

CHAPITRE 6

SYSTÈMES DU SECOND ORDRE

1. Équation différentielle – Fonction de transfert.

On appelle système du second ordre, un système régi par une équation différentielle du type :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2 \cdot \mathbf{x}}{\omega_n} \cdot \frac{dy}{dt} + y = K \cdot x$$

avec: $\left(\frac{2 \cdot \mathbf{x}}{\omega_n}\right)^2 - \frac{4}{\omega_n^2} < 0$

ce qui donne $|\mathbf{x}| < 1$ (le système ne peut pas se décomposer en deux systèmes du premier ordre en série).

ω_n est appelée pulsation libre ou pulsation naturelle ou **pulsation propre** du système **non amorti**.
 ω_n se mesure en rad/s.
 \mathbf{x} est appelé **amortissement** du système ou facteur d'amortissement.
 K est le **gain statique** du système (gain en régime permanent).

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation, on obtient :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2 \cdot Y(p) - \left(\frac{1}{\omega_n^2} \cdot p \cdot y(0^+) + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot y'(0^+)\right) + \frac{2 \cdot \mathbf{x}}{\omega_n} \cdot p \cdot Y(p) - \frac{2 \cdot \mathbf{x}}{\omega_n} \cdot y(0^+) + Y(p) = K \cdot X(p)$$

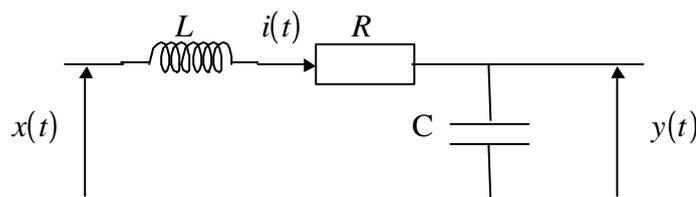
Lorsque les conditions initiales sont nulles : $\left(\frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot \mathbf{x}}{\omega_n} \cdot p + 1\right) \cdot Y(p) = K \cdot X(p)$

La fonction de transfert du système est alors :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K \cdot \omega_n^2}{\omega_n^2 + 2 \cdot \mathbf{x} \omega_n p + p^2} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \mathbf{x}}{\omega_n} p + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}$$

Cette fonction de transfert possède un pôle complexe conjugué: $(-\mathbf{x} \pm j \cdot \sqrt{1 - \mathbf{x}^2}) \cdot \omega_n$

Exemple :



Pour des conditions initiales nulles, on a : $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt = x$ et $y = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \cdot dt$

d'où :
$$L.C. \frac{d^2 y}{dt^2} + R.C. \frac{dy}{dt} + y = x$$

et :
$$H(p) = \frac{1}{L.C.p^2 + R.C.p + 1}$$

avec :
$$\omega_n^2 = \frac{1}{L.C} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{2} \cdot R.C. \omega_n$$

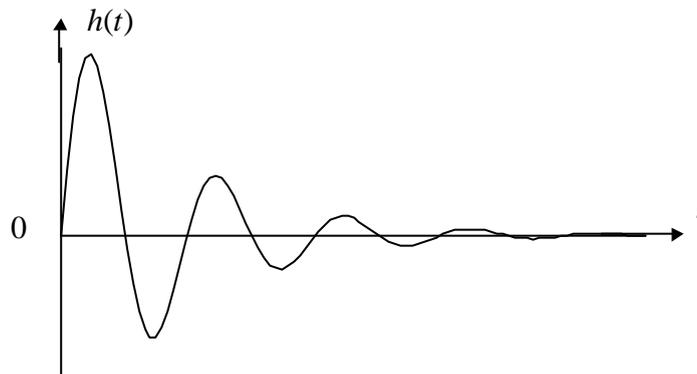
2. Réponse impulsionnelle.

La réponse impulsionnelle du système est donnée par : $h(t) = LP^{-1}[H(p)]$

d'où :
$$h(t) = \frac{K \cdot \omega_n}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \cdot e^{-\alpha \omega_n t} \cdot \text{Sin}[\omega_n \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot t]$$

On constate d'après cette expression, que le système est stable, si $\alpha \omega_n > 0$. C'est à dire si les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative. ω_n étant positive, le système est stable pour $\alpha > 0$.

