

Module :
Physico-chimie des matériaux

Introduction aux transferts thermiques

Importance des transferts thermiques

* Le transfert thermique intervient dès qu'il existe une différence de température dans un système : il est difficile de trouver une activité humaine où n'intervient pas un échange de chaleur.

• Exemple d'application : chauffage, production de vapeur, refroidissement moteur thermique, mise en température d'un réacteur, maintien de la température au cours d'une réaction, hauts fourneaux (élaboration d'aciers, verres), isolation de bâtiments, refroidissement de composants électriques ou électronique, etc...

INTRODUCTION

Transferts de chaleur.

Les principaux modes de transfert de chaleur sont :

- ☛ la conduction,
- ☛ la convection,
- ☛ le rayonnement
- ☛ changements d'états.

La Conduction.

La chaleur se transmet au travers d'un corps sans déplacement de la matière qui constitue ce corps. Le transfert de chaleur s'effectue de proche en proche des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides. C'est le mode de transmission de la chaleur dans les solides et dans les fluides au repos.

La Convection.

La chaleur se transmet d'un corps solide chaud à un fluide plus froid (ou inversement) en mvt au voisinage de celui-ci et également au sein du fluide par mouvement de tout ou une partie de ces constituants.

Le mouvement du fluide peut être provoqué mécaniquement (pompe, ventilateur...) la convection est dite forcée. Lorsque le mouvement se produit naturellement sous l'effet des gradients de la température et donc la masse volumique, la convection est dite libre.

Le rayonnement.

Les atomes, molécules et électrons libres des corps peuvent perdre, de façon spontanée ou au cours d'interactions, une partie de leur énergie cinétique ce qui donne lieu à l'émission d'un rayonnement électromagnétique.

Lorsqu'un tel rayonnement est intercepté par la surface d'un corps, une partie est absorbée et se retrouve dans l'énergie cinétique de ces composants, c'est –à dire sous forme de chaleur.

Un transfert de chaleur s'opère ainsi (des corps rayonnant les plus chauds vers ceux à plus basses températures) sans support matériel

Chapitre I : Equations générales d'un problème de conduction

Cette science est basée sur deux hypothèses fondamentales :

- La loi de fourrier
- L'hypothèse de conservation de la chaleur.

Rappels

I-1 Champs thermiques Généralité et définitions

A chaque point M d'un corps (solide ou fluide) est associé à tout instant une grandeur physique, sa température, qui est une fonction scalaire des coordonnées du point et du temps : $T(x,y,z,t)$.

Chapitre I :

I-1-1 Surface isotherme

A chaque instant t_i , l'ensemble des points d'égale température constitue une surface isotherme ; celle-ci est donc définie par une équation du type $T(x,y,z,t_i)=cte$.

I-1-2 Flux thermique

Un flux thermique mesure une puissance échangée à travers une surface.

En notant dQ la quantité de chaleur échangée pendant dt par une surface S , le

flux thermique s'exprime par :
$$\phi = \frac{dQ}{dt}$$

Chapitre I :

Densité de flux thermique et vecteur densité de flux

La densité de flux est la quantité de chaleur échangée par unité de temps à travers une surface unité :

$$d\phi = \frac{\phi}{S} = \frac{dQ}{S \cdot dt}$$

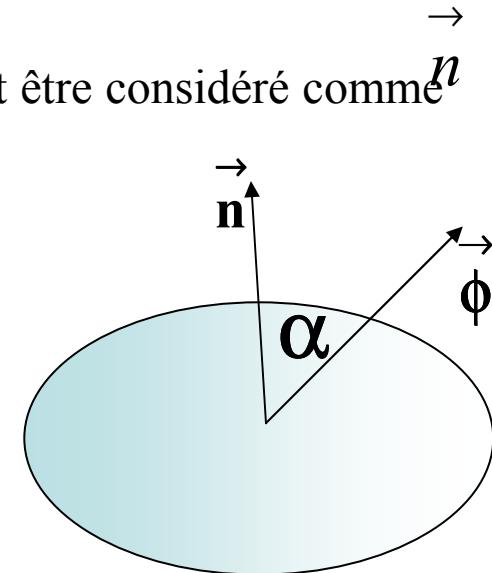
Plus généralement, en considérant un élément de surface ds orienté par sa normale unitaire

Le flux élémentaire $d\phi$ qui traverse ds pendant l'unité de temps peut être considéré comme le flux d'un vecteur densité à travers ds :

$$d\phi = \vec{\phi} \cdot \vec{n} \cdot ds = |\vec{\phi}| \cdot \cos \alpha \cdot ds$$

α étant l'angle que fait le vecteur $\vec{\phi}$ avec la normale \vec{n}

Le vecteur $\vec{\phi}$ représente la densité locale du flux thermique au point M.



Le vecteur densité de flux caractérise en chaque point M la direction, le sens et l'intensité du flux de chaleur

Chapitre I :

Milieu isotrope

Les propriétés physiques du corps (solide ou fluide) en un point M sont les mêmes quelle que soit la direction de l'espace. Par opposition, on parlera du milieu anisotrope. Dans un milieu isotrope les vecteurs densité de flux sont normaux aux isothermes.

Milieu homogène

La composition du corps (solide ou fluide) est parfaitement uniforme donc les propriétés physiques sont les mêmes en tout point

Milieu continu

Le corps solide ou fluide ne présente pas d'interruption dans l'espace.

Source interne de chaleur

Une source de chaleur (réactions chimiques effet Joule, ...) est définie en un point M et à un instant t par la puissance thermique qu'elle libère en ce point. Cette puissance peut être également fonction de la température : $q(x,y,z,T)$

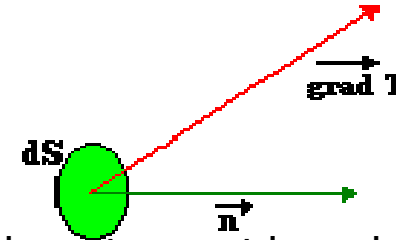
Chapitre I :

I-2-1 Cas d'un milieu quelconque

Considérons un milieu matériel D quelconque, siège à l'instant t d'un champ de température $T(x,y,z,t)$.

$$\vec{d\varphi} = -[\lambda] \cdot \vec{grad}(T)$$

La quantité de chaleur qui s'échappe d'un volume dv entourant le point M, délimité par une surface ds , pendant dt a pour expression :



$$\vec{dQ} = -[\lambda] \cdot \vec{grad}(T) \cdot ds \cdot dt$$

I-2-2 -Cas d'un milieu isotrope

Les propriétés du corps (solide ou fluide) étant les mêmes dans toutes les directions, la loi de Fourier se résume à :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{grad}T$$

La densité de flux thermique traversant ds est proportionnelle au gradient de température, le coefficient de proportionnalité λ est la conductivité thermique du matériau.

Chapitre I :

La conductivité thermique k ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$).

elle caractérise le matériau.

elle peut varier avec la température.

on considérera 2 types de matériaux : conducteurs et isolants.

