MOUVEMENT D'UN SATELLITE

On propose d'étudier le mouvement d'un satellite autour d'un astre, connaissant sa position et sa vitesse initiales.

Conventions

- M désigne la masse de l'astre et m celle du satellite, considérée comme négligeable devant M
- L'origine O du repère est le centre de l'astre qu'on considère comme immobile
- La relation fondamentale de la dynamique s'écrit $\vec{f} = m\vec{\gamma} = -GmM\vec{r}/r^3$ où $\vec{f}$ est la force à laquelle le satellite est soumis, $\vec{\gamma}$ son accélération et $\vec{r}$ le vecteur polaire $\overrightarrow{OM}$, $M(t)$ étant la position du satellite à l'instant t.
  On suppose que $GM = 1$ (quitte à changer les unités de longueurs et de temps). Avec ces nouvelles unités, on donc

$$\vec{f} = -m\frac{1}{r^3}\vec{r} \quad \text{, c'est à dire } \vec{\gamma} = -\frac{1}{r^3}\vec{r}$$

Pour visualiser la trajectoire sous Maple, on utilise les commandes phaseportrait, DEplot ou bien odeplot.
Commencer par charger les packages plots et DEtools (> with (Detools):with(plots):).

Syntaxe de DEplot et de phaseportrait

> DEplot ({*eqn_diff*} , {$x(t)$, $y(t)$, … } , $t = a .. b$, [[*cond. init. en* t_0] , [*cond. init. en* t_1] , …] , *scene* = S, *options*);
Si scene = [exp1,exp2], on demande le tracé de exp2 en fonction de exp1. Il y a plusieurs possibilités pour S : $[t,x(t)]$, $[t,y(t)]$, $[x(t) , y(t)]$ … Pour $S = [t,x(t)]$ ou $S = [t,y(t)]$, rajouter l'option *arrows = none*.
On peut préciser le pas utilisé pour construire la courbe avec stepsize; on peut aussi préciser la couleur avec linecolor :

Exemple

```
> phaseportrait({diff(x(t),t) - 4*y(t) = sin(t),diff(y(t),t) + x(t) = cos(t)} , {x(t),y(t)}, t= 0..10,[[x(0)=1,y(0)=0]] ,
  scene=[x(t),y(t)] , stepsize=0.01 , linecolor=blue);
```

Syntaxe de odeplot

On résout d'abord l'équation différentielle de façon numérique avec l'option *numeric* puis on utilise odeplot pour le tracé.

> odeplot (solution d'une ED retournée par dsolve avec le type *numeric* , [variables] , a..b , options);
Les options sont celles de plot ; numpoints précise le nombre de points utilisé pour le tracé.

Exemple

```
> soln:=dsolve({diff(x(t),t) - 4*y(t) = sin(t),diff(y(t),t) + x(t) = cos(t), x(0)=1,y(0)=0},{x(t),y(t)},type=numeric);
> odeplot (soln,[x(t),y(t)] , 0..10 , numpoints=100, color = COLOR(HUE,0.8));
```

1) Ecrire les équations différentielles satisfaites par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$
Tracer la trajectoire du satellite pour $t \in [0,10]$ avec les conditions initiales $M(0) = (2,0)$, $\vec{V_0} = (-0.2 , 0.4)$ puis avec les conditions initiales $M(0) = (2,0)$, $\vec{V}_0 = (-0.5 , 1)$

2) Ecrire une procédure orbite1 ayant pour paramètres la liste des conditions initiales et la durée T d'observation.
A l'aide de display, superposer plusieurs trajectoires correspondant à des conditions initiales différentes.

