

## OSCILLATEURS HARMONIQUES

(d'après "La physique avec Maple" V.Bourges Ellipse)

On considère une masse  $m$  pouvant glisser sans frottement le long d'un axe horizontal et fixée à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur  $k$ . L'autre extrémité du ressort est fixe. On prend comme origine de l'axe horizontal la position de la masse au repos. La RFD s'écrit alors  $x'' + \omega_0^2 x = 0$  où  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  est la pulsation propre.

Commencer par charger les packages plots et DEtools.

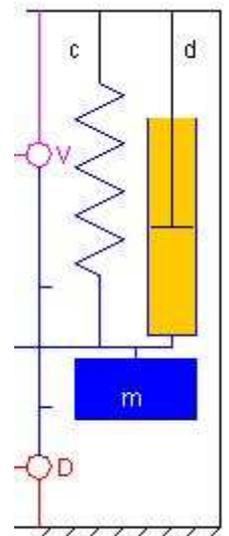
On rappelle la syntaxe de DEplot et de phaseportrait :

```
> DEplot ( {eqn_diff} , {x(t), y(t), ... } , t = a .. b , [[cond. init. en t0] , [cond. init. en t1] , ... ] , scene = S, options);
```

avec plusieurs possibilités pour  $S$  :  $[t, x(t)]$  ,  $[t, y(t)]$  ,  $[x(t) , y(t)]$  ...

Pour  $S = [t, x(t)]$  ou  $S = [t, y(t)]$ , rajouter l'option  $arrows = none$ .

- 1) Poser  $\omega_0 = 2\pi$  et résoudre l'équation différentielle avec les conditions initiales  $x(0) = a$  et  $x'(0) = 0$  (utiliser dsolve)  
Tracer sur un même graphique les courbes  $y = x(t)$  pour  $a = 1$  à  $a = 2.5$  avec un pas de 0,5 (utiliser display)  
(on peut aussi superposer les courbes avec DEplot : mettre les conditions initiales sous la forme  $[[x(0) = 1 , D(x)(0) = 0]$  ,  $[x(0) = 1.5 , D(x)(0) = 0]$  , ... ,  $[x(0) = 2.5 , D(x)(0) = 0]$  )
- 2) On note  $v(t)$  la vitesse de la masse à l'instant  $t$ . Ecrire l'équation  $x'' + \omega_0^2 x = 0$  sous forme d'un système différentiel linéaire en  $x(t)$  et  $v(t)$ , c'est à dire sous la forme
 
$$\begin{cases} x' = ax + bv \\ v' = cx + dv \end{cases} \text{ où } a, b, c, d \text{ sont des constantes à préciser}$$
- 3) Tracer avec phaseportrait les trajectoires  $(x(t) , v(t))$  dans l'espace des phases  $(x, v)$  pour les mêmes conditions initiales qu'en (1).  
Quelle est la nature des trajectoires ? Expliquer pourquoi elles sont parcourues dans le sens des aiguilles d'une montre.
- 4) On considère le même dispositif mais avec un frottement fluide. On obtient un oscillateur harmonique amorti. La RFD devient  $x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = 0$ . Le comportement dépend du signe de  $\Delta = h^2 - \omega_0^2$ .
  - a) Régime sinusoïdal amorti : cas où  $\Delta < 0$  et l'amortissement faible; les solutions sont de la forme  $A \exp(-ht) \cos(\omega t + \varphi)$  avec  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ .  
Reprenre la question 3 avec  $h = 1$  et  $\omega_0 = 2\pi$  ; expliquer pourquoi les trajectoires convergent vers l'origine (on dit que l'origine est un attracteur du système).  
Expliquer pourquoi deux trajectoires dans l'espace des phases ne peuvent pas se couper et pourquoi les trajectoires coupent l'axe des abscisses avec une tangente verticale.  
Sous l'hypothèse  $v(0) = 0$ , prouver que  $A = x(0)\omega_0/\omega$ . Tracer sur un même graphique, la courbe  $x(t)$  avec  $x(0) = 2$ , la courbe de  $v(t)$ , la courbe de l'amplitude de  $x(t)$ . Au vu du graphique, quel est le déphasage entre  $x(t)$  et  $v(t)$  ?
  - b) Reprenre la question 3 pour un régime aperiodique : cas  $\Delta > 0$  et amortissement fort (prendre  $h = 15$ ). Commenter le graphique.
  - c) Même chose pour le régime critique  $\Delta = 0$ .
- 5) On étudie maintenant l'oscillateur en régime forcé. La masse est soumise à une force excitatrice sinusoïdale. La RFD s'écrit  $x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = f \cos(\omega t)$ .
  - a) Prendre  $h = 3$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\omega = 2$ ,  $f = 5$ . Reprenre l'étude des trajectoires dans l'espace des phases  $(x, v)$  d'abord pour  $t$  entre 0 et 5 puis pour  $t$  entre 5 et 10. Commenter les graphiques.
  - b) Tracer sur un même graphique les courbes  $x(t)$  toujours avec les mêmes conditions initiales. Commenter.
- 6) Oscillations forcées par déplacement du point d'attache  $P$  du ressort (voir figure ci-contre un sismographe)  
Une masse est accrochée à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical. Le point d'attache  $P$  du ressort est soumis à un déplacement de type sinusoidal  $D_0 \cos(\omega t)$ .



