www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com

© 2003 - Gérard Lavau - http://perso.wanadoo.fr/lavau/index.htm
Vous avez toute liberté pour télécharger, imprimer, photocopier ce cours et le diffuser gratuitement. Toute diffusion à titre onéreux ou utilisation commerciale est interdite sans accord de l'auteur.
Si vous êtes le gestionnaire d'un site sur Internet, vous avez le droit de créer un lien de votre site vers mon site, à condition que ce lien soit accessible librement et gratuitement. Vous ne pouvez pas télécharger les fichiers de mon site pour les installer sur le vôtre.

GEOMETRIE ELEMENTAIRE

PLAN

I : Géométrie du plan

1– Repérage dans le plan

Les éléments du plan ou de l'espace sont considérés dans ce chapitre comme des points. Pour repérer un point M du plan, deux procédés existent, les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires.

a) Repère cartésien du plan :

Pour définir un repère cartésien du plan, on se donne un point O appelé origine et deux vecteurs $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ non colinéaires. Pour tout point M du plan, le vecteur $\boldsymbol{OM}$ se décompose d'une façon unique sous la forme :

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

x et y s'appellent composantes du vecteur $\boldsymbol{OM}$ ou coordonnées du point M. En général, la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ est orthonormale directe auquel cas, on dit que le repère est orthonormal direct.

Un changement de repère consiste simultanément à changer d'origine et de vecteurs de base. Soit Ω la nouvelle origine, de coordonnées (a, b) dans l'ancien repère, et $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ la nouvelle base, donnée par les composantes de $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ dans l'ancienne base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$:

$$\boldsymbol{I} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{i} + \delta\boldsymbol{j}$$

Le problème est de déterminer dans le nouveau repère $(\Omega, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ les coordonnées (X, Y) d'un point M dont on connaît les coordonnées (x,y) dans l'ancien repère $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Il suffit d'écrire que :

$$\boldsymbol{\Omega M} = \boldsymbol{OM} - \boldsymbol{O\Omega}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{X}\boldsymbol{I} + \mathrm{Y}\boldsymbol{J} = (x-a)\boldsymbol{i} + (y-b)\boldsymbol{j}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{X}(\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}) + \mathrm{Y}(\gamma\boldsymbol{i} + \delta\boldsymbol{j}) = (x-a)\boldsymbol{i} + (y-b)\boldsymbol{j}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha\mathrm{X} + \gamma\mathrm{Y} = x-a \\ \beta\mathrm{X} + \delta\mathrm{Y} = y-b \end{cases}$$

ce qui amène à résoudre un système.

Si $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ est orthonormé direct et si $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ s'obtient par une rotation d'angle θ par rapport à $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, alors :

$$\boldsymbol{I} = \cos(\theta)\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{J} = -\sin(\theta)\boldsymbol{i} + \cos(\theta)\boldsymbol{j}$$

Le système obtenu sera donc :

$$\begin{cases} \cos(\theta)\mathrm{X} - \sin(\theta)\mathrm{Y} = x-a \\ \sin(\theta)\mathrm{X} + \cos(\theta)\mathrm{Y} = y-b \end{cases}$$

Pour obtenir X, il suffit de multiplier la première ligne par $\cos(\theta)$ et la deuxième ligne par $\sin(\theta)$. Pour obtenir Y, il suffit de multiplier la première ligne par $-\sin(\theta)$ et la deuxième par $\cos(\theta)$.

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{X} = \cos(\theta)(x-a) + \sin(\theta)(y-b) \\ \mathrm{Y} = -\sin(\theta)(x-a) + \cos(\theta)(y-b) \end{cases}$$

b) Coordonnées polaires :

Considérons un repère orthonormal direct $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ du plan. Ce repère permet une identification du plan P au plan complexe $\mathbb{C}$.

$$\text{M de coordonnées } (x, y) \in \mathrm{P} \leftrightarrow z = x + iy \in \mathbb{C}$$

Les coordonnées polaires de M correspondent à la forme trigonométrique du complexe z, à savoir :

$r = |z| = \| \boldsymbol{OM} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \arg(z) = \text{angle}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{OM})$

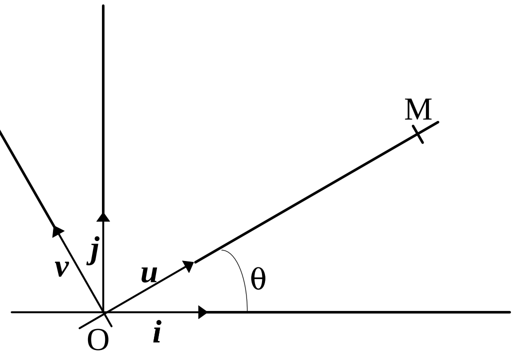
On a donc :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Le repère polaire correspondant est donné par (O, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) où :

$\boldsymbol{u} = \cos(\theta)\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\boldsymbol{j}$ — $\boldsymbol{u}$ est de norme 1, colinéaire et de même sens que $\boldsymbol{OM}$

$\boldsymbol{v} = -\sin(\theta)\boldsymbol{i} + \cos(\theta)\boldsymbol{j}$ — $\boldsymbol{v}$ est de norme 1, directement orthogonal à $\boldsymbol{u}$



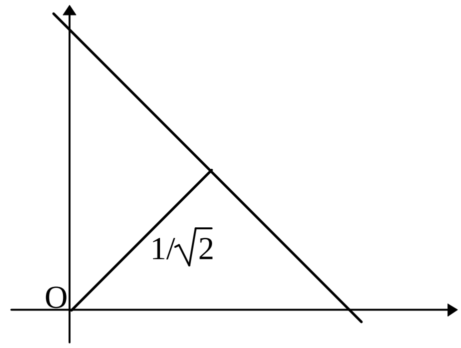
$\boldsymbol{u}$ est aussi parfois noté $\boldsymbol{e}_r$, et $\boldsymbol{v}$ est noté $\boldsymbol{e}_\theta$. $\boldsymbol{u}$ a pour affixe dans le plan complexe $e^{i\theta}$, et $\boldsymbol{v}$ a pour affixe $ie^{i\theta}$ (où i est le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, à ne pas confondre avec le vecteur $\boldsymbol{i}$!!).

<u>c) Droites et cercles en polaires</u> :

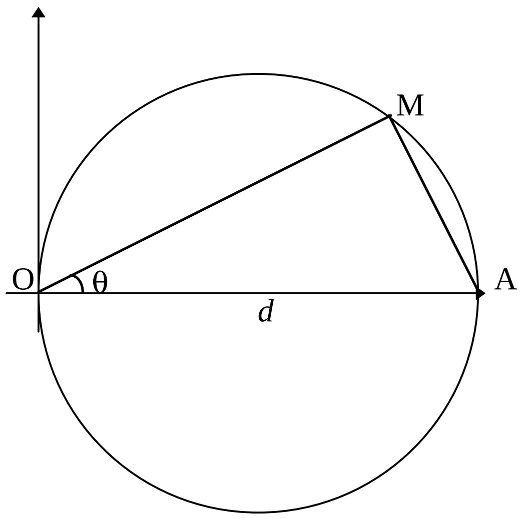
Une droite passant par l'origine fait un angle constant avec $\boldsymbol{i}$. Son équation polaire est donc θ = Cte. Considérons maintenant une droite ne passant par O. Si elle est parallèle à l'axe Oy et passe par le point $(x_0,0)$ a évidemment pour équation $x = x_0$. En coordonnées polaire, on obtient $r\cos\theta = x_0$. Si l'on fait tourner cette droite d'un angle φ autour de O, l'équation devient : $r\cos(\theta-\varphi) = x_0$. L'équation générale d'une droite sous forme polaire est donc $r\cos(\theta-\varphi) = d$ ou $r = \frac{d}{\cos(\theta-\varphi)}$. φ est la valeur de l'angle θ rendant r minimal, la distance de la droite à l'origine étant d.

EXEMPLE : $r = \frac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)}$

Il s'agit d'une droite. En effet, $r = \frac{1}{\sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}$



Considérons maintenant un cercle passant par O, dont le diamètre [OA], de longueur *d*, est inclus dans l'axe des abscisses :



M étant un point quelconque du cercle et le triangle OAM étant rectangle en M, on a :

$$r = \mathrm{OM} = d\cos\theta$$

Il suffit que θ décrive l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour que le cercle soit décrit en entier.

Si la figure précédente est tournée d'un angle φ, alors l'équation devient :

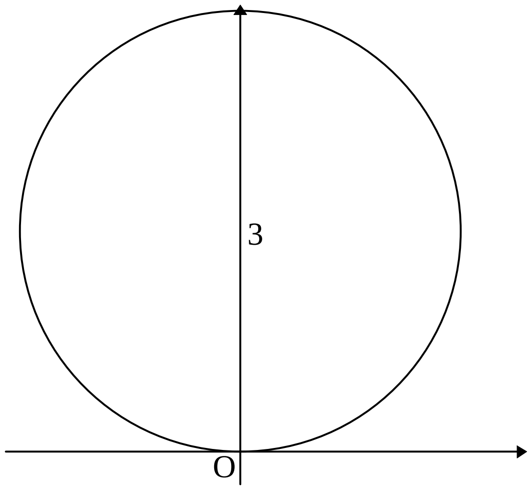
$$r = d\cos(\theta - \varphi)$$

où *d* est la longueur du diamètre, et φ l'angle que fait ce diamètre avec l'axe des abscisses.

EXEMPLE : $r = 3\sin\theta$

Il s'agit d'un cercle. En effet, $r = 3\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$

www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com



2– Produit scalaire

❑ Le produit scalaire sera étudié de manière plus approfondie dans le chapitre de *Géométrie Euclidienne* qu'on trouvera dans le fichier ESPEUCL.PDF. Il est noté $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$ ou $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$. On se contentera ici d'en rappeler la définition géométrique :

$\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \|\, \boldsymbol{u} \,\|\, \|\, \boldsymbol{v} \,\| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, où $\cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ désigne le cosinus de l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.

Si $\boldsymbol{u}$ ou $\boldsymbol{v}$ est nul, l'angle est non défini, mais dans ce cas, $\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$.

Du fait que angle($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) = – angle($\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$) et que cos est une fonction paire, on a :

$\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle$

On dit que le produit scalaire est symétrique.

❑ On peut interpréter ce produit selon la droite engendrée par $\boldsymbol{u}$ comme le produit de la norme de $\boldsymbol{u}$ par la norme du projeté de $\boldsymbol{v}$ sur cette droite, ou symétriquement selon la droite engendrée par $\boldsymbol{v}$, comme le produit de la norme de $\boldsymbol{v}$ par la norme du projeté de $\boldsymbol{u}$ sur cette droite.

❑ Donnons l'expression du produit scalaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ en fonction de leurs composantes dans une base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ orthonormale. Posons $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{i} + d\boldsymbol{j}$. Le vecteur directement orthogonal à $\boldsymbol{u}$ est $\boldsymbol{w} = -b\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j}$. Posons $\boldsymbol{U} = \dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\, \boldsymbol{u} \,\|}$ et $\boldsymbol{W} = \dfrac{\boldsymbol{w}}{\|\, \boldsymbol{w} \,\|}$. $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W})$ forme une base orthonormée directe. On a alors, comme on le vérifie facilement :

$$\boldsymbol{v} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}(-b\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j}) = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}}\boldsymbol{U} + \frac{ad - bc}{\sqrt{a^2 + b^2}}\boldsymbol{W}$$

La base $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W})$ étant orthonormée directe, on a aussi :

$$\boldsymbol{v} = \|\, \boldsymbol{v} \,\| (\cos\theta\, \boldsymbol{U} + \sin\theta\, \boldsymbol{W})$$

où θ est l'angle $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{v})$. $\boldsymbol{U}$ étant colinéaire et de même sens que $\boldsymbol{u}$, ce n'est autre que l'angle $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Il en résulte que $\dfrac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \|\, \boldsymbol{v} \,\| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, ce qui donne finalement :

$ac + bd = \|\, \boldsymbol{u} \,\|\, \|\, \boldsymbol{v} \,\| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

Ainsi :

$$\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = ac + bd$$

❑ Sous cette forme, il est facile de vérifier que, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ et tout scalaire λ, on a :

$$\begin{cases} <\lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = \lambda <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> \\ <\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> + <\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}> \end{cases}$$

On dit que le produit scalaire est linéaire par rapport au premier vecteur.
De même :

$$\begin{cases} <\boldsymbol{u}, \lambda \boldsymbol{v}> = \lambda <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> \\ <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'> = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> + <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}'> \end{cases}$$

On dit que le produit scalaire est linéaire par rapport au deuxième vecteur.
Le produit scalaire est bilinéaire.

❑ Si on se place dans $\mathbb{C}$, avec les complexes $u = a + ib$ et $v = c + id$, alors on vérifiera que :

$$ac + bd = \mathrm{Re}(\overline{u}v)$$

Ainsi $\mathrm{Re}(\overline{u}v)$ peut s'interpréter comme le produit scalaire des deux vecteurs d'affixe u et v.

3– Déterminant

❑ Avec les mêmes notations que précédemment :

$$\boldsymbol{v} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} (a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} (-b\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j}) = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}} \boldsymbol{U} + \frac{ad - bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} \boldsymbol{W}$$

$$\boldsymbol{v} = \| \boldsymbol{v} \| (\cos\theta \, \boldsymbol{U} + \sin\theta \, \boldsymbol{W})$$

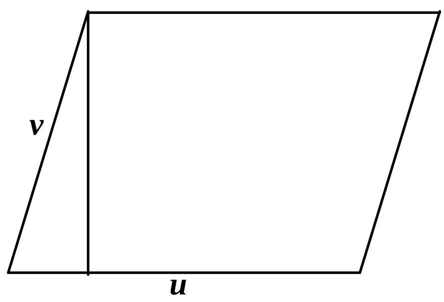
on voit apparaître une autre quantité, la composante selon $\boldsymbol{W}$, à savoir :

$$ad - bc = \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{v} \| \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

Cette quantité s'appelle déterminant des vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ (dans une base orthonormée directe) :

$$\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ad - bc = \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{v} \| \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

La valeur absolue du déterminant est l'aire du parallélogramme construit selon $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. En effet, si $\boldsymbol{u}$ sert de base du dit parallélogramme, alors $\| \boldsymbol{v} \| \, |\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|$ est la longueur de sa hauteur.



❑ L'expression $\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ad - bc$ permet de vérifier que Det est bilinéaire, mais le fait que le sinus soit une fonction impaire conduit à :

$$\mathrm{Det}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = -\,\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

Le déterminant est dit antisymétrique ou alterné.

❑ Si on se place dans $\mathbb{C}$, avec les complexes $u = a + ib$ et $v = c + id$, alors on vérifiera que :

$$ad - bc = \mathrm{Im}(\overline{u}v)$$

Ainsi $\mathrm{Im}(\overline{u}v)$ peut s'interpréter comme le déterminant des deux vecteurs d'affixe u et v.
Les déterminants sont étudiés en dimension quelconque dans le chapitre *Déterminants* qu'on trouvera dans le fichier DETERMIN.PDF.

4– Droites

❑ Le déterminant permet de caractériser deux vecteurs colinéaires. En effet :

$\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ angle($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) = 0 ou π ou $\boldsymbol{u} = 0$ ou $\boldsymbol{v} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ ou $\boldsymbol{u} = 0$ ou $\boldsymbol{v} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$

De même, trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{AC}$ sont colinéaires, donc si et seulement si $\mathrm{Det}(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}) = 0$.

❑ Les droites interviennent également dans le contexte suivant. Soit $\boldsymbol{u}$ vecteur non nul donné (le plus souvent normé ou unitaire, i.e. de norme 1), et A donné, considérons la fonction :

$$\mathrm{M} \to \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{AM} \rangle = f(\mathrm{M})$$

Les parties $\{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) = k\}$ où k est une constante donnée s'appellent lignes de niveaux de la fonction f. Dans le cas présent, les lignes de niveaux de cette fonction sont les droites orthogonales à $\boldsymbol{u}$. Il suffit pour cela d'écrire $\boldsymbol{AM} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v}$ avec $\boldsymbol{v}$ orthogonal à $\boldsymbol{u}$ pour obtenir $f(\mathrm{M}) = \mathrm{Cte} \Leftrightarrow x = \mathrm{Cte}$.

Il en est de même de la fonction $\mathrm{M} \to \mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{AM})$, mais on obtient cette fois les droites parallèles à la direction $\boldsymbol{u}$. On a en effet :

$$\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{AM}) = \mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v}) = x\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + y\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = y\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \text{ puisque } \mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0.$$

Donc $\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{AM}) = \mathrm{Cte} \Leftrightarrow y = \mathrm{Cte}$

❑ Il existe essentiellement deux méthodes algébriques pour caractériser une droite, l'équation cartésienne et la représentation paramétrique. On se donne un repère (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$) (en général orthonormal direct). La droite (D) peut être donnée par deux points A et B, ou un point A et un vecteur directeur $\boldsymbol{u}$, ou par un point et un vecteur normal (i.e. orthogonal à la droite) $\boldsymbol{n}$. Si la droite est donnée par deux points A et B, un vecteur directeur est $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$.

