégier la voûte ogivale à la voûte hémisphérique.

4. Stabilité des coques

Une coque est définie par son élancement $\frac{h}{d} = \left(\frac{\text{hauteur intérieure}}{\text{diamètre intérieure de la base}} \right)$.

En fonction de son élancement, on définit le diamètre de base $d_{\text{mini}} = 4 \frac{N_{\theta}}{N_{\phi}}$ - Voir tableau p. 36

Toute coque dont le diamètre de base est supérieur à d_{mini} est autostable.

Toute coque dont le diamètre de base est inférieur à d_{mini} nécessite une surépaisseur de sa paroi de base.



Fig. 19 - Auribeau (Vaucluse). Borie. construction à coupole conique.



Fig. 23 - Blausac (Gard) . Capitelle. Composée de 2 bories en forme de bonnet et une salle intermédiaire.



Fig. 20 - Buoux (Vaucluse). Borie. Belle construction dans un champ de lavande.



Fig. 24 - Borie de Maruejols (Gard).

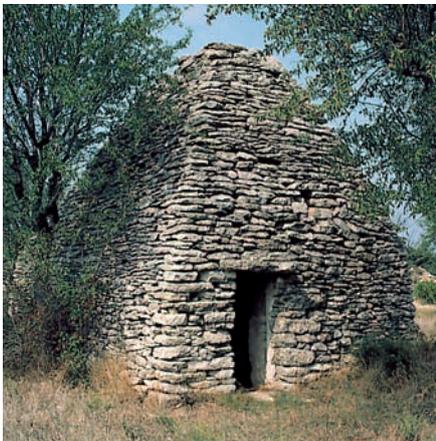


Fig. 21 - Borie près de l'Isle-sur-Sorgue (Vaucluse). Construction sur base carrée qui implique, pour la réalisation de la coupole conique, la pose de grandes dalles dans les angles droits de la base.



Fig. 25 - Caussols (Alpes-Maritimes). Borie en gradins, belle construction.



Fig. 22 - Borie aux Claps (Alpes-Maritimes). Voûte partiellement effondrée en raison des lits irréguliers et des pierres mal bloquées entre elles.



Fig. 26 - La Malle (Alpes-Maritimes). Borie construite à doubles parois séparées, remplissage intérieur par des déchets de pierre (mitraille) ayant entraîné l'éventrement.



*Fig. 27 - Borie de Catalogne (Espagne).
Construction quelconque, les pierres n'ayant pas été posées
en lits successifs sensiblement horizontaux.*



*Fig. 31 - Borie dans les Pouilles (Italie).
Construction soignée en gradins.*



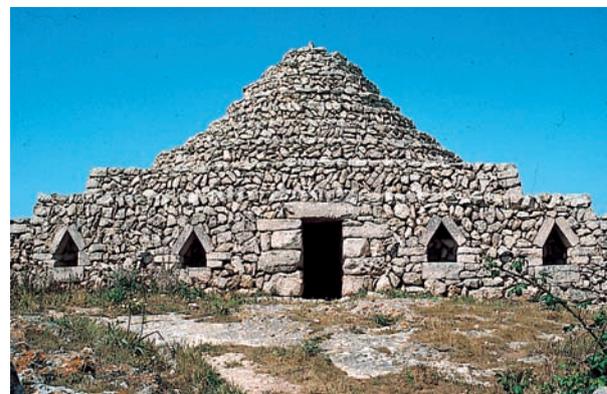
*Fig. 28 - Pinnetta de Sardaigne.
Construction soignée en cours de dégradation.*



*Fig. 32 - Barraca près de Ciutadella (Minorque).
Des rampes donnent accès aux gradins.
Au sommet est aménagée une plateforme d'observation.*



*Fig. 29 - Pinnetta de Sardaigne.
Construction ogivale bien conservée.*



*Fig. 33 - Barraca Ses Arenetes (Minorque).
Belle construction à 10 gradins et 4 niches en façade.*



*Fig. 30 - Koumos de Crète. Ces bories de montagne sont
encore utilisées l'été par les bergers crétois.
Construction qui mériterait d'être entretenue.*



*Fig. 34 - Voûte de la barraca Ses Arenetes.
Les lits de pierres horizontaux sont parfaitement assisés et bloqués.
Le débord des pierres est sensiblement égal à leur épaisseur.*



*Fig. 35 - Kazum en Istrie (Yougoslavie).
Construction sommaire, très haute, avec poste d'observation. Le manque de grandes pierres plates a contraint à un bricolage du linteau !*



*Fig. 36 - Kazum en Istrie (Yougoslavie).
Belle construction avec couverture en lauses formant corniche.*



*Fig. 37 - Trullo en Italie du Sud.
Construction sur plan carré. Les dalles d'angle qui supportent la calotte conique sont fissurées ; la sécurité n'est plus assurée.*



*Fig. 38 - Borie à Bonnieux (Lubéron).
Entrée ogivale originale qui a permis d'utiliser des pierres plates pour les jambages et le linteau, la courbure assurant une grande résistance.*

