CHAPITRE 1 : ESPACE VECTORIEL

I- Loi de composition interne et Loi de composition externe

I-1 Loi de composition interne (L.C.I.)

I-1-1 Définition

Définition :

Soit E un ensemble. On appelle loi de composition interne de E toute application définie de E^2 vers E, qui a tout élément (a,b) de E^2 associe un élément c de E, appelé composé de a par b. On note $c = a * b$.

Exemples :

1) Dans $E = \{0,1\}$, on définit l'application $*$ par : $a * b = ab + b$

- $*$ n'est pas une L.C.I. : $1*1 = 2, \quad 2 \notin E$
- On peut représenter la loi "$*$" par le tableau suivant :

$*$	0	1
0	0	1
1	0	2

$1*1 = 2, \quad 2 \notin E$

2) Dans $E = \{0,1\}$, on définit l'application T par : $a\mathrm{T}b = 1 - ab$

- T est une L.C.I. de E : $0\mathrm{T}0 = 0\mathrm{T}1 = 1\mathrm{T}0 = 1, \ 1 \in E$ et $1\mathrm{T}1 = 0, \ 0 \in E$
- On peut représenter la loi "T" par le tableau suivant :

T	0	1
0	1	1
1	1	0

$\forall x, y \in E, \quad xTy \in E$

3) Dans IR, l'addition et la multiplication sont des L.C.I.

4) Soit E un ensemble. Dans $P(E)$, l'intersection $\cap$ et la réunion $\cup$ sont des L.C.I.

I-1-2 Propriétés

a) Associativité, Commutativité, Distributivité

i) Définitions

- La L.C.I. $*$ est dite associative si $\forall(a,b,c)\in E^3 : (a*b)*c = a*(b*c)$
- La L.C.I. $*$ est dite commutative si $\forall(a,b)\in E^2 : a*b = b*a$
- La L.C.I. $*$ est dite distributive par rapport à T si :

$$\forall(a,b,c)\in E^3 : \begin{cases}(a\mathrm{T}b)*c = (a*c)\mathrm{T}(b*c)\\ a*(b\mathrm{T}c) = (a*b)\mathrm{T}(a*c)\end{cases}$$

- Si La L.C.I. $*$ commutative, elle est distributive par rapport à T si $\forall(a,b,c)\in E^3 : (a\mathrm{T}b)*c = (a*c)\mathrm{T}(b*c)$ ou $\forall(a,b,c)\in E^3 : a*(b\mathrm{T}c) = (a*b)\mathrm{T}(a*c)$

ii) Exemples

1) Dans $E = \{0,1\}$, la L.C.I. T définie par $a\mathrm{T}b = 1-ab$:
   - T est commutative : $0\mathrm{T}1 = 1\mathrm{T}0 = 1$
   - T n'est pas associative : $(0\mathrm{T}0)\mathrm{T}1(=0) \neq 0\mathrm{T}(0\mathrm{T}1)(=1)$

2) Dans IR :
   - L'addition et la multiplication sont des L.C.I. associatives et commutatives.
   - La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

3) Soit E un ensemble. Dans $P(E)$:
   - l'intersection $\cap$ et la réunion $\cup$ sont des L.C.I. associatives et commutatives.
   - Chacune des deux lois est distributive par rapport à l'autre

b) Eléments remarquables

i) Elément neutre

- Un élément e de E est dit élément neutre pour la loi $*$ ssi : $\forall a\in E : a*e = e*a = a$
- L'élément neutre, lorsqu'il existe, est unique. En effet, supposons $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$ deux éléments neutres pour la L.C.I . $*$, alors :

$$\left.\begin{array}{ll} e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1 & (e_2 \text{ élément neutre }) \\ e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2 & (e_1 \text{ élément neutre }) \end{array}\right\} \text{D'où : } \quad e_1 = e_2$$

Exemples :

- 0 est l'élément neutre pour l'addition dans IR $(n+0=0+n=n)$
- 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans IR $(n\times 1=1\times n=n)$
- ϕ est l'élément neutre pour la réunion dans $P(E)$ $(\phi\cup A=A\cup\phi=A)$
- E est l'élément neutre pour l'intersection dans $P(E)$ $(E\cap A=A\cap E=A)$

ii) Elément symétrisable

On considère un ensemble E muni d'une L.C.I. $*$ qui admet un élément neutre e. On appelle symétrique d'un élément a de E, lorsqu'il existe, un élément a' de E tel que : $a*a'=a'*a=e$.