Quelques conductivités thermiques aux températures ordinaires

Ordre de grandeur de λ à 20 °C	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
Gaz à la pression atmosphérique	0,006 - 0,18
Matériaux isolants	0,025 - 0,25
Liquides non Métalliques	0,1 - 1,0
Solides non métalliques	0,025 – 3
Liquides métalliques	8,5 – 85
Alliages métalliques	10 – 150
Métaux purs	20 – 400

Chapitre I :

I-3- EQUATION DE PROPAGATION DE LA CHALEUR

L'équation de propagation de la chaleur (en abrégé E.P.C.) exprime en tout point d'un domaine D la conservation de l'énergie (Premier principe de la thermodynamique).

Rappelons d'abord la définition de la chaleur massique. Considérons un solide de masse m. S'il reçoit une quantité de chaleur dQ sa température s'élève de dT telle que : **$dQ = m \cdot C dT$**

Puissance dégagée par les sources internes + Puissance thermique absorbée (Flux thermique qui sort du système) = Variation d'énergie interne.

$$-\int_S \vec{\phi} \cdot \vec{n} \, ds + \int_V q \, dv = \int_S \lambda \vec{\text{grad}} T \cdot \vec{ds} + \int_V q \, dv = \int_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dv$$

Chapitre I :

L'utilisation du théorème d'Ostrogradski permet d'écrire :

$$\int_V \left(\operatorname{div} \left[\lambda \vec{\operatorname{grad}} T + \mathbf{q} \right] \right) dv = \int_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dv$$

Cette relation étant valable quel que soit le volume V, on obtient :

$$\operatorname{div}(\lambda \vec{\operatorname{grad}} T) + \mathbf{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

λ Constante :

$$\lambda \nabla^2 T + \mathbf{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

où ∇^2 désigne l'opérateur Laplacien

Chapitre I :

Echanges convectifs sur une paroi

Lorsqu'une paroi échange de la chaleur par convection avec l'extérieur, la densité de flux qu'elle échange est proportionnelle à la différence de température entre la paroi et le milieu fluide extérieur, multipliée par un coefficient d'échange h en $W.m^{-2}.K^{-1}$ qui tient compte des différentes propriétés physiques et cinématique du fluide léchant la paroi :

En tout point de la frontière, ce flux étant fourni par conduction au travers du solide étudié, on en déduit le gradient de T à cette frontière.

Echanges radiatifs sur une paroi

Le rayonnement d'une paroi peut être un mode d'échange à prendre en compte, surtout si sa température est élevée (supérieure à 100 degrés environ). Comme on le verra, le flux qu'une paroi à la température T_p échange par rayonnement avec le milieu externe à la température T_{ext} vaut où σ est la constante de Stefan-Boltzmann.

Chapitre I :

Equation de la chaleur en régime permanent

En régime permanent et dans un matériaux isotrope, l'équation de la chaleur est une équation de Poisson : $\nabla^2 T = -\frac{q}{\lambda}$

L'expression développée varie avec le système de coordonnées :

$$\text{Cartésiennes : } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{q}{\lambda}$$

$$\text{Cylindriques: } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{q}{\lambda}$$

$$\text{Sphériques: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = -\frac{q}{\lambda}$$

Chapitre I :

I-4. Exemples d'applications.

a) Problème du mur plan en régime stationnaire.

Soit un mur plan homogène, d'aire Ω et d'épaisseur e dont les deux faces planes sont maintenues aux températures constantes T_1 et T_2 . Si λ est la conductivité thermique du matériau constituant le mur, la loi de Fourier nous permet d'écrire, suivant x , direction normale à la surface du mur :

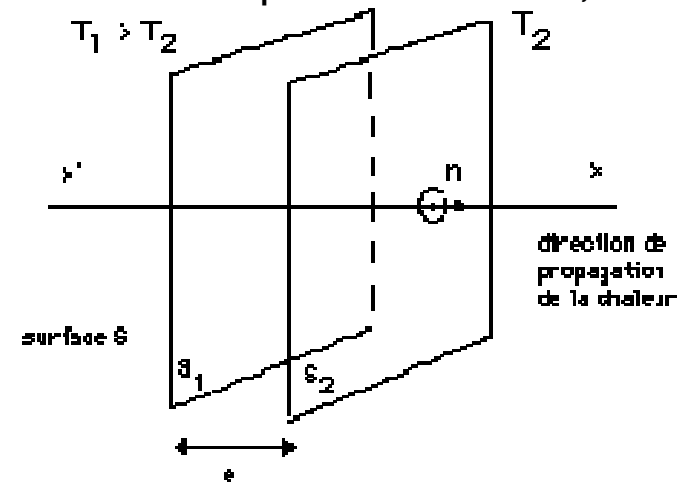
$$-\int_{T_2}^{T_1} \lambda \cdot dT = \int_{x_1}^{x_2} \varphi \cdot dx \quad \varphi = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\lambda \cdot (T_1 - T_2) = \varphi \cdot (x_2 - x_1) = \varphi \cdot e$$

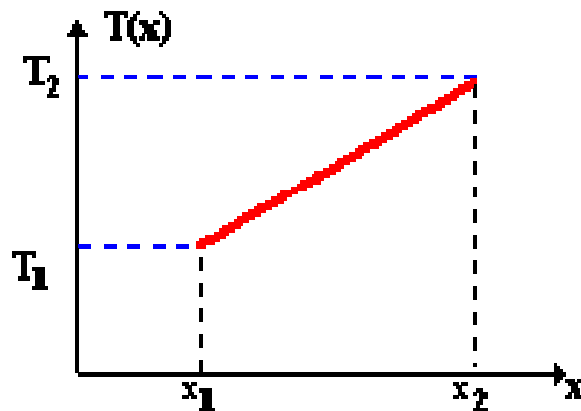
$$\varphi = \frac{\lambda}{e} \cdot (T_1 - T_2)$$

D'ou $\Phi = \Omega \cdot \frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2)$ Soit

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{x - x_1}{e}$$



Chapitre I :



la température est répartie linéairement, à l'intérieur du mur, entre T_1 et T_2 .