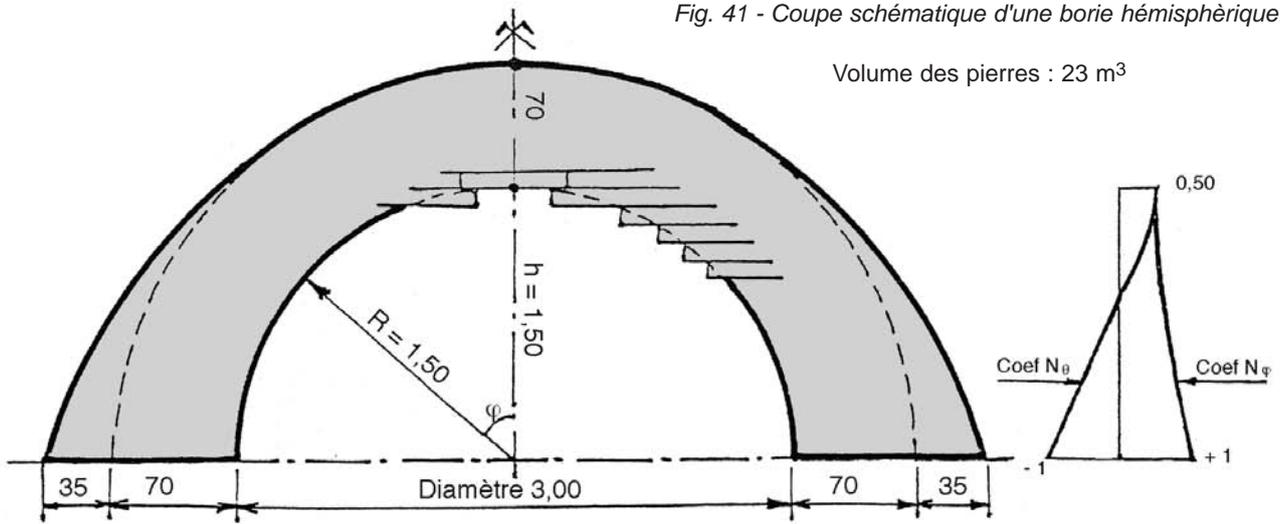


*Fig. 39 - Voûte d'entrée de borie mal exécutée.
Le blocage de la clef de voûte est mal réalisé.*



*Fig. 40 - Borie ancienne de construction soignée.
La porte est montée sur pivot qui tourne dans des trous de dalles avancées ; le linteau, trop faible, est rompu.*

Fig. 41 - Coupe schématique d'une borie hémisphérique.



Les bories et les constructions assimilées

Borie hémisphérique et borie ogivale

Pour un diamètre de base de 3,00 m, on observe :

- que pour une borie hémisphérique, le coefficient de poussée à la base (égal à 1) est supérieur à celui d'une borie ogivale (égal à 0,60), ce qui implique de prévoir une surépaisseur de 0,35 m de la base de la borie hémisphérique ;
- que le volume de pierres mis en œuvre est de 20 m³ pour la borie hémisphérique (fig. 41) et de 14 m³ pour la borie ogivale (fig. 43) ;
- que l'espace libre est plus réduit dans la borie hémisphérique ;
- que la réalisation du sommet de la borie hémisphérique nécessite la pose de pierres en console importante, cause de fragilité.



Fig. 42 - Borie à Bonnieux (Vaucluse).
Bonne construction, à l'exception de l'arc un peu sommaire sur l'ouverture.

Illustrations de bories et de constructions assimilées

Pages 39 à 45, nous présentons un certain nombre de documents photographiques et planimétriques de bories et constructions assimilées de diverses régions et de différents pays.

Fig. 43 - Coupe schématique d'une borie ogivale.

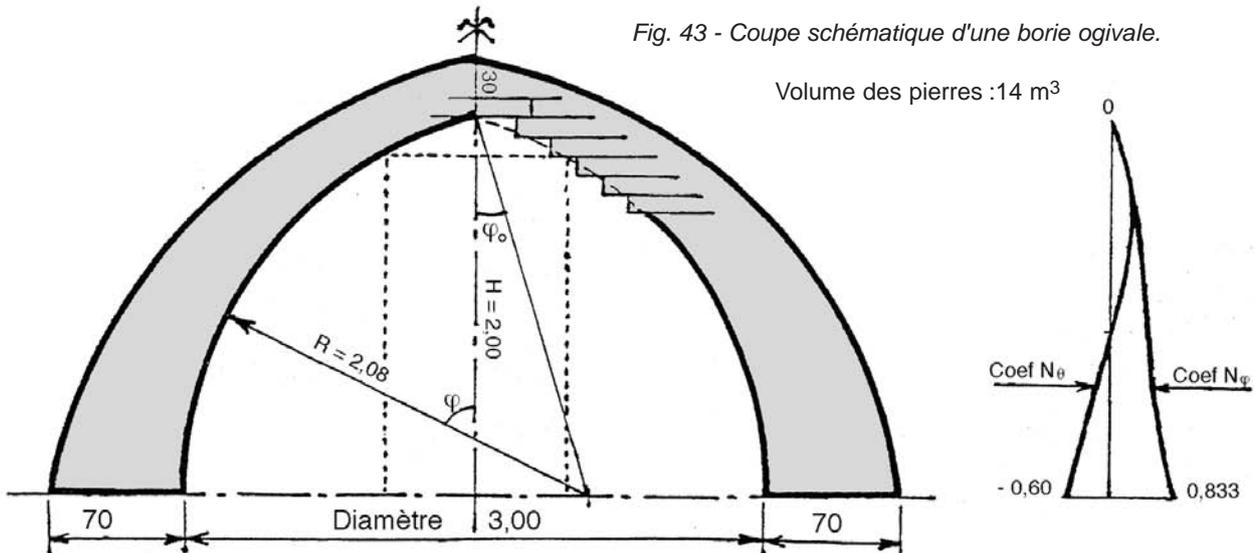
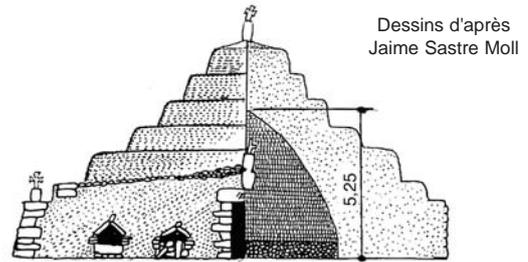




