www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com

ANNEXE 1

NOTIONS SUR LA DISTRIBUTION DE DIRAC

1 Introduction.

Les mathématiques « classiques » analysent les relations entre des **fonctions continues et dérivables** et se révèlent un outil commode pour traiter les systèmes régis par des équations différentielles, à condition que l'excitation soit une fonction continue et dérivable.

Exemple: réponse d'un circuit *RLC* à une excitation $e(t)$ sinusoïdale.

Dans certains cas, en physique, l'excitation $e(t)$ est de très courte durée du point de vue de l'observateur - flash d'un appareil photo par exemple. L'excitation $e(t)$ est nulle avant le déclenchement du flash, très intense pendant un instant très bref, puis nulle ensuite. On est alors obligé de renoncer à une expression de l'excitation $e(t)$ en raison des énormes discontinuités ou des variations non analysables. Les excitations $e(t)$ ne sont en effet ni dérivables, ni même continues par morceaux. Ce ne sont pas des fonctions mais des **distributions**.
Dans de nombreux domaines de la physique, on peut trouver des phénomènes intenses et brefs plus proches de fonctions que de distributions pour l'observateur.

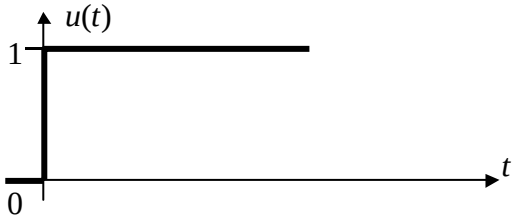
ÉCLAIR - FOUDRE :	phénomène optique, acoustique, électrique.
CHOC :	phénomène mécanique (voir §5, chapitre 2).
IMPULSION RADAR :	très brèves et très intenses : ondes électromagnétiques.

C'est le mathématicien français Laurent Schwartz qui à la demande des physiciens a élaboré en 1947 la **« Théorie des distributions »**, outil indispensable pour analyser mathématiquement de façon rigoureuse de tels phénomènes.
Cette théorie, certes très élégante, ne sera pas abordée dans ce cours. Elle est en règle générale étudiée en second cycle universitaire. Nous nous contenterons ici de façon plus empirique de **considérer certaines distributions comme des passages à la limite de fonctions continues et dérivables**. Nous procéderons ainsi pour l'échelon unité et ses dérivées.

2 Échelon unité, distribution de Dirac.

2.1 Échelon unité u(t).

$$u(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \geq 0 \\ 0 \text{ pour } t < 0 \end{cases}$$



On peut encore considérer $u(t)$ comme une fonction, mais elle n'est ni continue ni dérivable. Sa dérivée n'est donc pas une fonction: c'est une distribution nommée **DISTRIBUTION DE DIRAC** ou encore **IMPULSION DE DIRAC** notée $\delta(t)$.

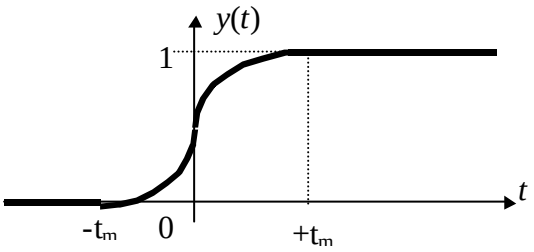
www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com

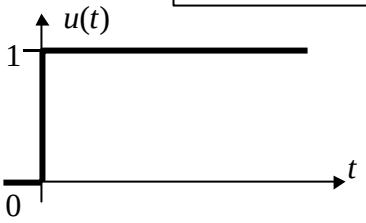
2.2 Distribution de Dirac.