Si le système est stable, $h(t)$ est une sinusoïde amortie :



$\omega_p = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}$ est appelée **pulsation propre** ou pseudo pulsation du système.

3. Réponse indicielle.

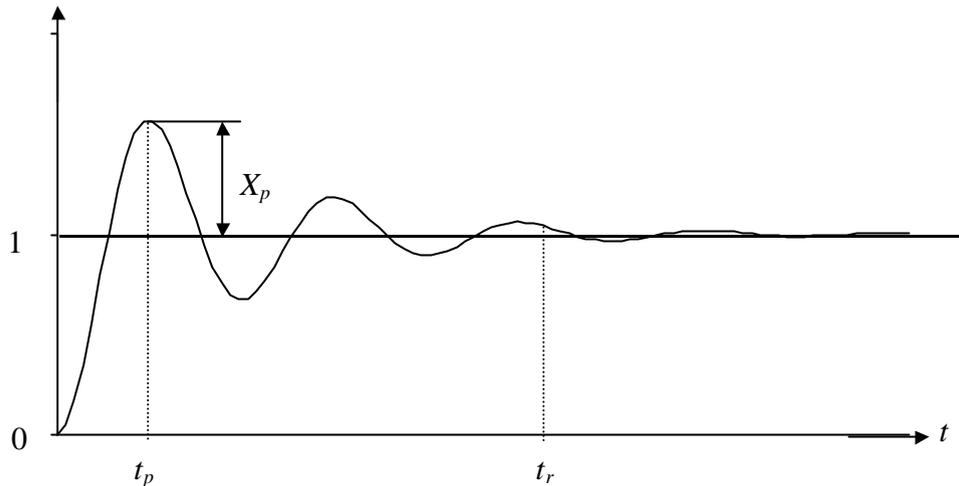
Cette réponse est obtenue pour $x(t) = u(t)$ soit $X(p) = 1/p$.

On a donc :
$$w(t) = LP^{-1}[H(p)/p]$$

On démontre alors que :
$$w(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \cdot e^{-\alpha \omega_n t} \cdot \text{Sin}[\omega_n \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot t + \varphi] \right]$$

avec :
$$\text{tg}(\varphi) = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}$$

Pour un système ayant un gain statique de 1 ; $K = 1$:



Lorsque le système est stable, ($\mathbf{x} > 0$), la réponse du système est sinusoïde amortie autour de la valeur finale qui est égale à K fois la valeur de l'échelon. (Sauf pour le cas critique, où $\mathbf{x} = 1$: la réponse est alors apériodique.)

La pente à l'origine est égale à 0.

Le temps de réponse à 2% est à peu près égal à $\frac{4}{\mathbf{x} \mathbf{w}_n}$.

Pour les systèmes du deuxième ordre, on définit:

Instant de premier dépassement :

On appelle instant de premier dépassement, l'instant où la sortie atteint son premier maximum. On le note t_p .

Amplitude du premier dépassement :

On appelle amplitude de premier dépassement, l'amplitude du premier maximum sur la valeur finale de la sortie. On note cette valeur X_p .

Calcul de t_p :

A t_p , on a $w'(t) = 0$ car $w(t)$ est maximum. Or, on a :

$$w'(t) = -K \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}} \cdot e^{-\mathbf{x}w_n t} \cdot \mathbf{w}_n \cdot \left[-\mathbf{x} \sin[\mathbf{w}_n \cdot \sqrt{1-\mathbf{x}^2} \cdot t + \mathbf{q}] + \sqrt{1-\mathbf{x}^2} \cdot \cos[\mathbf{w}_n \cdot \sqrt{1-\mathbf{x}^2} \cdot t + \mathbf{q}] \right]$$