Fig. 44 - Barraca de Sa Tanca d'Enmig (Minorque).



Dessins d'après
Jaime Sastre Moll

1813

0 4 m

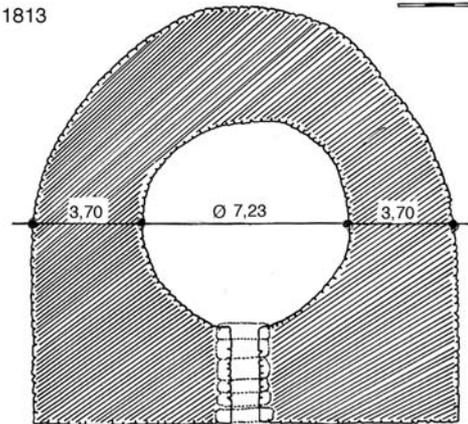


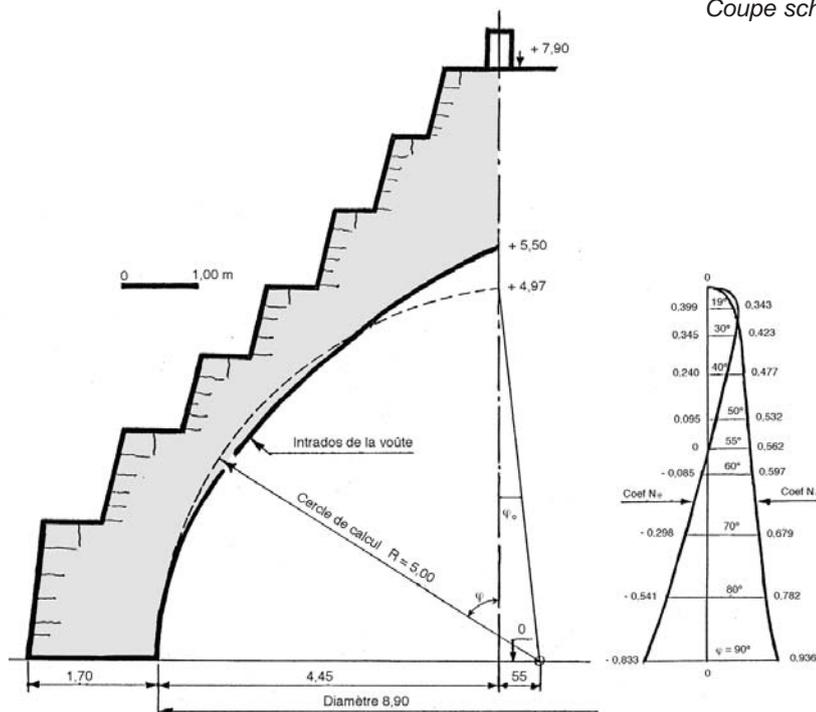
Fig. 46 - Coupe en élévation et plan de la barraca de Sa Tanca d'Enmig (Minorque). Année de construction : 1813. Belle construction trapue. La paroi atteint 3,70 m d'épaisseur.



Fig. 45 - Barraca So'n Salamo (Minorque).
Année de construction : 1857.

Une des plus grandes barracas. Construction en gradins chaînés par de grosses pierres. Parements montés avec un léger fruit (inclinaison). Arc en pierres de taille sur l'ouverture. Epaisseur à la base : 1,70 m : stabilité assurée. Volume de pierres : 214 m³.

Fig. 47 - Barraca So'n Salamo (Minorque).
Coupe schématique.



