FONCTIONS USUELLES

PLAN

I : Fonctions exponentielles

1– Exponentielles et logarithmes

❑ $\ln(x)$ est la primitive de $\dfrac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ et s'annulant en $x = 1$. Autrement dit :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Sa dérivée $\dfrac{1}{x}$ étant strictement positive, ln est donc strictement croissante. La dérivée de $\ln(ax)$ valant $\dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x}$, $\ln(ax)$ est égal à $\ln(x)$ + Cte. La valeur de Cte est obtenue en prenant $x = 1$, ce qui donne la relation célèbre :

$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$$

Cette relation, transformant produit en somme, a permis, depuis le XVIIème et jusqu'à l'introduction des calculatrices à bas prix vers 1980 à accélérer notablement les possibilités de calcul des mathématiciens. Ainsi Laplace s'émerveille-t-il "*des logarithmes, admirable instrument, qui, en réduisant à quelques heures le travail de plusieurs mois, double si l'on peut dire la vie des astronomes, et leur épargne les erreurs et les dégoûts inséparables des longs calculs*". En prenant $a = \dfrac{1}{x}$, on obtient :

$$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$$

Etant strictement croissante, ou bien $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = l$ limite finie. Comme, pour n entier, $\ln(2^n) = n\ln(2)$ (récurrence facile) et que cette quantité tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, la seule conclusion possible est :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

En donc, en considérant $\dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

ln réalise donc une bijection de]0, +∞[sur]–∞, +∞[. Sa réciproque est l'exponentielle :

$$t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t$$

Le nombre e est tel que $1 = \ln(e)$ soit $\int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1$. e vaut environ 2,71828...

Les limites relatives à ln se traduisent pour l'exponentielle de la façon suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

La règle de dérivation d'une fonction réciproque (cf le chapitre *Dérivation* dans le fichier DERIVEE.PDF) conduit à :

$$(e^x)' = e^x$$

On a également $e^{x+y} = e^x\, e^y$ puisqu'en prenant les logarithmes des deux membres, on obtient :

$$\ln(e^{x+y}) = x + y$$

alors que :

$$\ln(e^x\, e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y$$

❑ Pour tout a strictement positif et b, on posera $a^b = e^{\ln(a)b}$. Cette définition est compatible avec le calcul des puissances de a, puisque, pour n entier, on a :

$$\begin{aligned} e^{\ln(a)n} &= e^{\ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a)} \text{ avec } n \text{ exposant } \ln(a) \\ &= e^{\ln(a)} \times e^{\ln(a)} \times \ldots \times e^{\ln(a)} \\ &= a \times a \times \ldots \times a \\ &= a^n \end{aligned}$$

On a alors $\ln(a^b) = b \ln(a)$, et également $(e^x)^y = e^{xy}$ obtenu en prenant $a = e^x$ et $b = y$ dans la formule donnant a^b. On a enfin, pour $a > 0$ et différent de 1 :

$$x = a^t \Leftrightarrow x = e^{\ln(a)t} \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(a)t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

a^t est l'exponentielle de t en base a et $\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ est le logarithme de x en base a. Le logarithme le plus utilisé en dehors du logarithme en base e (dit népérien) est le logarithme décimal, pour lequel $a = 10$, et que l'on note souvent $\log_{10}$, voire même log.

Si u est une fonction strictement positive, et v une fonction quelconque, on a :

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

La deuxième forme peut servir à dériver la fonction ou à en calculer les limites.

❑ Un certain nombre de limites usuelles doivent être connues :

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et plus généralement $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$ pour tout $a > 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ et plus généralement $\lim\limits_{x \to 0} x^a\ln(x) = 0$

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et plus généralement $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$ pour tout $a > 0$

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et plus généralement $\lim\limits_{x \to -\infty} x^a e^x = 0 = 0$ pour tout $a > 0$

Montrons (i). Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. f admet pour dérivée $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ qui est négative pour $x > e$, donc f est décroissante strictement positive sur $[e, +\infty[$. Elle admet donc une limite l positive ou nulle en $+\infty$. Cette limite est aussi celle de $\frac{\ln(y)}{y}$ avec $y = x^2$, soit :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = l$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x)}{x^2} = l$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} 2 \times \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x} = l$$

$$\Rightarrow \quad 2 \times l \times 0 = l$$

$$\Rightarrow \quad l = 0$$

Toutes les autres limites s'en déduisent. En remplaçant x par x^a, on obtient :

