

CHAPITRE 10

LES SYSTÈMES BOUCLÉS

1. Introduction

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des systèmes "en Boucle Ouverte" (abréviation BO): pour obtenir une bonne commande, l'opérateur doit avoir confiance dans l'étalonnage de son système ou vérifier, à tout moment, que la sortie réagit comme il le désire.

L'idée de vérifier la sortie du système est maintenant intégrée à la commande: le système "en Boucle Fermée" (abréviation BF) ou système asservi (abréviation SA) est muni de boucles de retour, qui ramènent l'état des sorties au niveau des entrées, pour comparaison ou réaction.

Nous montrons dans ce chapitre comment s'utilisent les **abaques** facilitant l'étude des systèmes bouclés. Puis nous définissons la notion de système du **second ordre dominant**.

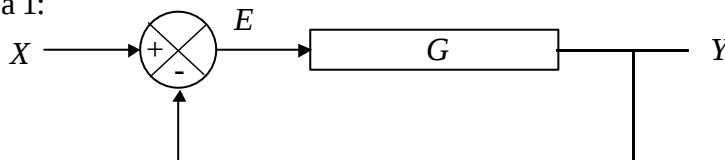
2. Aménagement du diagramme fonctionnel.

2.1 Système asservi simple.

Pour les études qui vont suivre, nous ne considérerons que les systèmes asservis à retour unitaire:

Système asservi à retour unitaire.

C'est un système asservi dont la fonction de transfert de la boucle de retour est constante et égale à 1:



G est appelée fonction de transfert du système en boucle ouverte ou boucle principale.

Pour un système asservi à retour unitaire on a:

$$E(p) = X(p) - Y(p) \quad \text{et} \quad Y(p) = G(p).E(p)$$

avec: $E(p) = \text{LP}[e(t)] \quad ; \quad X(p) = \text{LP}[x(t)] \quad ; \quad Y(p) = \text{LP}[y(t)]$

d'où: $Y(p) = G(p).[X(p) - Y(p)] \quad \text{et} \quad E(p) = X(p) - Y(p)$

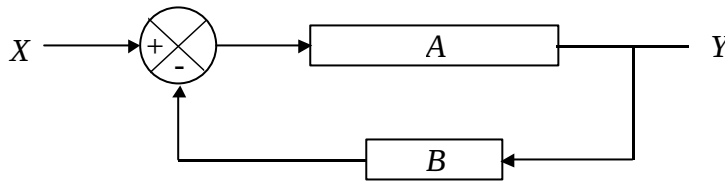
donc: $\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)} \quad \text{et} \quad E(p) = \frac{1}{1 + G(p)} X(p)$

2.2 Systèmes asservis à boucles multiples.

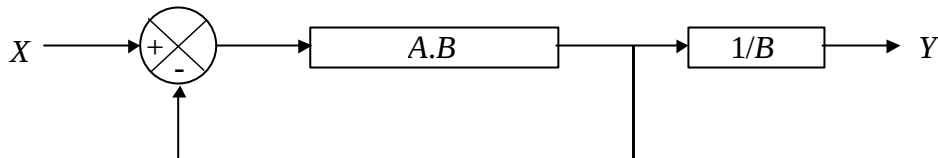
Le fait de ne considérer que les systèmes à boucle unitaire n'est pas une limitation. En effet, l'algèbre des diagrammes permet toujours de se ramener au cas de la boucle unitaire.

Exemples:

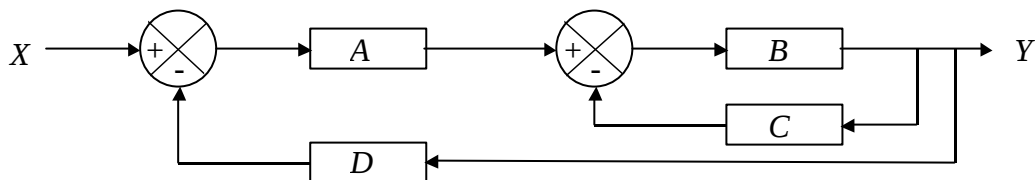
1.