Expression de la résistance thermique de conduction d'un mur plan

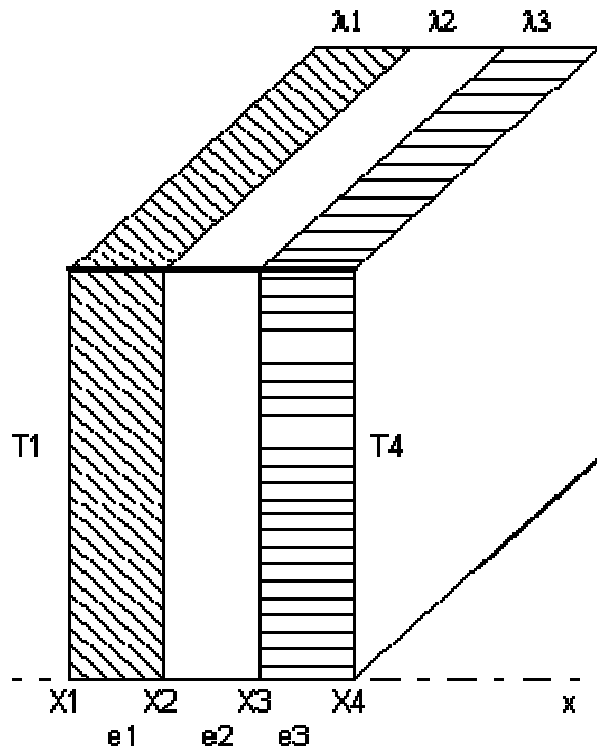
Comme en électricité, la résistance est le rapport d'une différence de potentiel donc ici de température et d'un débit d'énergie donc ici le flux Φ , d'où l'expression suivante de la résistance thermique

$$R = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = \frac{e}{\lambda \Omega}$$

Chapitre I :

Il est facile de généraliser ce résultat à un mur composite *multicouches*

Si les faces extérieures de ce mur composite sont maintenues aux températures constantes T_1 et T_4 , en régime stationnaire, et en l'absence de source interne, le débit de chaleur transféré est constant. pour $i = 1, 2, 3$



$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{\Omega} \cdot \frac{e_1}{\lambda_1}$$

$$T_2 - T_3 = \frac{\Phi}{\Omega} \cdot \frac{e_2}{\lambda_2}$$

$$T_3 - T_4 = \frac{\Phi}{\Omega} \cdot \frac{e_3}{\lambda_3}$$

$$T_1 - T_4 = \frac{\Phi}{\Omega} \cdot \left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3} \right)$$

$$\Phi = \Omega \cdot \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}}$$

Chapitre I :

Exemple d'application 1.1:

-Etude des pertes par conduction à travers un double vitrage

Un double vitrage est constitué de deux plaques de verre séparées par une couche d'air sec immobile.

L'épaisseur de chaque vitre est de 3,5 mm et celle de la couche d'air est de 12 mm. La conductivité thermique du verre est égale à $0,7 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ est celle de l'air est de $0,024 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ sur le domaine de température étudié. Pour une chute de température de 5 °C entre les deux faces externes du double vitrage.

1) calculez les pertes thermiques pour une vitre de 1 m^2 . (Note : ce calcul néglige l'effet du coefficient de convection de part et d'autre de chaque vitre).

2) Comparez ces pertes thermiques à celles qui seraient obtenues avec une seule vitre d'épaisseur égale à 3,5 mm.

Chapitre I :

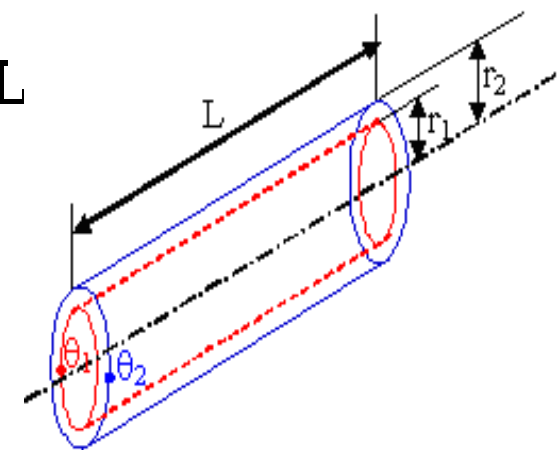
b) Problème de la conduite cylindrique en régime stationnaire.

Soit une conduite cylindrique de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 . La paroi interne du tube est à température T_1 et la paroi externe à T_2 . Si la longueur de la conduite est grande par rapport à son diamètre, le débit de chaleur transféré par conduction dans le tube est radial. Pour une conduite de longueur L , en l'absence de source de chaleur interne, le débit de chaleur transféré par conduction sur une surface cylindrique comprise entre la surface interne et la surface externe est constant.

$$\Phi = \varphi \cdot S = \varphi \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot L) = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L$$

$$-\int_{T_1}^{T_2} 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda \cdot dT = \int_{R_1}^{R_2} \Phi \cdot \frac{dr}{r}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$



Chapitre I :

$$\Phi = \lambda \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot (T_1 - T_2)$$

Cette dernière relation peut s'écrire, en introduisant $e = R_2 - R_1$:

$$\Phi = \frac{\lambda}{e} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_2 - R_1) \cdot L}{\ln \frac{R_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot L}{R_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot L}} \cdot (T_1 - T_2) = \frac{\lambda}{e} \cdot \frac{S_2 - S_1}{\ln \frac{S_2}{S_1}} \cdot (T_1 - T_2)$$

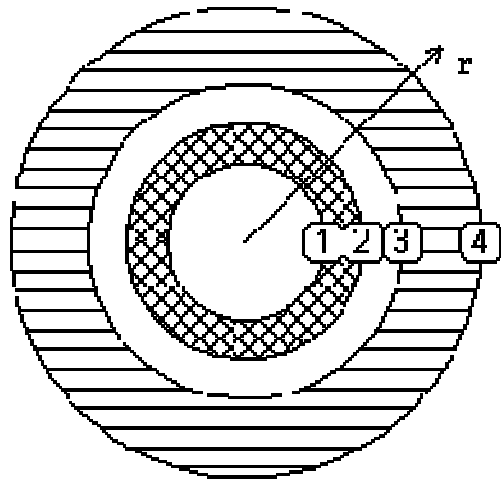
$$\Phi = \frac{\lambda}{e} \cdot \bar{S}_{\ln_{1,2}} \cdot (T_1 - T_2)$$

Chapitre I :

La quantité $\overline{S}_{\ln_{1,2}} = \frac{S_2 - S_1}{\ln \frac{S_2}{S_1}} = \overline{S}_{\ln_{2,1}} = \frac{S_1 - S_2}{\ln \frac{S_1}{S_2}}$

est appelée moyenne logarithmique des surfaces S1 et S2.

Le raisonnement développé pour le mur composite peut être reproduit pour la conduite gainée multicouches, à condition de remplacer W par les moyennes logarithmiques respectives



$$\Phi = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1 \cdot \overline{S}_{\ln_{1,2}}} + \frac{e_2}{\lambda_2 \cdot \overline{S}_{\ln_{2,3}}} + \frac{e_3}{\lambda_3 \cdot \overline{S}_{\ln_{3,4}}}}$$

On retrouve les résistances thermiques qui, placées en série, s'additionnent

Chapitre I :

d) Problème à symétrie sphérique.

