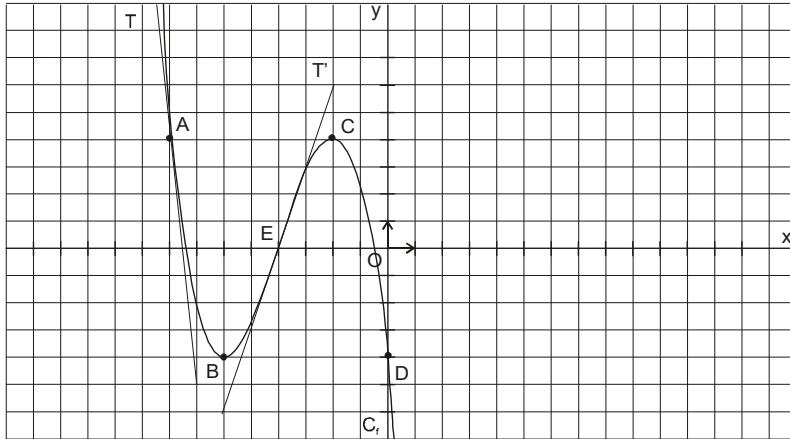


Exercices supplémentaires à propos de la notion de nombre dérivé liée au coefficient directeur de la tangente à la courbe

Tle ES

Exercice n°1 :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-9, 1]$ dont la courbe représentative C_f est donnée par le graphique ci-dessous.

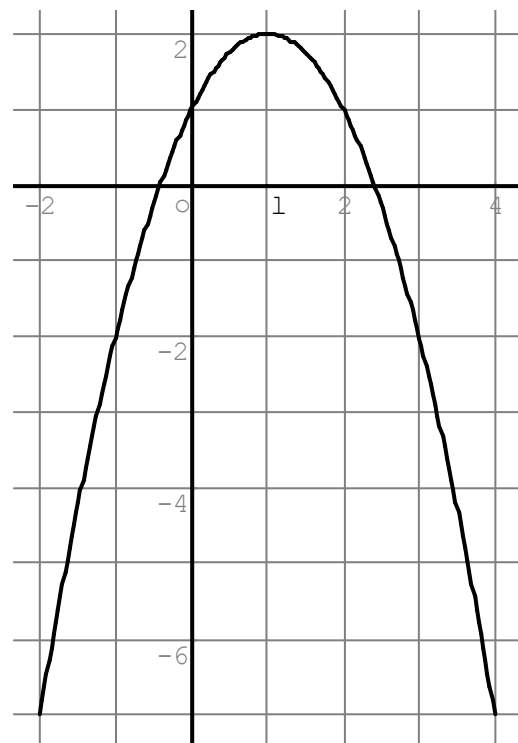


- 1°) Lire sur le graphique $f(-2)$.
- 2°) Lire sur le graphique $f'(-8)$, $f'(-4)$. Justifier votre réponse.
- 3°) Déterminer l'équation réduite de T la tangente à C_f en A, puis l'équation réduite de T_B la tangente à C_f en B.
- 4°) Résoudre graphiquement dans $[-9, 1]$:
 - a) $f'(x) = 0$
 - b) $f'(x) > 0$.
 Justifier votre réponse.

Exercice n°2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $[-2 ; 4]$ par
 $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
 et C_f la courbe représentative de f : voir figure ci-contre.



Le tableau suivant donne les nombre dérivés de f pour certaines valeurs de la variable.

a	-2	-1	0	1	2	3	4
$f'(a)$	6	4	2	0	-2	-4	-6

1°) Construire sur la figure ci-contre, les tangentes à la courbe C_f aux points A, B, C d'abscisses respectives -1, 1, et 2.

Faire apparaître sur le graphique la méthode utilisée, justifiez votre réponse.

2°) Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe C_f au point d'abscisse -1.

3°) Déterminer une équation de la tangente T_C à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

Exercice n° 3 :

Sur le graphique ci-dessous la courbe C_f représente dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées) une fonction f définie sur un intervalle $[-3, 2]$; on précise qu'aux points d'abscisses respectives -1 et 1 la tangente à la courbe C est parallèle à l'axe des abscisses.