- Lorsque cet élément a' est unique, l 'élément a est dit symétrisable.
- Si la L.C.I. est associative, alors le symétrique de a, lorsqu'il existe, est unique.
- a' est le symétrique de a ssi a est le symétrique de a'.
- Le symétrique du composé de a par b est égal au composé du symétrique de b par celui de a : $(aTb)'=b'Ta'$.

Exemples :

- Le symétrique d'un élément a pour $+$ dans IR est $-a$ (l'opposé de a).
- Le symétrique d'un élément a non nul pour $\times$ dans IR est $1/a$ (l'inverse de a).
- Le symétrique d'une fonction bijective f pour $\circ$ est f^{-1} (réciproque de f).

I-2 Loi de composition externe

Définition :

Soit E un ensemble. Une loi de composition externe (L.C.E.) est une application de $IR\times E$ vers E. On note

$$.: \begin{array}{ccc} IR\times E & \rightarrow & E \\ (\alpha,x) & \mapsto & \alpha.x \end{array}$$

Exemple :

Dans IR^2, la multiplication externe définie de $IR\times IR^2$ vers IR^2 $(E=IR^2)$ par : $\forall X=(x_1,x_2)\in IR^2, \forall\alpha\in IR:\quad \alpha.X=\alpha.(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2)$, est une L.C.E.

II- Structure d'espace vectoriel réel

II-1 Définition

Définition :

▪ On dit qu'un ensemble E muni d'une L.C.I. "$+$" et d'une L.C.E. "$.$" est un espace vectoriel réel, et note par $(E,+,.)$, ssi :

- "$+$" est associative et commutative.
- "$+$" admet un élément neutre 0_E.
- Tout élément de E est symétrisable pour "$+$" : $\forall x \in E, \exists (-x) \in E / x + (-x) = 0_E$
- La L.C.E. "$.$" vérifie : $(\forall (x,y) \in E^2, \quad \forall (\alpha,\beta) \in IR^2)$
  - $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$
  - $1.x = x$
  - $\alpha.(x+y) = (\alpha.x) + (\alpha.y)$
  - $(\alpha+\beta).x = (\alpha.x) + (\beta.x)$

▪ E est dit l'ensemble des vecteurs et IR l'ensemble des scalaires.

Notation :

- Quand il n'y a pas de confusion,
  - o on notera l'espace vectoriel réel $(E,+,.)$ simplement par E.
  - o on omettra le signe "$.$" : on remplacera l'écriture $\alpha.x$ par αx.
  - o Pour x, y dans E, on notera "$x+(-y)$" par "$x-y$".

Exemples :

1) $(IR^n,+,.)$ est un e.v.r., où les lois "$+$" et "$.$" sont définies dans IR^n par :

$\forall x (= (x_1,\cdots,x_n)), \forall y (= (y_1,\cdots,y_n)) \in IR^n, \forall \alpha \in IR, \text{ on } a :$

$$\begin{cases} (x_1,\cdots,x_n) + (y_1,\cdots,y_n) = (x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n) \\ \alpha.(x_1,\cdots,x_n) = (\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n) \end{cases}$$

2) $(IF(IR),+,.)$ est un e.v.r., où les lois "$+$" et "$.$" sont définies dans $IF(IR)$ par :

$\forall f, g \in F(IR), \forall \alpha \in IR, \text{ on } a :$

$$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) & \forall x \in IR \\ (\alpha.f)(x) = \alpha f(x) & \forall x \in IR \end{cases}$$