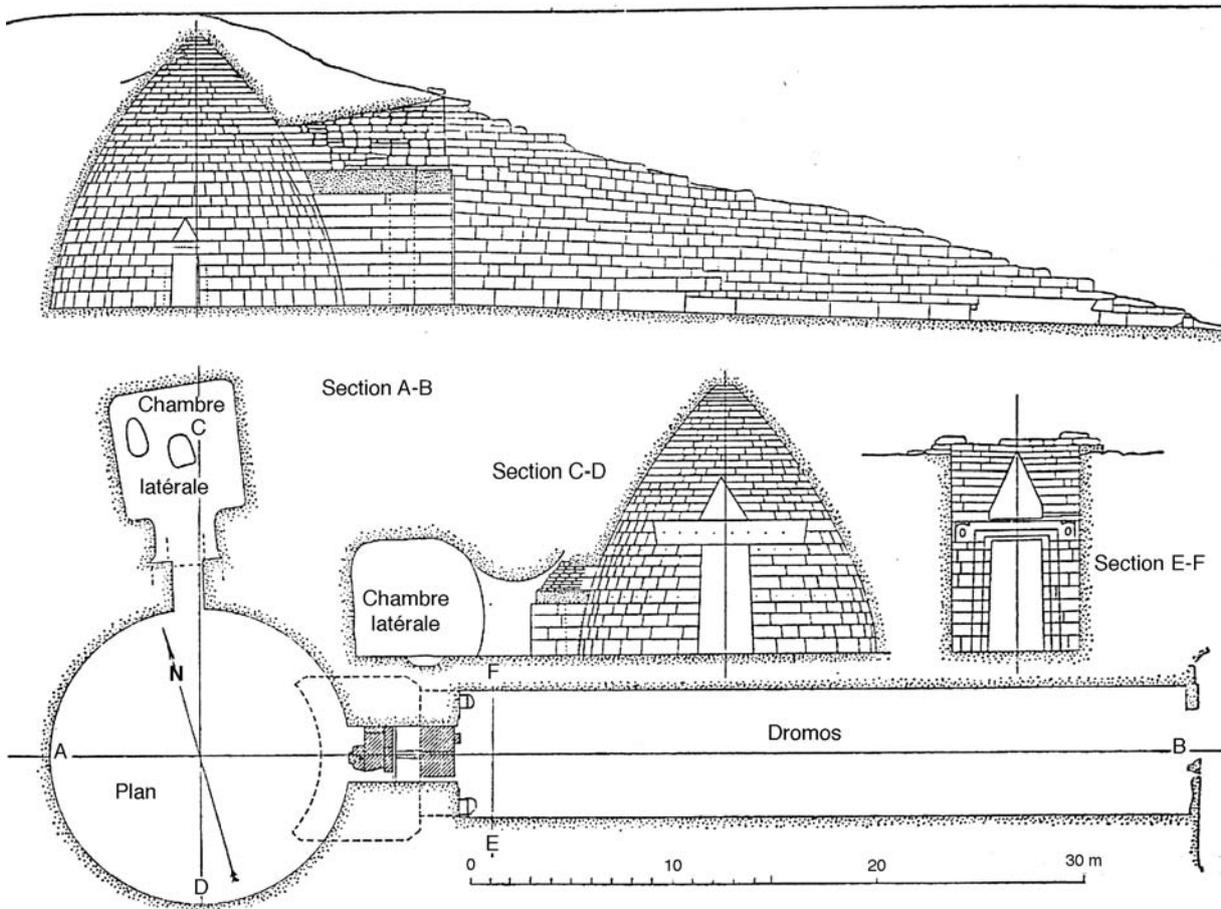


Fig. 48 - Plan et coupe du tombeau d'Agamemnon à Mycènes.

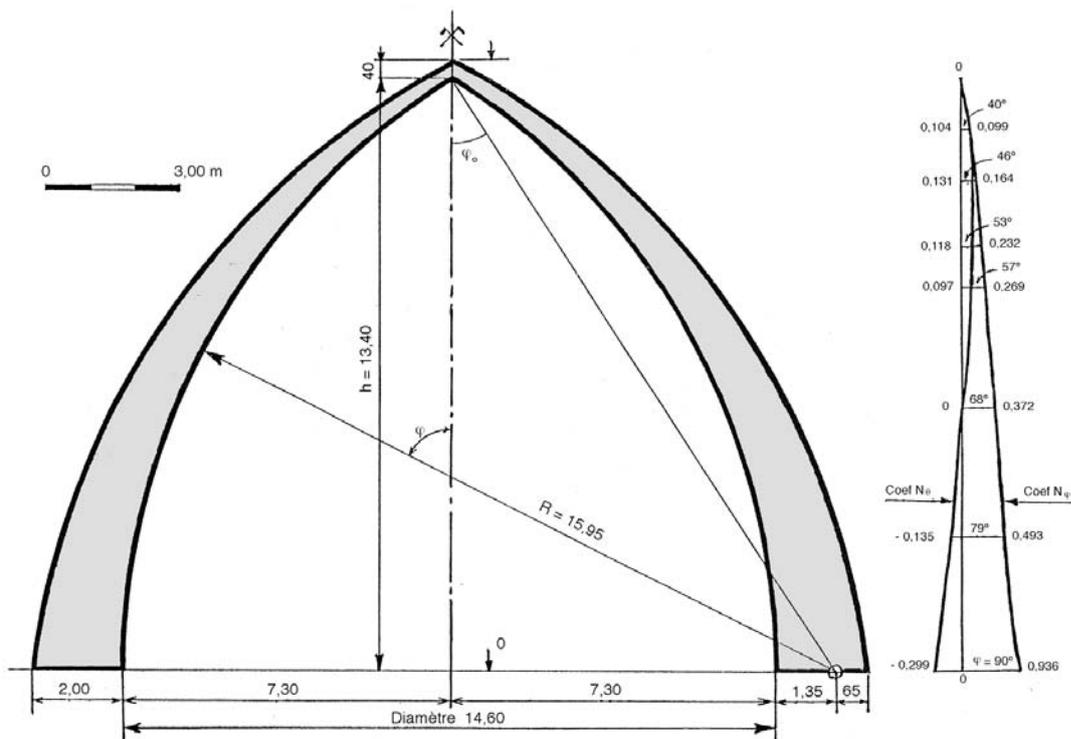


Fig. 49 -Le tombeau d'Agamemnon à Mycènes. Construction réalisée en 1400 av. J.-C. Vue en coupe Coupe – Diagramme des poussées très plat : la stabilité est parfaite.