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^a)}{x^a} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a\ln(x)}{x^a} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$$

(ii) En changeant dans (i) x en $1/x$ avec x tendant vers 0, on obtient :

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1/x)}{1/x} = \lim_{x \to 0} -x\ln(x) \Rightarrow \lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$$

En remplaçant x par x^a, on obtient $\lim_{x \to 0} x^a\ln(x) = 0$

(iii) En changeant dans (i) x par e^x, on obtient $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ou $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. En élevant à la puissance a, on obtient $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^a} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{a^a x^a} = +\infty$ en divisant par a^a et enfin, en remplaçant ax par x, on obtient bien $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$.

(iv) Remplacer x par $-x$ dans (iii).

2– Fonctions trigonométriques hyperboliques

a) sh(x) et ch(x) :

On pose :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(sinus hyperbolique) (cosinus hyperbolique)

On vérifie facilement que :

$e^x = \text{sh}(x) + \text{ch}(x)$

sh est impair.

ch est pair et strictement positif.

(sh et ch sont respectivement la partie paire et impaire de l'exponentielle)

sh' = ch donc sh est strictement croissante, et du signe de x.

ch' = sh donc ch est décroissant sur $]-\infty,0]$ et croissant sur $[0,+\infty[$.

$\text{sh}(x) \sim \text{ch}(x) \sim \frac{e^x}{2}$ au voisinage de $+\infty$.

(La notation ~ est définie dans le chapitre *Limites et Continuité* qu'on trouvera dans le fichier LIMITES.PDF. $f \sim g$ au voisinage de x_0 signifie que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$)

$\mathrm{sh}(x) \sim x$ au voisinage de 0 (car sh'0 = 1).

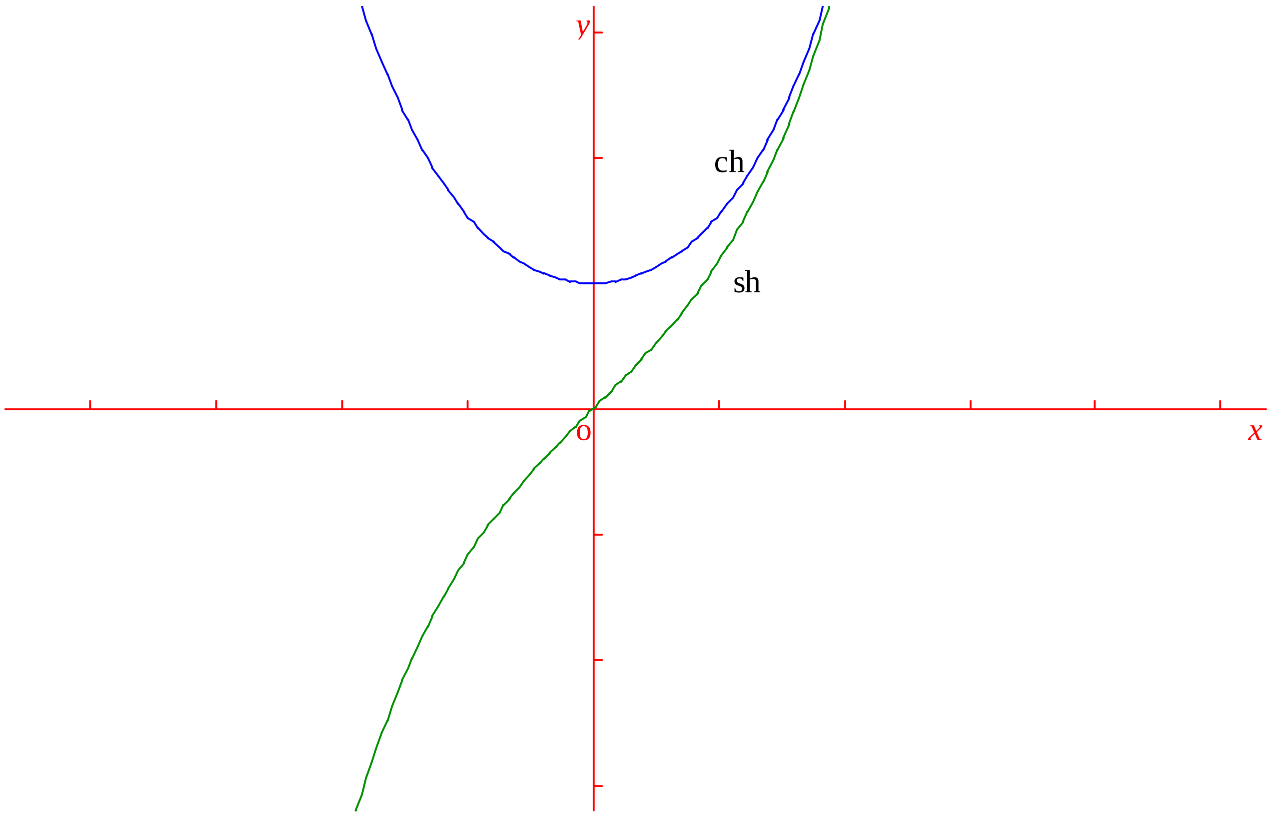
$\mathrm{ch}(x) \sim 1$ au voisinage de 0.