La représentation paramétrique de (D) est :

$$\mathrm{M} \in (\mathrm{D}) \Leftrightarrow \exists\, \lambda, \boldsymbol{AM} = \lambda\boldsymbol{u} \text{ ce qu'on note aussi } \mathrm{M} = \mathrm{A} + \lambda\boldsymbol{u}$$

On obtient alors directement :

$$\begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + \lambda a \\ y = y_{\mathrm{A}} + \lambda b \end{cases}$$

où a et b sont les composantes de $\boldsymbol{u}$, x et y les coordonnées de M et x_{A} et y_{A} les coordonnées de A.

L'élimination de λ conduit à l'équation cartésienne de (D). Mais il est plus simple d'écrire que :

$$\mathrm{M} \in (\mathrm{D}) \Leftrightarrow \mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{AM}) = 0 \Leftrightarrow a(y - y_{\mathrm{A}}) - b(x - x_{\mathrm{A}}) = 0$$
$$\Leftrightarrow -bx + ay = c \text{ avec } c = -bx_{\mathrm{A}} + ay_{\mathrm{A}}$$

Si la droite est donnée par A et un vecteur normal $\boldsymbol{n} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$, alors :

$$\mathrm{M} \in (\mathrm{D}) \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{AM}, \boldsymbol{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow a(x - x_{\mathrm{A}}) + b(y - y_{\mathrm{A}}) = 0$$
$$\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \text{ avec } c = -(ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}})$$

Si l'on choisit un vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$, on peut écrire $\boldsymbol{n} = \cos(\theta)\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\boldsymbol{j}$. L'équation est de la forme suivante dite normale :

$$x\cos(\theta) + y\sin(\theta) + c = 0$$

L'intérêt de cette expression est que la distance d'un point M quelconque de coordonnées (x,y) à la droite vaut $|x\cos(\theta) + y\sin(\theta) + c|$. En effet, la distance de M à la droite vaut $|<\boldsymbol{AM},\boldsymbol{n}>|$ comme on le voit en décomposant $\boldsymbol{AM}$ dans la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})$. En particulier, $|c|$ est la distance de O à la droite.

Dans le cas plus général d'une équation de la forme $ax + by + c = 0$, la distance de M à la droite vaut $\dfrac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, puisque (D) a pour équation $\dfrac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$, avec cette fois le vecteur $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j})$ unitaire comme précédemment.

5– Cercles

❑ Dans un repère orthonormé, l'équation du cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

de la forme :

$$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$$

Inversement, cette équation est un cercle (ou éventuellement l'ensemble vide).

$$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + \frac{c}{2})^2 + (y + \frac{d}{2})^2 = \frac{c^2 + d^2}{4} - e$$

Son centre a pour coordonnées $(-\frac{c}{2}, -\frac{d}{2})$ et son rayon $\sqrt{\dfrac{c^2 + d^2}{4} - e}$ (si la quantité sous le radical est positive ou nulle, sinon aucun point ne vérifie l'équation).

❑ Géométriquement, il est évident qu'une droite coupe un cercle en deux points distincts, ou bien est tangente au cercle, ou bien ne le coupe pas. Cela peut se vérifier par le calcul en prenant, pour simplifier le centre du cercle comme origine du repère et l'axe des abscisses parallèle à la droite. Les points communs vérifient alors :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = d \end{cases}$$

Il y a deux solutions distinctes si $|d| < R^2$, une solution unique si $d = R$ ou si $d = -R$, pas de solution si $|d| > R$.

Le cas de l'intersection de deux cercles se ramène immédiatement au précédent, puisque la différence des équations de deux cercles donnent l'équation d'une droite (ou une constante). Les deux cercles peuvent donc avoir une intersection vide, ou bien être confondus (cas où la constante est nulle), ou bien se couper en deux points, ou bien être tangents en un même point.

❑ A et B étant deux points distincts, intéressons-nous à l'ensemble des points M tels que $<\boldsymbol{MA},\boldsymbol{MB}> = \text{Cte}$. Notons Ω le milieu de [A,B], de sorte que $\boldsymbol{AM} = \boldsymbol{A\Omega} + \boldsymbol{\Omega M}$ et $\boldsymbol{BM} = \boldsymbol{B\Omega} + \boldsymbol{\Omega M}$. Faisons le produit scalaire. On obtient :

$$<\boldsymbol{A\Omega},\boldsymbol{B\Omega}> + \Omega M^2 = \text{Cte}$$

D'où $\Omega M^2 = \text{Cte} + R^2$ où $R = \frac{1}{2}AB$. Il s'agit donc de cercles de centre Ω. Dans le cas où la constante est nulle, on obtient $\Omega M = R$. Il s'agit alors du cercle de diamètre [A,B].

La suite du paragraphe est réservée aux MPSI

❑ A et B étant deux points distincts, la ligne de niveau MA = kMB, avec k non nul. Si $k = 1$, il s'agit évidemment de la médiatrice de [AB]. Pour k différent de 1, cette relation équivaut à $MA^2 = k^2MB^2$ ou encore à :

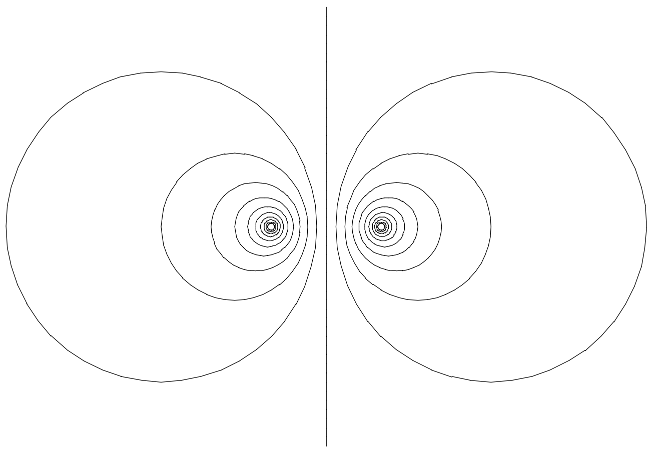
$$<\boldsymbol{MA} - k\boldsymbol{MB} , \boldsymbol{MA} + k\boldsymbol{MB}> = 0$$

Notons G_1 le barycentre de (A,1) et (B,–k) et G_2 le barycentre de (A,1) et (B,k), de sorte que :

$$\boldsymbol{MA} - k\boldsymbol{MB} = (1-k)\boldsymbol{MG}_1 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{MA} + k\boldsymbol{MB} = (1+k)\boldsymbol{MG}_2$$

On obtient alors : $<\boldsymbol{MG_1} , \boldsymbol{MG_2}> = 0$. Il s'agit donc du cercle de diamètre [G_1,G_2].

Quand k tend vers 0, G_1 et G_2 tendent vers A. Quand k augmente, le cercle s'élargit pour donner la médiatrice de [AB] lorsque $k = 1$, puis, quand k tend vers l'infini, G_1 et G_2 tendent vers B. Voici quelques lignes de niveaux :



EXERCICE :
Considérons une famille de points A_i affectés de coefficients λ_i et considérons la fonction $M \to \sum \lambda_i MA_i^2$. Quelles sont les lignes de niveaux de cette fonction ?

Supposons d'abord que la somme des coefficients est non nulle, de sorte qu'il existe un barycentre G aux (A_i, λ_i). On a alors :

$$\boldsymbol{MA_i} = \boldsymbol{MG} + \boldsymbol{GA_i}$$
$$\Rightarrow \quad MA_i^2 = MG^2 + 2<\boldsymbol{MG}, \boldsymbol{GA_i}> + GA_i^2$$
$$\Rightarrow \quad \sum \lambda_i MA_i^2 = \sum \lambda_i\, MG^2 + 2<\boldsymbol{MG}, \sum \lambda_i \boldsymbol{GA_i}> + \sum \lambda_i\, GA_i^2$$

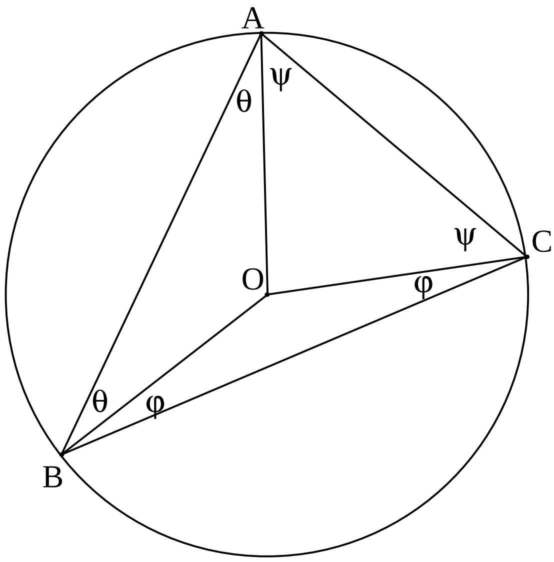
or $\sum \lambda_i \boldsymbol{GA_i}$ est nul par définition du barycentre et $\sum \lambda_i\, GA_i^2$ est une constante. Une ligne de niveau de la fonction $M \to \sum \lambda_i MA_i^2$ vérifie donc $\sum \lambda_i\, MG^2 = \text{Cte}$. Il s'agit donc de cercles de centre G.

Dans le cas où $\sum \lambda_i = 0$, et en prenant cette fois G quelconque, on obtient $2<\boldsymbol{MG}, \boldsymbol{U}> = \text{Cte}$, où $\boldsymbol{U} = \sum \lambda_i\, \boldsymbol{GA_i}$ ne dépend pas de G. Il s'agit donc de droites parallèles, orthogonales à $\boldsymbol{U}$.

❑ Soient A et B deux points, et α un angle donné. On s'intéresse aux lignes de niveaux de la forme angle($\boldsymbol{MA}$, $\boldsymbol{MB}$) = α.

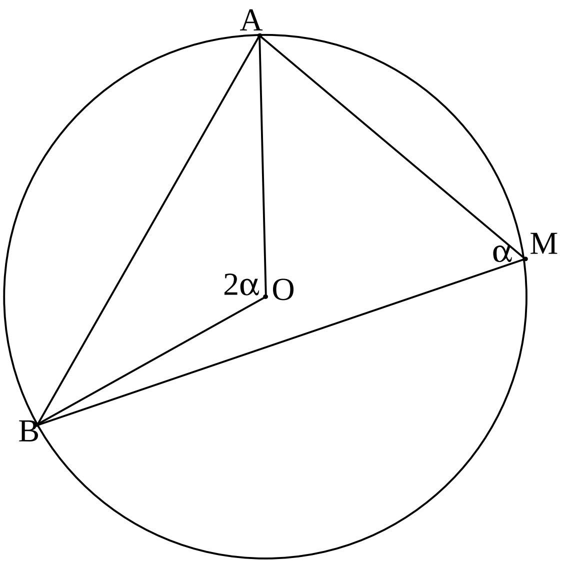
Considérons au préalable un triangle ABC inscrit dans un cercle.

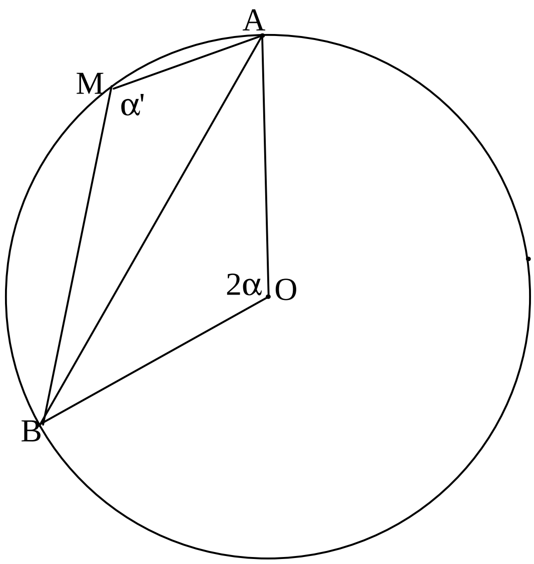
www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com



La somme des angles du triangle étant égal à π, on en déduit que $\theta + \varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$. L'angle au centre AOB qui vaut $\pi - 2\theta$ est donc le double de l'angle inscrit ACB qui vaut $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2} - \theta$.

Si un point M appartient à un cercle de centre O tel que angle(***MA***, ***MB***) = α, alors angle(***OA***, ***OB***) = 2α.





Dans la figure de gauche, α vaut $\frac{\pi}{3}$ et 2α vaut $\frac{2\pi}{3}$. Dans la figure de droite, on prendra garde que les angles sont orientés de ***MA*** vers ***MB***. Ainsi angle(***MA***, ***MB***) est-il égal à $-\frac{2\pi}{3}$ (ou $\frac{4\pi}{3}$ en comptant l'angle dans le sens trigonométrique de ***MA*** vers ***MB*** en passant par l'extérieur du cercle), de sorte que 2α (à 2π près) vaut $-\frac{4\pi}{3}$ ou $\frac{8\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$. Les angles au centre sont bien égaux dans les deux figures, mais l'angle inscrit α' est égal à $\alpha \pm \pi$.

La notion d'angle défini à π près est parfaitement adapté aux droites. En effet, l'angle de deux vecteurs non nuls $(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ est l'angle de la rotation qui transforme $\frac{\boldsymbol{U}}{\|\boldsymbol{U}\|}$ en $\frac{\boldsymbol{V}}{\|\boldsymbol{V}\|}$. La mesure de cet angle est définie à 2π prés. Les angles vérifient la relation de Chasles :

$$(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + (\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{W})$$

Celle–ci résulte en effet de la loi de composition des rotations. On a aussi $(\boldsymbol{U},-\boldsymbol{U}) \equiv \pi \bmod 2\pi$. Il en est de même pour les demi-droites. Une demi–droite vectorielle (D) est engendrée par un vecteur $\boldsymbol{U}$ de telle façon que :

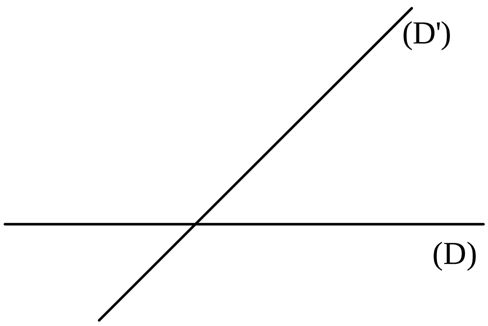
$$(D) = \{ \lambda\boldsymbol{U} \mid \lambda > 0\}$$

Il en est de même d'une demi–droite affine qu'on peut définir comme $\{A + \lambda\boldsymbol{U} \mid \lambda > 0\}$. On peut donc définir l'angle de deux demi–droites comme étant l'angle de leur deux vecteurs générateurs. Cet angle est défini à 2π près.

Par contre, une droite vectorielle ou affine possède des vecteurs directeurs pouvant prendre deux directions. Il n'existe en effet aucun moyen de privilégier un vecteur directeur d'une droite plutôt que son opposé. Soit deux droites de vecteurs directeurs $\pm \boldsymbol{U}$ et $\pm \boldsymbol{V}$. On peut choisir comme angle de ces deux droites les angles $(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$, $(-\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$, $(\boldsymbol{U},-\boldsymbol{V})$ ou $(-\boldsymbol{U},-\boldsymbol{V})$. Or on a :

$$(-\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = (-\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) + (\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + \pi$$
$$(\boldsymbol{U},-\boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + (\boldsymbol{V},-\boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + \pi$$
$$(-\boldsymbol{U},-\boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$$

N'ayant aucun moyen canonique de choisir une orientation particulière pour les droites, nous choisirons donc n'importe lequel de ces angles, mais celui–ci ne sera défini qu'à un multiple de π près au lieu de 2π. Ci-dessous, angle((D), (D')) = $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$, au choix. De même, angle((D'), (D)) = $-\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$.



Il en résulte que, pour tout M appartenant au cercle de centre O passant par A et B tel que angle($\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$) = 2α, alors angle((MA), (MB)) = α, où l'angle considéré est un angle de droites, défini à π près. (En toute rigueur, il faut considérer M différent de A et B. En effet, pour ces points, $\boldsymbol{MA}$ ou $\boldsymbol{MB}$ est nul, et la droite (MA) ou (MB) n'est pas défini).
Si on choisit des angles de vecteurs, angle($\boldsymbol{MA}$, $\boldsymbol{MB}$) = α n'est vérifié que pour M appartenant à un seul des deux arcs de cercles d'extrémités A et B. Enfin, aucun point n'appartenant pas au cercle ne peut vérifier une telle relation puisque, si M est extérieur au cercle, l'angle $(\boldsymbol{MA}, \boldsymbol{MB})$ sera plus petit, et s'il est intérieur au cercle, l'angle sera plus grand.

Ainsi, la ligne de niveau angle((MA), (MB)) = α est le cercle passant par A et B, de centre O tel qua angle($\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$) = 2α, privé des points A et B.

Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

II : Géométrie de l'espace

1– Repérage dans l'espace

Pour repérer un point M de l'espace, trois procédés existent, les coordonnées cartésiennes, les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

a) Repère cartésien du plan :

Pour définir un repère cartésien du plan, on se donne un point O appelé origine et vecteurs ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) non coplanaires. Pour tout point M de l'espace, le vecteur $\boldsymbol{OM}$ se décompose d'une façon unique sous la forme :

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

x, y et z s'appellent composantes du vecteur $\boldsymbol{OM}$ ou coordonnées du point M. En général, la base ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) est orthonormale directe auquel cas, on dit que le repère est orthonormal direct.