Fig. 50 - Tombeau d'Agamemnon à Mycènes.
Le couloir d'entrée (dromos) de 6 m de large et 36 m de long est bordé de murs cyclopéens.

Fig. 51 - Tombeau d'Agamemnon à Mycènes. Vue intérieure de la coupole (la tholos). On observe le grand linteau (120 t), le triangle de décharge et la maçonnerie de pierres parfaitement assisées et ajustées.



Constructions	Diamètre d	Hauteur h	Elancement h/d	Volume de pierre	Contraintes (bar)	
					sur la fondation	max. sur parallèle
Borie hémisphérique	4,00 m	2,00 m	0,50	37 m ³	0,36	0,44
Borie ogivale	4,00 m	3,50 m	0,875	27 m ³	0,60	0,25
Barraca Salamo	8,95 m	5,50 m	0,62	214 m ³	0,87	1
Barraca Binisaida	8,50 m	6,00 m	0,70	275 m ³	0,70	1,3
Tombeau d'Agamemnon	avant remblai				1,83	1,33
	14,60 m	13,40 m	0,92	765 m ³ (1912 t)	6,12	4,45

Caractéristiques des constructions étudiées

On constate :

- que les contraintes de compression dans les parallèles sont faibles (inférieures à 2 bars pour une contrainte admissible de 15 à 20 bars) ;
- que les contraintes existantes sont généralement surdimensionnées. Par exemple : dans les bories ogivales du Luberon dont le diamètre est inférieur à 4 m, les épaisseurs à la base varient de 0,80 à 1,10 m, bien que 0,60-0,70 m auraient suffi. Les barracas minorquines ont leur section de base en général surabondante (ce qui a contribué à leur pérennité).

La pierre sèche, une construction originale

Beaucoup de constructions en pierres sèches ont disparu, soit par démolition, soit par effondrement.

Effectivement, leur seule faiblesse est le manque de cohésion entre les pierres, qui les met à la portée de dégradation par des visiteurs non initiés.

Il demeure que ces constructions édifiées sans étaitements, sans coffrages, sans cintre et... sans le secours du calcul, témoignent de l'imagination, de l'habileté, du savoir-faire et du génie humain. Ainsi, elles méritent d'être conservées et entretenues au titre de l'art de construire.

Le secret de Brunelleschi

Extension de l'étude au duomo de la cathédrale de Florence.

Bien que le duomo (coupole) de la cathédrale Ste-Marie-de-la-Fleur soit une construction en maçonnerie de pierres et de briques soigneusement assemblées au mortier, et non en pierres sèches, cet ouvrage entre dans l'étude ci-avant pour la vérification de sa stabilité.

Le duomo a été édifié par Brunelleschi entre 1420 et 1434 ; il constitue son chef-d'œuvre (fig. 53).

On observe d'après la figure 52 que le duomo est édifié sur un tambour octogonal.

Cette coupole est une voûte de dimensions intérieures : diamètre $d = 41,70$ m, hauteur $h = 30,92$ m, rayon de courbure $R = 33,36$ m. Son élancement est donc $\frac{h}{d} = \frac{30,92}{41,70} = 0,74$.

On vérifie en se reportant au tableau-guide (p. 36) que son diamètre est très largement supérieur à d_{mini} .

La construction est donc autostable, et tout le génie de Brunelleschi est d'en avoir eu la prescience pour risquer de l'édifier sans cintre, contre l'avis de ses contemporains.

Le secret de Brunelleschi reposait donc sur son analyse intuitive de la répartition des charges et des déformations qui l'ont persuadé de l'autostabilité de la coupole, ce que le calcul confirme.

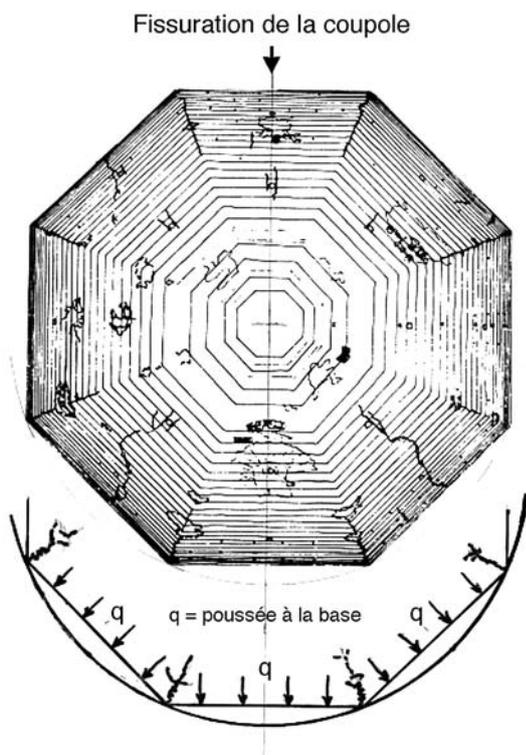
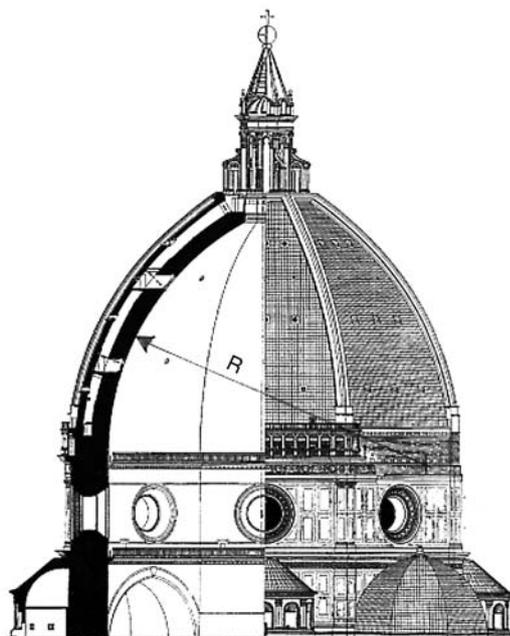