3) On rajoute maintenant un frottement dû à l'atmosphère : le satellite est donc soumis à une forme supplémentaire $-k\vec{V}$.
On prendra $k = 0.05$.
Ecrire une procédure orbite2 qui trace la trajectoire du satellite.
Compléter la procédure pour tracer également la courbe de la distance entre le satellite et la terre en fonction du temps (pour récupérer l'abscisse et l'ordonnée du satellite, on peut rajouter dans dsolve l'option output= listprocedure :

```
> soln:=dsolve({…} ,{x(t),y(t)},type=numeric, output = listprocedure);
> X:=t->subs(soln, x(t)) ; Y:=t->subs(soln, y(t)); # X et Y sont les fonctions coordonnées du satellite en fonction du
  temps.
```

4) On suppose maintenant le satellite soumis à l'attraction de deux astres (sans frottement) : un astre principal A_p et un astre secondaire A_s de masses M_p et M_s. On suppose $GM_p = 1$ et $GM_s = 0.5$. L'origine du repère est choisie au centre de A_p. On suppose que A_s a pour coordonnées (1,0) et que A_p et A_s sont immobiles.
Ecrire les équations différentielles du mouvement en coordonnées cartésiennes.
Ecrire une procédure orbite3 ayant pour paramètres les conditions initiales, la durée d'observation et qui retourne le tracé de la trajectoire.
Compléter la procédure pour qu'elle affiche aussi la variation de l'abscisse (ou de l'ordonnée) du satellite en fonction du temps.
Superposer plusieurs trajectoires pour des conditions initiales très proches et comparer les trajectoires. Superposer aussi les courbes décrivant $x(t)$.

5) On revient à la situation du début. Ecrire une procédure qui prend en paramètres les conditions initiales et qui calcule l'excentricité de la trajectoire, le grand axe, l'angle polaire de l'axe principal ainsi que les coordonnées du centre. On utilisera les formules suivantes :

On écrit l'équation polaire sous la forme $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \varphi)}$ avec $e > 0$ et $p > 0$; $\overrightarrow{OM} = r(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}$

On note : $\overrightarrow{V}$ le vecteur vitesse et α l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur vitesse; on a donc $\overrightarrow{V} = v_0(\cos\alpha\,\overrightarrow{u_\theta} + \sin\alpha\,\overrightarrow{v_\theta}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\overrightarrow{u_\theta})$.

$v_0 = \|\overrightarrow{V}(0)\|$ vitesse initiale , r_0 = rayon polaire initial
α_0 l'angle entre $\overrightarrow{OM}(0)$ et le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(0)$

On prouve qu'à $t = 0$, le système suivant est vérifié :

$$\begin{cases} e\cos(\theta_0 - \varphi) = \dfrac{p}{r_0} - 1 \\ e\sin(\theta_0 - \varphi) = \dfrac{p}{r_0 \tan\alpha_0} \\ p = (v_0 r_0 \sin\alpha_0)^2 \end{cases}$$

(En notant C le moment cinétique qui est constant, $C = m\, v_0 r_0 \sin\alpha_0$,
$\overrightarrow{V} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(r\overrightarrow{u_\theta}) = \dfrac{C}{mr^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\,\overrightarrow{v_\theta}\right) = \dfrac{C}{mr^2}\left(\dfrac{ep\sin(\theta-\varphi)}{(1 + e\cos(\theta - \varphi))^2}\overrightarrow{u_\theta} + r\overrightarrow{v_\theta}\right) = v_0(\cos\alpha\,\overrightarrow{u_\theta} + \sin\alpha\,\overrightarrow{v_\theta})$
$p = \dfrac{C^2}{km}$ avec $k = GmM = m$, d'où $p = (v_0 r_0 \sin\alpha_0)^2$ …)

En posant $z_0 = \dfrac{p}{r_0} - 1 + i\,\dfrac{p}{r_0\tan\alpha_0}$, on a donc $e = |z_0|$ et $\theta_0 - \varphi = \arg(z_0)$
Pour le calcul de v_0 , r_0 et α_0 on peut former les affixes de $\overrightarrow{OM}(0)$ et $\overrightarrow{V}(0)$ et utiliser les commandes abs et argument.
Pour le calcul du demi-grand axe de la conique, on utilise $2a = \dfrac{p}{1+e} + \left|\dfrac{p}{1-e}\right|$
Pour les coordonnées du centre de la conique : milieu des points d'affixe $\dfrac{p}{1+e}e^{i\varphi}$ et $\dfrac{p}{1-e}e^{i(\varphi+\pi)}$ ou bien point d'affixe $\varepsilon c e^{i\varphi}$ où $c = ea$ est la distance focale et $\varepsilon = 1$ pour une hyperbole et $\varepsilon = -1$ pour une conique.