Un changement de repère s'opère comme dans le plan. On se donne une nouvelle orginie Ω, de coordonnées (a, b, c) dans l'ancien repère, et une nouvelle base ($\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$), par les composantes de $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{K}$ dans l'ancienne base ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) :

$$\boldsymbol{I} = \alpha\boldsymbol{i} + \alpha'\boldsymbol{j} + \alpha''\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{J} = \beta\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \beta''\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{K} = \gamma\boldsymbol{i} + \gamma'\boldsymbol{j} + \gamma''\boldsymbol{k}$$

Le problème est de déterminer dans le nouveau repère (Ω, $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$) les coordonnées (X, Y, Z) d'un point M dont on connaît les coordonnées (x,y) dans l'ancien repère (O, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$). Il suffit d'écrire que :

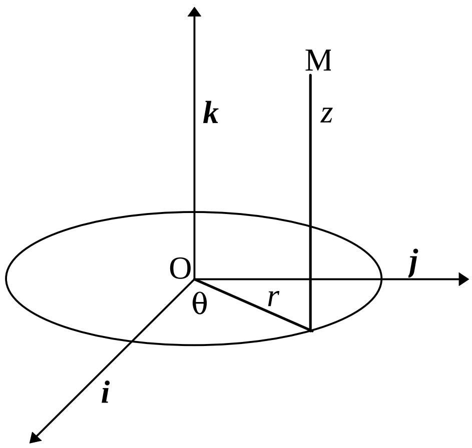
$$\boldsymbol{\Omega M} = \boldsymbol{OM} - \boldsymbol{O\Omega}$$
$$\Leftrightarrow \quad X\boldsymbol{I} + Y\boldsymbol{J} + Z\boldsymbol{K} = (x-a)\boldsymbol{i} + (y-b)\boldsymbol{j} + (z-c)\boldsymbol{k}$$
$$\Leftrightarrow \quad X(\alpha\boldsymbol{i} + \alpha'\boldsymbol{j} + \alpha''\boldsymbol{k}) + Y(\beta\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \beta''\boldsymbol{k}) + Z(\gamma\boldsymbol{i} + \gamma'\boldsymbol{j} + \gamma''\boldsymbol{k}) = (x-a)\boldsymbol{i} + (y-b)\boldsymbol{j} + (z-c)\boldsymbol{k}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha X + \beta Y + \gamma Z = x-a & L_1 \\ \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z = y-b & L_2 \\ \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z = y-b & L_3 \end{cases}$$

et il suffit ☹ de résoudre le système. Heureusement, si les repères sont orthonormés, il suffit de calculer $\alpha L_1 + bL_2 + \gamma L_3$ pour obtenir X puisque, dans ce cas, $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$, alors que $\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$ et de même avec γ, γ' et γ''.

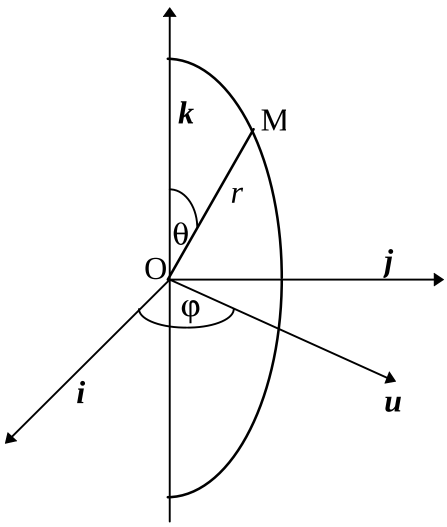
b) Coordonnées cylindiques :

Considérons un repère orthonormal direct (O, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) de l'espace. Les coordonnées cylindriques s'obtiennent en prenant les coordonnées polaires dans le plan (O, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$). Elles sont particulièrement adaptées pour repérer un point d'un cylindre, d'où leur nom. Les relations entre les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et les coordonnées cartésiennes (x, y, z) sont :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$



c) <u>Coordonnées sphériques</u> :
Considérons un repère orthonormal direct (O, ***i***, ***j***, ***k***) de l'espace. Les coordonnées spéhriques de M s'obtiennent en prenant les coordonnées polaires dans le plan (O, ***OM***, ***k***). Si M appartient à l'axe (O, ***k***), ces coordonnées ne sont pas bien définies. Plus précisément, soit ***u*** le vecteur du plan (O, ***i***, ***j***) contenu dans le plan (O, ***OM***, ***k***), tel que ***OM*** ait une composante positive selon ***u***. On pose φ l'angle entre ***i*** et ***u*** et l'on prend les coordonnées polaires de M dans le plan (O, ***k***, ***u***), ***k*** servant d'origine pour les angles.



Les relations entre les coordonnées cylindriques (r, φ, θ) et les coordonnées cartésiennes (x, y, z) sont :

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

Ces coordonnées sont particulièrement adaptées pour repérer un point d'une sphère. θ s'appelle la colatitude. (Sur Terre, φ est la longitude et $\frac{\pi}{2} - \theta$ la latitude).

2– Produit scalaire

❑ Le produit scalaire est défini comme dans le plan :

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{v} \| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

où cos(***u***, ***v***) désigne le cosinus de l'angle entre ***u*** et ***v***. Mais il n'existe aucun moyen canonique d'orienter un plan dans l'espace, c'est à dire de définir un sens trigonométrique dans ce plan (il faudrait pour cela dire où est le "dessus" et le "dessous" du plan). De sorte que le signe de l'angle restera indéterminé, et que les angles ne seront pas orientés. La relation de Chasles n'est donc pas respectée. Cela ne pose pas de problème spécifique pour le produit scalaire, puisque seul le cosinus de l'angle intervient et que le cosinus est pair. Le signe attribué à la mesure de l'angle n'a donc pas d'importance. Si ***u*** ou ***v*** est nul, l'angle est non défini, mais dans ce cas, <***u***, ***v***> = 0. Comme dans le plan, le produit scalaire est symétrique

❑ Donnons l'expression du produit scalaire de ***u*** et ***v*** dans une base (***i***, ***j***, ***k***) orthonormale. Soit (***I***, ***J***) une base orthonormale du plan contenant ***u*** et ***v***, écrivons que :

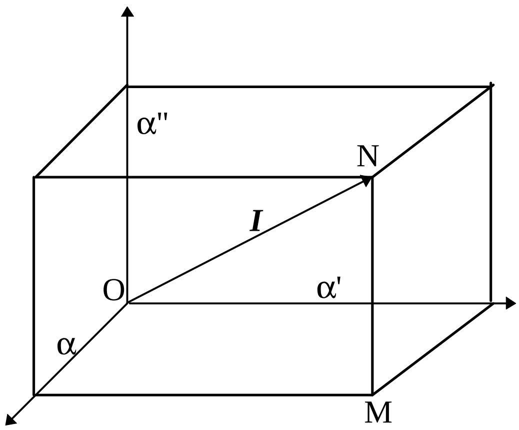
$\boldsymbol{u} = X\boldsymbol{I} + Y\boldsymbol{J}$

$\boldsymbol{v} = X'\boldsymbol{I} + Y'\boldsymbol{J}$

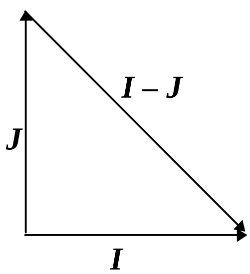
$\boldsymbol{I} = \alpha\boldsymbol{i} + \alpha'\boldsymbol{j} + \alpha''\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{J} = \beta\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \beta''\boldsymbol{k}$

On notera que $\| \boldsymbol{I} \| = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2}$ en appliquant deux fois le théorème de Pythagore :



On a en effet $OM = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2}$ puis $\| \boldsymbol{I} \| = \sqrt{OM^2 + \alpha''^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2}$.
Ainsi, $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$ en supposant ***I*** unitaire. De même, $\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1$ en supposant ***J*** unitaire.
Enfin, en appliquant une dernière fois le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont ***I*** et ***J***, on a :



$\| \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J} \|^2 = \| \boldsymbol{I} \|^2 + \| \boldsymbol{J} \|^2$

soit : $(\alpha - \beta)^2 + (\alpha' - \beta')^2 + (\alpha'' - \beta'')^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha'' + \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2$

ce qui après simplification donne $\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$

www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com

Exprimons maintenant $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$:

$$\boldsymbol{u} = X(\alpha\boldsymbol{i} + \alpha'\boldsymbol{j} + \alpha''\boldsymbol{k}) + Y(\beta\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \beta''\boldsymbol{k})$$
$$\boldsymbol{v} = X'(\alpha\boldsymbol{i} + \alpha'\boldsymbol{j} + \alpha''\boldsymbol{k}) + Y'(\beta\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \beta''\boldsymbol{k})$$
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \text{ avec } x = \alpha X + \beta Y,\ y = \alpha' X + \beta' Y \text{ et } z = \alpha'' X + \beta'' Y$$
$$\boldsymbol{v} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k} \text{ avec } x' = \alpha X' + \beta Y',\ y' = \alpha' X' + \beta' Y' \text{ et } z' = \alpha'' X' + \beta'' Y'$$

On sait déjà que $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = XX' + YY'$ (expression du produit scalaire dans un plan). On vérifie alors que cette quantité est identique à $xx' + yy' + zz'$ en utilisant le fait que $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$, $\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1$ et enfin $\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$.

Ainsi, $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = xx' + yy' + zz'$, permettant de vérifier que le produit est bilinéaire.

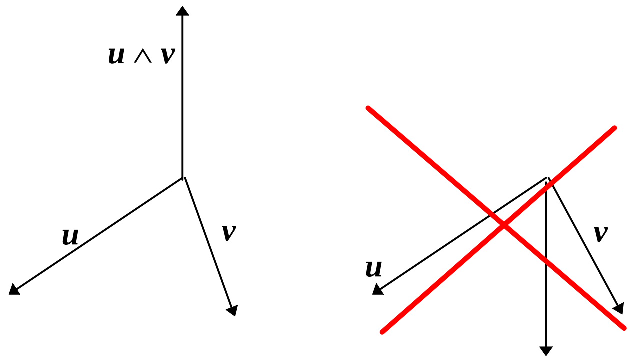
❑ La distance de deux points A et B de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormé, est donnée par $\| \boldsymbol{AB} \| = \sqrt{<\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AB}>}$. On obtient donc :

$$AB = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

3– Produit vectoriel

❑ Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul. Le produit vectoriel de deux vecteurs non colinéaires est défini comme suit :

$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est le vecteur de norme $\| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \| \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, orthogonal au plan $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ et tel que la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$ soit directe :



Comme dit dans le paragraphe précédent, le signe de l'angle $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ dans l'espace est indéterminé. On choisira donc une valeur de l'angle entre 0 et π, de façon que son sinus soit positif.

$\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|$ correspond à celle de $|\text{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|$ dans le plan $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Il en résulte que $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|$ s'interprète comme l'aire du parallélogramme construit selon les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, et que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = 0$.

❑ Reprenons les notations utilisées dans le paragraphe sur le produit scalaire. Si $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ forme une base orthonormale directe, et si $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ forme une base orthonormale du plan contenant $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, on a :

$$\boldsymbol{u} = X\boldsymbol{I} + Y\boldsymbol{J}$$
$$\boldsymbol{v} = X'\boldsymbol{I} + Y'\boldsymbol{J}$$
$$\boldsymbol{I} = \alpha\boldsymbol{i} + \alpha'\boldsymbol{j} + \alpha''\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{J} = \beta\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \beta''\boldsymbol{k}$$
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \text{ avec } x = \alpha X + \beta Y,\ y = \alpha' X + \beta' Y \text{ et } z = \alpha'' X + \beta'' Y$$
$$\boldsymbol{v} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k} \text{ avec } x' = \alpha X' + \beta Y',\ y' = \alpha' X' + \beta' Y' \text{ et } z' = \alpha'' X' + \beta'' Y'$$

Nous allons vérifier que $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ a pour composantes dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ le triplet $\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$. Posons $\boldsymbol{w}$ ce dernier vecteur. Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires, on a par exemple $\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{u}$ pour un certain scalaire λ, de sorte que $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, $z' = \lambda z$. On vérifie facilement que $\boldsymbol{w}$ est nul. Nous supposerons donc maintenant $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ non colinéaires.

- $\boldsymbol{w}$ est bien orthogonal à $\boldsymbol{u}$ et à $\boldsymbol{v}$. En effet :
  $<\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}> = x(yz' - zy') + y(zx' - xz') + z(xy' - yx') = 0$ et de même pour $<\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}>$
- $\| \boldsymbol{w} \| = |XY' - YX'| = \| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \| \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, valeur absolue du déterminant de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ calculé dans la base $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$. En effet :

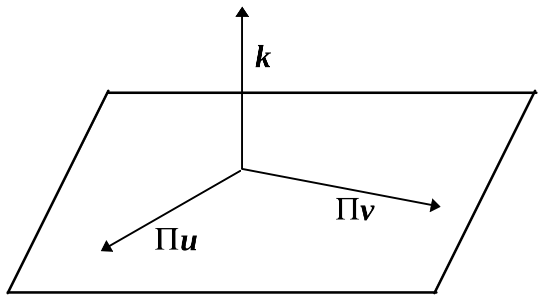
$$\| \boldsymbol{w} \|^2 = (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2$$

et $\quad (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2 = (XY' - YX')^2$

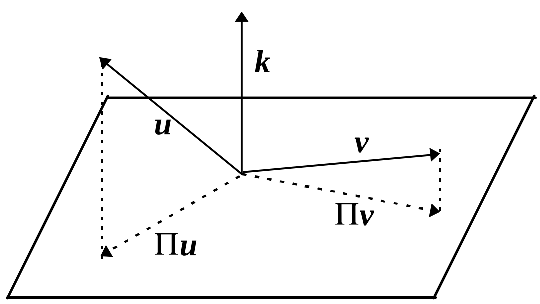
comme pourront le vérifier les courageux en utilisant le fait que $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1$ et que $\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$.

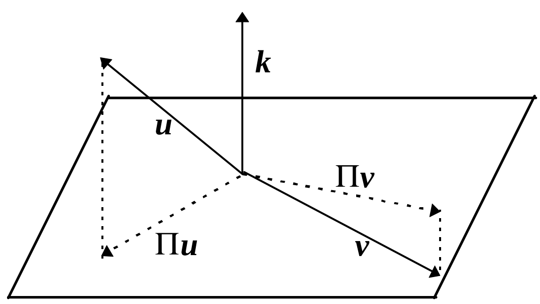
- La base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est directe.

Supposons par exemple $xy' - yx' > 0$ (si cette quantité est négative, échanger les deux vecteurs. Si elle nulle, raisonner de façon analogue selon une autre composante non nulle). Cette quantité n'est autre, dans le plan $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, que le déterminant des vecteurs $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ et $x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j}$, projections de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sur le plan $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Nous noterons ces deux projections $\Pi\boldsymbol{u}$ et $\Pi\boldsymbol{v}$. Le fait que ce déterminant soit supposé positif signifie que, dans le plan orienté par $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, le sinus de l'angle $(\Pi\boldsymbol{u}, \Pi\boldsymbol{v})$ est positif, et donc que l'angle $(\Pi\boldsymbol{u}, \Pi\boldsymbol{v})$ est compris entre 0 et π. $(\Pi\boldsymbol{u}, \Pi\boldsymbol{v})$ forme donc une base directe de ce plan. $(\Pi\boldsymbol{u}, \Pi\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$ forme une base directe de l'espace.



$\boldsymbol{u}$ (respectivement $\boldsymbol{v}$) s'obient à partir de $\Pi\boldsymbol{u}$ (respectivement $\Pi\boldsymbol{v}$) en ajoutant (ou retranchant) une composante selon $\boldsymbol{k}$. Cette opération ne modifie pas le fait que $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$ reste une base directe (bien que non orthonormale).





Le vecteur $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$, orthogonal à $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ et formant avec ces deux vecteurs une base directe, sera disposé de façon à avoir une composante positive selon $\boldsymbol{k}$. C'est donc bien $\boldsymbol{w}$.

Les composantes du produit vectoriel $\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$ s'obtiennent en calculant des déterminants 2×2 à partir des composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, en commençant par les deux composantes du bas $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$, puis en continuant, toujours en descendant, comme si les composantes se refermaient cycliquement : $\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}$ et enfin $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Une étude plus approfondie de l'orientation de l'espace, des bases directes et indirectes..., se trouve dans le chapitre *Déterminants*, qu'on trouvera dans le fichier DETERMIN.PDF.

❑ Les composantes $\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$ permettent de vérifier que l'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est bilinéaire. Concrètement, cela signifie qu'elle se comporte comme un produit (d'où le nom de **produit** vectoriel. Il en est de même du produit scalaire).

EXEMPLE :

$(\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{u}') \wedge (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') = \boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') + 3\boldsymbol{u}' \wedge (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')$ (linéarité par rapport au premier vecteur)

$= \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}' + 3\boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{v} - 3\boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{v}'$ (linéarité par rapport au second vecteur)

❑ Ces composantes permettent de vérifier également que $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u} = -\, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$. On dit que le produit vectoriel est antisymétrique.