$\mathrm{ch}(x) - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$ car on vérifiera que $\mathrm{ch}(x) - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2(\dfrac{x}{2})$

Il existe des formules de trigonométries hyperboliques, en particulier :

$$\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = 1$$

On consultera sur ce point l'annexe, donnant une comparaison des formules de trigonométries circulaire et hyperbolique. Le paramétrage $\begin{cases} x = \mathrm{ch}(t) \\ y = \mathrm{sh}(t) \end{cases}$ permet de décrire la branche d'abscisse positive de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$.



b) th(x) :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \text{ (tangente hyperbolique)}$$

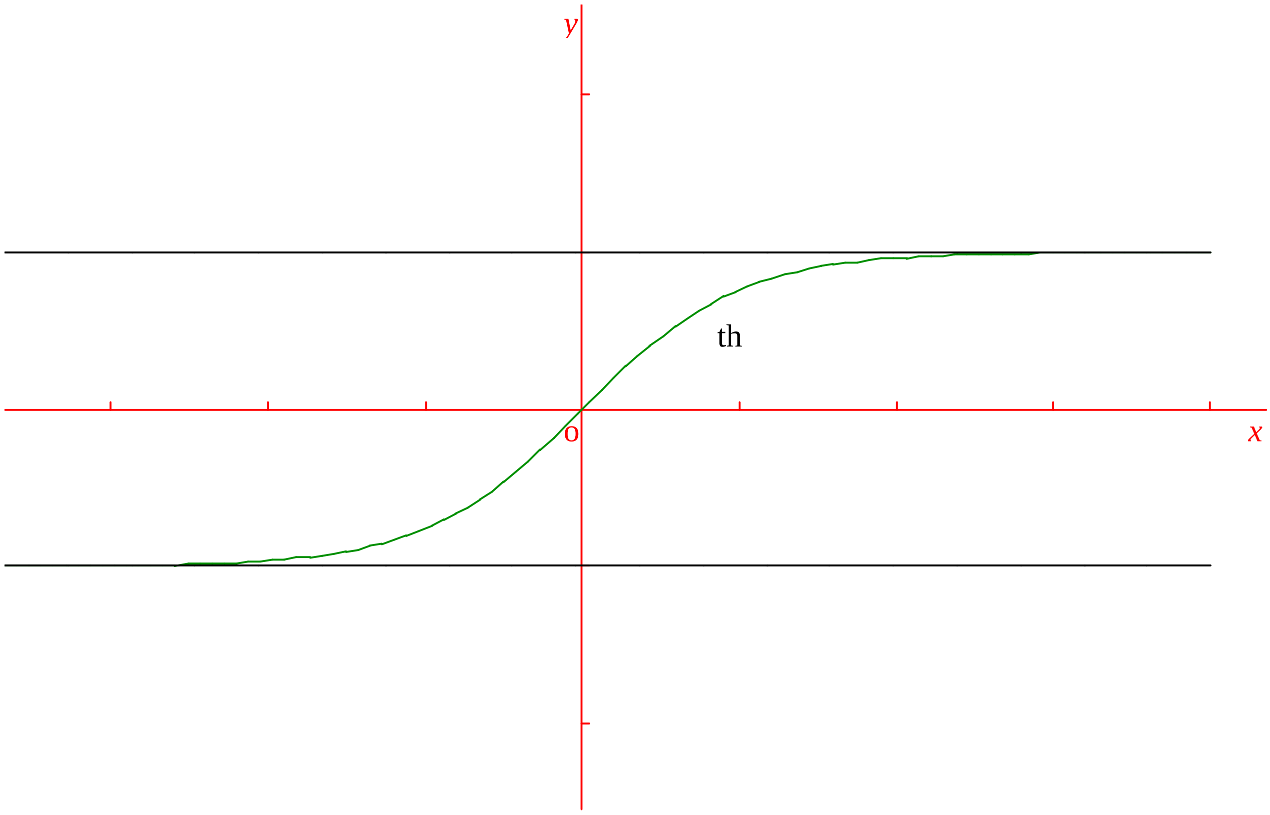
On a :