Fig. 52 - Coupe élévation du duomo de la cathédrale de Florence et schéma de la fissuration de la coupole.

Toutefois, la construction étant établie sur une base (tambour) non pas circulaire mais octogonale, on a observé, à partir de la fin du XVII^e siècle, le développement de fissures dans la voûte, localisées surtout dans tous les angles.

Ce phénomène s'explique par les forces de traction qui s'exercent sur les côtés adjacents de l'octogone, à la base, qui tendent à ouvrir les angles (fig. 52).

On remarque que ces fissures affectent la partie inférieure en extension de la coupole et qu'elles sont absentes dans la partie supérieure



Fig. 53 - Le duomo de la cathédrale de Florence.

comprimée, ce qui confirme les résultats de l'analyse mathématique.

Brunelleschi n'est pas responsable de cette fissuration car le tambour était construit lorsque les Fabriciens lui confièrent la construction du duomo.

Il demeure que le duomo reste un modèle sublime de coupole. Michel-Ange, qui vint le voir avant d'entreprendre la coupole de St-Pierre de Rome, avait coutume de dire qu'il était difficile de l'imiter, impossible de le surpasser, autrement dit "Ma coupole (St-Pierre) sera plus grande, mais elle ne sera pas plus belle."

ANNEXE I

Statique des coques de révolution

1 - Equations générales d'équilibre

Le calcul des coques de révolution édifiées en pierres sèches est établi à partir de la théorie des membranes développée par S. TIMOSHENKO.

On étudie l'équilibre d'un élément infiniment petit de surface de coque compris entre 2 méridiens et 2 plans parallèles et horizontaux très proches.

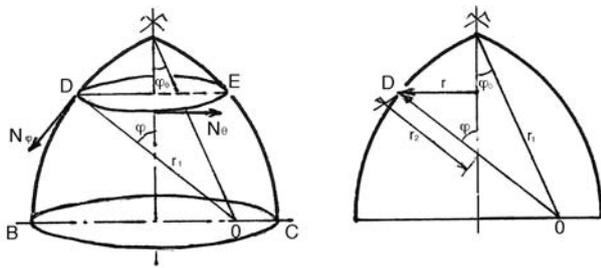
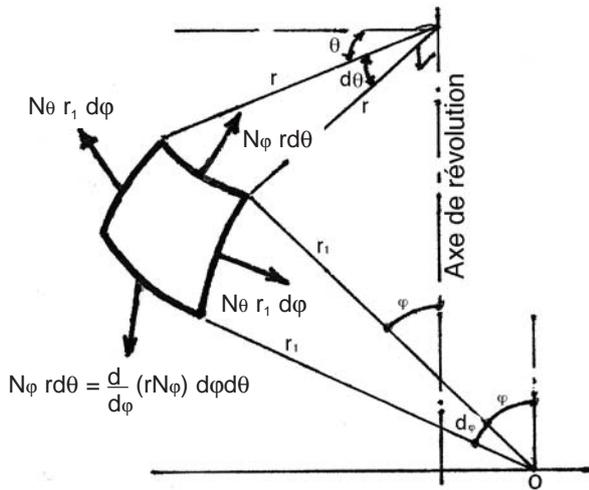
Cet élément est en équilibre sous l'action des forces N_φ tangente au méridien, N_θ tangente au parallèle et de son poids propre p .

On néglige l'effet des moments fléchissants qui sont très faibles.

1 - Dans le plan méridien, les forces appliquées suivant la tangente sont :

- les forces $N_\varphi r d\theta$ et $N_\varphi r d\theta + \frac{d}{d\varphi}(r N_\varphi) d\varphi d\theta$ sont inégales et opposées ; leur différence $\frac{d}{d\varphi}(r N_\varphi) d\varphi d\theta$ est seule agissante ;

- Les forces $N_\theta r_1 d\varphi$ sont égales et opposées ; formant un angle $d\theta$ entre elles, elles ont une résultante $N_\theta r_1 d\varphi d\theta$ située dans leur plan et



dirigée vers l'axe de symétrie ; sa composante suivant la tangente au méridien est $N_\theta r_1 d\varphi d\theta \cos\varphi$;
 - le poids p de la coque a une composante $p\varphi$ dirigée suivant la tangente au méridien, donnant une force égale à $p_\varphi r r_1 d\theta d\varphi$, $r d\theta r_1 d\varphi$ étant la surface de l'élément de coque.