En résumé :

PROPRIETES DU PRODUIT VECTORIEL :

i) $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *sont colinéaires*

ii) $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *sont non colinéaires*

iii) Le produit vectoriel est une application bilinéaire antisymétrique

iv) $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ *est orthogonal à* $\boldsymbol{u}$ *et à* $\boldsymbol{v}$*, et si* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *engendre un plan, alors* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$ *est directe.*

v) $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = -<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>\boldsymbol{u} + <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}>\boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}>\boldsymbol{v} - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>\boldsymbol{w}$

(*double produit vectoriel*)

vi) $\|\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}\|^2 + <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2$

Pour le point v), il suffit de choisir une base orthonormée directe, adaptée au problème. On choisit $\boldsymbol{I}$ unitaire tel que :

$\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\| \boldsymbol{I}$

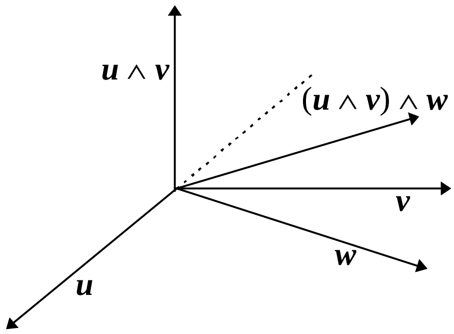
On choisit $\boldsymbol{J}$ tel que :

$\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|(\cos\theta\, \boldsymbol{I} + \sin\theta\, \boldsymbol{J})$

On pose alors $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{J}$. On a alors :

$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \sin\theta\, \boldsymbol{K}$

Pour $\boldsymbol{w}$ quelconque, il suffit alors de faire le calcul en utilisant l'expression des composantes du produit vectoriel. Un dessin, dans le cas particulier où les trois vecteurs sont coplanaires, permet de retrouver rapidement la formule :



Dans la figure précédente, $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w}$ appartient au plan $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, a une composante négative selon $\boldsymbol{u}$ et positive selon $\boldsymbol{v}$. Donc :

$$(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = -\,??\ \boldsymbol{u} + ???\ \boldsymbol{v}$$

?? et ??? sont les produits scalaires des autres vecteurs, à savoir $?? = <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>$ et $??? = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}>$.

En ce qui concerne vi), on notera que $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \| = \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{v} \| \sin(\theta)$ où $\theta = \text{angle}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Or $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{v} \| \cos(\theta)$. D'où le résultat.

4– Division vectorielle

Il s'agit de résoudre l'équation $a \wedge x = b$ dans E, espace de dimension 3. Soit S l'ensemble de solutions.

❑ $a = 0$

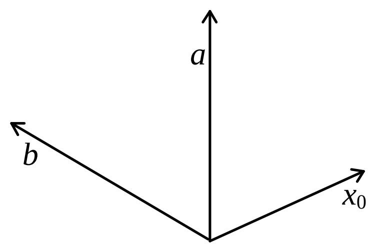
si $b = 0$, alors S = E

si $b \neq 0$, alors S = $\emptyset$.

❑ $a \neq 0$

si $<a, b> \neq 0$ alors S = $\emptyset$.

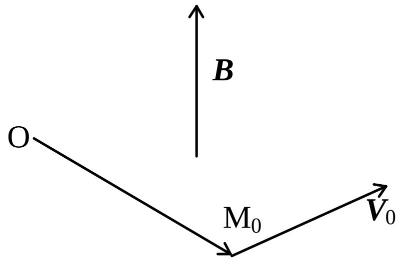
si $<a, b> = 0$, alors x est la somme d'une solution particulière x_0 et de la solution générale de l'équation homogène $a \wedge x = 0$. L'équation homogène admet pour solution λa. On peut prendre pour x_0 le vecteur $\dfrac{1}{\| a \|^2}\, b \wedge a$. En effet, le vecteur $b \wedge a$ est un bon candidat pour pointer dans une direction, qui, multipliée vectoriellement par a, redonne b. Il suffit juste d'ajuster convenablement sa norme de façon que $\| x_0 \| \, \| a \| = \| b \|$ et donc de s'arranger pour que $\| x_0 \| = \dfrac{\| b \|}{\| a \|}$



Ainsi :

$$x = \frac{1}{\| a \|^2}\, b \wedge a + \lambda a$$

EXEMPLE : Considérons une particule M de masse m, possédant une charge électrique q, pénétrant dans un champ magnétique constant et uniforme $\boldsymbol{B}$ avec une vitesse $\boldsymbol{V}_0$ orthogonale à $\boldsymbol{B}$. La particule est repérée par le vecteur $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{r}$. O sera choisi sur un axe perpendiculaire à $\boldsymbol{B}$ et à $\boldsymbol{V}_0$ et passant par M à l'instant initial. Un choix plus précis sera fait plus bas. Pour le moment, O est un point choisi arbitrairement de cet axe.



Il est remarquable que tout autre choix d'une base est parfaitement inutile, la résolution pouvant être menée vectoriellement jusqu'au bout.

La particule est soumise à la force de Lorentz $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B} = m\,\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}$.

i) Cette force est donc orthogonale à $\boldsymbol{B}$ de sorte que $\langle \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{B}\rangle = 0$ et donc que $\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}\rangle$ est constant. Etant nul à l'instant initial, le produit scalaire est identiquement nul et $\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}\rangle = 0 = \langle \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{B}\rangle$. Donc $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{B}\rangle$ est constant, et étant nul à l'instant initial par choix de O, il est identiquement nul. Cela signifie que M reste dans le plan passant par O est orthogonal à $\boldsymbol{B}$. La trajectoire est plane.

ii) La force $\boldsymbol{F}$ est également orthogonale à $\boldsymbol{V}$, de sorte que $\langle \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{V}\rangle = 0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{V}^2$, donc la vitesse scalaire V est constante, égale à V_0.

iii) On peut également écrire que :

$$m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} - q\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} = m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} - q\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{V} - q\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{B})$$

$\Rightarrow \quad m\boldsymbol{V} - q\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}$ vecteur constant au cours du temps $= m\boldsymbol{V}_0 - q\boldsymbol{r}_0 \wedge \boldsymbol{B}$

C'est là que nous affinons notre choix de O, et que nous définissons en particulier la distance r_0 à laquelle il se situe de M_0. En effet, en changeant le choix de O le long de l'axe, on change la valeur de r_0 et donc le vecteur $\boldsymbol{L}$. Nous choisissons O de façon que $\boldsymbol{L}$ soit nul. Il suffit pour cela que :

$$q\boldsymbol{r}_0 \wedge \boldsymbol{B} = m\boldsymbol{V}_0$$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_0 = \dfrac{\boldsymbol{B} \wedge m\boldsymbol{V}_0}{q\mathrm{B}^2}$ obtenu par division vectorielle ; $\boldsymbol{r}_0$ est de module $\dfrac{m\mathrm{V}_0}{q\mathrm{B}} = r_0$

iv) Une fois ce choix fait, l'équation trouvée en iii) devient :

$$m\boldsymbol{V} - q\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$

$\Rightarrow \quad q\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{B} = m\boldsymbol{V}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \dfrac{\boldsymbol{B} \wedge m\boldsymbol{V}}{q\mathrm{B}^2}$ obtenu par la même division vectorielle que précédemment.

$\boldsymbol{r}$ est orthogonale à $\boldsymbol{V}$ de sorte que $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}\rangle = 0 = \langle \boldsymbol{r}, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2$. Donc r est constant, égal à $r_0 = \dfrac{m\mathrm{V}_0}{q\mathrm{B}}$, ce qui signifie que la trajectoire est circulaire, de rayon $\dfrac{m\mathrm{V}_0}{q\mathrm{B}}$, de centre O.

www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com

5– Déterminant ou produit mixte

❑ Soit trois vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$. On appelle déterminant des trois vecteurs ou produit mixte la quantité :

$$\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = <\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>$$

Cette quantité est linéaire par rapport à chacun des vecteurs. On dit qu'elle est trilinéaire. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(\lambda\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= <(\lambda\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}> \\ &= <\lambda\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}> \text{ en utilisant la linéarité du produit vectoriel} \\ &= \lambda<\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}> + <\boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}> \text{ en utilisant la linéarité du produit scalaire} \\ &= \lambda\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \mathrm{Det}(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\end{aligned}$$

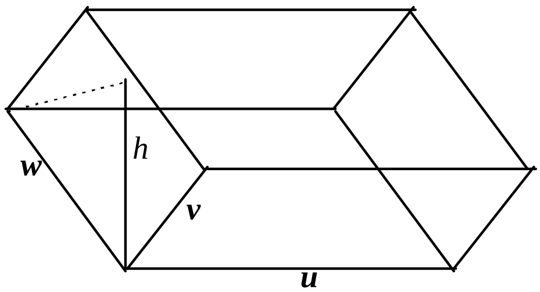
et de même pour les autres vecteurs.

❑ Dans une base orthonormée directe, avec $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{w} = x''\boldsymbol{i} + y''\boldsymbol{j} + z''\boldsymbol{k}$, l'expression du produit scalaire et du produit vectoriel sous forme de leurs composantes donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= (yz' - zy')x'' + (zx' - xz')y'' + (xy' - yx')z'' \\ &= xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - xy''z' - yx'z''\end{aligned}$$

ce qu'on note $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$. Le déterminant s'obtient en sommant le produit de trois diagonales descendantes et en retranchant le produit de trois diagonales montantes. On remarque que, si on permute deux vecteurs, le déterminant change de signe. En dimension 3 comme en dimension 2, le déterminant est antisymétrique ou alterné.

La valeur absolue du produit mixte s'interprète comme le volume du parallélépipède construit sur $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$. En effet, la norme de $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est l'aire du parallélogramme servant de base, et le produit scalaire de ce vecteur par $\boldsymbol{w}$ permet de projeter $\boldsymbol{w}$ sur $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ et d'obtenir la hauteur h du parallèlogramme.



Il en résulte que $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ sont coplanaires si et seulement si le volume de ce parallélogramme est nul, c'est à dire si et seulement si $\mathrm{Det}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$.

6– Droites et plans

<u>a) Plans</u>

Le cas le plus simple est celui d'un plan donné par un point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et un vecteur $\boldsymbol{n}$ normal (i.e. orthogonal) au plan, de composantes (a, b, c). Dans ce cas, un point M de coordonnées (x, y, z) appartient au plan si et seulement si $<\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{n}> = 0$, ce qui donne directement une équation du plan :

$$(x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0$$

ou encore :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } d = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

On remarque que les coefficients (a, b, c) de l'équation sont les composantes du vecteur normal $\boldsymbol{n}$. La constante d est ajustée de façon à ce que A vérifie l'équation.

On se donne maintenant trois points non alignés, ou de manière équivalente un point A et deux vecteurs $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ non colinéaires. Alors :

$$M \in (P) \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \exists\, \beta, \boldsymbol{AM} = \alpha\boldsymbol{U} + \beta\boldsymbol{V}.$$

En utilisant des coordonnées, on obtient une représentation paramétrique du plan sous la forme d'un système de trois équations aux deux inconnues α et β. Cette représentation est cependant peu pratique, car pour savoir si un point appartient à (P), on est contraint de résoudre un système. On peut donc résoudre le système une fois pour toute dans le cas général. En éliminant α et β, on obtient une condition sur x, y et z, coordonnées de M pour qu'il y ait une solution. Cette condition est une équation du plan.

EXEMPLE : On se donne A(1, 1, 1), B(2, 3, 4) et C(2, 0, 1). Nous prendrons $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AB}$ de composantes (1, 2, 3) et $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{AC} = (1, -1, 0)$. M($x$,$y$,$z$) appartient au plan si et seulement si :

$$\exists\, \alpha, \exists\, \beta \begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 1 + 2\alpha - \beta \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha, \exists\, \beta \begin{cases} \alpha = \dfrac{z-1}{3} \\ \beta = x - \dfrac{z}{3} - \dfrac{2}{3} \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y - z - 1 = 0$$

Une façon plus rapide de trouver l'équation du plan consiste également à poser :

$$\det(\boldsymbol{AM},\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = 0$$

puisque cette condition signifie que ($\boldsymbol{AM}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$) sont coplanaires, et donc que M appartient au plan affine passant par A de direction le plan vectoriel engendré par $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$.

EXEMPLE : $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z-1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(y-1) - 3(z-1) + 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 1 = 0$

Quant au plan vectoriel direction du plan affine (i.e. le plan vectoriel constitué des vecteurs joignant deux points quelconque du plan affine (P)), son équation est obtenue en supprimant les termes constants : $x + y - z = 0$.

En effet, si $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan affine (P), alors tout vecteur du plan vectoriel direction peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{MN}$ avec M et N points de (P). Il suffit d'écrire l'équation de (P) pour ces deux points, puis de retrancher membre à membre pour voir que $\boldsymbol{MN}$ vérifie la même relation sans terme constant :

$$\begin{cases} ax_M + by_M + cz_M + d = 0 \\ ax_N + by_N + cz_N + d = 0 \end{cases} \Rightarrow a(x_N - x_M) + b(y_N - y_M) + c(z_N - z_M) = 0$$

Une troisième méthode consiste à déterminer un vecteur normal à (P). Il suffit pour cela de calculer $\boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{V}$, ce qui donne : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On retrouve donc l'équation $x + y - z = 0$ pour le plan vectoriel. Pour avoir l'équation du plan affine, il suffit alors d'ajuster la constante pour que A vérifie l'équation du plan affine, soit $x + y - z = 1$.

b) Droites

❑ Il existe essentiellement deux méthodes algébriques pour caractériser une droite, le système de deux équations cartésiennes et la représentation paramétrique. On se donne un repère (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) (en général orthonormal direct). La droite (D) peut être donnée par deux points A et B, ou un point A et un vecteur directeur $\boldsymbol{u}$. Si la droite est donnée par deux points A et B, un vecteur directeur est $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$.

La représentation paramétrique de (D) est, comme dans le plan :

$$\mathrm{M} \in (\mathrm{D}) \Leftrightarrow \exists\, \lambda,\ \boldsymbol{AM} = \lambda \boldsymbol{u} \text{ ce qu'on note aussi } \mathrm{M} = \mathrm{A} + \lambda \boldsymbol{u}$$

On obtient alors directement :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \\ z = z_A + \lambda c \end{cases}$$

où a, b et c sont les composantes de $\boldsymbol{u}$, x, y et z les coordonnées de M et x_A, y_A et z_A les coordonnées de A.

L'élimination de λ conduit à un système de deux équations, correspond à deux plans s'intersectant selon la droite (D).

EXEMPLE :

Soit A de coordonnées (1, 1, –1) et $\boldsymbol{u}$ le vecteur de composantes (1, 2, –3). Une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\boldsymbol{u}$ est :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$$

L'élimination de λ conduit à (par exemple) :

$$\begin{cases} \lambda = x - 1 \\ y = 1 + 2(x - 1) \\ z = -1 - 3(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 1 \\ 2x - y - 1 = 0 \\ 3x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Un point M de coordonnées (x, y, z) appartient à (D) si et seulement si il existe λ tel que le système précédent soit vérifié. Puisque la première équation $\lambda = x - 1$ se borne à donner la valeur de λ qu'il convient de prendre, M appartient à (D) si et seulement si $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 3x + z - 2 = 0 \end{cases}$. Les deux équations sont deux équations de deux plans affines d'intersection (D).

On notera que, si deux points B et C de coordonnées respectives (x_B, y_B, z_B) et (x_C, y_C, z_C) vérifient ces deux équations, alors le vecteur $\boldsymbol{BC}$ a pour composantes $x = x_C - x_B$, $y = y_C - y_B$ et $z = z_C - z_B$. Or :

$$\begin{cases} 2x_B - y_B - 1 = 0 \\ 3x_B + z_B - 2 = 0 \\ 2x_C - y_C - 1 = 0 \\ 3x_C + z_C - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x_C - x_B) - (y_B - y_C) = 0 \\ 3(x_B - x_C) + (z_B - z_C) = 0 \end{cases}$$

en retranchant membre à membre les équations

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, les équations vérifiées par les vecteurs de la droite vectorielle direction de la droite affine (D) s'obtiennent à partir des équations de (D) en supprimant les constantes.

On peut tester son résultat final de la façon suivante. D'abord, A appartient aux deux plans puisque (1, 1, –1) vérifie les deux équations $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 3x + z - 2 = 0 \end{cases}$. Ensuite $\boldsymbol{u}$ est bien vecteur directeur de l'intersection de ces deux plans puisque (1, 2, –3) vérifie le système $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$.

Inversement, si on se donne une droite par un système de deux équations $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$, ces deux équations ne doivent pas être celles de deux plans parallèles. Les équations sans constante ne doivent donc pas représenter la même direction vectorielle. Pour cela, il faut et il suffit que ces deux équations $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$ ne soient pas proportionnelles. Il est par ailleurs extrêmement rapide de trouver un vecteur directeur de la droite. Il suffit de prendre :

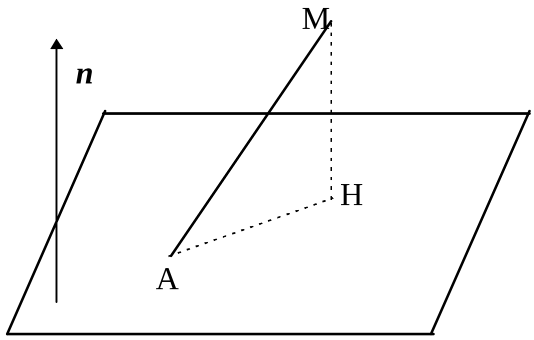
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

En effet, le vecteur de composantes (a, b, c) est orthogonal au premier plan, et le vecteur de composantes (a', b', c') est orthogonal au deuxième. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs, étant orthogonal à chacun d'eux, appartient à chacun des deux plans vectoriels. Il appartient donc à la droite vectorielle direction de la droite affine cherchée.