Soit une armature sphérique de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 . La paroi interne est à température T_1 et la paroi externe à T_2 . On suppose que le débit de chaleur transféré par conduction dans la couche sphérique est radial. En l'absence de source de chaleur interne, le débit de chaleur transféré par conduction sur une surface sphérique comprise entre la surface interne et la surface externe est constant.

$$\Phi = \varphi \cdot S = \varphi \cdot (4 \cdot \pi \cdot r^2) = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$
$$-\int_{T_1}^{T_2} 4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot dT = \int_{R_1}^{R_2} \Phi \cdot \frac{dr}{r^2}$$
$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{4 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Chapitre I :

$$\Phi = 4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = 4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}}$$

$$\Phi = \frac{\lambda}{e} \cdot (4 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot R_2) \cdot (T_1 - T_2) = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda \cdot (4 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot R_2)}}$$

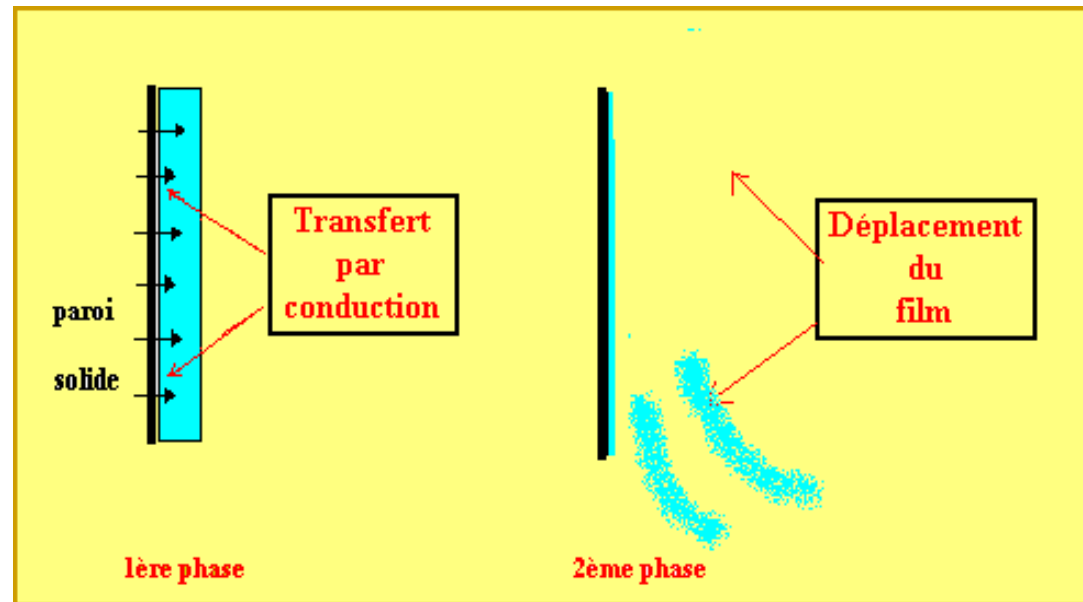
Plus généralement, lorsqu'il y a plusieurs couches :

$$\Phi = \frac{(T_i - T_e)}{\sum_k \frac{e_k}{\lambda_k \cdot (4 \cdot \pi \cdot R_k \cdot R_{k+1})}}$$

Chapitre II : La convection

2.1 - Généralités.

C'est un transfert de chaleur, dans la matière, avec transfert de matière.



Chapitre II : La convection

C'est un phénomène très usuel (vents ascendants en météo, échangeurs thermiques (industrie), chauffage central domestique, refroidissement d'équipements : voitures, oscillo, micros,...).

Deux types de convection :

convection naturelle : le film, partie de fluide en contact avec la surface, se déplace naturellement ; sa température est différente de celle du fluide en masse, sa masse volumique est également différente ----> déplacement dû à la poussée d'Archimède. On observe des courants de convection.(EX. : chauffage homogène d'un liquide dans une casserole, chauffage central sans accélérateur,...).

convection forcée : le mouvement du film est provoqué par une circulation artificielle (pompe, turbine) du fluide. Le transfert est plus rapide que dans le cas de convection naturelle. EX. : chauffage central avec accélérateur, chauffages électriques avec soufflerie,..

Chapitre II : La convection

2.2 - Loi de NEWTON.

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide, ce mécanisme de transfert est régit par la loi de Newton :

Loi de NEWTON :

$$\Phi = hS(T_p - T_f)$$

Avec Φ Flux de chaleur transmis par convection
h : coefficient de transfert de chaleur par convection
Tp : Température de surface du solide
S Aire de la surface de contact solide/fluide

Remarque: La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide

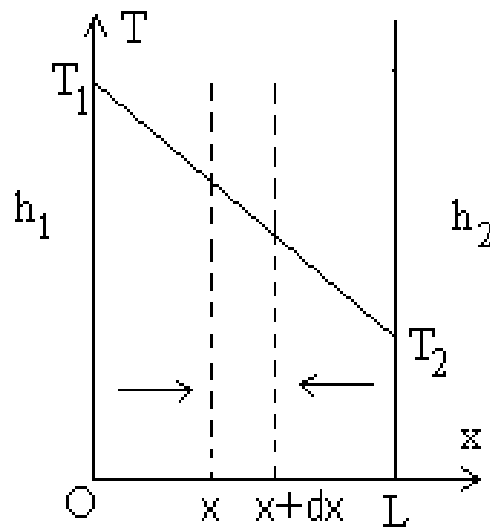
$$R = \frac{1}{hs}$$

Chapitre II : La convection

2.3 - Mur avec conditions de convection aux parois.

En thermique, on appelle " mur " un système où les échanges de chaleur se produisent suivant une direction cartésienne, par exemple x .

$T(x)$ représente donc le champ de température en régime permanent.



Le bilan thermique est fait sur un élément de volume adapté, dans ce cas celui compris entre les abscisses x et $x+dx$ de surface transversale S arbitraire.

Suivant la loi de Fourier, le flux de chaleur " entrant

" par conduction par la face x est égal à

$$- \lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_x S$$

, celui " sortant " par la face $x+dx$ est égal à

$$- \lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} S$$

Chapitre II : La convection

Le bilan thermique consiste à écrire que le flux de chaleur qui entre est égal à celui qui sort.

$$-\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_x S = -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} S = \Phi \Rightarrow \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} = \left(\frac{dT}{dx} \right)_x = Cte \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

La résolution, avec les deux conditions aux limites $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$ conduit à $T_1 - T_2 = \frac{L}{\lambda S} \Phi$ et $T(x) = -\frac{\Phi}{\lambda S} x + T_1$

$\frac{L}{\lambda S} = R_{th}$ représente la **résistance thermique** pour une section transversale S

et le flux de chaleur. Nous pouvons faire une analogie avec le domaine électrique en régime permanent entre différences de température et différence de potentiel d'une part et, d'autre part, flux de chaleur et intensité du courant électrique.