II-2 Propriétés

Si $(E,+,.)$ un espace vectoriel réel, alors $\forall \alpha, \beta \in IR, \forall x, y \in E$, on a :

1) $\alpha.0_E = 0_E$
2) $0_{IR}.x = 0_E$
3) $\alpha.x = 0_E \Rightarrow \alpha = 0 \quad ou \quad x = 0_E$
4) $(-\alpha).x = -(\alpha.x)$
5) $(\alpha - \beta).x = (\alpha.x) - (\beta.x)$
6) $\alpha.(x - y) = (\alpha.x) - (\alpha.y)$

III- Sous espaces vectoriels

III-1 Définition et propriétés

III-1-1 Définition

Définition :

Un sous ensemble F d'un espace vectoriel E est dit sous espace vectoriel (s.e.v.) de E ssi :

1) $F \neq \phi$
2) F est stable pour "$+$" : $(\forall x, y \in F \qquad x + y \in F)$
3) F est stable pour "$.$" : $(\forall (\alpha, x) \in IR \times F \qquad \alpha.x \in F)$

ssi :

1) $F \neq \phi$
2) $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\alpha, \beta) \in IR^2 \quad \alpha.x + \beta.y \in F$

Exemples :

1) $(P(IR),+,.)$ (l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$) est un s.e.v. de $(F(IR),+,.)$.
2) $(IR \times \{0\},+,.)$ et $(\{0\} \times IR,+,.)$ sont des s.e.v. de $(IR^2,+,.)$.

III-1-2 Propriétés :

Si E est un espace vectoriel, alors :

1) Tout sous espace vectoriel de E est un espace vectoriel.
2) L'intersection de n sous espaces vectoriels de E est un espace vectoriel.
3) $(\{0_E\},+,.)$ est un sous espace vectoriel de E.
4) 0_E appartient à tous les sous espaces vectoriels de E.

III-2 Intersection de sous espaces vectoriels

Théorème :

L'intersection de deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel E est un sous espace vectoriel de E.

Remarque :

La réunion de deux sous espaces vectoriels n'est en général pas un sous espace vectoriel.

Théorème :

L'intersection de plusieurs sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel E est un sous espace vectoriel de E.

III-3 Somme de sous espaces vectoriels

Définition :

Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E.

- La somme des sous espaces vectoriels E_1 et E_2, notée par $E_1 + E_2$, est égale à :
$$E_1 + E_2 = \{x \in E / \quad \exists (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 / x = x_1 + x_2\}$$
- La somme directe des sous espaces vectoriels E_1 et E_2, notée par $E_1 \oplus E_2$, est égale à : $$E_1 \oplus E_2 = \{x \in E / \quad \exists! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 / x = x_1 + x_2\}$$
- Si $E = E_1 \oplus E_2$, alors les sous espaces vectoriels E_1 et E_2 sont dits sous espaces supplémentaires de E.

Théorème :

Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E alors $E_1 + E_2$ et $E_1 \oplus E_2$ sont aussi des sous espaces vectoriels de E.

Théorème :

Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $E = E_1 \oplus E_2$
2) $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$
3) $E = E_1 + E_2$ et $x_1 + x_2 = 0_E \Rightarrow (x_1 = x_2 = 0_E)$

Exemple :

- $E = F(IR)$: $E = E_1 \oplus E_2$, avec
  - $E_1 = \{ f \in E \,/\, f(x) = f(-x) \quad \forall x \in IR \}$ (ensemble des fonctions paires)
  - $E_2 = \{ f \in E \,/\, f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in IR \}$ (ensemble des fonctions impaires)

Pour montrer que $E = E_1 \oplus E_2$, il suffit de vérifier que $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
En effet :

1) $E = E_1 + E_2$:

- Soit $f \in E$. On pose $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ f_2(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$