<u>c) Distance d'un point à un plan</u> :

Soit (P) un plan contenant A et de vecteur orthogonal $\boldsymbol{n}$. (P) a donc pour équation $<\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{n}> = 0$.

Soit H le projeté d'un point M quelconque sur P. On a $<\boldsymbol{AH}, \boldsymbol{n}> = 0$ et $\boldsymbol{HM} = \lambda\boldsymbol{n}$. Cela suffit à définir H de manière unique.



On en déduit que $<\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{n}> = <\boldsymbol{AH} + \boldsymbol{HM}, \boldsymbol{n}> = \lambda \parallel \boldsymbol{n} \parallel^2$ et donc :

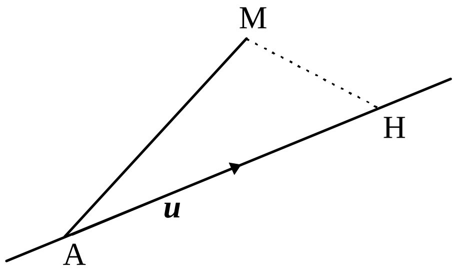
i) $\boldsymbol{HM} = \dfrac{<\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{n}>}{\parallel \boldsymbol{n} \parallel^2}\, \boldsymbol{n}$

ii) $d = \text{HM} = \dfrac{|<\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{n}>|}{\parallel \boldsymbol{n} \parallel}$

où d désigne la distance de M à (P). On retrouve une expression analogue à celle vue en dimension 2. Si $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation de (P), alors HM $= \dfrac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ puisque $ax + by + cz + d = 0$ n'est autre que l'expression de $<\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{n}>$ avec $\boldsymbol{n}$ de composantes (a, b, c).

<u>d) Distance d'un point à une droite</u> :

Soit (D) une droite passant par A de vecteur directeur $\boldsymbol{u}$. Soit H le projeté sur (D) d'un point quelconque M. On a alors $\boldsymbol{AH} = \lambda\boldsymbol{u}$ et $<\boldsymbol{HM}, \boldsymbol{u}> = 0$, ce qui détermine H.



On en déduit que $\boldsymbol{AM} \wedge \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{AH} + \boldsymbol{HM}) \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{HM} \wedge \boldsymbol{u}$

$\Rightarrow \quad \| \boldsymbol{AM} \wedge \boldsymbol{u} \| = \| \boldsymbol{HM} \wedge \boldsymbol{u} \| = \| \boldsymbol{HM} \| \, \| \boldsymbol{u} \|$

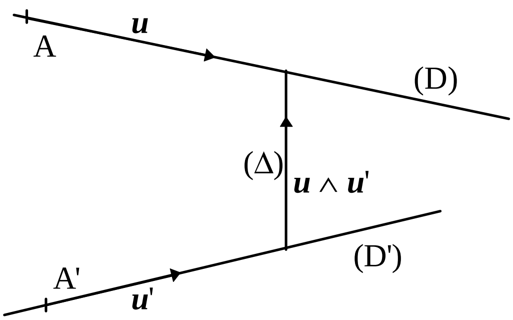
donc

$$d = \text{MH} = \frac{\| \boldsymbol{AM} \wedge \boldsymbol{n} \|}{\| \boldsymbol{n} \|}$$

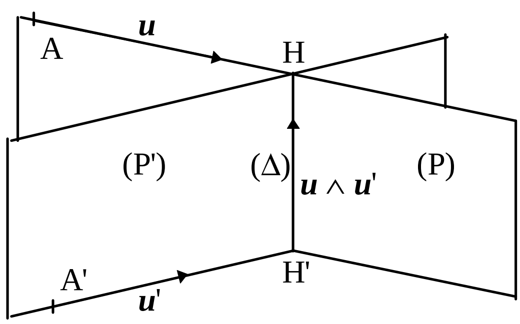
où d est la distance de M à la droite (D)

<u>e) perpendiculaire commune</u> :

Soit (D) et (D') deux droites non parallèles, de vecteurs directeurs respectifs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}'$, passant par les point respectifs A et A'. On cherche une perpendiculaire commune (Δ) à (D) et (D'). Cette droite a nécessairement pour vecteur directeur $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}'$ qui est orthogonal aux deux droites.



(Δ) est l'intersection du plan (P) passant par A et contenant $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}'$, et du plan (P') passant par A' et contenant $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}'$.



Soit H et H' les intersections respectives de (Δ) avec (D) et (D'). On vérifiera, en décomposant $\boldsymbol{AA}' = \boldsymbol{AH} + \boldsymbol{HH}' + \boldsymbol{H'A}'$ que :

www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com

$$d = \mathrm{HH'} = \frac{|<\boldsymbol{AA'}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u'}>|}{\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u'} \|}$$

où d est la distance entre les deux droites.

EXEMPLE : A (1, 3, –2) $\quad \boldsymbol{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ A' (3, 1, 1) $\quad \boldsymbol{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a :

$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u'}$ de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (P) contient les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et admet donc pour vecteur normal leur produit vectoriel $-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une équation de (P) est $2x + y + z = 3$. En procédant de même pour (P'), on trouve $x + 2y - z = 4$. Les équations de (Δ) sont donc :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

On vérifiera également que la distance entre les deux droites est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7– Sphères

Dans un repère orthonormé, l'équation de la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 + dx + ey + fz + g = 0$$

Pour retrouver le centre et le rayon, on procède comme pour une équation de cercle dans le plan.

L'intersection d'une sphère est d'une droite donne deux points distincts, ou un point double (cas de la droite tangente à la sphère) ou l'ensemble vide, correspondant aux différents cas de l'équation du second degré. En effet, si la droite est mise sous forme paramétrique de paramètre λ, l'intersection de la sphère et de la droite conduit à une équation du second degré en λ.

L'intersection d'une sphère et d'un plan donne un cercle, ou un point ou l'ensemble vide. Considérer par exemple un repère pour lequel l'équation du plan est $z = 0$.

Comme le cas de deux cercles dans le plan, celui de l'intersection de deux sphères se ramène au cas précédent : la différence des équations de deux sphères donnent l'équation d'un plan (ou une constante). Les deux sphères peuvent donc avoir une intersection vide, ou bien être confondus (cas où la constante est nulle), ou bien se couper en un cercle, ou bien être tangents en un même point.

III : Arcs paramétrés

1– Généralités

Un arc paramétré est défini par une fonction $\boldsymbol{F}$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace affine de dimension 2 ou 3. En général, la fonction considérée est de classe C^k avec $k \geq 2$ (fonction k fois continûment dérivable). L'interprétation physique est la suivante : t élément de I désigne le temps. $\boldsymbol{F}(t)$ représente la position d'un point mobile M(t). Une origine O étant choisie, $\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{OM}(t)$. La vitesse vectorielle $\boldsymbol{V}$ du point mobile est donnée par $\boldsymbol{F}\,'(t)$ et son accélération vectorielle $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{F}\,''(t)$. (Les dérivées peuvent se calculer composante par composante). En coordonnées cartésiennes, si $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, alors :

$$\boldsymbol{V} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{a} = x''\boldsymbol{i} + y''\boldsymbol{j}$$

EXEMPLE :
La cycloïde (cf Annexe) est parametrée par :

$$\begin{cases} x = \mathrm{R}(t - \sin t) \\ y = \mathrm{R}(1 - \cos t) \end{cases}$$

Soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions à valeurs vectorielles dérivables. On pourra vérifier (par exemple en raisonnant sur l'expression du produit scalaire ou du déterminant en fonction des composantes des vecteurs) que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} <\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}> = <\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{g}> + <\boldsymbol{f}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}}{\mathrm{d}t}>$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Det}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \mathrm{Det}(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{g}) + \mathrm{Det}(\boldsymbol{f}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}}{\mathrm{d}t})$$

Autrement dit, produit scalaire et déterminant se dérivent comme des produits (ce qui est normal puisque leur expression fait intervenir des sommes de produits de composantes de $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$). Enfin, en un point où $\boldsymbol{f}$ ne s'annule pas :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \boldsymbol{f} \| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sqrt{<\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}>} = \frac{1}{2\| \boldsymbol{f} \|} \left(<\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{f}> + <\boldsymbol{f}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t}>\right) = \frac{<\boldsymbol{f}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t}>}{\| \boldsymbol{f} \|}$$

2– Etude locale

la configuration de l'arc au voisinage de $\mathrm{M}(t_0)$ dépend des dérivées successives de $\boldsymbol{F}$, et des relations de liaisons entre ces dérivées. Nous supposons $\boldsymbol{F}$ au moins C^1. Considérons la droite $(\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t))$. Si cette droite admet une position limite lorsque t tend vers t_0, alors cette position limite sera par définition la tangente à l'arc en $\mathrm{M}(t_0)$. Deux cas sont possibles :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(t_0) = \boldsymbol{F}\,'(t_0) \text{ existe et est non nulle.}$$

Le point $\mathrm{M}(t_0)$ est dit régulier. Alors la tangente est la droite passant par $\mathrm{M}(t_0)$ et de vecteur directeur $\boldsymbol{F}'(t_0)$. Cette situation est la plus générale. Elle correspond d'ailleurs au cas usuel des représentations graphiques des fonctions réelles. Soit g une telle fonction, dérivable. Son graphe est représenté par l'ensemble des points $\mathrm{M}(x)$ de coordonnées $(x, \mathrm{g}(x))$. La tangente au graphe en $\mathrm{M}(x_0)$ est la droite de vecteur directeur $(1, \mathrm{g}'(x_0))$. Ce vecteur n'est jamais nul.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(t_0) = \boldsymbol{F}\,'(t_0) \text{ existe et est nulle.}$$

Le point $\mathrm{M}(t_0)$ est dit stationnaire. On verra comment traiter ce cas dans le chapitre *Développements limités* du fichier DLTAYLOR.PDF.

3– Asymptotes

Il y a branche infinie lorsque t tend vers t_0 si $\lim_{t \to t_0} \| \boldsymbol{OM}(t) \| = +\infty$. Deux cas sont faciles à déterminer :

- ❑ Si $x(t) \to a$, et $y(t) \to \infty$ alors la droite $x = a$ est asymptote.
- ❑ Si $x(t) \to \infty$, et $y(t) \to b$ alors la droite $y = b$ est asymptote.

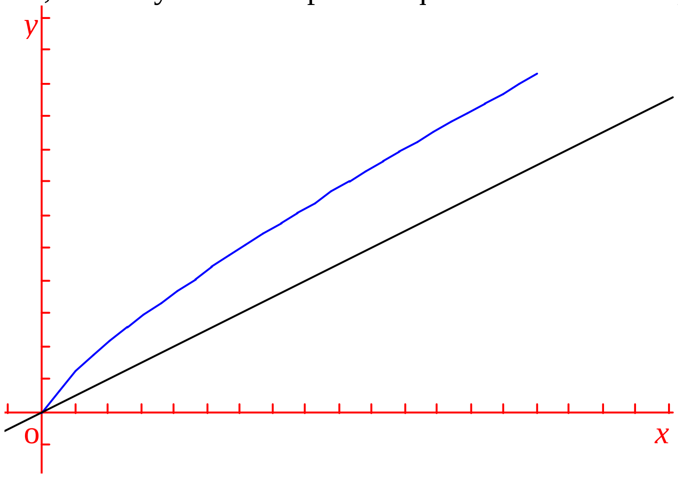
Seul le cas où x et y tendent simultanément vers l'infini pose problème. (D'autre cas pathologiques éventuels, tels que limite infinie pour x et pas de limite pour y, ne sont pas considérés).

❑ Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to 0$, alors il y a branche parabolique dans la direction Ox. (Il ne peut y avoir asymptote car $y \to \infty$).

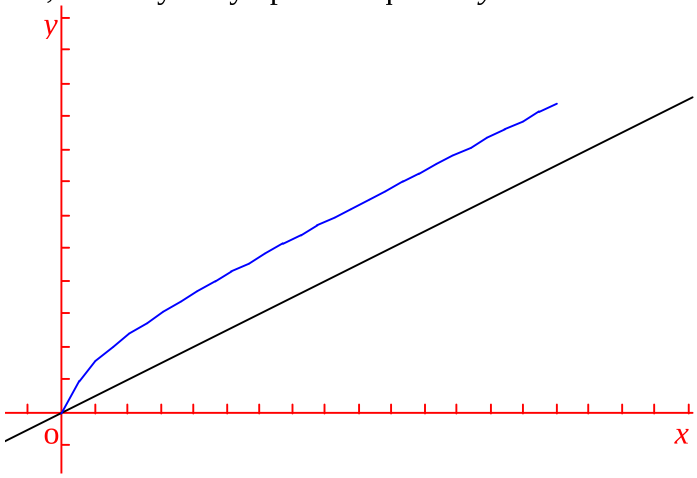
❑ Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to \infty$, alors il y a branche parabolique dans la direction Oy. (Il ne peut y avoir asymptote car $x \to \infty$).

❑ Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to a$, alors il y a direction asymptotique dans la direction $y = ax$. On ne peut encore savoir s'il y a asymptote. On distingue deux sous–cas :

Si $y(t) - ax(t) \to \infty$, alors il y a branche parabolique dans la direction $y = ax$.



Si $y(t) - ax(t) \to b$, alors il y a asymptote d'équation $y = ax + b$. Ci dessous, $b = 2$.



La différence entre les deux figures, c'est que, dans la première (branche parabolique), la courbe bleue s'éloigne indéfiniment mais de plus en plus lentement de la droite noire correspondant à la direction asymptotique, alors que dans la seconde (asymptote), la courbe bleue s'éloigne à distance finie de la droite noire.

4– Plan d'étude d'un arc paramétré

❑ Déterminer l'ensemble de définition de M(t).

❑ Réduire l'étude à un ensemble plus petit en tenant compte des périodicités, symétries ... Les propriétés les plus courantes sont :

i) Il existe T tel que $x(t+\mathrm{T}) = x(t)$ et $y(t+\mathrm{T}) = y(t)$. Il suffit de faire l'étude sur un intervalle de longueur T.

ii) Si, pour tout t, $x(t) = x(-t)$ et $y(t) = y(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul.

iii) Si pour tout t, $x(t) = x(-t)$ et $y(t) = -y(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des x.

iv) Si pour tout t, $x(t) = -x(-t)$ et $y(t) = y(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des y.

v) Si pour tout t, $x(t) = -x(-t)$ et $y(t) = -y(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'origine.

vi) Si pour tout t, $x(t) = y(-t)$ et $y(t) = x(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à la première bissectrice.
etc ...

❑ Etudier simultanément les variations de x et y, leurs limites. Tracer un tableau de variation.

❑ Etudier les branches infinies, les points stationnaires. Déterminer d'éventuels points multiples (points pour lesquels il existe t et t' tels que $\mathrm{M}(t) = \mathrm{M}(t')$).

5– Courbes en polaire

On a $\boldsymbol{OM} = r\boldsymbol{e}_r$, où $r = r(\theta)$, ou bien $r = r(t)$ et $\theta = \theta(t)$. On note $\boldsymbol{e}_\theta$ le vecteur normé directement orthogonal à $\boldsymbol{e}_r$. $\boldsymbol{e}_\theta$ est la dérivée de $\boldsymbol{e}_r$ par rapport à l'angle polaire θ. La dérivée de $\boldsymbol{OM}$ par rapport au paramètre θ est :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}\theta} = r'\boldsymbol{e}_r + r\boldsymbol{e}_\theta$$

En effet, on a $\boldsymbol{e}_r = \cos(\theta)\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\boldsymbol{j}$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = -\sin(\theta)\boldsymbol{i} + \cos(\theta)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_\theta$ où $\boldsymbol{e}_\theta$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à $\boldsymbol{e}_r$. De même, $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\boldsymbol{e}_r$.

En général, on connait r et θ en fonction du temps t, ainsi que leur dérivée. D'où :

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = \left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\boldsymbol{e}_r + \left[2\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right]\boldsymbol{e}_\theta$$

Il ne peut y avoir de point stationnaire qu'en O, si r' s'annule. Si la courbe passe par l'origine, le vecteur directeur de la tangente est donné par $\boldsymbol{e}_r$. En effet, cela résulte directement de la relation $\boldsymbol{OM} = r\boldsymbol{e}_r$ qui implique que $\boldsymbol{e}_r$ est un vecteur directeur de la corde joignant O à M, et donc à la limite, est un vecteur directeur de la tangente.

Le plan d'étude d'une courbe polaire ($r = r(\theta)$ pour faire simple) comporte les éléments suivants :
❑ Déterminer l'ensemble de définition de $r(\theta)$.