Chapitre II : La convection

A la frontière du solide en $x = 0$ et $x = L$, les échanges de chaleur se produisent respectivement avec des fluides à température T_{f1} et T_{f2} par l'intermédiaire de coefficients d'échanges de chaleur h_1 et h_2

- Le bilan énergétique (thermique) permet d'écrire :

$$\Phi = h_1 S (T_{f1} - T_1) = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2) = h_2 S (T_2 - T_{f2})$$

$\frac{1}{h_1 S}$ et $\frac{1}{h_2 S}$ apparaissent comme les résistances thermiques liées au coefficients h_1 et h_2 et

$$T_{f1} - T_{f2} = \left(\frac{1}{h_1 S} + \frac{L}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S} \right) \Phi$$

Chapitre II : La convection

Remarque : utilisation d' " ailettes ou barres " pour augmenter les échanges de chaleur

On place, aux frontières de la paroi, des solides de forme particulière appelés " ailettes ou barres ". L'augmentation des échanges de chaleur (diminution de la résistance thermique) est obtenue par l'augmentation de la surface d'échange avec les fluides extérieurs.

Ces solides sont de forme allongée, c'est à dire possèdent des dimensions transversales faibles par rapport à la troisième dimension.

Le gradient de température a lieu principalement dans le sens de cette dernière direction. Chaque section transversale est, en première approximation, à température uniforme ce qui n'est pas contradictoire avec le fait de considérer des échanges de chaleur suivant ces directions jusqu'au contact avec le fluide extérieur.

L'efficacité d'une ailette est définie par le rapport du flux de chaleur échangé par l'ailette au flux de chaleur qui serait échangé si elle n'existait pas.

Des notions complémentaires sur les ailettes seront abordées en travaux dirigés.

Chapitre II :

2.4 Problème de la conduite cylindrique recouverte d'un manchon isolant.

Dans les problèmes concrets, la conduite se trouve généralement plongée dans un fluide, de température T_F et il se produit alors un transfert de chaleur par *convection* entre la surface externe du manchon isolant et le fluide.

Soient R_i et R_e les rayons intérieur et extérieur du tube, λ sa conductivité thermique. On ajoute un manchon concentrique qui l'enveloppe, d'épaisseur e et de conductivité λ_m . On suppose que la température du fluide extérieur est inférieure aux températures intérieures, et que le débit de chaleur est donc dirigé vers l'extérieur. On se propose d'étudier l'incidence de l'épaisseur du manchon isolant sur les pertes de chaleur.

Le débit de chaleur transféré est donné par la formule $\Phi = \lambda \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot (T_1 - T_2)$ pour le tube et pour le manchon :

$$\Phi = \lambda \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \cdot (T_i - T_e)$$

$$\Phi = \lambda_m \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln \frac{R_e + e}{R_e}} \cdot (T_e - T_m)$$

Chapitre II :

Ainsi qu'il sera vu plus loin, on peut écrire que le débit de chaleur transféré par convection est : $\Phi = S \cdot h_c (T_m - T_F) = 2 \cdot \pi \cdot (R_e + e) \cdot L \cdot h_c (T_m - T_F)$

Des trois expressions du débit on déduit que :

$$T_i - T_e = \frac{\Phi}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{\ln \frac{R_e}{R_i}}{\lambda}$$
$$T_e - T_m = \frac{\Phi}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{\ln \frac{R_e + e}{R_e}}{\lambda_m}$$
$$T_m - T_F = \frac{\Phi}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{1}{h_c \cdot (R_e + e)}$$
$$T_i - T_F = \frac{\Phi}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \left[\frac{\ln \frac{R_e}{R_i}}{\lambda} + \frac{\ln \frac{R_e + e}{R_e}}{\lambda_m} + \frac{1}{h_c \cdot (R_e + e)} \right]$$

Chapitre II :

ou encore :

$$\Phi = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\frac{\ln \frac{R_e}{R_i}}{\lambda} + \frac{\ln \frac{R_e + e}{R_e}}{\lambda_m} + \frac{1}{h_c \cdot (R_e + e)}} \cdot (T_i - T_F)$$

La résistance thermique est la somme de deux résistances de conduction et d'une résistance de convection. La présence d'un isolant augmente la résistance de conduction, ce qui est souhaité, mais diminue la résistance de convection, ce qui l'est moins.

$$\frac{d\Phi}{de} = \frac{-2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_i - T_F)}{\left[\frac{\ln \frac{R_e}{R_i}}{\lambda} + \frac{\ln \frac{R_e + e}{R_e}}{\lambda_m} + \frac{1}{h_c \cdot (R_e + e)} \right]^2} \cdot \left[\frac{1}{\lambda_m} \cdot \frac{\frac{1}{R_e}}{\frac{R_e + e}{R_e}} + \frac{1}{h_c} \cdot \frac{-1}{(R_e + e)^2} \right]$$

Chapitre II :

$$\frac{d\Phi}{de} = \frac{-2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_i - T_f) \cdot \frac{1}{\lambda_m \cdot (R_e + e)^2}}{\left[\frac{\ln \frac{R_e}{R_i}}{\lambda} + \frac{\ln \frac{R_e + e}{R_e}}{\lambda_m} + \frac{1}{h_c \cdot (R_e + e)} \right]^2} \cdot \left[e + \left(R_e - \frac{\lambda_m}{h_c} \right) \right]$$

On voit que cette dérivée est susceptible d'être positive dans certaines conditions. En effet, si $\frac{\lambda_m}{h_c} < R_e$, la dérivée est toujours *négative* (le crochet de droite est toujours positif), quel que soit e , et l'augmentation de l'épaisseur d'isolant réduit le débit de chaleur, et donc les pertes.

Par contre, si $\frac{\lambda_m}{h_c} > R_e$ il existe une valeur $e_{\min} = \frac{\lambda_m}{h_c} - R_e$ pour laquelle le débit est maximal. Lorsque l'épaisseur varie de 0 à e_{\min} , la dérivée est positive, et le débit augmente. En clair, les pertes thermiques sont plus importantes qu'en l'absence d'isolant quand $e < e_{\min}$.

Chapitre II :

La condition $\frac{\lambda_m}{h_c} < R_c$ est d'autant plus facile à vérifier que le diamètre du tube cylindrique est grand.

En revanche, pour des tubes de petit diamètre, une épaisseur d'isolant insuffisante peut, dans certains cas, accroître les pertes thermiques avec le milieu extérieur, ce qui va à l'encontre du but recherché. Aucune règle préétablie ne permet de prévoir ce cas *a priori* !