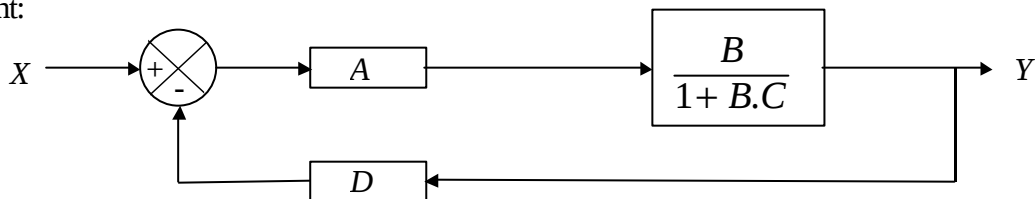
devient :



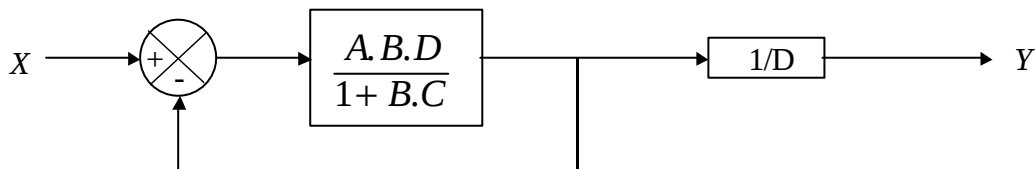
2.



devient:



puis :



3. Détermination graphique de la fonction de transfert en BF : Les abaques de Hall et de Nichols

Les abaques de Hall et de Nichols correspondent respectivement aux plans de Nyquist et de Black. On parle ainsi souvent d'abaque de **Nyquist-Hall** et de **Black-Nichols**.

En pratique, du fait que l'on a expérimentalement accès au module et à la phase de la fonction de transfert d'un système, l'abaque de Black-Nichols est le plus souvent utilisé.

3.1 Intérêt

Ces abaques représentent sur un même plan (Nyquist ou Hall) la FTBO et la Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) du système considéré. Cela évite donc des calculs souvent longs et fastidieux et permet d'obtenir une vision « graphique » du problème très utile pour l'étude des performances des systèmes et de leur régulation abordée dans la seconde partie du cours d'automatique.

3.2 Description du problème

Soit le système asservi décrit à la figure 10.1.

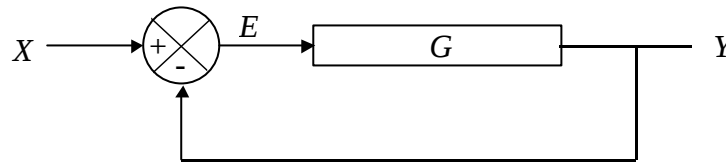


Figure 10.1. Système asservi à retour unitaire.

La fonction de transfert du système en boucle fermée est obtenue par le calcul avec la relation que nous avons démontrée ci-dessus : $H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$.

Inversement on peut exprimer la FTBO en fonction de la FTBF : $G(p) = \frac{H(p)}{1 - H(p)}$.

En régime harmonique, on a donc : $\overline{H(j\omega)} = \frac{\overline{G(j\omega)}}{1 + \overline{G(j\omega)}}$ et $\overline{G(j\omega)} = \frac{\overline{H(j\omega)}}{1 - \overline{H(j\omega)}}$.

Ainsi pour chaque valeur ω_i de ω la connaissance de $\overline{G(j\omega_i)}$ en module (dB) et argument ($^\circ$) permet de déterminer $\overline{H(j\omega_i)}$ en module et argument. En sens inverse, la connaissance de $\overline{H(j\omega_i)}$ entraîne celle de $\overline{G(j\omega_i)}$.