❑ Réduire l'étude à un ensemble plus petit en tenant compte des périodicités, symétries ... Les propriétés les plus courantes sont :

i) Il existe T tel que $r(\theta+T) = r(\theta)$. Il suffit de faire l'étude sur un intervalle de longueur T, puis une rotation d'angle kT, $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Si, pour tout θ, $r(\theta) = r(-\theta)$, alors il suffit de faire l'étude pour θ positif ou nul, puis une symétrie par rapport à Ox.

iii) Si pour tout θ, $r(\theta) = -r(-\theta)$, alors il suffit de faire l'étude pour θ positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des y.

iv) Si pour tout θ, $r(\theta) = r(\pi-\theta)$, alors il suffit de faire l'étude pour θ positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des y.

etc ...

❑ Etudier les variations de r en fonction de θ, ses limites. Tracer un tableau de variation.

L'étude des branches infinies n'est pas au programme à ce niveau. Pour tracer les tangentes aux points remarquables, on notera que l'égalité $\dfrac{d\boldsymbol{OM}}{d\theta} = r'\boldsymbol{e}_r + r\boldsymbol{e}_\theta$ permet de trouver l'angle φ entre $\boldsymbol{e}_r$ et la tangente. On a en effet :

$$\tan\varphi = \frac{r}{r'}$$

et si $r' = 0$, alors l'angle vaut $\dfrac{\pi}{2}$ mod π (i.e. $\dfrac{\pi}{2}$ à un multiple entier de π près).

IV : Coniques

1– Foyer, directrice, excentricité

Soit F un point du plan, (D) une droite ne contenant pas F et e un réel strictement positif. On s'intéresse à $\{M \mid e \times d(M,(D)) = MF\}$, où d(M,(D)) est la distance de M à (D), autrement dit MH si H est le projeté orthogonal de M sur (D). F s'appelle le foyer, D la directrice et e l'excentricité. Il s'agit donc de déterminer les lignes de niveaux de la fonction $M \to \dfrac{MF}{MH}$. Il s'agit de coniques.

On choisit F comme origine du repère, de façon que D ait pour équation $x = -h$ ($h > 0$). Alors :

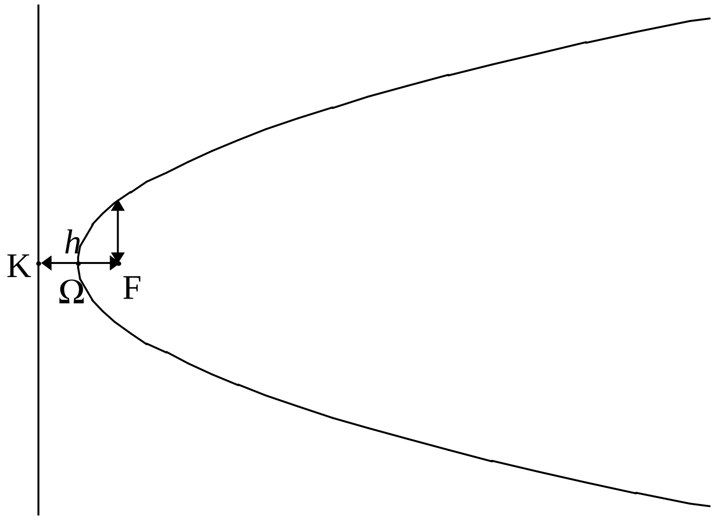
$$e \times d(M,(D)) = MF \Leftrightarrow e\,|x+h| = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow e^2(x+h)^2 = x^2 + y^2$$
$$\Leftrightarrow (1-e^2)x^2 + y^2 - 2e^2hx - e^2h^2 = 0$$

<u>a) cas $e = 1$</u> :
L'équation se limite à :

$$y^2 - h^2 = 2hx$$
$$\Leftrightarrow \quad y^2 = 2hx + h^2 = 2h(x + \frac{h}{2})$$

www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com

Le point Ω de coordonnées $(-\frac{h}{2}, 0)$ est le milieu de [FK], où K est le projeté de F sur D. Si on choisit Ω comme nouvelle origine du repère, on a $X = x + \frac{h}{2}$ et $Y = y$. l'équation se réduit à $Y^2 = 2hX$. Il s'agit d'une parabole d'axe orthogonal à D, dont le sommet Ω. h s'appelle paramètre de la parabole.



<u>b) cas $e < 1$</u> :
Ecrivons l'équation sous la forme

$$(1-e^2)[x - \frac{e^2h}{1-e^2}]^2 + y^2 - \frac{e^2h^2}{1-e^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{[x - \frac{e^2h}{1-e^2}]^2}{\frac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{e^2h^2}{1-e^2}} = 1$$

Soit Ω le point de coordonnées $(\frac{e^2h}{1-e^2}, 0)$. Posons :

$$a = \frac{eh}{1-e^2} = \frac{p}{1-e^2} \text{ avec } p = eh$$

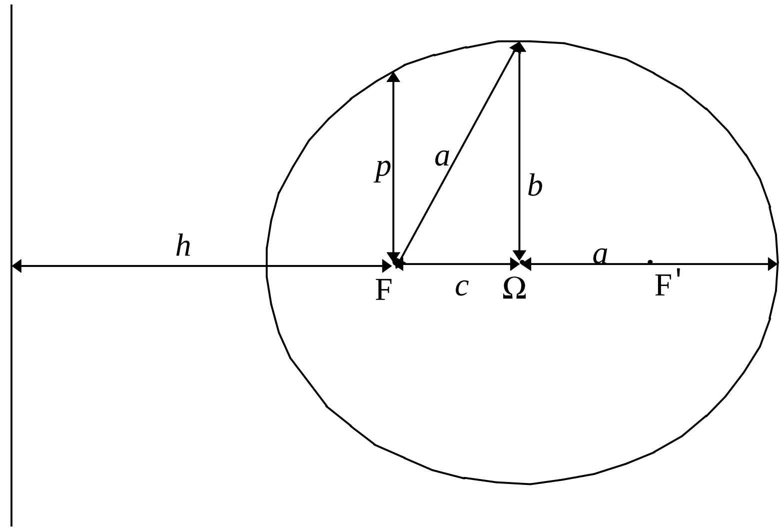
$$b = \frac{eh}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\text{distance F}\Omega = \ c = \frac{e^2h}{1-e^2} = \sqrt{a^2-b^2}$$

En choisissant Ω comme nouvelle origine du repère, donnant $X = x - \frac{e^2h}{1-e^2}$ et $Y = y$, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Il s'agit d'une ellipse. a est le demi-grand axe, b le demi-petit axe, Ω le centre, p le paramètre, $e = \frac{c}{a}$ l'excentricité.



La figure étant symétrique par rapport à Ω, on définit un deuxième sommet F', symétrique de F. L'ellipse s'obtient à partir d'un cercle par une affinité : il s'agit d'une application affectuant une variation d'échelle sur une seule coordonnées. Considérons le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ et considérons l'affinité $(x, y) \to (X, Y) = (x, \frac{by}{a})$. L'image vérifie l'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$. C'est une ellipse.

Une autre façon d'obtenir une ellipse est de projeter orthogonalement un cercle sur un plan. Considérons dans l'espace muni du repère orthonormé $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ le cercle $x^2 + y^2 = R^2$ contenu dans le plan $z = 0$ et projetons-le orthogonalement sur le plan $z = \tan(\theta)x$. Cherchons d'abord l'image d'un point M de coordonnées (x, y, z) de l'espace par cette projection. le vecteur $\boldsymbol{n}$ de composantes $(\sin(\theta), 0, -\cos(\theta))$ est normal au plan de projection. Le point H projeté de M est tel que $\boldsymbol{HM} = \langle \boldsymbol{OM}, \boldsymbol{n} \rangle\, \boldsymbol{n}$. Si (x', y', z') sont les coordonnées de H, on a donc :

$$\begin{cases} x - x' = (x\sin(\theta) - z\cos(\theta))\sin(\theta) \\ y - y' = 0 \\ z - z' = -(x\sin(\theta) - z\cos(\theta))\cos(\theta) \end{cases}$$

soit : $$\begin{cases} x' = x - (x\sin(\theta) - z\cos(\theta))\sin(\theta) \\ y' = y \\ z' = z + (x\sin(\theta) - z\cos(\theta))\cos(\theta) \end{cases}$$

Pour M élément du cercle, on a $z = 0$, donc son image H vérifie $\begin{cases} x' = x - x\sin^2(\theta) = x\cos^2(\theta) \\ y' = y \\ z' = x\sin(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$.

Considérons le repère $(O, \cos(\theta)\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}) = (O, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ base orthonormée du plan de projection. On a :

$$\boldsymbol{OH} = x\cos^2(\theta)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + x\sin(\theta)\cos(\theta)\boldsymbol{k} = x\cos(\theta)\boldsymbol{I} + y\boldsymbol{J} = X\boldsymbol{I} + Y\boldsymbol{J} \text{ avec } \frac{X^2}{\cos^2(\theta)} + Y^2 = R^2.$$

Il s'agit d'une ellipse de demi-axes $R\cos(\theta)$ et R.

<u>c) cas $e > 1$</u> :

Par le même calcul que précédemment :

$$(1-e^2)[x - \frac{e^2h}{1-e^2}]^2 + y^2 - \frac{e^2h^2}{1-e^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{[x - \frac{e^2h}{1-e^2}]^2}{\frac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{e^2h^2}{e^2-1}} = 1$$

Soit Ω le point de coordonnées ($\frac{e^2h}{1-e^2}$, 0). Posons :

$$a = \frac{eh}{e^2-1} = \frac{p}{e^2-1} \text{ avec } p = eh$$

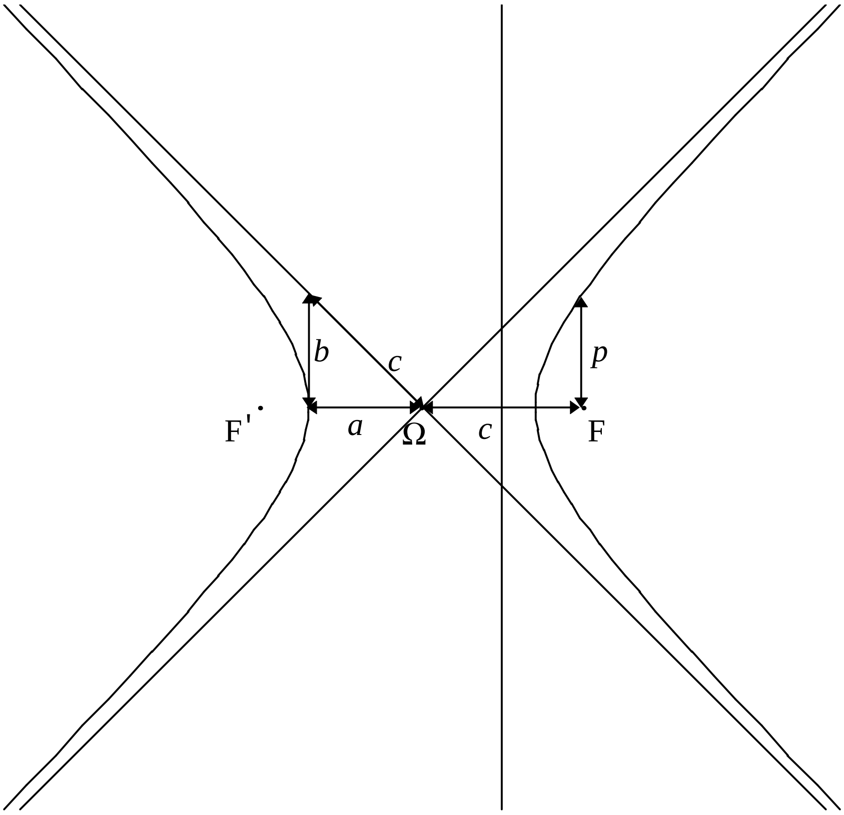
$$b = \frac{eh}{\sqrt{e^2-1}}$$

$$\text{distance F}\Omega = \ c = \frac{e^2h}{e^2-1} = \sqrt{a^2+b^2}$$

En choisissant Ω comme nouvelle origine du repère, donnant $X = x - \frac{e^2h}{1-e^2}$ et $Y = y$, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Il s'agit d'une hyperbole. a est le demi axe, Ω le centre, p le paramètre, $e = \frac{c}{a}$ l'excentricité.



La figure étant symétrique par rapport à Ω, on définit un deuxième sommet F', symétrique de F. Les droites $Y = \pm \frac{b}{a} X$ (autrement dit $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$) sont asymptotes à la courbe. Pour un point (X, Y) de l'hyperbole avec X > a et Y > 0, par exemple, écrivons que :

$$Y = b\sqrt{\frac{X^2}{a^2} - 1}$$

$\Rightarrow \qquad Y - \dfrac{b}{a}X = b\left(\sqrt{\dfrac{X^2}{a^2} - 1} - \dfrac{X}{a}\right) = -\dfrac{b}{\sqrt{\dfrac{X^2}{a^2} - 1} + \dfrac{X}{a}}$ qui tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$.

2– Equation polaire

La définition par foyer et directrice permet de déterminer l'équation polaire de la conique, le pôle étant le foyer F, l'axe étant cette fois orienté de F vers D.

$$e \times d(M,D) = MF \Leftrightarrow e\,|r\cos\theta - h| = r$$

$$\Leftrightarrow r = e(r\cos\theta - h) \quad \text{ou} \quad r = -e(r\cos\theta - h)$$

$$\Leftrightarrow r_1 = -\frac{eh}{1 - e\cos\theta} \quad \text{ou} \quad r_2 = \frac{eh}{1 + e\cos\theta}$$

On obtient deux équations différentes, mais il s'agit en fait de la même courbe. On remarquera en effet que :

$$r_1(\theta+\pi) = -r_2(\theta)$$

de sorte que le point $(r_1, \theta+\pi)$ et (r_2,θ) coïncident.

$p = eh$ est le paramètre de la conique. L'équation usuelle est :

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

Dans le cas général, D fait un angle quelconque avec l'axe des angles polaires, et l'équation générale est :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

EXERCICE : tracer les coniques d'équation polaire

$$r = \frac{2}{2 + \cos(\theta + 2\pi/3)}$$

$$r = \frac{3}{1 - \cos\theta}$$

$$r = \frac{4}{1 + 2\sin(\theta - \pi/3)}$$

3– Propriété des coniques bifocales

Soient F et F' deux points distincts, et a un réel positif. Soit (E) l'ellipse de foyers F et F' et de demi–axe focal a (si $2a > FF'$) et (H) l'hyperbole de foyers F et F' et de demi–axe focal a (si $2a < FF'$). Alors :

a) $\boxed{M \in (E) \Leftrightarrow MF + MF' = 2a}$

En effet, soit M tel que $MF + MF' = 2a$. Prenons comme repère le repère naturel à l'ellipse de façon que l'on ait :

$F(c, 0) \qquad F'(-c, 0) \qquad M(x, y)$

On a alors :

$$MF^2 = (x-c)^2 + y^2$$

$$MF'^2 = (x+c)^2 + y^2$$

$\Rightarrow \qquad MF^2 - MF'^2 = -4cx = (MF + MF')(MF - MF')$

or $MF + MF' = 2a$

$\Rightarrow \quad MF - MF' = -\dfrac{2cx}{a}$

D'où :

$$\begin{cases} MF = a - \dfrac{cx}{a} \\ MF' = a + \dfrac{cx}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MF^2 = (a - \dfrac{cx}{a})^2 = (x-c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (a + \dfrac{cx}{a})^2 = (x+c)^2 + y^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x^2(1 - \dfrac{c^2}{a^2}) + y^2 = a^2 - c^2$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad$ avec $b^2 = a^2 - c^2$

$\Leftrightarrow \quad M \in (E)$

Réciproquement, si M appartient à (E), on peut remonter la démonstration jusqu'à :

$$\begin{cases} MF^2 = (a - \dfrac{cx}{a})^2 = (x-c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (a + \dfrac{cx}{a})^2 = (x+c)^2 + y^2 \end{cases}$$

Il suffit alors d'observer que :

$M \in (E) \Rightarrow \left|\dfrac{cx}{a}\right| = |ex| < |x| \le |a|$ pour conclure que :

$$\begin{cases} MF = a - \dfrac{cx}{a} \\ MF' = a + \dfrac{cx}{a} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad MF + MF' = 2a$

b) $\boxed{M \in (H) \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2a}$

Dans le même repère que précédemment, on a, par exemple pour $x > 0$:

$MF^2 = (x-c)^2 + y^2$

$MF'^2 = (x+c)^2 + y^2$

$\Rightarrow \quad MF^2 - MF'^2 = -4cx = (MF + MF')(MF - MF')$

or $MF - MF' = -2a$

$\Rightarrow \quad MF + MF' = \dfrac{2cx}{a}$

D'où :

$$\begin{cases} MF = -a + \dfrac{cx}{a} \\ MF' = a + \dfrac{cx}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MF^2 = (a - \dfrac{cx}{a})^2 = (x-c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (a + \dfrac{cx}{a})^2 = (x+c)^2 + y^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x^2(1 - \dfrac{c^2}{a^2}) + y^2 = a^2 - c^2$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad$ avec $b^2 = c^2 - a^2$

$\Leftrightarrow \quad M \in (H)$

www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com

Réciproquement, si M appartient à (H), on peut remonter la démonstration jusqu'à :

$$\begin{cases} MF^2 = (a - \frac{cx}{a})^2 = (x-c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (a + \frac{cx}{a})^2 = (x+c)^2 + y^2 \end{cases}$$

Il suffit alors d'observer que :

$M \in H \Rightarrow \left|\frac{cx}{a}\right| = |ex| > |x| \geq |a|$ pour conclure que, dans le cas $x > 0$:

$$\begin{cases} MF = -a + \frac{cx}{a} \\ MF' = a + \frac{cx}{a} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad MF - MF' = -2a$

Le cas $x < 0$ s'obtient par symétrie.