1°)

a) Par lecture graphique, déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et de $f(-1)$.

b) On suppose que f possède sur l'intervalle $[-3, 2]$ une fonction dérivée que l'on désigne par f' . Déterminer la valeur de $f'(1)$ et déterminer le signe de $f'(0)$ (justifier vos réponses).

2°) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3°) Déterminer graphiquement (en justifiant).

a) Le nombre de solutions, dans l'intervalle $[-3, 2]$, de l'équation $f(x) = 0$.

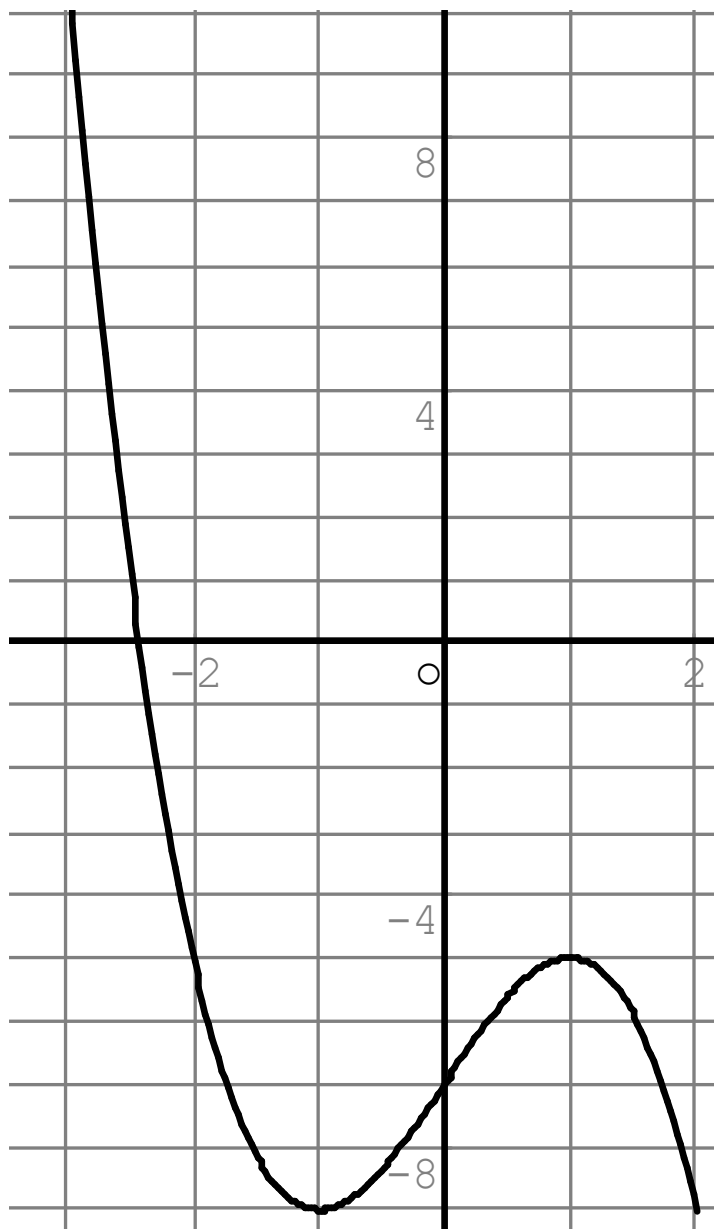
b) Les valeurs des solutions, dans l'intervalle $[-3, 2]$, de l'équation $f(x) = -5$.

4°) On admet que pour tout x de l'intervalle $[-3, 2]$ on a :

$$f(x) = ax^3 + cx + d \text{ où } a, c \text{ et } d \text{ sont des nombres réels et}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + c.$$

En utilisant les résultats du 1°) déterminer les valeurs a , c et d .



5°) A l'aide de la calculatrice et de l'expression de $f(x)$ obtenue au 4°), déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution de l'équation $f(x) = 0$

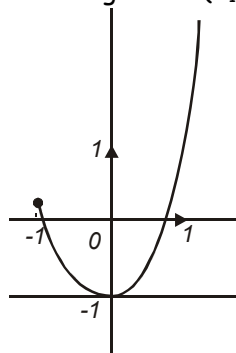
Exercice n°4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

La courbe (C_1) tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$.