Les abaques de Hall et de Black-Nichols permettent de passer graphiquement de $\overline{G(j\omega)}$ à $\overline{H(j\omega)}$ et vice-versa (le passage de $\overline{H(j\omega)}$ à $\overline{G(j\omega)}$ n'est pas utilisé en pratique).

3.3 Plan de Nyquist: Abaque de Hall.

La figure 10.2 décrit un système de FTBO $\overline{G(j\omega)}$ décrit dans le plan de Nyquist.

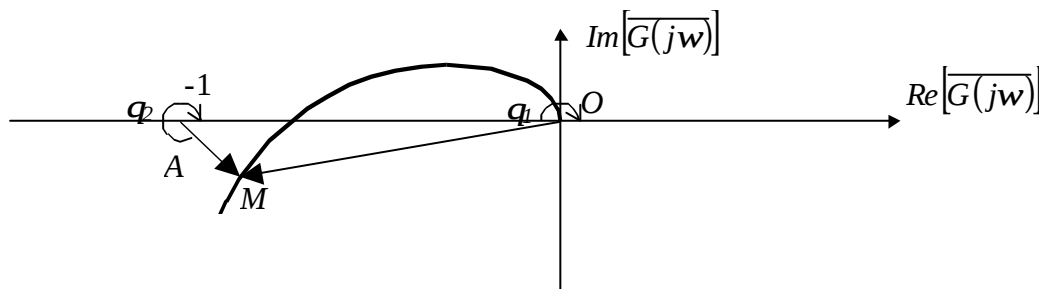


Figure 10.2.

En boucle fermée, on a : $H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$

avec: $\vec{OM} \equiv G(p)$ et $\vec{AM} = 1 + G(p)$

La FTBF vaut donc :

$$\overline{H(j\omega)} = \frac{\vec{OM}}{\vec{AM}} = \frac{|\vec{OM}|}{|\vec{AM}|} \cdot \underline{q_1 - q_2}$$

La construction point par point de $\overline{H(j\omega)}$ (connaissant $\overline{G(j\omega)}$) est alors facilitée si on trace dans le plan de Nyquist deux faisceaux de courbes correspondant à :

$$\begin{cases} \arg \left[\overline{H} \right] = Cte = q \\ \text{Mod} \left[\overline{H} \right] = Cte = M \end{cases}$$

- Construction de ces faisceaux de courbes :

En posant $\overline{G(j\omega)} = x + jy$, $\left| \overline{H(j\omega)} \right| = M$ donne :

$$\left| \frac{x + j.y}{1 + x + j.y} \right| = M$$

soit:
$$\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + 2.x + y^2} = M^2$$

ou encore:
$$x^2 + y^2 + (2.x + 1). \frac{M^2}{M^2 - 1} = 0$$

Cette dernière équation représente un cercle de centre: $\left(-\frac{M^2}{M^2 - 1}, 0 \right)$ et de rayon: $\frac{M}{M^2 - 1}$

De même, $\arg \left[\overline{H(j\omega)} \right] = q$ donne : $\text{Arctg} \frac{y}{x} - \text{Arctg} \frac{y}{1+x} = q$

or :
$$\text{tg}(a - b) = \frac{\text{tg}(a) - \text{tg}(b)}{1 + \text{tg}(a). \text{tg}(b)}$$

donc ici :
$$\frac{y/x - y/(1+x)}{1 + (y/x).(y/(1+x))} = \text{tg}(q) = N$$

soit :
$$x^2 + y^2 + x - \frac{y}{N} = 0$$

Cette équation représente également un cercle de centre : $\left(x_0 = -\frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{2.N} \right)$ et de rayon : $\frac{\sqrt{1 + N^2}}{2.N}$

Les cercles appartenant à cette dernière famille passent tous par les points :

(0,0) car : $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \text{distance du centre à l'origine} = R$

(-1,0) car : $\sqrt{(x_0 + 1)^2 + y_0^2} = \text{distance du centre au point } (-1,0) = R.$

Les deux faisceaux de cercles sont orthogonaux. Ils forment l'abaque de Hall.