4– Tangentes

❑ Soit une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) appartenant à cette ellipse. Cherchons une équation de la tangente à l'ellipse en ce point M_0.

Si $x_0 = \pm a$, M_0 est un sommet de l'ellipse et l'équation de la tangente est $x = \pm a$. Sinon, on peut exprimer localement l'équation de l'ellipse sous la forme y comme fonction de x. Nous supposerons par exemple $y_0 > 0$. On a alors $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. La pente de la tangente en M_0 vaut :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx_0}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

de sorte que l'équation de la tangente est :

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

On voit que l'équation de la tangente s'obtient à partir de l'équation initiale de l'ellipse en fixant dans chacun des carrés x^2 ou y^2 l'une des variables à la valeur de la coordonnée du point M_0.

On vérifiera de même que l'équation de la tangente à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ au point M_0 est :

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

En ce qui concerne une parabole $y^2 = 2hx$, la tangente au sommet a pour équation $x = 0$. Sinon on peut procéder comme précédemment. Si $y_0 > 0$ par exemple, on a : $y = \sqrt{2hx}$ donc $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{h}{2x_0}}$ donc l'équation de la tangente est :

$$y - y_0 = \sqrt{\frac{h}{2x_0}}(x - x_0) = \frac{h}{\sqrt{2hx_0}}(x - x_0) = \frac{h}{y_0}(x - x_0)$$

$\Leftrightarrow \qquad yy_0 - y_0^2 = hx - hx_0$

$\Leftrightarrow \qquad yy_0 = hx + hx_0$

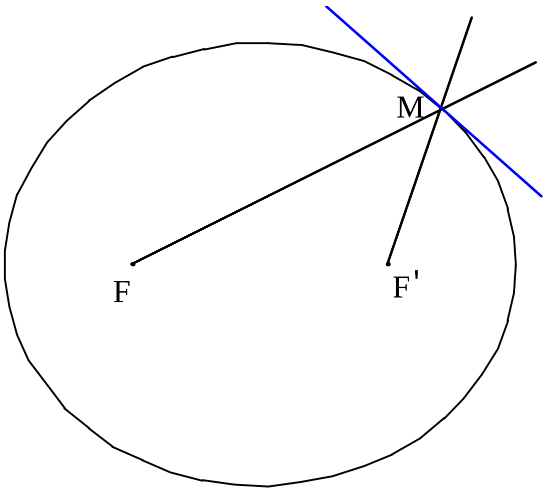
On voit qu'on a aussi un "dédoublement" des variables, le y^2 de l'équation initiale étant remplacé par yy_0 et le $2x$ par $x + x_0$.

❑ Si l'équation est donnée en polaire $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta)}$, le vecteur directeur de la tangente en un point repéré par son angle θ_0 est $r_0'\boldsymbol{e}_r + r_0\boldsymbol{e}_\theta$ avec $r_0 = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta_0)}$ et $r_0' = \dfrac{pe\sin(\theta_0)}{(1 + e\cos(\theta_0))^2}$.

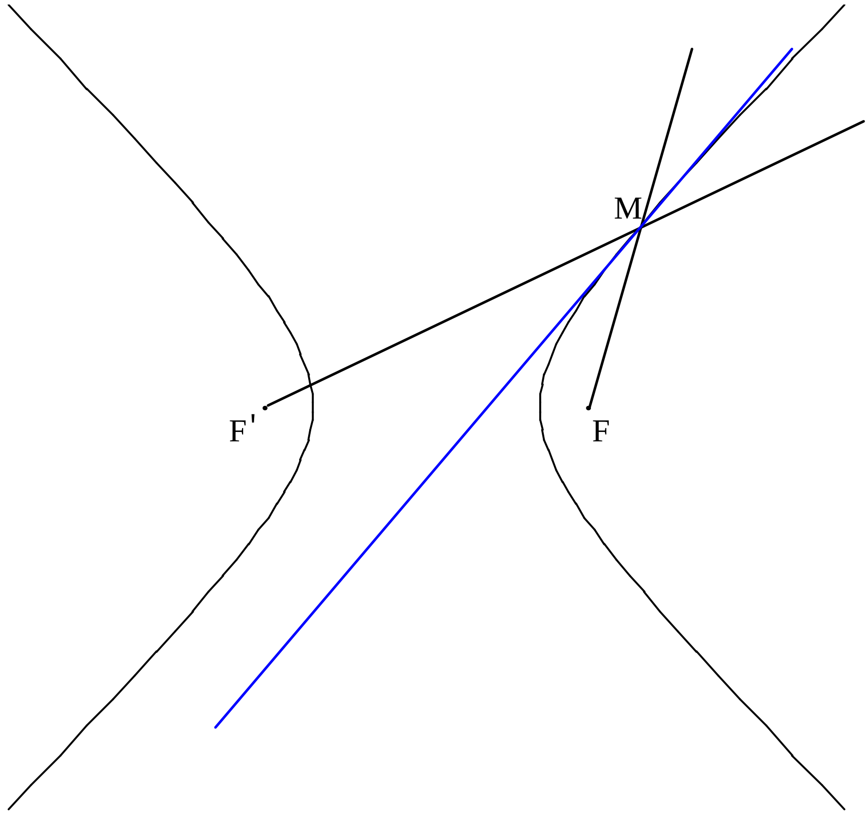
❑ *Le paragraphe qui suit utilise la notion de gradient, vue dans le chapitre Fonctions de Plusieurs Variables, qu'on trouvera dans le fichier FPLSRVAR.PDF*

Dans le cas des coniques bifocales de foyer F ou F', la tangente en un point M à la conique est bissectrice des droites (MF) et (MF').

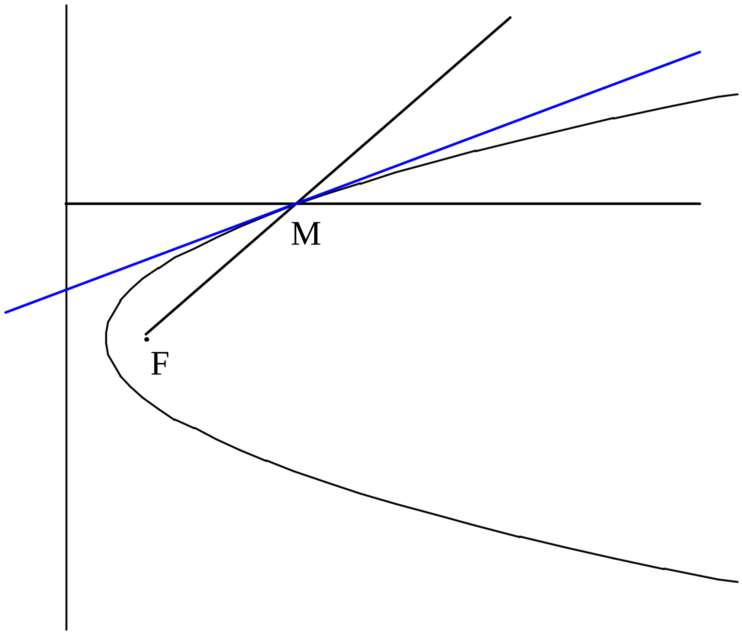
Prenons le cas des ellipses. Les ellipses de foyer F et F' sont les lignes de niveau de la fonction MF + MF'. Le gradient de cette fonction est orthogonale à la tangente en M à la ligne de niveau. Or le gradient de MF est $\dfrac{1}{\text{MF}} \times \boldsymbol{FM}$, vecteur unitaire allant de F vers M. Le gradient est donc somme de deux vecteurs unitaires portés par les droites (MF) et (MF'). C'est un vecteur directeur de l'une des bissectrices.



On procède de même pour l'hyperbole. Les hyperboles de foyer F et F' sont les lignes de niveau de la fonction MF – MF'.



En ce qui concerne les paraboles, la tangente en un point M à la parabole est bissectrice des droites (MF) et (MH), (MH) étant la droite passant par M et parallèle à l'axe. Ce résultat peut–être obtenu en considérant la parabole comme un cas limite d'ellipse, lorsque l'un des foyers est rejeté à l'infini. On peut également considérer les paraboles de foyer F comme les lignes de niveau de la fonction MF – MH, H étant la projection orthogonale de M parallèlement à l'axe de la parabole, sur la droite passant par F.



5– Equation cartésienne

Soit (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$) un repère orthonormé du plan. Les courbes algébriques les plus simples que l'on trouve après les droites, sont les courbes de degré 2, à savoir :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$$

avec α, β, γ non tous nuls. Nous allons montrer qu'il s'agit de coniques. Notre première tâche est d'obtenir, par translation et rotation, une équation réduite beaucoup plus simple.

❑ Par changement de repère, on peut se ramener à une équation où $\gamma = 0$. En effet, choisissons un nouveau repère se déduisant de l'ancien par une rotation d'angle θ. Soit x' et y' les nouvelles coordonnées des points. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

D'où $x = \cos(\theta)x' - \sin(\theta)y'$

$y = \sin(\theta)x' + \cos(\theta)y'$

L'équation devient :

$$\alpha(\cos(\theta)x' - \sin(\theta)y')^2 + \beta(\sin(\theta)x' + \cos(\theta)y')^2 + \gamma(\cos(\theta)x' - \sin(\theta)y')(\sin(\theta)x' + \cos(\theta)y') + ... = 0$$

Le terme en $x'y'$ vaut :

$$-2\alpha\cos(\theta)\sin(\theta) + 2\beta\cos(\theta)\sin(\theta) + \gamma(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = (\beta-\alpha)\sin(2\theta) + \gamma\cos(2\theta)$$

Si γ est non nul, il suffit, pour annuler le coefficient de $x'y'$, de choisir θ tel que :

$$\text{cotan}(2\theta) = \frac{\alpha-\beta}{\gamma}$$

Notons que le terme en x'^2 vaut alors :

$$\alpha\cos^2(\theta) + \beta\sin^2(\theta) + \gamma\sin(\theta)\cos(\theta) = \alpha\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} + \beta\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} + \gamma\frac{\sin(2\theta)}{2}$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{(\alpha - \beta)\cos(2\theta) + \gamma\sin(2\theta)}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{2}((\alpha - \beta)\text{cotan}(2\theta) + \gamma)$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{2}\left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{\gamma} + \gamma\right)$$

et que celui en y'^2 vaut, par un calcul analogue :

$$\alpha\sin^2(\theta) + \beta\cos^2(\theta) - \gamma\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{2}\left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{\gamma} + \gamma\right)$$

Nous allons voir ci-après que l'on obtient une ellipse lorsque ces deux coefficients sont de même signe, une hyperbole s'ils sont de signe contraire, et une parabole si l'un des deux est nul. La nature de la conique dépend donc du signe du produit de ces deux coefficients. Ce produit, au facteur $\frac{1}{4}$ près, vaut :

$$(\alpha + \beta)^2 - \sin^2(2\theta)\left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{\gamma} + \gamma\right)^2 = (\alpha + \beta)^2 - \frac{1}{1 + \text{cotan}^2(2\theta)}\left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{\gamma} + \gamma\right)^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - \frac{1}{1 + (\alpha-\beta)^2/\gamma^2}\left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{\gamma} + \gamma\right)^2 = (\alpha + \beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 - \gamma^2 = 4\alpha\beta - \gamma^2.$$

Ainsi, si le discriminant du trinôme $\alpha x^2 + \gamma xy + \beta y^2$ est strictement positif, on a une hyperbole ; s'il est nul, on a une parabole, s'il est négatif, on a une ellipse.

Nous supposerons dans la suite qu'on a choisi θ comme précédemment, et qu'on a rebaptisé les coefficients de façon à obtenir une équation de la forme :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0$$

❑ Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$:
Quitte à diviser par β, on peut se ramener à une équation du type :

$$y^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0$$

Donc :

– si $\gamma \neq 0$, il s'agit d'une $\boxed{\text{parabole}}$ d'axe parallèle à Ox.

– si $\gamma = 0$, il s'agit d'un cas dégénéré (deux droites parallèles à Ox, ou deux droites confondues parallèles à Ox ou $\varnothing$)

❑ Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$:

Ce cas se traite comme précédemment.

Ainsi, (sauf cas dégénéré), si le coefficient de x^2 ou de y^2 est nul, on a une parabole.

❑ Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$:
On peut supprimer les termes γx et δy de la façon suivante :

$$\alpha(x + \frac{\gamma}{2\alpha})^2 + \beta(y + \frac{\delta}{2\beta})^2 + \text{Cte} = 0$$

Par un nouveau changement de repère, on arrive donc à une équation du type :

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma = 0$$

– si $\gamma = 0$, alors la courbe se réduit à un point si α et β sont de même signe, et à deux droites sécantes si α et β sont de signe contraire (cas dégénéré)

– si $\gamma \neq 0$, quitte à changer les signes, on peut supposer $\alpha > 0$, et quitte à diviser par $|\gamma|$, on peut supposer $\gamma = \pm 1$. D'où trois équations finales possibles donnant un ensemble non vide, suivant les signes de α et β :

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ $\boxed{\text{ellipse}}$ (cas où les coefficients de x^2 et y^2 sont de même signe)

$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ $\boxed{\text{hyperbole}}$ (cas où les coefficients de x^2 et y^2 sont de signe contraire)

$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$ $\boxed{\text{hyperbole}}$ (idem)

Remarque 1 : le terme conique provient du fait que l'une des premières définitions des coniques consistait en l'intersection d'un cône et d'un plan. En effet :

$z^2 = x^2 + y^2$ est l'équation d'un cône (on a pris un angle de 45° au sommet pour simplifier)

$\cos(\theta)y + \sin(\theta)z = h$ est l'équation d'un plan de vecteur normal $(0, \cos(\theta), \sin(\theta)) = \boldsymbol{K}$, θ appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$. Soit $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{J}$ de composantes $(0, \sin(\theta), -\cos(\theta))$ une base de plan.

Posons $x = X$, $y = \sin(\theta)Y + \cos(\theta)Z$ et $z = -\cos(\theta)Y + \sin(\theta)Z$. Les équations deviennent :

plan : $Z = h$

cône : $\cos^2(\theta)\, Y^2 + \sin^2(\theta)\, Z^2 - 2\cos(\theta)\sin(\theta)\, Z =$
$X^2 + \sin^2(\theta)\, Y^2 + \cos^2(\theta)\, Z^2 + 2\sin(\theta)\cos(\theta)YZ$

L'intersection a donc pour équation :

www.Mcours.com
Site N°1 des Cours et Exercices Email: contact@mcours.com

$Z = h$
$X^2 - \cos(2\theta)Y^2 + 2\sin(2\theta)Y = \text{Cte}$

ce qui donne une ellipse si $\theta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

une parabole si $\theta = \frac{\pi}{4}$

une hyperbole si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

On remarquera que la parabole occupe une position intermédiaire entre l'ellipse et l'hyperbole.

Remarque 2 : on donne le nom d'hyperbole à la courbe d'équation $xy = 1$ car, par changement de variable :

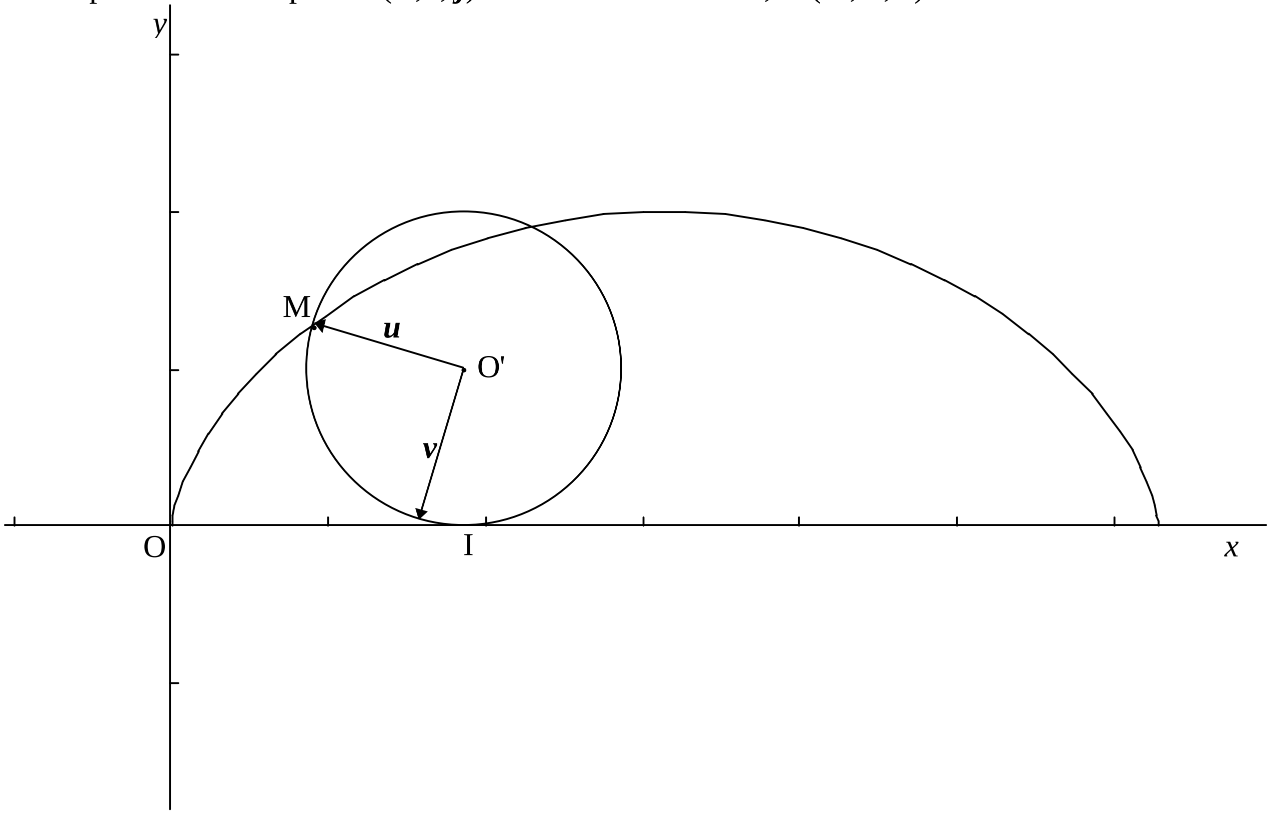
$x = X + Y$
$y = X - Y$

on se ramène à $X^2 - Y^2 = 1$.