On admettra que :

- $f(-1) \approx 0,26$
- La tangente à (C_1) au point de coordonnées $(0 ; -1)$ est parallèle à l'axe des abscisses.



1°) En utilisant la courbe (C_1) :

a) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[-1 ; +\infty[$.

2°) On se propose d'étudier la fonction dérivée f' de la fonction f , sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$.

L'un des tracés ci-dessous est celui de la courbe représentative (C_2) de la fonction f' .

Déterminer lequel, en justifiant la réponse.

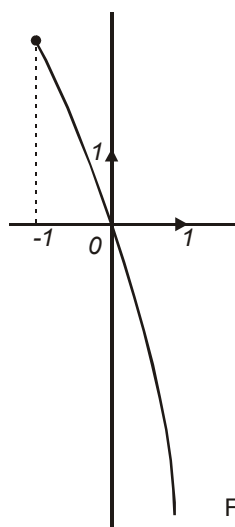


Fig. 1

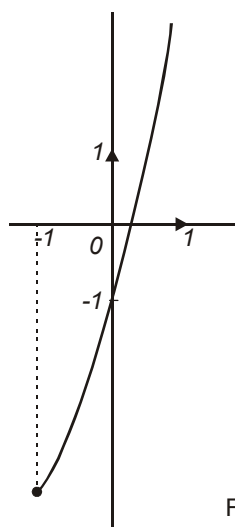


Fig. 2

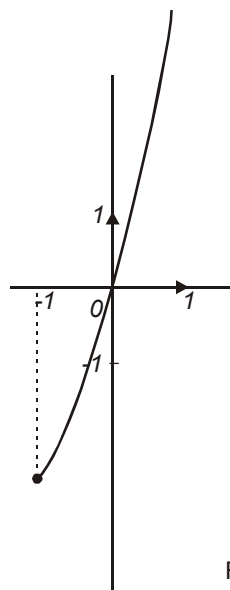


Fig. 3

Correction de l'exercice n°1 :

1°) L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse -2 est 4 donc : $f(-2) = 4$ (voir le point C)

2°) $f'(-8)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse -8, c'est à dire de la droite T

(voir graphique). Par lecture graphique, on obtient : $f'(-8) = -9$.

$f'(-4)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point E d'abscisse -4, c'est à dire de la droite T'.

Par lecture graphique, on obtient $f'(-4) = 3$.

3°) D'après le 1°) -9 est le coefficient directeur de la tangente T donc l'équation réduite de T est $y = -9x + b$ où b est un réel à déterminer.

A (-8, 4) est un point de T donc

$$4 = -72 + b$$

$$b = -68.$$

Conclusion : l'équation réduite de T est : $y = -9x - 68$.

La tangente T_B est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul.

B(-6, -4) est sur T_B

Conclusion : l'équation réduite de T_B est $y = -4$.

4°) a) On cherche les abscisses des points de la courbe ayant une tangente parallèle à l'axe des abscisses :

$$f'(x) = 0 \text{ pour } x = -6 \text{ ou } x = -2$$

b) On cherche les intervalles sur lesquels la fonction est strictement croissante :

$$f'(x) > 0 \text{ pour } x \text{ appartenant à }]-6, -2[.$$

Correction de l'exercice n°2 :

1°) $f'(-1) = 4$ donc le coefficient directeur de la tangente T_A à la courbe au point d'abscisse -1, c'est à dire au point A (-1, -2) est 4 : on trace la droite passant par A et de coefficient directeur 4.

$f'(1) = 0$ donc le coefficient directeur de la tangente T_B à la courbe au point d'abscisse 1, c'est à dire au point B (1, -2) est 0 : on trace la droite passant par B (1, -2) et parallèle à l'axe des abscisses.

$f'(2) = -2$ donc -2 est le coefficient directeur de la tangente T_C à la courbe au point C (2, 1).

2°) d'après le 1°)

4 est le coefficient directeur de la tangente T_A à la courbe au point d'abscisse -1 c'est à dire au point A (-1, -2) donc l'équation réduite de T_A est $y = 4x + b$ où b est un réel à déterminer.

A (-1, -2) est un point de T_A donc

$$-2 = -4 + b$$

$$b = 2.$$

Conclusion : l'équation réduite de T_A est : $y = 4x + 2$.