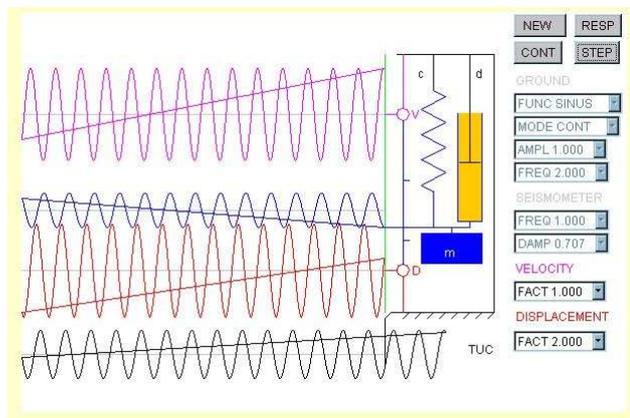
On travaille dans un référentiel où le point  $P$  est fixe en prenant pour axe des  $x$  la droite verticale passant par  $P$  et pour origine le point d'équilibre du ressort. Compte tenu de la force d'inertie d'entraînement, la RFD s'écrit :

$$x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = \omega^2 D_0 \cos(\omega t)$$

- On prend  $\omega = 10$ ,  $h = 1$ ,  $D_0 = 0,5$  ; à l'aide de phaseportrait, tracer la courbe  $x(t)$  pour différentes valeurs de  $\omega$ . Mettre en évidence la résonance. Voir que pour  $\omega > \omega_0$ , l'amplitude de  $x(t)$  est environ égal à  $D_0$ .
- Calculer(à la main) la solution permanente en fonction de  $\omega$  sous la forme  $A \exp(i\omega t)$ . Réinitialiser la variable  $\omega$ ; définir sous Maple la fonction  $\omega \mapsto A \exp(i\omega t)$  puis la transformer en fonction de la variable  $q = \omega/\omega_0$ .
- Tracer la courbe de l'amplitude de  $x(t)$  en fonction de  $q$ . Que peut-on dire du mouvement de la masse lorsque  $\omega/\omega_0$  est proche de 0, lorsque  $\omega/\omega_0$  est très grand ?
- Tracer de même la courbe du déphasage par rapport au déplacement du point d'attache; commentaires ? Rappel ; module et argument d'un complexe se calculent à l'aide des commandes *abs* et *argument*.
- Un amortisseur de voiture correspond à  $\omega/\omega_0$  proche de 0; un sismographe correspond à  $\omega/\omega_0$  grand. Pour visualiser le fonctionnement d'un sismographe :

[www.ac-nice.fr/svt/aster/sismo/thema/sismograph/sismographe.htm](http://www.ac-nice.fr/svt/aster/sismo/thema/sismograph/sismographe.htm)

Pour télécharger le programme : [http://www.ac-nice.fr/svt/aster/educ/ressources/ress\\_index.htm](http://www.ac-nice.fr/svt/aster/educ/ressources/ress_index.htm)



- On a vu dans les différents exemples que dans l'espace des phases  $(x, v)$ , les trajectoires tendent vers une courbe limite (appelée attracteur) correspondant au régime permanent. Par exemple, en (4), les trajectoires convergent vers l'origine; en (3), elles tendent vers une ellipse. On examine ici un oscillateur non linéaire et l'attracteur correspondant. L'oscillateur de Van der Pol est donné par l'équation  $x'' - h(1 - x^2)x' + \omega^2 x = 0$ . Lorsque  $h$  est proche de  $0^+$ , l'oscillateur est presque harmonique et l'attracteur diffère peu d'une ellipse. Tester cette hypothèse. Pour  $h$  proche de  $0^-$ , il y a amortissement et l'origine est attracteur. Pour  $h > 0$  pas trop petit, lorsque  $x$  est proche de 0, la trajectoire tend à s'éloigner de l'origine. Mais dès que  $x$  devient assez grand,  $-h(1 - x^2) > 0$  et il y a un phénomène d'amortissement qui tend à faire revenir la trajectoire vers l'origine. Ces deux effets antagonistes tendent à s'équilibrer au voisinage de l'attracteur. Prendre  $\omega = 2\pi$ ,  $h = 8$  et appliquer phaseportrait avec  $t$  parcourant un intervalle d'amplitude suffisante pour qu'on puisse voir l'attracteur. Observer le champs des directions pour comprendre le phénomène. Tracer également la courbe  $x(t)$ .
- Oscillateur antiharmonique  $mx'' + h x' - px + x^3 = 0$ ;  $x = 0$  est solution. On prend  $m = 1$ ;  $h = 0,2$ ; Tracer la trajectoire dans l'espace des phases avec  $p = -2$ ,  $x(0) = 3$ ,  $v(0) = 0$ ; qu'observe-t-on ? Tracer la trajectoire avec  $p = 2$ ,  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = 3$  puis avec  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = -3$ . Observer, lorsque  $p > 0$ , qu'il y a deux points attracteurs correspondant aux minima de l'énergie potentielle. Pourquoi, au vu du champs des directions, peut-on dire que l'origine est un point instable ?
- Un attracteur célèbre en dimension 3 : l'attracteur de Lorenz associé au système différentiel  $x' = 10(y - x)$ ,  $y' = Rx - y - xz$ ,  $z' = -8/3 z + xy$  où  $x$ ,  $y$ ,  $z$  représentent respectivement la température, la pression et la vitesse de masses d'air en météorologie; il faut utiliser DEplot3d (voir l'aide pour la syntaxe). Prendre  $R = 28$ , ... <http://danof.obsipm.fr/~leponcin/projet1/projet1.htm> pour davantage de détails.