Annexe I : la cycloïde

On considère un cercle tangent à l'axe des x, qui roule sans glisser sur cet axe. On appelle θ l'angle dont la roue a tourné et on cherche les coordonnées de M qui était initialement en O. La courbe décrite par M s'appelle cycloïde.

On dispose de deux repères : (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$) considéré comme fixe, et (O', $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) considéré comme mobile.



Initialement, $\boldsymbol{O'M} = R\boldsymbol{u} = -R\boldsymbol{j}$, puis $\boldsymbol{u} = -\sin\theta\boldsymbol{i} - \cos\theta\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v} = -\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$. En effet, θ est l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $-\boldsymbol{j}$. Par ailleurs, la condition de roulement sans glissement s'exprime par le fait que $\boldsymbol{OO'}$ est égal à $R\boldsymbol{j} + R\theta\boldsymbol{i}$. En effet, le centre instantané de rotation du cercle est le point de contact I du cercle avec l'axe des abscisses. La vitesse du point O' est donc égale à $-\dot{\theta}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{IO'} = \mathrm{R}\dot{\theta}\boldsymbol{i}$ où $\dot{\theta}$ désigne la dérivée de θ par rapport au temps, donc l'abscisse de O' est Rθ. Ainsi :

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M} = \mathrm{R}\boldsymbol{j} + \mathrm{R}\theta\boldsymbol{i} + \mathrm{R}(-\sin\theta\boldsymbol{i} - \cos\theta\boldsymbol{j})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = \mathrm{R}\theta - \mathrm{R}\sin\theta \\ y = \mathrm{R} - \mathrm{R}\cos\theta \end{cases}$$

Annexe II : Trajectoire des planètes

Kepler a conçu que les planètes se déplaçaient sur des ellipses de foyer le Soleil. Cette propriété n'a été expliquée que par la théorie de la gravitation de Newton et sa loi en $\frac{1}{r^2}$. La démonstration repose usuellement sur les formules dites de Binet. Nous allons cependant adopter une autre démarche, en cherchant plus généralement la trajectoire d'une particule soumise à une accélération centrale en $\frac{1}{r^\alpha}$, et montrer que la détermination explicite de cette trajectoire ne peut se faire que dans deux cas : $\alpha = -1$ et $\alpha = 2$. L'astronomie a donc disposé d'une chance inouïe de tomber précisément sur l'un de ces deux cas !! Une autre méthode est encore donnée dans l'annexe III.

Soit donc une particule M de masse m soumise à une force de la forme $\boldsymbol{F} = -\frac{\mathrm{K}}{r^\alpha}\boldsymbol{e}_r$, où $\boldsymbol{e}_r$ est le vecteur unitaire dirigé du pôle O vers la particule. Cette force dérive de l'énergie potentielle $\mathrm{E}_p = -\frac{1}{\alpha-1}\frac{\mathrm{K}}{r^{\alpha-1}}$ que l'on choisit nulle à l'infini. La force étant centrale, le moment cinétique $\boldsymbol{L}_\mathrm{O} = m\boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{V}$ par rapport à O est constant. $\boldsymbol{OM}$ étant perpendiculaire à $\boldsymbol{L}_\mathrm{O}$, M est dans le plan passant par O orthogonal à $\boldsymbol{L}_\mathrm{O}$. Dans ce plan, on repère M par ses coordonnées polaires (r,θ), l'angle θ étant mesuré à partir d'un axe arbitraire. La vitesse de la particule vaut $\boldsymbol{V} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$. L'énergie cinétique de la particule vaut alors $\mathrm{E}_c = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$. Le moment cinétique a un module valant $\mathrm{L} = mr^2\dot{\theta}$ qui est constant. L'énergie mécanique E_m de la particule, somme de l'énergie cinétique et de l'érgie potentielle, est elle aussi constante. On dispose donc des deux relations, les valeurs de L et E_m dépendant des conditions initiales :

$$\mathrm{L} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\mathrm{E}_m = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{\alpha-1}\frac{\mathrm{K}}{r^{\alpha-1}}.$$

La première relaion donne $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{L}}{mr^2}$. Par ailleurs, r et θ sont fonctions de t, mais on peut aussi considérer r comme fonction de θ (sauf dans le cas d'une trajectoire rectiligne dirigée selon O, cas trivial que nous excluons). On a :

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r} = \frac{1}{\theta'}\frac{\mathrm{L}}{mr^2}$$

On peut reporter les valeurs de $\dot{\theta}$ et $\dot{r}$ dans l'expression de l'énergie mécanique, ce qui donne :

$$\mathrm{E}_m = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{\theta'^2}\frac{\mathrm{L}^2}{m^2r^4} + \frac{\mathrm{L}^2}{m^2r^2}\right) - \frac{1}{\alpha-1}\frac{\mathrm{K}}{r^{\alpha-1}}$$

$$= \frac{L^2}{2mr^4\theta'^2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{1}{\alpha-1}\frac{K}{r^{\alpha-1}}$$

On peut tirer θ' de cette dernière relation :

$$\theta'^2 = \frac{L^2}{2mr^4}\frac{1}{E_m - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{\alpha-1}\frac{K}{r^{\alpha-1}}} = \frac{1}{r^2(\frac{2mE_m}{L^2}r^2 + \frac{2mK}{(\alpha-1)L^2}r^{3-\alpha} - 1)}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta' = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{\frac{2mE_m}{L^2}r^2 + \frac{2mK}{(\alpha-1)L^2}r^{3-\alpha} - 1}} = \frac{d\theta}{dr}$$

(on choisit le cas où θ est fonction croissante de r, le cas où θ est décroissante se traitant de façon comparable). θ est une fonction de r dont on connaît la dérivée. Il suffit ☹ donc d'intégrer.

$$\theta = \int \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{\frac{2mE_m}{L^2}r^2 + \frac{2mK}{(\alpha-1)L^2}r^{3-\alpha} - 1}}\,dr$$

Dans cette intégrale apparaît une racine de la forme $\sqrt{ar^2 + br^{3-\alpha} + c}$. Or on sait calculer cette intégrale si, en faisant un changement de variables, on peut se débarrasser de cette racine et se ramener à une fraction rationnelle. Dans le chapitre INTEGRAL.PDF, on montre que c'est possible si la racine est de la forme $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Par conséquent, l'intégrale est calculable si $\alpha = 2$. (Elle est également calculable si $\alpha = -1$ car alors $\sqrt{ar^2 + br^4 + c}$ est de la forme voulue avec $x = r^2$ et $\frac{dr}{r} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}$. Le cas $\alpha = -1$ correspond à une force de rappel proportionnelle à l'élongation r, cas des ressorts par exemple, et conduit aux solutions bien connues des oscillateurs harmoniques).

Nous supposerons désormais que $\alpha = 2$. θ devient :

$$\theta = \int \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{\frac{2mE_m}{L^2}r^2 + \frac{2mK}{L^2}r - 1}}\,dr = \int \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2mE_m}{L^2} + \frac{2mK}{L^2r} - \frac{1}{r^2}}}\,dr$$

Posons $u = \frac{1}{r}$. On obtient :

$$\theta = -\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2mE_m}{L^2} + \frac{2mKu}{L^2} - u^2}}\,du = -\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2mE_m}{L^2} + \frac{m^2K^2}{L^4} - (u - \frac{mK}{L^2})^2}}\,du$$

$$\Rightarrow \qquad \theta - \theta_0 = \arccos \frac{u - \frac{mK}{L^2}}{\sqrt{\frac{2mE_m}{L^2} + \frac{m^2K^2}{L^4}}}$$

$$\Rightarrow \qquad u = \frac{mK}{L^2} + \sqrt{\frac{2mE_m}{L^2} + \frac{m^2K^2}{L^4}}\cos(\theta - \theta_0)$$

$$\Rightarrow \qquad r = \frac{1}{\frac{mK}{L^2} + \sqrt{\frac{2mE_m}{L^2} + \frac{m^2K^2}{L^4}}\cos(\theta - \theta_0)}$$

On reconnaît l'équation d'une conique en polaire. L'excentricité vaut $\frac{\sqrt{\frac{2mE_m}{L^2} + \frac{m^2K^2}{L^4}}}{\left|mK/L^2\right|}$ (la valeur absolue intervenant si K < 0). On a donc :

$$\boxed{e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E_m}{mK^2}}}$$

- Si l'énergie mécanique E_m est strictement positive, on a $e > 1$. Il s'agit d'une hyperbole. La particule ira jusqu'à l'infini ou vient de l'infini avec une vitesse limite strictement positive. Ce cas se produit toujours si $K < 0$ (cas répulsif) puisque $E_m \geq E_p > 0$, mais peut aussi se produire dans le cas attractif avec des vitesses suffisamment grande.
- Si l'énergie mécanique E_m est nulle, on a $e = 1$. Il s'agit d'une parabole. La particule ira jusqu'à l'infini ou vient de l'infini avec une vitesse tendant vers 0.
- Si l'énergie mécanique E_m est négative, on a $e < 1$. Il s'agit d'une ellipse. La particule ne peut s'éloigner à l'infini.

Dans le cas du cercle, r est constant, égal à $\frac{L^2}{mK}$, $e = 0$, donc $E_m = -\frac{mK^2}{2L^2} = -\frac{K}{2r}$. Ainsi, $2r = \left|\frac{K}{E_m}\right|$. On pourra vérifier que, dans le cas de l'ellipse, on a aussi $\left|\frac{K}{E_m}\right|$ égal à la longueur $2a$ du grand axe.

Annexe III : Trajectoire des planètes (bis)

Nous donnons ci-dessous une méthode permettant de montrer que la trajectoire d'une planète soumise à une accélération centrale en $\frac{1}{r^2}$ est une conique, et utilisant abondamment produit scalaire, produit vectoriel et double produit vectoriel.

Soit une planète M de masse m, subissant une force $\boldsymbol{F} = -\frac{C}{r^2}\boldsymbol{u}$, où C est une constante, $r = OM$, O étant un point représentant le Soleil considéré comme fixe dans un référentiel galiléen, $\boldsymbol{u}$ le vecteur unitaire de O vers M. On notera $\boldsymbol{r}$ le vecteur $\boldsymbol{OM}$ et $\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ la vitesse de la planète. Les vecteurs suivants sont constants :

$$\boldsymbol{\sigma} = m\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{V} = mr\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{V} - \frac{C}{\sigma^2}(\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{u})$$

$\boldsymbol{\sigma}$ est le moment cinétique. $\boldsymbol{H}$ s'appelle vecteur de Hamilton. On a :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \wedge \boldsymbol{V} + m\boldsymbol{r} \wedge \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = m\,\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{V} + \boldsymbol{r} \wedge m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$$

$$= \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F} = 0 \text{ puisque } \boldsymbol{F} \text{ et } \boldsymbol{r} \text{ sont colinéaires.}$$

Donc $\boldsymbol{\sigma}$ est constant. En particulier, $\boldsymbol{r}$ reste orthogonal au vecteur fixe $\boldsymbol{\sigma}$, donc la trajectoire est contenue dans le plan passant par O orthogonal à $\boldsymbol{\sigma}$. Nous supposerons dans la suite $\boldsymbol{\sigma}$ non nul, car le cas $\boldsymbol{\sigma}$ nul correspond au cas où la trajectoire est rectiligne. En effet, dans ce cas, $\boldsymbol{r}$ reste constamment colinéaire à $\boldsymbol{V}$; or $\boldsymbol{V} = \frac{d(r\boldsymbol{u})}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{u} + r\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$ est colinéaire à $\boldsymbol{r}$ si et seulement si $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$ est lui-même colinéaire à $\boldsymbol{u}$. Mais la dérivation de la relation $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 1$ implique dans tous les cas que $\langle \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$, donc $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$ est orthogonal à $\boldsymbol{u}$. Par conséquent, $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$ ne peut être colinéaire à $\boldsymbol{u}$ que s'il est nul, et donc si $\boldsymbol{u}$ est constant.

Le calcul de $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}$ est plus compliqué. Compte tenu de la constance de $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{C}}{\sigma^2}\left(\boldsymbol{\sigma} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)$$

or $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \dfrac{\boldsymbol{V}}{r} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r} = \dfrac{\boldsymbol{V}}{r} - r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \dfrac{\boldsymbol{V}}{r} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}(r^2)}{\mathrm{d}t}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \dfrac{\boldsymbol{V}}{r} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}(r^2)}{\mathrm{d}t}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

$$= \frac{\boldsymbol{V}}{r} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}>)}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\boldsymbol{V}}{r} - <\boldsymbol{r}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}> \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\boldsymbol{V}}{r} - <\boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}> \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$= \frac{\boldsymbol{V}}{r} - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}> \frac{\boldsymbol{u}}{r}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{C}}{\sigma^2}\boldsymbol{\sigma} \wedge \left(\frac{\boldsymbol{V}}{r} - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}> \frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{C}}{r\sigma^2}\boldsymbol{\sigma} \wedge (\boldsymbol{V} - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}> \boldsymbol{u})$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} - \frac{m\mathrm{C}}{\sigma^2}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{V}) \wedge (\boldsymbol{V} - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}> \boldsymbol{u})$$

En appliquant la formule du double produit vectoriel, on a :

$$(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{V}) \wedge \boldsymbol{V} = -\mathrm{V}^2\,\boldsymbol{u} + <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}> \boldsymbol{V}$$

et $$(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{V}) \wedge \boldsymbol{u} = -<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}> \boldsymbol{u} - \boldsymbol{V}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} - \frac{m\mathrm{C}}{\sigma^2}(-\mathrm{V}^2\,\boldsymbol{u} + <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}> \boldsymbol{V} + <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}>^2 \boldsymbol{u} - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}> \boldsymbol{V})$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{m\mathrm{C}}{\sigma^2}(\mathrm{V}^2 - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}>^2)\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{m\mathrm{C}}{\sigma^2}\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{V} \|^2\,\boldsymbol{u}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{m\mathrm{C}}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{m^2r^2}\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{C}}{mr^2}\boldsymbol{u}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{m}\boldsymbol{F} = 0$$

donc $\boldsymbol{H}$ est constant. On notera que $\boldsymbol{H}$ est orthogonal à $\boldsymbol{\sigma}$.

On en déduit une conséquence intéressante sur l'hodographe du mouvement, c'est-à-dire par l'ensemble décrit par le vecteur $\boldsymbol{V}$ au cours du mouvement. $\boldsymbol{u}$ décrit un cercle dans le plan de la trajectoire, et $\boldsymbol{\sigma}$ étant constant, il en est de même de $\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{u}$. $\dfrac{\mathrm{C}}{\sigma^2}(\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{u})$ parcourt donc un cercle de rayon $\dfrac{\mathrm{C}}{\sigma}$, et il en est de même de $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{H} + \dfrac{\mathrm{C}}{\sigma^2}(\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{u})$, obtenu par translation du cercle précédent par le vecteur $\boldsymbol{H}$.

Montrons maintenant que la trajectoire de la planète est une conique. On pose :

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{C}}$$, vecteur constant puisque $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ le sont

On notera e la norme du vecteur $\boldsymbol{e}$. Il s'agira de l'excentricité e de la conique.

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{\mathrm{C}}\left(\boldsymbol{V} - \frac{\mathrm{C}}{\sigma^2}(\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{u})\right) \wedge \boldsymbol{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{C}}\left(\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{\sigma} - \frac{\mathrm{C}}{\sigma^2}(\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{C}}\left(\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{\sigma} - \frac{\mathrm{C}}{\sigma^2}(\sigma^2\,\boldsymbol{u} - <\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}> \boldsymbol{\sigma})\right)$$