3.4 Plan de Black: Abaque de Nichols.

L'utilisation de l'abaque précédant nécessite une représentation de la FTBO dans le plan de Nyquist. Lorsqu'on désire travailler dans le plan de Black, cas le plus fréquent, on doit donc se servir d'un autre abaque: l'abaque de Nichols.

Ce deuxième abaque est constitué de deux faisceaux de courbes, $|\overline{H(j\omega)}| = Cte$ et $\arg[\overline{H(j\omega)}] = Cte$, tracées dans le plan de Black. Ces faisceaux sont obtenus à partir de ceux de l'abaque de Hall par une transformation permettant de passer du plan complexe au plan module/phase.

L'abaque de Nichols est symétrique par rapport à l'axe -180° et généralement, le point $(-180^\circ, 0dB)$ est pris comme origine des axes.

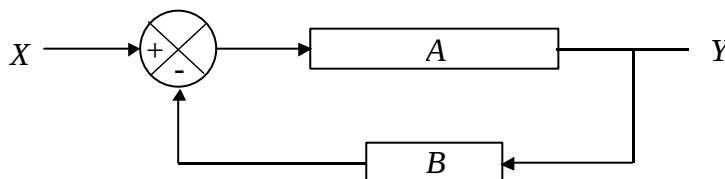
3.5 Utilisation des abaques.

On trace sur l'abaque utilisé ou sur une feuille de papier transparente posée sur l'abaque, le lieu de transfert relatif à la FTBO $\overline{G(j\omega)}$ et on gradue cette courbe en fonction de ω .

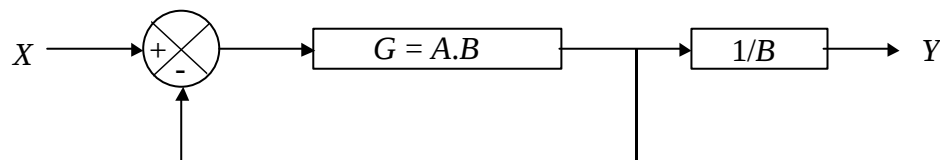
Ce lieu coupe les faisceaux de courbes $|\overline{H(j\omega)}| = Cte$ et $\arg[\overline{H(j\omega)}] = Cte$ de l'abaque. On note alors, pour diverses valeurs de ω , les valeurs de $|\overline{H(j\omega)}|$ et $\arg[\overline{H(j\omega)}]$ qui permettent de construire point à point les courbes de gain et de phase du système en boucle fermée.

Remarque: lorsque le système asservi est mis en série avec une autre fonction de transfert:

cas de :



transformé en :



La fonction de transfert de l'ensemble est obtenue dans le plan de Bode, en effectuant simplement la différence entre les courbes de gain et de phase de $H(p)$ et de $B(p)$.

4. Introduction de perturbations.

En pratique, la plupart des systèmes sont victimes de perturbations. Pour étudier l'influence de ces "entrées secondaires", le principe de superposition est d'un grand secours. Pour l'analyse d'une perturbation, on considère que toutes les autres entrées sont constantes et nulles.

En utilisant le théorème de superposition, le système décrit à la figure 10.3. est arrangé par l'algèbre des diagrammes afin d'obtenir les sous-systèmes de la figure 10.4.

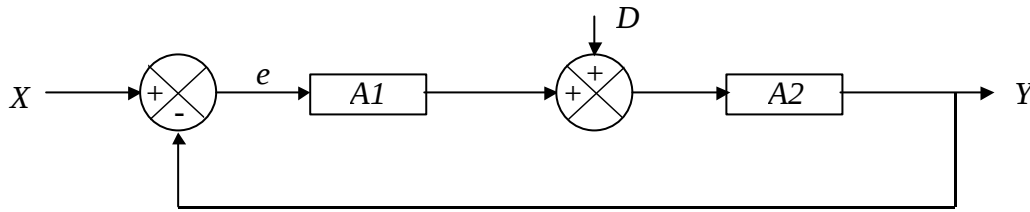


Figure 10.3.