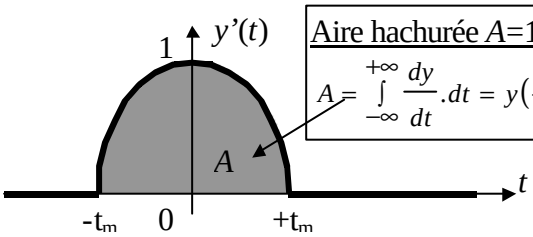
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \text{ pour } t = 0 \\ 0 \text{ pour } t \neq 0 \end{cases}$$

Pour mieux comprendre cette distribution $\delta(t)$, considérons l'échelon $u(t)$ comme la limite quand $t_m \to 0$ de la fonction $y(t)$ représentée ci-dessous et indéfiniment dérivable. La distribution $\delta(t)$ sera alors la limite quand $t_m \to 0$ de la dérivée $y'(t)$ de $y(t)$.

$$u(t) = \lim_{t_m \to 0}[y(t)]$$

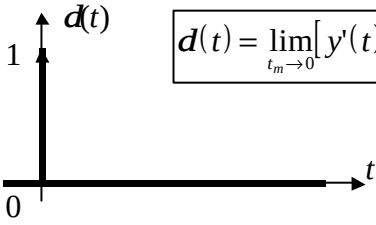




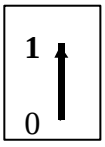


Aire hachurée A=1

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{dt}.dt = y(+\infty) - y(-\infty) = 1$$



$$\delta(t) = \lim_{t_m \to 0}[y'(t)]$$



$\delta(t)$ distribution de Dirac ne peut être représentée graphiquement. On la schématise par le symbole

Attention: le **1** marqué sur la flèche pleine représente **l'aire A** de cette impulsion (et non la hauteur de l'impulsion).

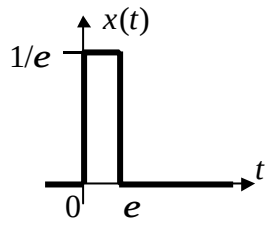
En effet: $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{dt}.dt = y(+\infty) - y(-\infty) = 1 - 0 = 1$

> La **distribution de Dirac** est donc la **limite d'une impulsion** rendue de plus en plus étroite, son aire restant égale à 1.

Remarque: l'impulsion de Dirac peut être considérée comme la limite d'une multitude de fonctions « bosses » quelque soit la forme exacte de la bosse (ou impulsion). Il suffit pour cela:

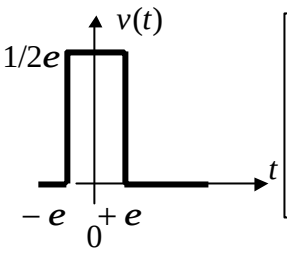
1. que la bosse soit toujours positive,
2. que $t_m \to 0$,
3. que l'aire A reste égale à 1.

Exemples de fonctions tendant vers $\delta(t)$:



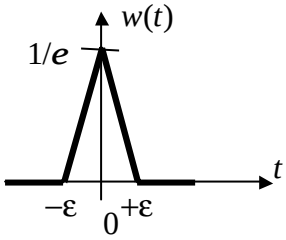
RECTANGLE

$$v(t) = \frac{1}{\varepsilon} \text{ pour } t \in [0,\varepsilon]$$
$$v(t) = 0 \text{ pour } t \notin [0,\varepsilon]$$
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0}[x(t)]$$



RECTANGLE

$$v(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \text{ pour } t \in [-\varepsilon,+\varepsilon]$$
$$v(t) = 0 \text{ pour } t \notin [-\varepsilon,+\varepsilon]$$
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0}[v(t)]$$



TRIANGLE

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0}[w(t)]$$

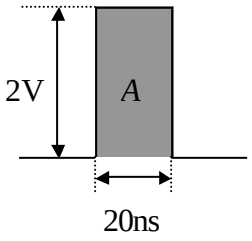
2.3 Aspect physique du passage à la limite pour obtenir une impulsion de Dirac.

Considérer l'impulsion $\delta(t)$ comme la limite d'une fonction n'a rien d'artificiel mais correspond au contraire à la stricte réalité physique. En effet $u(t)$ et $\delta(t)$ ne sont que des idéalisations mathématiques de la réalité physique des phénomènes. Dans la réalité, un échelon ou une impulsion (de tension, de pression, de force, d'intensité lumineuse) possède toujours un temps de montée t_m non nul. Un système physique met toujours un certain temps pour passer d'un état vers un autre. Cependant, le point important à retenir est le suivant:

> Un signal physique $y(t)$ correspondant au passage d'un état (1) vers un état (2) pourra être considéré comme un échelon chaque fois que son temps de montée t_m sera négligeable devant les autres temps mis en jeu dans le circuit. Il en est de même pour une impulsion.

