Les suites numériques

Objectifs :

1- Maîtriser la notion de convergence; cas particuliers de la convergence monotone;

2- Maîtriser les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f monotone; cas particulier des suites géométriques;

3- Voir quelques exemples de suites récurrentes un+1 = f (un) avec f non monotone.

Exercice . On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ définie, pour tout $n\in\subseteq$, par $u_n = \dfrac{3n-1}{2n+3}$.

1- Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et majorée.

2- Démontrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.

Exercice . Calculer, quand elles existent, les limites des suites suivantes :

$a_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ $\qquad b_n=\sqrt{(n+a)(n+b)}-n$ $\qquad c_n=n^2-n\cos(n)+(-1)^n$

$d_n=\dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$ $\qquad e_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\cos(n\pi)$ $\qquad f_n=n\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+k}$

Exercice . Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite numérique telle que les suites extraites $\left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $\left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\left(u_{3n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ soient convergentes. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente.

Exercice .

1- Montrer que les suites définies, pour tout $n\in\subseteq^*$, par $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}$ sont adjacentes.

2- En déduire que la suite de terme général $w_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

Exercice . On considère la suite numérique $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de terme général donné par $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1- Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

2- Montrer que pour tout $n\in\subseteq^*$, $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

3- En déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est divergente. Quelle est sa limite ?

4- Montrer que pour tout $k\in\subseteq^*$, $\dfrac{1}{k}\geq \ln(k + 1) - \ln k$. En déduire que pour tout $n\in\subseteq^*$, $u_n \geq \ln(n)$ et retrouver le résultat de la question 3-.

5- On introduit les suites $\left(v_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\left(w_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies, pour tout $n\in\subseteq^*$, par

$v_n = u_n - \ln(n)$ et $w_n = u_{n+1} - \ln(n)$. Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice . On considère les deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dont les termes généraux sont donnés par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

1- Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes, donc convergentes de même limite notée l.

2- A l'aide de l'encadrement valable pour tout $n \in \subseteq^*$, $u_n < l < u_n + \frac{1}{n!}$, prouver que la limite l est un nombre irrationnel.

3- On considère à présent la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $w_0 = l - 1$ et la relation de récurrence $\forall\, n \in \subseteq^*$, $w_n = nw_{n-1} - 1$.

a- En introduisant la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $\forall\, n \in \subseteq^*$, $z_n = \frac{w_n}{n!}$, obtenir l'écriture explicite de z_n puis celle de w_n en fonction de n.

b- A l'aide de la relation de récurrence satisfaite par la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et de l'encadrement valable pour tout $n \in \subseteq^*$, $u_{n+1} < l < v_n$, prouver que l'on a $\forall\, n \in \subseteq^*$, $\frac{1}{n+1} < w_n < \frac{1}{n}$. En déduire la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Remarque : on montrera plus tard que $l = e$ à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange.

Exercice . On définit pour tout $n \in \subseteq \setminus \{0,1\}$ et tout $x \in [0, 1]$, $P_n(x) = x^n - nx + 1$.

1- A l'aide d'un tableau de variations, montrer que P_n admet une unique racine dans $[0,1]$ que l'on notera u_n. Trouver des relations d'inégalité entre u_n, $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$.

2- Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ puis celle de la suite $(nu_n)_{n\geq 2}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice . Soit $f : \nabla \to \nabla$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{3x+1} - 1$. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \nabla$ et par la relation de récurrence $\forall\, n \in \subseteq$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1- Etudier les variations de la fonction f sur ∇, puis tracer son graphe.

2- Déterminer les points fixes de f .

3- En comparant u_0 et u_1 (on résoudra l'inéquation $f(x) \leq x$), étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

4- Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ selon la valeur de u_0.

Exercice . Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, …,
$u_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{\text{n termes}}$.

1- Déterminer une application f telle que pour tout $n \in \subseteq$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2- Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est majorée par 2.

3- Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice . Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \subseteq$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

1- Montrer que pour tout $n \in \subseteq$, u_n est bien défini et $u_n \in [0,1]$. La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle monotone ?

2- On pose pour tout $n \in \subseteq$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Etudier les sens de variation des suites $\left(v_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(w_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

3- Résoudre l'équation $(f \circ f)(x) = x$.

4- Etudier la convergence des suites $\left(v_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(w_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$, puis celle de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice . On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_o = 1$ et, pour tout $n \in \subseteq$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

On se propose de montrer n la convergence de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et de déterminer sa limite par trois méthodes différentes.

Montrer que la limite éventuelle de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ ne peut être que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or).

1- a- Montrer que, pour tout $n \in \subseteq$, $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{\alpha}\left|u_n - \alpha\right|$ |.

b- En déduire que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers α.

2-a- Etudier le signe de $u_{n+1}-\alpha$ en fonction de celui de $u_n-\alpha$ et le signe de $u_{n+1}- u_n$ en fonction de celui de $u_n- u_{n-1}$.

b- Montrer par récurrence que, pour tout $p \in \subseteq$, $u_{2p} \leq \alpha \leq u_{2p+1}$.

c- Montrer que les suites $\left(u_{2p}\right)_{p\in\mathbf{N}}$ et $\left(u_{2p+1}\right)_{p\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

d- En déduire que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers α.

3- Soit $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On introduit la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ définie, pour tout $n \in \subseteq$, par $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$.

a- La suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle correctement définie ?

b- Montrer que $\left(v_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique. On pourra remarquer que α et sont les racines de l'équation $r^2=r+1$. Quelle est sa limite ?

c- En déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers α.

Exercice . Soit $\alpha \in]0, 1[$ et f la fonction définie sur [0, 1] par $f(x) = x(1 - x)$. On considère la suite numérique $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \subseteq$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1- Etudier les variations de f sur [0, 1].

2- Montrer que pour tout $n \in \subseteq$, $u_n \in]0, 1[$, puis que $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{Lim}}\, u_n = 0$.

3- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \subseteq$, $u_n < \dfrac{1}{n+1}$.

4- On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie, pour tout $n \in \subseteq$, par $v_n = nu_n$.

a- Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et converge vers un réel v tel que $0 < v \leq 1$.

b- Montrer que $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{Lim}}(v_{n+1} - v_n) = v(1-v)$.

c- On suppose que $v < 1$. En écrivant $v_{2n} - v_n = \sum_{k=n}^{2n-1}(v_{k+1} - v_k)$ et en remarquant que $\sum_{k=n}^{2n-1}\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{2}$, en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ serait divergente. Conclure.

Exercice . Soient a et b deux réels tel que $0 < a < b$. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et par les relations de récurrence : $\forall n \in \subseteq$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

Montrer que ces deux suites sont adjacentes, donc convergentes vers une même limite (appelée moyenne arithmetico-géométrique des nombres a et b).

N.B. Les deux exercices ci-dessous nécessitent le théorème des accroissements finis. Ils devront donc être traités ultérieurement en fonction de l'état d'avancement du cours.

Exercice . Soit $\alpha > 1$. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de terme général donné par $u_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^\alpha}$.

1- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

2- Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, l'inégalité suivante, valable pour tout $x > 1$:

$$\frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$$

3- En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est majorée, puis convergente.

Remarque : dans le cas $\alpha = 2$, l'exercice peut se traiter sans utiliser le théorème des accroissements finis, la majoration $\dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$ étant élémentaire.

Exercice . Soit $f : [0, +\infty[\to \nabla$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \subseteq$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1- Montrer que, pour tout $n \in \subseteq$, $u_n \in [0,1]$.

2- Montrer qu'il existe un unique réel $l \in [0, 1]$ tel que $f(l) = l$.

3- Prouver, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :

$$\text{pour tout } n \in \subseteq,\ |u_{n+1} - l| \leq \frac{2}{3} |u_n - l|$$

4- En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, puis donner une valeur approchée de l à 10^{-3} près.