th est impaire.

$\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x) > 0$ donc th est strictement croissante.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$

$\mathrm{th}(x) \sim x$ au voisinage de 0 (car th'(0) = 1).



3– Réciproques des fonctions hyperboliques

a) argsh(x) :

sh est continue strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction admet donc une réciproque, notée argsh(x) (pour argument du sinus hyperbolique), qu'on peut calculer explicitement :

$$y = \text{argsh}(x) \Leftrightarrow x = \text{sh}y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

D'où :

$$e^{2y} - 2.e^y.x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

La seule racine positive est $x + \sqrt{x^2+1}$. On a donc :

$$y = \text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

On vérifiera que sa dérivée vaut $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) argch(x) :

ch est continue strictement monotone de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. Cette fonction admet donc une réciproque, notée argch(x).

$$y = \text{argch}(x) \Leftrightarrow x = \text{ch}y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \text{ et } y \geq 0$$

D'où :

$$e^{2y} - 2.e^y.x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

Les deux racines sont positives, mais la seule racine supérieure ou égale à 1 est $x + \sqrt{x^2-1}$. On a donc :

$$y = \text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

En fait, il peut être parfois utile d'étendre cette fonction à l'intervalle $]-\infty,-1]$ en considérant $\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$, dont on vérifiera en exercice qu'elle est impaire.

Sa dérivée vaut $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

<u>c) argth(x)</u> :

th est continue strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Elle admet donc une réciproque notée argth(x) :

$$y = \text{argth}(x) \Leftrightarrow x = \text{th}y$$

D'où :

$$\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = x$$

$$\Rightarrow \quad e^{2y} = \frac{x+1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \quad y = \text{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}.$$

Il est parfois utile d'étendre cette fonction à $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ en considérant $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{1-x}\right|$

Sa dérivée vaut $\dfrac{1}{1-x^2}$

II : Fonctions circulaires

1– fonctions trigonométriques

J'ose espérer que personne d'entre vous n'ignore ce que sont les fonctions sinus, cosinus et tangente ! Savez-vous au moins les tracer sans la calculatrice ? Non ? Eh bien au travail. Prenez une feuille et tracez les trois fonctions. Eksassôte !

Ah oui ! un bon conseil également. Apprenez les formules trigonométriques situées en fin de ce chapitre ☺.

2– Réciproque des fonctions trigonométriques

<u>a) arcsin</u> :

sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1,1]$ est continue strictement monotone. Elle admet donc une réciproque notée arcsin. On a donc :

$$\theta = \arcsin(x) \Leftrightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ et } x = \sin(\theta)$$

(On fera un rapprochement dans la formulation avec l'équivalence :

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y \geq 0 \text{ et } x = y^2)$$

Voici un tableau de valeurs :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sin\theta$
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	θ

arcsin est strictement croissante, impaire :

$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

$\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$

$\forall \theta \in [-\pi/2,\pi/2]$, $\arcsin(\sin(\theta)) = \theta$

MAIS cette dernière relation est fausse si θ appartient à un autre intervalle.