Chapitre II :

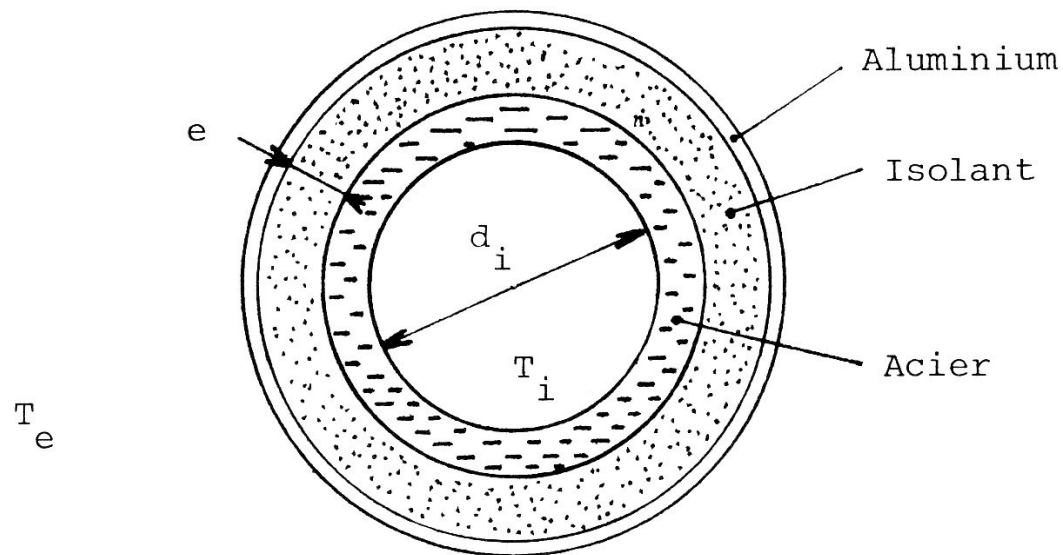
Exemple d'application : Calorifugeage d'un tuyau de petit diamètre

Considérons une conduite en acier contenant de la vapeur surchauffée à 220, la température ambiante est de 20 °C. L'épaisseur de la paroi d'acier est de 1 mm ($\lambda_{\text{acier}} = 70 \text{ W/m.K}$). L'isolant utilisé est de l'alfol ($\lambda = 0,093 \text{ W/m.K}$) recouvert d'une mince couche d'aluminium ($e=0,1 \text{ mm}$, $\lambda_{\text{alu}}=209 \text{ W/m.K}$).

Calculer le flux évacué
par mètre pour :

$-d_i = 0.4 \text{ cm}$, $e_{\text{isolant}} = 5\text{mm}$

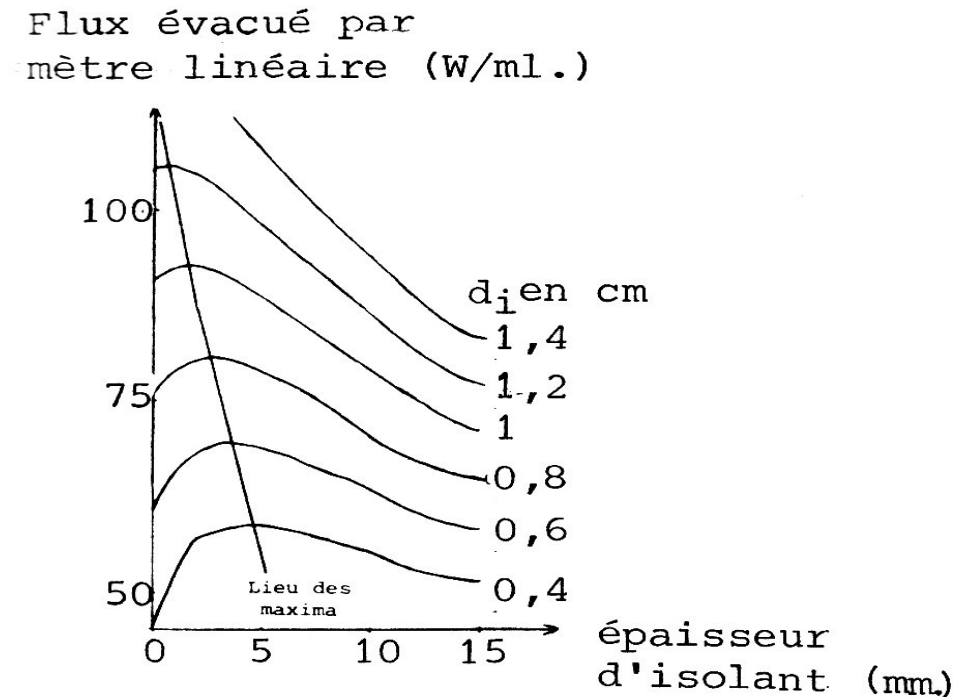
$d_i = 0.8 \text{ cm}$, $e_{\text{isolant}} = 5\text{mm}$



Chapitre II :

Les courbes de la figure 1 donnent la valeur du flux de chaleur par mètre linéaire s'échappant du tube, ceci pour différents diamètres internes, en fonction de l'épaisseur d'isolant.

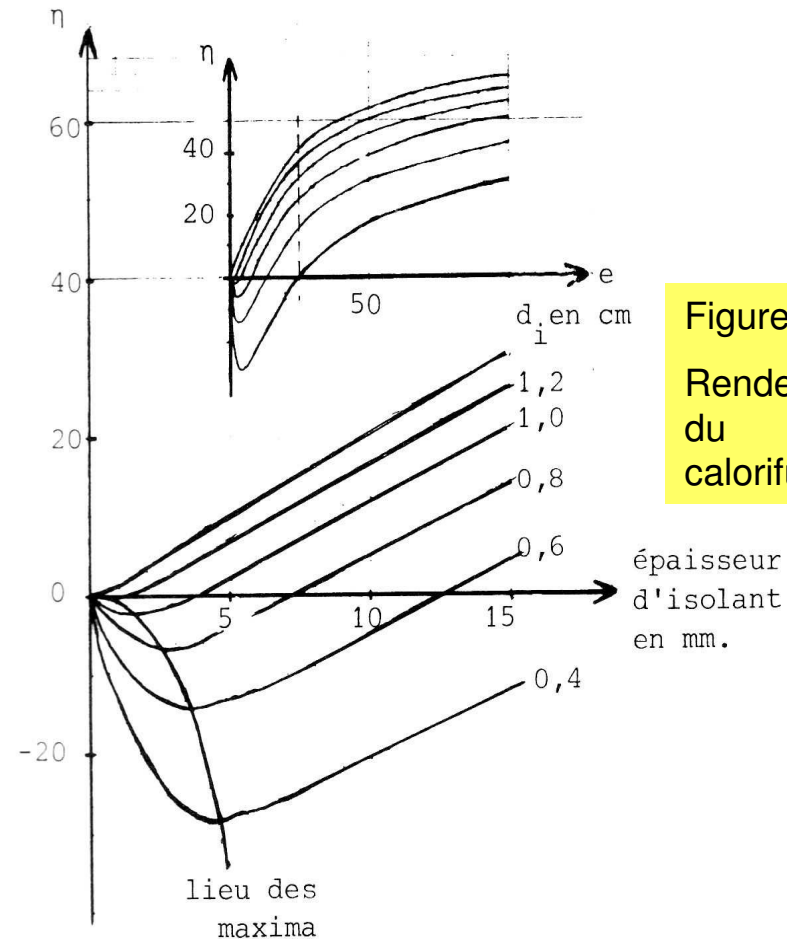
Figure 1 : Augmentation des pertes d'un tuyau de petits diamètre lorsqu'on l'entoure d'isolant.