- L'équilibre de ces 3 forces donne l'équation :
 $\frac{d}{d\varphi} (r N_\varphi) d\varphi d\theta - N_\theta r_1 d\theta d\varphi \cos\varphi + p_\varphi r r_1 d\theta d\varphi = 0$

En divisant par $d\varphi d\theta$, il reste l'équation 1 :

$$\frac{d}{d\varphi} (r N_\varphi) - N_\theta r_1 \cos\varphi + p_\varphi r r_1 = 0$$

2 - Equilibre des forces normales à la coque (plan OD perpendiculaire au plan méridien).

- Les forces $N_\varphi r d\theta$ formant un angle $d\varphi$ ont une résultante normale à la coque égale à $N_\varphi r d\theta d\varphi$.

- Les forces $N_\theta r_1 d\varphi$ formant un angle $d\theta$ ont une résultante $N_\theta r_1 d\varphi d\theta$ qui a une composante normale à la coque dirigée vers l'intérieur égale à $N_\theta r_1 d\varphi d\theta \sin\varphi$.

- La composante de la charge verticale est :

$$-p_r r r_1 d\theta d\varphi.$$

- L'équilibre de ces forces donne, en divisant par $d\theta d\varphi$:

$$N_\varphi r - N_\theta r_1 \sin\varphi - p_r r r_1 = 0$$

En divisant par $r r_1$ et en remarquant que $r = r_2 \times \sin\varphi$, on a l'équation 2 :

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} - p_r = 0$$

2 - Calcul de N_φ et N_θ

L'équation 2 donne l'équation 3 :

$$N_\theta = \left(-\frac{N_\varphi}{r_1} + p_r\right) r_2 = -N_\varphi \frac{r_2}{r_1} + p_r r_2$$

En portant cette valeur dans l'équation 1 :

$$\frac{d}{d\varphi} (N_\varphi r) - r_1 \left(-\frac{N_\varphi}{r_1} + p_r\right) r_2 \cos\varphi + p_\varphi r r_1 = 0 \text{ soit}$$

$$\frac{d}{d\varphi} (N_\varphi r) + N_\varphi r_2 \cos\varphi - r_1 r_2 p_r \cos\varphi + p_\varphi r r_1 = 0$$

En multipliant par $\sin\varphi$ et en tenant compte que $r = r_2 \sin\varphi$:

$$\frac{d}{d\varphi} (N_\varphi r) \sin\varphi + r N_\varphi \cos\varphi = r_1 r_2 p_r \cos\varphi \sin\varphi - r r_1 p_\varphi \sin^2\varphi$$

En intégrant :

$$N_\varphi r \sin\varphi = \int (r_1 r_2 p_r \cos\varphi \sin\varphi - r r_1 p_\varphi \sin^2\varphi) d\varphi$$

En remplaçant r par $r_2 \sin\varphi$, on a l'équation 4 :

$$N_\varphi = \frac{1}{r_2 \sin^2\varphi} \times \int r_1 r_2 (p_r \cos\varphi - p_\varphi \sin\varphi) \sin\varphi d\varphi$$

Dans le cas des coques étudiées, le méridien est un arc de cercle de rayon R . Donc :

$$r_1 = R \quad r_2 = \frac{r}{\sin\varphi} = R \left(1 - \frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\right)$$

La coque est supposée d'épaisseur constante.

Son poids unitaire p a pour composantes :

$$p_\varphi = p \sin\varphi$$

$$p_r = -p \cos\varphi$$

On intègre l'équation 4 entre les limites :

φ_0 (sommets) et φ :

$$N_\varphi = \frac{1}{\sin^2\varphi} \times \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{R \times R \left(1 - \frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\right)}{R \left(1 - \frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\right)} \sin\varphi$$

$$\times (-p \cos^2\varphi - p \sin^2\varphi) \sin\varphi \cos\varphi d\varphi$$

$$N_\varphi = -\frac{pR}{(\sin\varphi - \sin\varphi_0) \sin\varphi} \times \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\sin\varphi - \sin\varphi_0) d\varphi$$

$$N_\varphi = -pR \times \frac{(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) - (\varphi - \varphi_0) \sin\varphi_0}{(\sin\varphi - \sin\varphi_0) \sin\varphi}$$

$$N_\theta = \left(\frac{N_\varphi}{r_1} - p_r\right) r_2 = N_\varphi \frac{r_2}{r_1} - p_r r_2$$

$$N_\theta = pR \times \frac{(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) - (\varphi - \varphi_0) \sin\varphi_0}{(\sin\varphi - \sin\varphi_0) \sin\varphi}$$

$$\times \frac{R \left(1 - \frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\right)}{R} - p \cos\varphi R \left(1 - \frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\right)$$

$$N_\theta = -\frac{pR}{\sin^2\varphi} [(\varphi - \varphi_0) \sin\varphi_0 - (\cos\varphi_0 - \cos\varphi)]$$

$$+ (\sin\varphi - \sin\varphi_0) \sin\varphi \cos\varphi]$$

En inversant le signe de ces équations, on a l'équation 5 :

$$N_\varphi = pR \times \frac{(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) - (\varphi - \varphi_0) \sin\varphi_0}{(\sin\varphi - \sin\varphi_0) \sin\varphi}$$

et l'équation 6 :