donc $w'(t) = 0$ équivaut à : $\sqrt{1-\mathbf{x}^2} \cdot \cos[\mathbf{w}_n \cdot \sqrt{1-\mathbf{x}^2} \cdot t + \mathbf{q}] = \mathbf{x} \sin[\mathbf{w}_n \cdot \sqrt{1-\mathbf{x}^2} \cdot t + \mathbf{q}]$

on a : $\text{tg}(\mathbf{q}) = \frac{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{x}^2 + (\sqrt{1-\mathbf{x}^2})^2 = 1$

donc, par identification : $\mathbf{x} = \cos(\mathbf{q})$ et $\sqrt{1-\mathbf{x}^2} = \sin(\mathbf{q})$

l'égalité précédente devient donc: $\sin(\mathbf{q}) \cdot \cos[\mathbf{w}_n \cdot \sqrt{1-\mathbf{x}^2} \cdot t + \mathbf{q}] = \cos(\mathbf{q}) \cdot \sin[\mathbf{w}_n \cdot \sqrt{1-\mathbf{x}^2} \cdot t + \mathbf{q}]$

soit : $\sin\left[\mathbf{q} - \left(\mathbf{w}_n \cdot \sqrt{1-\mathbf{x}^2} \cdot t + \mathbf{q}\right)\right] = 0$ d'où $\sin\left[\mathbf{w}_n \cdot \sqrt{1-\mathbf{x}^2} \cdot t\right] = 0$

Finalement on a $w'(t) = 0$ pour :



$$w_n \cdot \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot t = 0 \quad \text{pente nulle à l'origine.}$$

$$w_n \cdot \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot t = k \cdot p \quad \text{avec } k \text{ entier.}$$

l'instant de premier dépassement est obtenu pour $k = 1$: $t_p = \frac{p}{w_n \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}}$

à cet instant on a : $W_p = W(t_p) = K(1 + e^{-p/tg(q)})$

d'où :

$$X_p = K \cdot e^{-p/tg(q)}$$

Remarque :

A partir du relevé de la réponse indicielle, on peut retrouver par identification l'équation d'un système du deuxième ordre :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{ln^2 X_p / K}}} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{p}{t_p \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}}$$

4. Réponse à une rampe.

Cette réponse est obtenue pour $x(t) = a \cdot t \cdot u(t)$.

On a $X(p) = a/p^2$, et: $y(t) = K \cdot a \cdot \left[t - \frac{2 \cdot \alpha}{w_n} + \frac{1}{w_n \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}} \cdot e^{-\alpha w_n t} \cdot \text{Sin} \left[w_n \cdot \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot t + 2q \right] \right]$

5. Régime harmonique.

On pose $p = j\omega$, ce qui correspond à un cas particulier pour la transformée de Laplace. La transmittance

isochrone du système est : $\overline{H(j\omega)} = \frac{K \cdot w_n^2}{w_n^2 - \omega^2 + 2 \cdot j \cdot \alpha \cdot \omega \cdot w_n}$

on a alors : $\left| \overline{H(j\omega)} \right|_{dB} = 20 \cdot \log(K \cdot w_n^2) - 10 \cdot \log \left[w_n^4 + \omega^4 + (4 \cdot \alpha^2 - 2) \cdot \omega^2 \cdot w_n^2 \right]$

et : $\text{Arg} \left[\overline{H(j\omega)} \right] = -\text{Arctg} \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot \omega \cdot w_n}{w_n^2 - \omega^2} \right]$

Deux cas se présentent :

1^{er} cas :

$\left| \overline{H(j\omega)} \right|$ s'annule : dans ce cas, le gain du système passe par un maximum. On dit alors qu'il y a résonance.

$$\left| \overline{H(j\omega)} \right|' = \frac{d \left| \overline{H(j\omega)} \right|}{d\omega} = -K \cdot w_n^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{[4 \cdot \omega^3 + 2 \cdot (4 \cdot \alpha^2 - 2) \cdot \omega \cdot w_n^2]}{\left[(w_n^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \alpha \cdot \omega \cdot w_n)^2 \right] \sqrt{(w_n^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \alpha \cdot \omega \cdot w_n)^2}}$$

donc $\left| \overline{H(j\omega)} \right|' = 0$ équivaut à : $4 \cdot \omega^3 + 2 \cdot (4 \cdot \alpha^2 - 2) \cdot \omega \cdot w_n^2 = 0$

soit :
$$\omega^2 + (2 \cdot x^2 - 1) \cdot \omega_n^2 = 0$$

ce qui n'est possible que si $(2 \cdot x^2 - 1) < 0$ c'est à dire $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