Chapitre II :

Le lieu des maxima est approximativement une droite. En définissant le rendement de calorifugeage par : $\eta = 1 - \frac{\phi(e)}{\phi(e=0)}$

On a tracé (Figure 2) l'évolution de ce rendement en fonction du diamètre interne du tuyau et de l'épaisseur de l'isolant. On constate que pour les très petits diamètres ($d_i = 4$ mm), rajouter 5 mm d'isolant augmente le flux de 30%.



Chapitre II :

e) L'ailette :

L'ailette a pour fonction d'amplifier les échanges de chaleur entre un *mur plan* et un fluide extérieur. Le transfert entre l'ailette et le mur se fait par conduction, alors que les échanges avec le fluide extérieur ont lieu par convection.

Un exemple très contemporain de ce type d'application est le refroidissement des microprocesseurs modernes, dont la tendance à l'échauffement est combattue par un abaissement de la tension de fonctionnement, d'une part, et par des radiateurs à ailettes, d'autre part.

Considérons une ailette d'épaisseur e , de longueur L , de largeur H . L'épaisseur est supposée être petite par rapport à la longueur et la largeur. On néglige toutes les variations de température sur une section droite de l'ailette, et on suppose que T est fonction de la seule distance x par rapport au mur.

On pose :

T_F température de l'air

T_0 température du mur, et donc de l'ailette en $x=0$

conductivité thermique de l'ailette

h coefficient d'échange moyen entre l'ailette et l'air

Chapitre II :

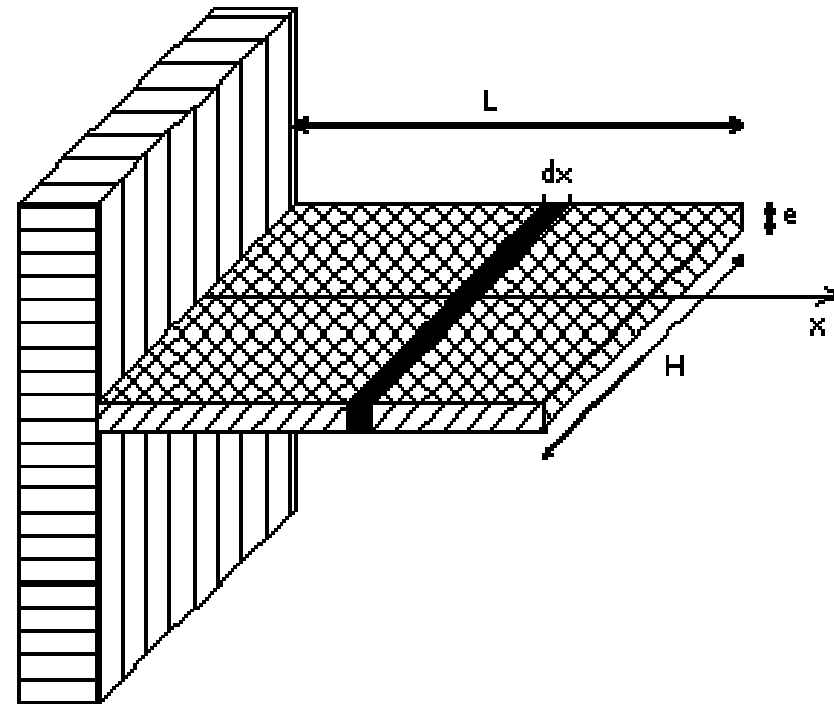
Considérons le petit volume en forme de parallélépipède de largeur H , d'épaisseur e et de longueur dx :

Il reçoit de la chaleur par *conduction*, du côté du mur, sur une surface $W = H \cdot e$.

Il cède de la chaleur par *conduction* par la face opposée, sur la même surface W .

Il cède de la chaleur par *convection* sur une surface $S = P \cdot dx$ où $P = 2(H+e)$ est le périmètre.

Sur ce petit volume, le bilan thermique va s'écrire :



Chapitre II :

$$\varphi_x \cdot \Omega - \varphi_{x+dx} \cdot \Omega - h \cdot S \cdot (T_x - T_F) = 0$$

Or,

$$\varphi_{x+dx} = \varphi_x + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot dx \quad \text{et} \quad \varphi_x = -\lambda \cdot \frac{dT_x}{dx}$$

soit :

$$\varphi_x - \varphi_{x+dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\lambda \cdot \frac{d^2 T_x}{dx^2}$$

Ce qui donne $\left[-\left(-\lambda \cdot \frac{d^2 T_x}{dx^2} \right) \cdot dx \right] \cdot \Omega - h \cdot P \cdot dx \cdot (T_x - T_F) = 0$

Chapitre II :

$$\frac{\lambda \cdot \Omega}{h \cdot P} \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} - (T - T_F) = 0 \quad (11)$$

Remarquons que l'expression $\frac{\lambda \cdot \Omega}{h \cdot P}$ a la dimension L^2 . Posons

$$\theta = T - T_F \quad \frac{\lambda \cdot \Omega}{h \cdot P} = D^2 \quad \text{et} \quad X = \frac{x}{D}$$

L'équation (11) devient finalement : $\frac{d^2 \theta}{dX^2} - \theta = 0$

Chapitre II :

Notons que q a la dimension d'une température, alors que X est sans dimension.

La solution de l'équation différentielle du second ordre est du type :
 $= A \cdot \text{ch}(X) + B \cdot \text{sh}(X)$

On détermine A et B à partir des conditions aux limites :

$x = 0$ donne $X = 0$ et $T = T_0 - T_F = 0$ donc $A = 0$

$x = L$ donne $X = L / D$ et $d / dX = 0$ (en négligeant la transmission de chaleur en bout d'ailette) soit : $0 \cdot \text{sh}(L / D) + B \cdot \text{ch}(L / D) = 0$

La distribution de température s'écrit alors :

$$\theta = \theta_0 \cdot \text{ch} X - \theta_0 \cdot \frac{\text{sh} \frac{L}{D}}{\text{ch} \frac{L}{D}} \cdot \text{sh} X = \theta_0 \cdot \frac{\text{ch} \left(\frac{L}{D} - X \right)}{\text{ch} \frac{L}{D}}$$

Chapitre II :

$$T = T_F + (T_0 - T_F) \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{L-x}{D}}{\operatorname{ch} \frac{L}{D}}$$

L'écoulement de chaleur à l'intérieur de l'ailette, pour $x=0$ est donné par :

$$\Phi_0 = -\lambda \cdot \Omega \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \lambda \cdot \Omega \cdot \frac{T_0 - T_F}{D} \cdot \left. \frac{\operatorname{sh} \frac{L-x}{D}}{\operatorname{ch} \frac{L}{D}} \right|_{x=0}$$
$$\Phi_0 = \frac{\lambda \cdot \Omega}{D} \cdot (T_0 - T_F) \cdot \operatorname{th} \frac{L}{D}$$

Chapitre II :