2.4 Unités - dimensions.

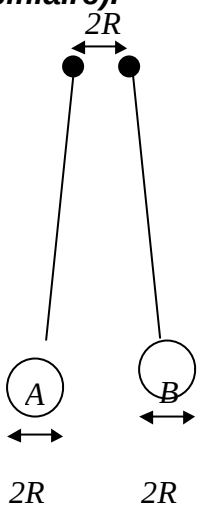
En général, une impulsion physique $v(t)$ assimilable à une impulsion de Dirac introduit un coefficient A tel que : $v(t) = A.\ \delta(t)$
(volts) (volts.sec) $(sec)^{-1}$



A représente l'aire de l'impulsion en Volts*Secondes
par exemple ici $A=40.10^{-9}$
L'impulsion de Dirac $\delta(t)$ a donc la dimension de l'inverse d'un temps, en effet: $\delta(t) = \frac{du}{dt}$ ⟶ sans dimension
⟶ temps

www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com

2.5 Exemple mécanique d'impulsion de Dirac: choc élastique de 2 boules (pendule bifilaire).



Considérons le pendule bifilaire constitué de deux tiges rigides portant 2 boules de pétanque.

a) Un ressort est fixé sur une des boules au point d'impact.

Initialement, on donne des élongations angulaires opposées aux deux pendules, et on les libère sans vitesse initiale.

1. ***Juste avant le contact*** *:* le ressort n'est soumis à aucune contrainte, sa tension est donc nulle. Soit V_I la vitesse de la boule A juste avant son contact avec le ressort. Son énergie cinétique à ce moment est $\frac{1}{2}.m.V_I^2$. Pour des raisons de symétrie, la boule B a une vitesse opposée $-V_I$ et la même énergie cinétique.
2. ***Pendant la durée du contact*** *:* l'énergie cinétique totale initiale $m.V_I^2$ se convertit en énergie potentielle du ressort. Au point de compression maximale, l'énergie cinétique est nulle et la compression maximale x_m du ressort est donc telle que $\frac{1}{2}.k.x_m^2 = mV_I^2$. Puis, le ressort se détend restituant intégralement les énergies cinétiques avec des vitesses initiales V_F (après le contact) opposées aux vitesses initiales respectives. $V_F = -V_I$.
3. ***Après le contact*** *:* les boules remontent à la hauteur initiale en raison de la conversion de l'énergie.
4. ***Relation fondamentale de la dynamique appliquée à la boule A*** *:*

$$\vec{F} = m.\frac{d\vec{V}}{dt}$$

soit : $\vec{F}.dt = m.d\vec{V}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt = m.\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)$$

Choisissons t_1 juste avant le contact et t_2 juste après le contact.

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_F \qquad \vec{V}_1 = \vec{V}_I = -\vec{V}_F$$

d'où : $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt = 2.m.\vec{V}_F$

5. ***Interprétation géométrique*** *:* choisissons l'instant de compression maximale comme l'instant t=0, la relation encadrée ci-dessous signifie que l'aire vaut $2.m.V_F$.

$$\int_{t_1}^{t_2} F.dt = 2.m.V_F$$

6. ***Mettons un ressort plus raide*** *:* la force est plus intense, la durée du contact plus faible, mais l'aire est la même car V_F est la même (conservation de l'énergie), la fonction $F(t)$ se rapproche alors d'une impulsion de Dirac $A.\delta(t)$ comme le montre la figure A1.1.

www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com

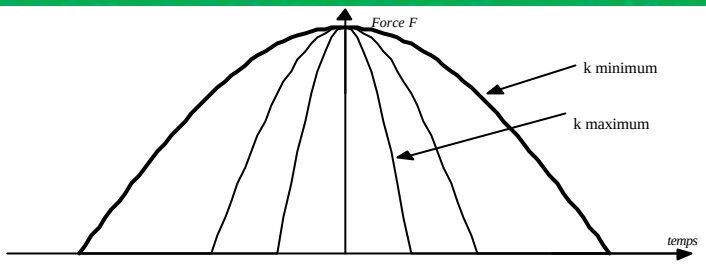


Figure A1.1.