La résonance a lieu pour $|\overline{H(j\omega)}| = 0$, c'est à dire: $\omega = \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{(1 - 2 \cdot x^2)}$

ω_r est appelée **pulsation de résonance** du système.

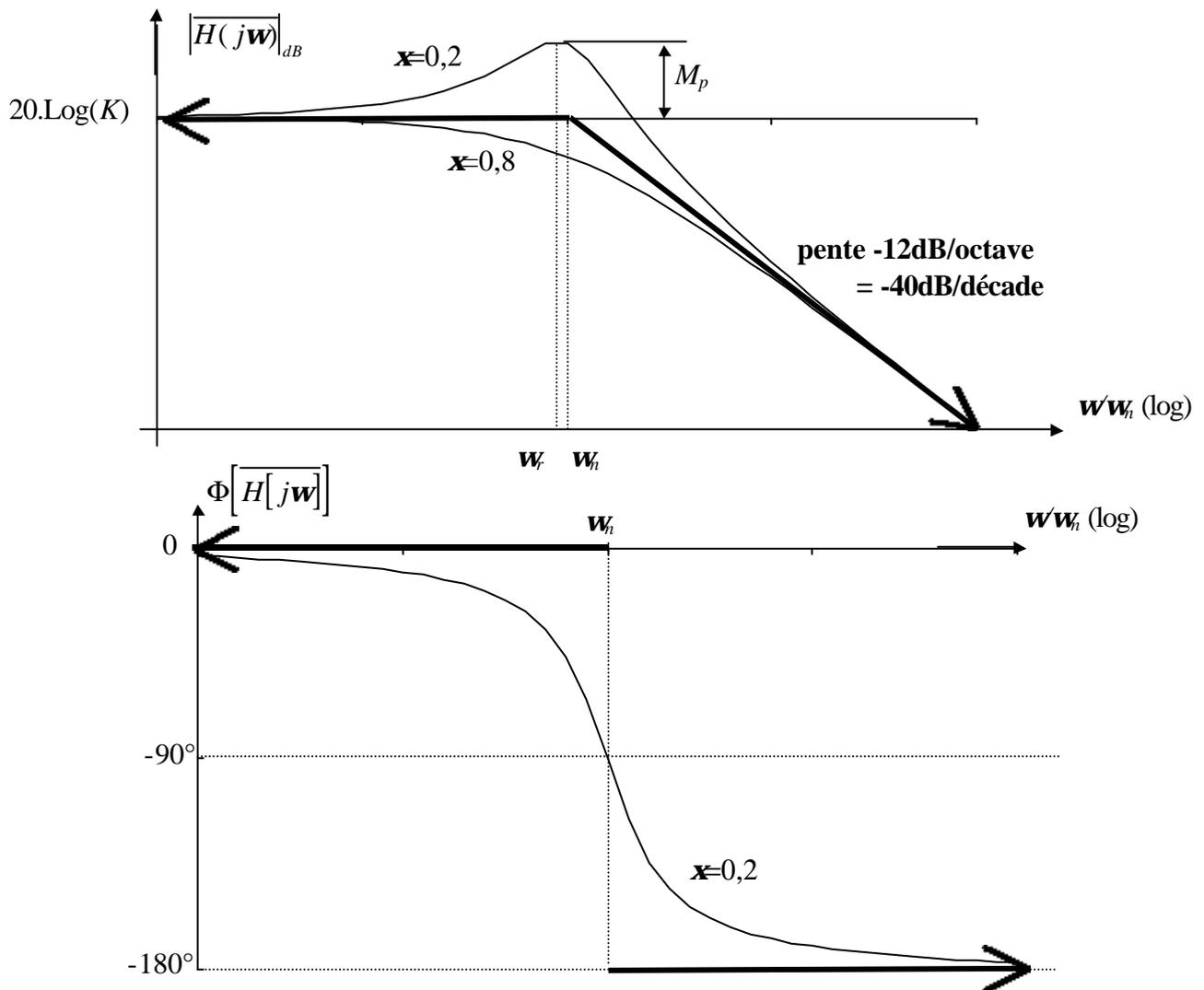
2^{me} cas:

$|\overline{H(j\omega)}|$ ne s'annule jamais : il n'y a pas de résonance. C'est le cas où $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$

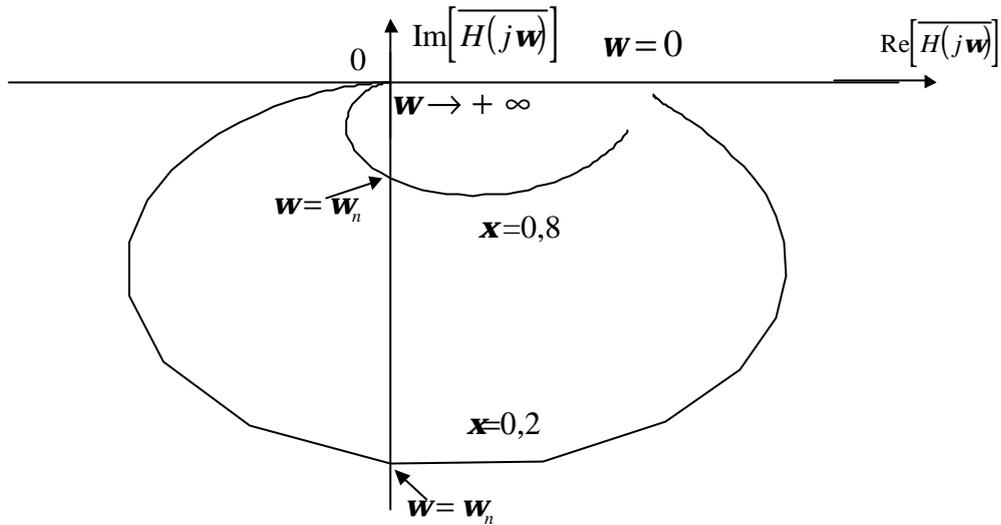
Dans le cas où il y a résonance, on définit alors un **facteur de résonance** M_p par:

$$M_p = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{1 - x^2}}$$

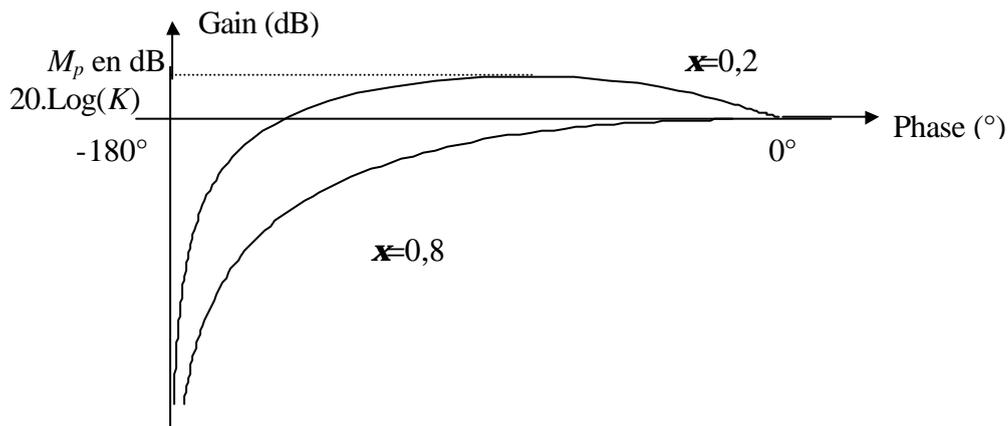
- Représentation de Bode :



- Représentation dans le plan de Nyquist :



- Représentation dans le plan de Black :



www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com