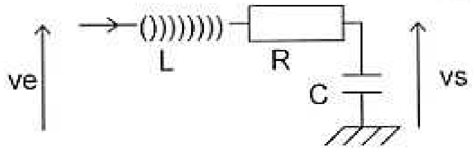
DIAGRAMME DE BODE D'UN CIRCUIT RLC



On étudie un circuit RLC série alimenté par un générateur de f.e.m sinusoïdale de fréquence ω

On pose $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $x = \omega/\omega_0$ et le facteur de qualité $Q = L\omega_0/R$

Soit $\underline{V_e}$ (tension d'entrée) la tension complexe aux bornes du générateur et $\underline{V_s}$ (tension de sortie) la tension complexe aux bornes d'un des éléments du circuit.

On appelle fonction de transfert le quotient

$$\underline{H} = \underline{V_s} / \underline{V_e}$$

Le gain est par définition le quotient des tensions maximales (ou des tensions efficaces)

$$G = \frac{\underline{V_s}_{\max}}{\underline{V_e}_{\max}} = |\underline{H}|$$

Et le gain en décibels, est (log = logarithme décimal)

$$Gdb = 20\log G$$

Le diagramme de Bode, est la donnée, pour une valeur fixée de Q, des deux courbes

$$\begin{cases} \text{Gdb en fonction de } \log x \text{ (ou de } \log \omega) \\ \text{déphasage de } \underline{V_s} \text{ par rapport à } \underline{V_e} \text{ en fonction de } \log x \end{cases}$$

On rappelle que l'impédance complexe du circuit RLC série est donnée par

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

On rappelle que sous Maple, le nombre complexe j des physiciens est noté I . Le logarithme décimal se note log10; il faut le charger au préalable.

1) Charger le package plots ainsi que log10 : > with(plots): readlib(log10):

2) Résoudre avec la fonction solve, le système $\{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $x = \omega/\omega_0$, $Q = L\omega_0/R\}$ avec pour inconnues $\{R, L, C, \omega\}$

Assigner les solutions : > assign (sol);

(de cette façon, toutes les quantités qu'on devra traiter s'exprimeront uniquement en fonction de x et Q)

3) Définir l'impédance Z du circuit

Aux bornes de *R*

4) On choisit la résistance en sortie. Définir la fonction de transfert H1 correspondante (éliminer $\underline{I}$ des deux équations $\underline{V_e} = \underline{Z}\,\underline{I}$ et $\underline{V_s} = R\underline{I}$)

Définir le gain G1correspondant et simplifier son expression : on doit obtenir une expression où ne figure que x et Q comme paramètres. On peut rajouter l'option, assume = positive, dans la commande simplify pour forcer la simplification.

Définir Gdb1 le gain en décibels

5) Vérifier à l'aide de Maple que l'expression G1 est invariante par la transformation $x \mapsto 1/x$

6) On désire tracer la courbe de Gdb1 pour différentes valeurs de Q en superposant les tracés. Pour une valeur de Q fixée, on doit tracer une courbe paramétrée [log10(x) , Gdb1(x), $x = a$ .. b]

a) Définir une fonction F1: = $q \mapsto$ [log10(x) , subs($Q = q$, Gdb1), x = 0.1 .. 10] ; pourquoi la commande F1: = $Q \mapsto$ [log10(x) ,Gdb1, x = 0.1 .. 10] ne convient-elle pas ?

b) On veut faire le tracé pour Q = 0.4 à 2 avec un pas h = 0.2 . Il faut construire la liste des équations paramétriques : [seq (F1(…) , …)] puis appliquer plot (liste des équations, options éventuelles)

c) Effectuer aussi le tracé des courbes du gain G1 pour les mêmes valeurs de Q

7) Définir le déphasage PHI1 de $\underline{V}_s$ par rapport à $\underline{V}_e$ (utiliser la fonction argument de Maple)
Tracer les courbes de déphasage pour les mêmes valeurs de Q que dans la question 6

8) Analyser les courbes obtenues (adapter éventuellement les intervalles pour les tracés). Pour quelle valeur de x, le gain est-il maximal ? A quel type de filtre a-t-on affaire ?

Aux bornes de *C*

9) a) Reprendre l'étude aux bornes de la capacité : définir H2, G2, Gdb2, PHI2, … faire les tracés
b) Pour quelle valeur de x, le gain est-il maximal ? (discuter selon la valeur de Q)
c) A quel type de filtre a-t-on affaire ?

10) Effectuer le développement limité de G2 en 0 à l'ordre 4 en x :
syntaxe pour le DL de $f(x)$ en a à l'ordre n : > taylor (f , $x = a$, n);
On dit que $\underline{V}_s$ est hyperstationnaire lorsque G2 = 1 + O(x^4) au voisinage de 0. Pour quelle valeur de Q cela se produit-il ?
A quelle courbe de gain cela correspond-t-il sur le graphique ?

Aux bornes de *L*

11) a) Reprendre l'étude aux bornes de la bobine : définir H3, G3, Gdb3, PHI3, …
b) Montrer à l'aide de Maple qu'on passe de G2 à G3 par la transformation $x \mapsto 1/x$
c) Pour quelle valeur de x, le gain est-il maximal ? (discuter selon la valeur de Q)
d) A quel type de filtre a-t-on affaire ?

12) Effectuer le développement limité de G3 à l'infini (x = infinity) à l'ordre 4 en x. Pour quelle valeur de Q, $\underline{V}_s$ est-il hyperstationnaire à l'infini ?

Aux bornes de *LC*

13) Reprendre l'étude aux bornes de LC ;
A quel type de filtre a-t-on affaire ?

Raffinement …

14) Dans le cas de la sortie aux bornes de la capacité, reprendre les graphiques de façon à faire apparaître ensemble

$$\begin{cases} \text{en rouge la courbe correspondant à } Q = 1/\sqrt{2} \\ \text{en noir les courbes correspondant à } Q = \sqrt{2} + 0.2k,\ k = 1 \,..\, 6 \\ \text{en bleu les courbes correspondant à } Q = \sqrt{2} - 0.1k,\ k = 1 \,..\, 5 \end{cases}$$

Pour cela, définir trois plot séparés et les réunir à l'aide de display de façon à superposer les graphiques.