$$N_\theta = pR \times \frac{1}{\sin^2\varphi} [(\varphi - \varphi_0) \sin\varphi_0 - (\cos\varphi_0 - \cos\varphi)]$$

$$+ (\sin\varphi - \sin\varphi_0) \sin\varphi \cos\varphi]$$

ANNEXE II

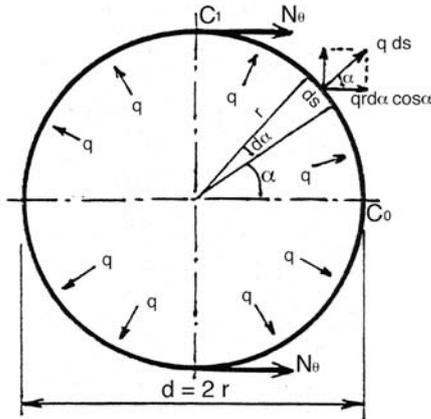
Conditions de stabilité des coques

Dans la partie supérieure comprimée : les contraintes de compression sont faibles (inférieures à 2 bars pour une contrainte admissible de 15 bars).

Dans la partie inférieure en extension : la section de base est la plus sollicitée.

N_θ est engendré par l'effet d'extension unitaire q (c'est-à-dire la poussée).

Sur un élément infiniment petit ds de la



Section de base vue en plan

coque, la poussée est : $q ds = q r d\alpha$
 Sa composante horizontale est : $q r d\alpha \cos\alpha$
 sur le 1/4 de circonférence $C_0 C_1$, la poussée horizontale est :

$$Nq = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} q r d\alpha \cos\alpha = q r \int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} \cos\alpha = q r = q \frac{d}{2}$$

D'où l'équation 3 : $q = \frac{2 N_\theta}{d}$

Pour un coefficient de frottement $f = 0,50$, la sécurité au glissement est assurée si $q \leq 0,50 N_\phi$, soit, en tenant compte de l'équation 3 :

$$\frac{2 N_\theta}{d} \leq 0,50 N_\phi \text{ soit } \frac{2 N_\theta}{d N_\phi} \leq 0,50$$

ou $d \geq 4 \frac{N_\theta}{N_\phi}$ soit : $d_{\text{mini}} = 4 \frac{N_\theta}{N_\phi}$

Conclusions

1°/ Toute coque dont le diamètre de base d est tel que $d \geq d_{\text{mini}}$ est autostable. C'est le cas de la plupart des coques.

2°/ On appelle élancement le rapport :

$$\frac{h}{d} = \frac{\text{hauteur intérieure}}{\text{diamètre intérieur de la base}}$$

A élancement $\frac{h}{d}$ égal, on a :

$$\frac{N_\theta}{N_\phi} = \text{Cte (constante), soit } \frac{q}{N_\phi} = \frac{2N_\theta}{dN_\phi} = \frac{2}{d} \times \text{Cte}$$

la sécurité au glissement $\frac{q}{N_\phi}$ est inversement proportionnelle au diamètre d . Autrement dit, plus le diamètre est grand, plus la coque est stable.

ANNEXE III

Coefficient de frottement

L'angle de frottement interne α des pierres sèches varie de $\alpha = 32^\circ$ à $\alpha = 39^\circ$, correspondant à un coefficient de frottement $f =$ variable de $f = \text{tg } 32^\circ = 0,62$ à $f = \text{tg } 39^\circ = 0,80$.

Compte tenu d'un coefficient de sécurité de 1,25, on prendra pour f la valeur :

$$f_{\text{adm}} = \frac{0,62}{1,25} = 0,50.$$

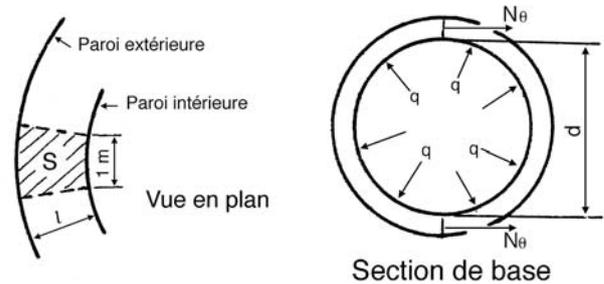
ANNEXE IV

Calcul des contraintes

En partie supérieure (comprimée) de la coque, les lits de pierres sont soumis à :

- une charge verticale due à N_ϕ , donnant une contrainte de compression $\sigma_1 = \frac{N_\phi}{S}$, S étant l'aire unitaire de la section plane considérée ;
- un effort horizontal dû à N_θ , donnant une contrainte de compression $\sigma_2 = \frac{N_\theta}{l}$, l étant la largeur de l'anneau considéré.

En partie inférieure (en extension) de la coque, la section, la plus sollicitée est la section



de base.

Cette section est soumise à :

- une charge verticale unitaire due à N_ϕ , donnant une contrainte de compression $\sigma_1 = \frac{N_\phi}{S}$, S étant l'aire unitaire de la section, σ_1 représente la contrainte de compression sur le sol de fondation.

- un effort horizontal unitaire d'extension q dû à N_θ tel que $q = \frac{2N_\theta}{d}$, d étant le diamètre intérieur de la base de la coque.

En prenant un coefficient de frottement $f = 0,50$, la stabilité sera assurée pour $q \leq 0,50 N_\phi$.