- On a : $\begin{cases} f_1(-x) = \dfrac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = f_1(x) & \Rightarrow f_1 \in E_1 \\ f_2(-x) = \dfrac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -f_2(x) & \Rightarrow f_2 \in E_2 \\ et \quad f(x) = f_1(x) + f_2(x) \end{cases}$

- Donc : $\forall f \in E \quad \exists (f_1, f_2) \in E_1 \times E_2 \,/\, f = f_1 + f_2$

- D'où : $E = E_1 + E_2$

2) $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$:

- Si $f_0 \in E_1 \cap E_2$, alors : $\begin{cases} f_0(x) = f_0(-x) \quad \forall x \in IR & (f_0 \in E_1) \\ f_0(x) = -f_0(-x) \quad \forall x \in IR & (f_0 \in E_2) \end{cases}$

- Donc : $f_0 = O_E$, $\quad (f_0(x) = 0 \quad \forall x \in IR)$

- D'où : $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

IV- Combinaison linéaire - système générateur

IV-1 Combinaison linéaire

Définition :

Dans un espace vectoriel E, on appelle une combinaison linéaire de n vecteurs $u_1,\cdots,u_n$, tout vecteur u de E qui peut s'écrire sous la forme :

$$u=\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i\ , \qquad \text{avec } (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in IR^n$$

Théorème :

L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs d'un espace vectoriel E est un sous espace vectoriel de E.

IV-2 Système générateur

Définition :

- Dans un espace vectoriel E, on dit qu'un système de n vecteurs $\{u_1,\cdots,u_n\}$ est un système générateur de E (ou que les vecteurs $u_1,\cdots,u_n$ sont des vecteurs générateurs de E) si tout vecteur u de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1,\cdots,u_n$:

$$(\forall u\in E)\quad(\exists \alpha_1,\cdots,\alpha_n\in IR)\quad / u=\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i$$

- Le système $\{u_1,\cdots,u_n\}$ s'appelle aussi partie ou famille génératrice de E.
- On dit aussi que le système $\{u_1,\cdots,u_n\}$ engendre E ou que E est engendré par le système $\{u_1,\cdots,u_n\}$.
- On note $E=<u_1,\cdots,u_n>$ ou $E=Vect\{u_1,\cdots,u_n\}$

Remarque :

- Le sous espace vectoriel des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1,\cdots,u_n$ est engendré par les vecteurs $u_1,\cdots,u_n$: $\quad E_n=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i, \alpha_i\in IR, u_i\in E\right\}=<u_1,\cdots,u_n>$

Exemple :

- $IR\times\{0\}=<u_1,u_2>$, avec $u_1=(1,0)$ et $u_2=(-1,0)$:

$$\forall (x,0)\in IR\times\{0\},\quad \exists \alpha,\beta\in IR\quad /(x,0)=\alpha.(1,0)+\beta.(-1,0)=(\alpha-\beta,0)$$

il suffit de prendre par exemple $\alpha=x$ et $\beta=0$

V- Système libre - système lié

Définition :

- On dit que n vecteurs $u_1,\cdots,u_n$ d'un espace vectoriel E sont linéairement indépendants (ou que le système $\{u_1,\cdots,u_n\}$ est un système libre) si :
$$\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n=0_E \Rightarrow \alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$$
- On dit que n vecteurs $u_1,\cdots,u_n$ d'un espace vectoriel E sont linéairement dépendants (ou que le système $\{u_1,\cdots,u_n\}$ est un système lié) s'ils ne sont pas linéairement indépendants : $\exists(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\neq(0,\cdots,0)\quad/\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n=0_E$

Exemples :

- Les vecteurs $u_1=(1,0,1)$, $u_2=(-1,1,1)$ et $u_3=(0,1,0)$ de IR^3 sont linéairement indépendants.
- Les vecteurs $u_1=(1,0,1)$, $u_2=(-1,1,1)$ et $u_3=(0,1,2)$ de IR^3 sont linéairement dépendants.