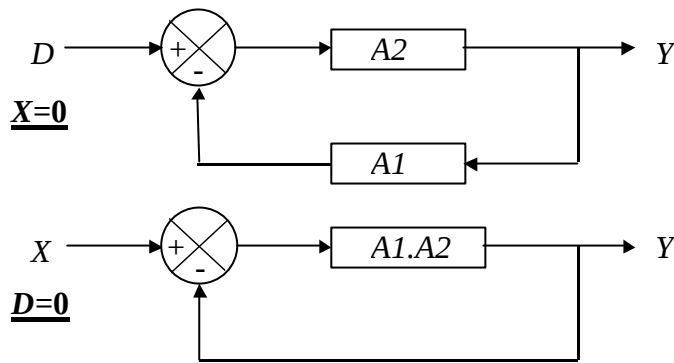


Figure 10.4.

Finalement, dans le domaine de Laplace, l'équation de sortie du système est :

$$Y(p) = X(p) \frac{A1.A2}{1 + A1.A2} + D(p) \frac{A1.A2}{1 + A1.A2} \frac{1}{A1}$$

ou en simplifiant : $Y(p) = X(p).H_a(p) + D(p).H_r(p)$

$H_r(p)$ est la fonction de transfert du système en mode régulateur : le système doit faire face aux seules perturbations.

$H_a(p)$ est la fonction de transfert du système en mode asservissement.

5. Les paramètres d'un second ordre dominant

La notion de second ordre dominant a été brièvement abordée dans le chapitre 8. Dans les cas courants assez simples, pour les systèmes d'ordre supérieur à deux, on peut définir un système du second ordre (K , α , ω_n) dont le comportement est assez proche du système réel.

Nous donnons ici la technique pour calculer les paramètres du second ordre équivalent.

- Le bouclage conserve l'ordre d'un système.

$$\text{On a } G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ donc } H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{N(p)}{N + D(p)}.$$

L'ordre du système est le degré de son dénominateur. Puisque le degré de N est au plus égal à celui de D , il est clair que H et G ont le même ordre.

- Considérons le système de la figure 10.5 de FTBO $\overline{G_1(j\omega)}$ d'ordre supérieur à deux. La phase de $\overline{G_1(j\omega)}$ pour les hautes fréquences dépasse 180° (en valeur absolue).

$\overline{H(j\omega)}$ en BF est également d'ordre supérieur à deux. Cependant, pour les fréquences moyennes $\overline{H(j\omega)}$ présente une résonance comparable à celle d'un second ordre. On peut donc définir un second ordre équivalent au système de fonction de transfert $\overline{G_1(j\omega)}$ dont les paramètres sont K , χ et ω_n .

K apparaît en dB pour $\omega = 0$.

χ est déterminé par le facteur de résonance M_p déduit sur l'abaque de Black-Nichols :

$$M_p = \left| \overline{H(\omega_R)} \right| - \left| \overline{H(0)} \right|.$$

ω_R est la pulsation de résonance correspondant au maximum du module de la FTBF $\left| \overline{H(j\omega)} \right|$.

Le module de la FTBO $\left| \overline{G(j\omega)} \right|$ est alors tangent au contour $|H|_{max}$ pour la valeur ω_R de ω .

ω_n est déterminé par $\omega_n = \frac{\omega_R}{\sqrt{1 - 2\chi^2}}$. Dans ce cas, ω_n ne coïncide pas tout à fait avec la valeur

de ω donnant un argument de 90° à $\overline{H(j\omega)}$.

L'objectif de l'automatique consiste à corriger $\overline{G(j\omega)}$ afin d'obtenir pour $\overline{H(j\omega)}$ décrit par un modèle du second ordre équivalent :

- une valeur de χ conduisant à une **stabilité** acceptable,
- une valeur de ω_n qui améliore le **temps de réponse**,
- une bonne **précision** (gain statique unité).