En pratique, il suffit que la durée de l'impulsion (égale à t_2-t_1) soit petite devant la période du pendule (qui dépend de V_1) pour que l'on puisse assimiler cette impulsion à une impulsion de Dirac.

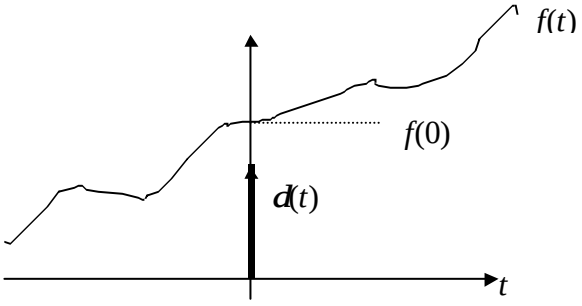
1. ***Equation différentielle régissant le mouvement du pendule selon x :***
   L'énergie maximale du système est : $m.V_F^2$.
   Cette énergie est la somme de l'énergie potentielle du ressort $\frac{1}{2}.k.x^2$ et de l'énergie cinétique du pendule $m.v^2$. On a donc l'équation: $m.V_F^2 = \frac{1}{2}.k.x^2 + m.v^2 = \frac{1}{2}.k.x^2 + m.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$.
   En régime permanent, la solution (particulière) de cette équation s'écrit: $x(t) = X_0.\cos wt$.
   La force appliquée au ressort aura donc pour expression: $F(t) = -k.x(t) = -F_0.\cos wt$ avec $F(t)<0$. On retrouve donc bien en valeur absolue le graphe de la page précédente déduit de façon semi-qualitative.

3. Propriétés de l'impulsion de Dirac.

3.1 Multiplication de $\delta(t)$ par une fonction continue.

$\delta(t)$ étant nulle partout ailleurs qu'à l'origine, il en est de même du produit $f(t).\delta(t)$.

On a donc: $\boxed{f(t).\delta(t) = f(0).\delta(t)}$ (1)



www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com

3.2 Intégration du produit de $\delta(t)$ par une fonction continue.

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par dt et intégrons de $-\infty$ à $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0).\delta(t).dt = f(0).\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t).dt}_{=1} = f(0)$$

donc:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t).dt = f(0)$$

3.3 Changement d'origine: distribution $\delta(t-t_0)$.

Il suffit d'effectuer le changement d'origine des temps $t'=t-t_0$ pour se ramener au cas précédent (§1, chapitre 3).

$\delta(t') = 0$ si $t' \neq 0$ $\quad$ $\delta(t-t_0) = 0$ pour $t \neq t_0$

$\delta(t') = 1$ si $t' = 0$ $\quad$ $\delta(t-t_0) = 1$ pour $t = t_0$

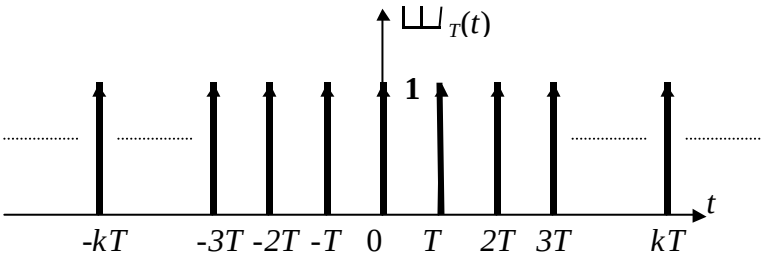
4. Distribution « peigne de Dirac ».

On appelle « peigne de Dirac » ou « train d'impulsions » une succession périodique d'impulsions de Dirac. On note:

$$\amalg_T(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + ... + \delta(t-kT) +...+ \delta(t+T) + \delta(t+2T) +...+\delta(t+kT) +...$$

$$\amalg_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT)$$

T est la période du peigne.



Ce type de signal est principalement utilisé en échantillonnage (cette fonction sera étudiée dans le module M8). Échantillonner une fonction $f(t)$ consiste simplement à prélever sa valeur à intervalles réguliers. Il suffit donc, d'un point de vue mathématique, de la multiplier par un « peigne de Dirac ».

Dans le cours « Analyse des systèmes linéaires », la distribution « peigne de Dirac » va servir à introduire la notion fondamentale de convolution sans avoir recours à la théorie des distributions.

www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com