Théorème :

- Un système de vecteurs est lié ssi un des vecteurs du système est combinaison linéaire des autres vecteurs du système.
- Si un des vecteurs d'un système est combinaison linéaire des autres vecteurs du système alors tout vecteur de ce système est combinaison linéaire des autres vecteurs du système.

Propriétés :

1) Le vecteur 0_E n'appartient à aucun système libre de E.
2) $\forall u\in E/u\neq 0_E$, le système $\{u\}$ est libre.
3) Tout système de vecteurs extrait d'un système libre est libre.
4) Tout système de vecteurs contenant un système lié est lié.

VI- Ordre et rang d'un système de vecteurs

Définition :

- L'ordre d'un système est le nombre de vecteurs du système.
- Le rang d'un système est égal au plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de ce système.

Exemples : $S_1 = \{(2,1),(1,1),(0,-1)\}$

- L'ordre de S_1 est égal à 3.
- Le rang de S_1 est égal à 2 car :
  - Les vecteurs $(2,1),(1,1)$ *et* $(0,-1)$ sont linéairement dépendants $((2,1) = 2.(1,1)+(0,-1))$, ce qui implique que $rang(S_1) < 3$.
  - Les vecteurs $(2,1)$ *et* $(1,1)$ sont linéairement indépendants, ce qui implique que $rang(S_1) = 2$.

Propriétés :

1) Un système de vecteurs est libre ssi son rang est égal à son ordre.
2) Dans un système lié de rang r, les vecteurs libres extraits en nombre r sont dits vecteurs principaux, les autres sont dits non principaux et sont combinaison linéaire des premiers.
3) Le rang d'un système de vecteurs est égal à la dimension de l'espace engendré par ces vecteurs.

VII- Base d'un espace vectoriel

Définition :

Une base d'un espace vectoriel E c'est tout système libre de vecteurs générateurs de E.

Exemples :

1) $\{(1,0),(0,1)\}$ est une base de IR^2
2) $\{1,0),(0,1),(1,1)\}$ n'est pas une base de IR^2.
3) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est une base de IR^3 : on l'appelle la base canonique de IR^3.
4) En général, $\{(1,0,\cdots 0),\cdots,(0,\cdots,1,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)\}$ est la base canonique de IR^n.

Théorème :

Un système de vecteurs $\{u_1,\cdots,u_n\}$ est une base de E ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1,\cdots,u_n$:

$$(\forall u \in E) \quad (\exists ! \alpha_1,\cdots,\alpha_n \in IR) \quad / u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

VIII- Espace vectoriel de dimension fini

Définition :

- Un espace vectoriel réel est dit de dimension finie s'il admet une base constituée d'un nombre fini n de vecteurs.
- Ce nombre n s'appelle la dimension de l'espace. On note $\dim E = n$.

Exemple :

- IR^n est un espace vectoriel réel de dimension n.

Propriétés :

Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, alors :

1) Toutes les bases de E ont le même ordre égal à n.
2) L'ordre de tout système générateur de E est supérieur à n.
3) L'ordre de tout système libre de E est inférieur à n.
4) Si l'ordre d'un système libre ou générateur de E est égal à n, alors ce système est une base de E.

5) Si F est un sous espace vectoriel de E, alors F est un espace vectoriel réel de dimension fini m, avec $m \leq n$. Si de plus $m = n$, alors $F \equiv E$.
6) Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels de E, alors :
   - $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$
   - $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$

Théorème :

Soit E un espace vectoriel réel de dimension fini.

- Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E, $E = E_1 \oplus E_2$, alors $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$.
- Si $B_1 = \{u_1, \cdots, u_p\}$ et $B_2 = \{v_1, \cdots, v_q\}$ sont deux bases respectives de E_1 et E_2, alors $B = \{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q\}$ est une base de E.

Théorème :

Soit E un espace vectoriel réel de dimension fini. Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E, de bases respectives $B_1 = \{u_1, \cdots, u_p\}$ et $B_2 = \{v_1, \cdots, v_q\}$.

Si $B = \{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q\}$ est une base de E alors $E = E_1 \oplus E_2$.