3°) d'après le 1°) -2 est le coefficient directeur de la tangente T_C à la courbe au point d'abscisse 2 c'est à dire au point C (2, 1)

donc l'équation réduite de T_C est $y = -2x + b$ où b est un réel à déterminer.

C (2, 1) est sur T_C

$$1 = -4 + b$$

$$b = 5.$$

Conclusion : l'équation réduite de T_C est : $y = -2x + 5$.

Correction de l'exercice n°3 :

1°) a) $f(0) = -7$, $f(1) = -5$ et $f(-1) = -9$

b) $f'(1) = 0$ car la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2°)

$f'(0)$ est positif car la fonction est strictement croissante sur l'intervalle $] -1, 1 [$ et 0 appartient à cet intervalle.

<i>Valeurs de x</i>	-3	-1	1	2	
<i>Signe de $f'(x)$</i>	-	0	+	0	-
<i>Variation de f</i>	11		-5		-9

The diagram illustrates the variation of the function f across the interval $[-3, 2]$. It shows the function values at the critical points and the sign of the first derivative between them. The function decreases from $x = -3$ to $x = -1$, increases from $x = -1$ to $x = 1$, and decreases from $x = 1$ to $x = 2$.

3°) a) sur l'intervalle $[-3; 2]$ la fonction f est continue $f(-3) = 11$ $f(2) = -9$ et $f(2) \leq 0 \leq f(-3)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[-3; 2]$.

□ sur $[-1; 2]$ les valeurs prises par la fonction sont strictement négatives donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

□ Sur $[-3; -1]$ la fonction est strictement décroissante $f(-1) \leq 0 \leq f(-3)$ donc l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique sur cet intervalle.

□

b) $f(x) = -5$ pour $x = -2$ et $x = 1$

(on a cherché les abscisses des points de la courbe situés sur la droite d'équation $y = -5$).

4°) $f(x) = ax^3 + cx + d$

$$\begin{cases} f(0) = -7 \\ f(1) = -5 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0^3 + c \times 0 + d = -7 \\ a \times 1^3 + c \times 1 + d = -5 \\ 3a \times 1 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -7 \\ a + c + d = -5 \\ c = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -7 \\ a + c - 7 = -5 \\ c = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -7 \\ a + c = 2 \\ c = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -7 \\ a - 3a = 2 \\ c = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -7 \\ -2a = 2 \\ c = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -7 \\ a = -1 \\ c = -3 \end{cases}$$

Conclusion : $f(x) = -x^3 + 3x - 7$.

5°) $f(x) = -x^3 + 3x - 7$

D'après le graphique la solution de $f(x) = 0$ est proche de -2,5.

$f(-2,43) \approx 0,059$ et $f(-2,42) \approx -0,376$ (penser à tabuler avec la calculatrice)

Donc la solution de $f(x) = 0$ est comprise entre -2,43 et -2,42.

Correction de l'exercice n°4 :

1 / a) Par lecture graphique, le point de la courbe (C_1) d'abscisse 0 a pour ordonnée (- 1) donc : $f(0) = -1$.

Le nombre $f'(0)$ est égal par définition au coefficient directeur de la tangente à la courbe (C_1) au point d'abscisse $x = 0$.

D'après les hypothèses de l'énoncé, la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Donc :

$$f'(0) = 0.$$

b) Tableau de variation:

x	- 1	0	$+\infty$
f	0,26	- 1	

2 / (On rappelle que f est croissante si $f'(x)$ est positive et f décroissante si $f'(x)$ négative)

Tableau de signe de $f'(x)$

x	- 1	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+

Déterminons ci-dessous le tableau de signe de chacune des trois fonctions f_1 (Fig.1), f_2 (Fig.2) et f_3 (Fig.3) proposées :

x	- 1	0	$+\infty$
$f_1(x)$	+	0	-

x	- 1	$\approx 0,3$	$+\infty$
$f_2(x)$	-	0	+

x	- 1	0	$+\infty$
$f_3(x)$	-	0	+

(On rappelle qu'une fonction est positive sur l'intervalle I si sa courbe sur I est « au-dessus » de l'axe des abscisses, et négative sur I si sa courbe est « en dessous »).

Conclusion :

La courbe représentative (C_2) de la fonction f' est celle de la fonction baptisée f_3 , donc celle de la **figure 3**.