Le *rendement* d'une ailette est défini comme étant le rapport entre la chaleur réellement transmise à travers l'ailette et la chaleur qui serait transmise par convection ou rayonnement à partir de la surface de base de la tige, si l'ailette était supprimée.

$$\eta = \frac{\frac{\lambda \cdot \Omega}{D} \cdot (T_0 - T_F) \cdot \text{th} \frac{L}{D}}{h \cdot \Omega \cdot (T_0 - T_F)} = \frac{\lambda}{D \cdot h} \cdot \text{th} \frac{L}{D} \quad \text{avec} \quad \frac{l}{D} = \sqrt{\frac{h \cdot P}{\lambda \cdot \Omega}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{P \cdot \lambda}{\Omega \cdot h}} \cdot \text{th} \left(L \cdot \sqrt{\frac{h \cdot P}{\lambda \cdot \Omega}} \right) \quad \text{ou encore, en remarquant que } (e \ll H)$$

$$\frac{P}{\Omega} = \frac{2 \cdot (H + e)}{H \cdot e} \approx \frac{2 \cdot H}{H \cdot e} = \frac{2}{e}$$

Chapitre II :

Transmission de la chaleur dans un milieu avec dissipation interne

Ce type de problème se rencontre chaque fois qu'au sein de la matière se produit une dissipation volumique q d'énergie, d'origine électrique, nucléaire, électromagnétique... en chaleur. On peut citer l'effet Joule, les réactions de fission nucléaire, l'absorption par la matière de rayonnement divers (infrarouge, micro-ondes, rayon x...)

La notion de résistance thermique ne peut être utilisée pour traiter ce type de problème puisque le flux de chaleur n'est pas conservatif.

L'équation de propagation de la chaleur se réduit à l'équation de Poisson :

$$\Delta T = -\frac{q}{\lambda}$$

Chapitre II :

Mur avec source interne

C'est le cas d'une paroi ou d'un plancher chauffé intérieurement par des résistances électriques.

Températures d'extrémités identiques

Appelons T_0 la température aux extrémités de la paroi et q ($\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$) la densité volumique des sources. L'équation de la chaleur s'écrit :

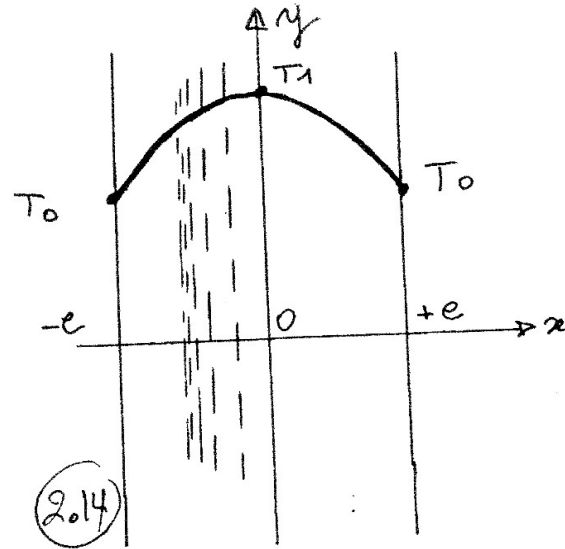
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{q}{\lambda}$$
$$T = -\frac{q}{\lambda} \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

dont la solution est une parabole :

Les conditions aux limites en $x=+e$ et $x=-e$ donnent finalement :

$$T = T_0 + \frac{q}{2\lambda} (e^2 - x^2)$$

Chapitre II :



L'écart de température au centre du mur vaut donc $\frac{qe^2}{2\lambda}$. La densité de flux vaut : $\varphi = qx$

Elle est nulle au centre par symétrie et maximum en $x=\pm e$.

Les isothermes sont donc plus serrées à cet endroit. Le flux en $x=e$ est tel qu'il évacue l'ensemble des sources situées entre $x=0$ et $x=e$.

Chapitre II :

Températures d'extrémités différentes

Appelons T_1 et T_2 les températures en $x = e$ et $x = -e$. La solution générale est inchangée et seules les conditions aux limites changent. On en déduit la solution :

$$T = \frac{q}{2\lambda} (e^2 - x^2) - \frac{T_1 - T_2}{2e} x + \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Chapitre II :

Résistance cylindrique :

Considérons une résistance électrique cylindrique de longueur supposée infinie, de rayon r_1 de conductivité thermique λ_1 entourée d'une gaine isolante de conductivité thermique λ_2 de rayon extérieur r_2 . Cette résistance est le siège d'une dissipation uniforme de chaleur $q =$ constante.

Le champ de température pour $0 \leq r \leq r_1$ est solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{q}{\lambda} \\ \text{En } r = r_1 \quad T = T_1 \\ \text{En } r = r_2 \quad T = T_2 \end{array} \right.$$

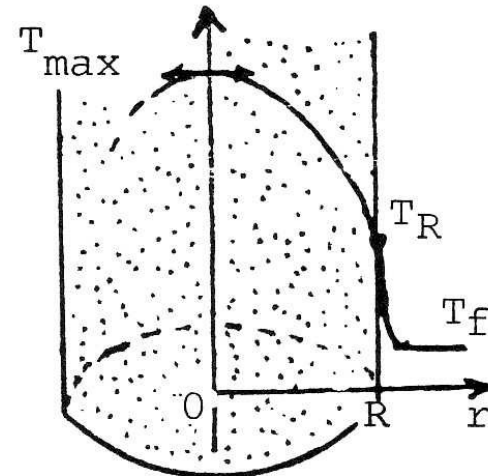
Chapitre II :

Barre cylindrique en contact avec un fluide :

Considérons une barre pleine, siège d'une dissipation uniforme de chaleur $q = \text{constante}$. Le problème admet une symétrie de révolution autour de l'axe oz (la température admet un optimum sur la surface médiane (en $r = 0$ $\left[\frac{dT}{dr} \right]_0 = 0$)

Le champ de température au sein de la barre est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{q}{\lambda} \\ \text{En } r = 0 & \left[\frac{dT}{dr} \right]_0 = 0 \\ \text{En } r = R & -\lambda \cdot \left[\frac{dT}{dr} \right]_R = h \cdot (T - T_\infty) \end{cases}$$



Chapitre II :

La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$T(r) = f(r) + a \cdot \ln(r) + b$$

Où $f(r)$ est une solution particulière (pour $q = \text{constante}$, $f(r) = \frac{qr^2}{4\lambda}$) et $a \cdot \ln(r) + b$ est une solution générale de l'équation sans second membre.

Les constantes a et b sont déterminées par les conditions aux limites, il vient que :

$$T(r) = -\frac{q}{4\lambda}(r^2 - R^2) + \frac{qr}{2h} + T_\infty$$

La température maximale vaut : $T(r = 0) = q \cdot \left[\frac{R^2}{4\lambda} + \frac{R}{2h} \right] + T_\infty$

La température de paroi vaut : $T(r = R) = \frac{qR}{2h} + T_\infty$