EXEMPLE : $\arcsin[\sin(3\pi/4)] = \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$

(On fera un rapprochement dans la formultation des relations précédentes avec :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $(\sqrt{x})^2 = x$

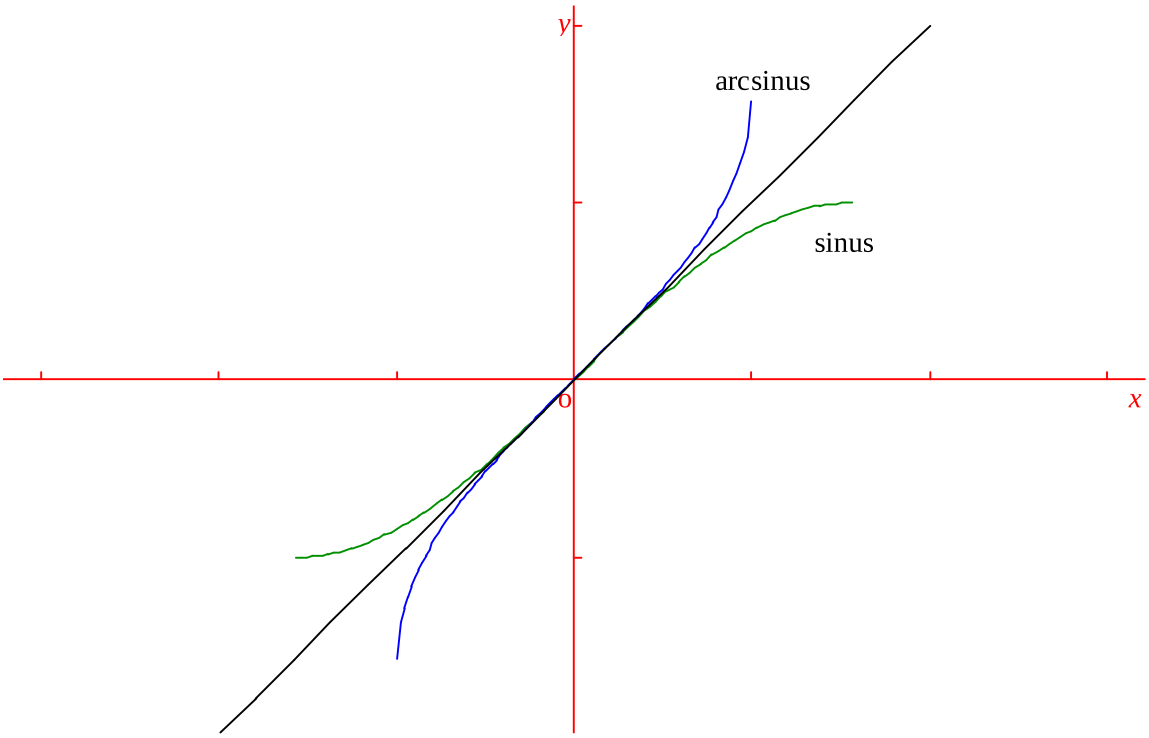
$\forall y \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{y^2} = y$

MAIS pour y quelconque dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{y^2} = |y|$

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

car cos est positif sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et dans ce cas, $\cos(\theta) = \sqrt{1-\sin^2(\theta)}$

La dérivée d'arcsin(x) est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (voir le chapitre *Dérivation* dans le fichier DERIVEE.PDF) pour savoir comment dériver la réciproque d'une fonction.



b) arccos :

cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ est continue strictement monotone. Elle admet donc une réciproque notée arccos. On a donc :

$$\theta = \arccos(x) \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \text{ et } x = \cos\theta$$

Voici un tableau de valeurs :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos\theta$
$\arccos(x)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	θ

arccos est strictement décroissante :

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

En effet, $\theta = \arccos(-x) \Leftrightarrow -x = \cos(\theta)$ et $\theta \in [0, \pi]$

$\Leftrightarrow x = -\cos(\theta) = \cos(\pi-\theta)$ et $\pi-\theta \in [0, \pi]$

$\Leftrightarrow \pi-\theta = \arccos(x)$

$\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$

$\forall \theta \in [0, \pi], \arccos(\cos\theta) = \theta$

MAIS cette dernière relation est fausse si θ appartient à un autre intervalle.

EXEMPLE : $\arccos[\cos(-\frac{\pi}{4})] = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

car sin est positif sur $[0,\pi]$, et dans ce cas, $\sin(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\theta)}$

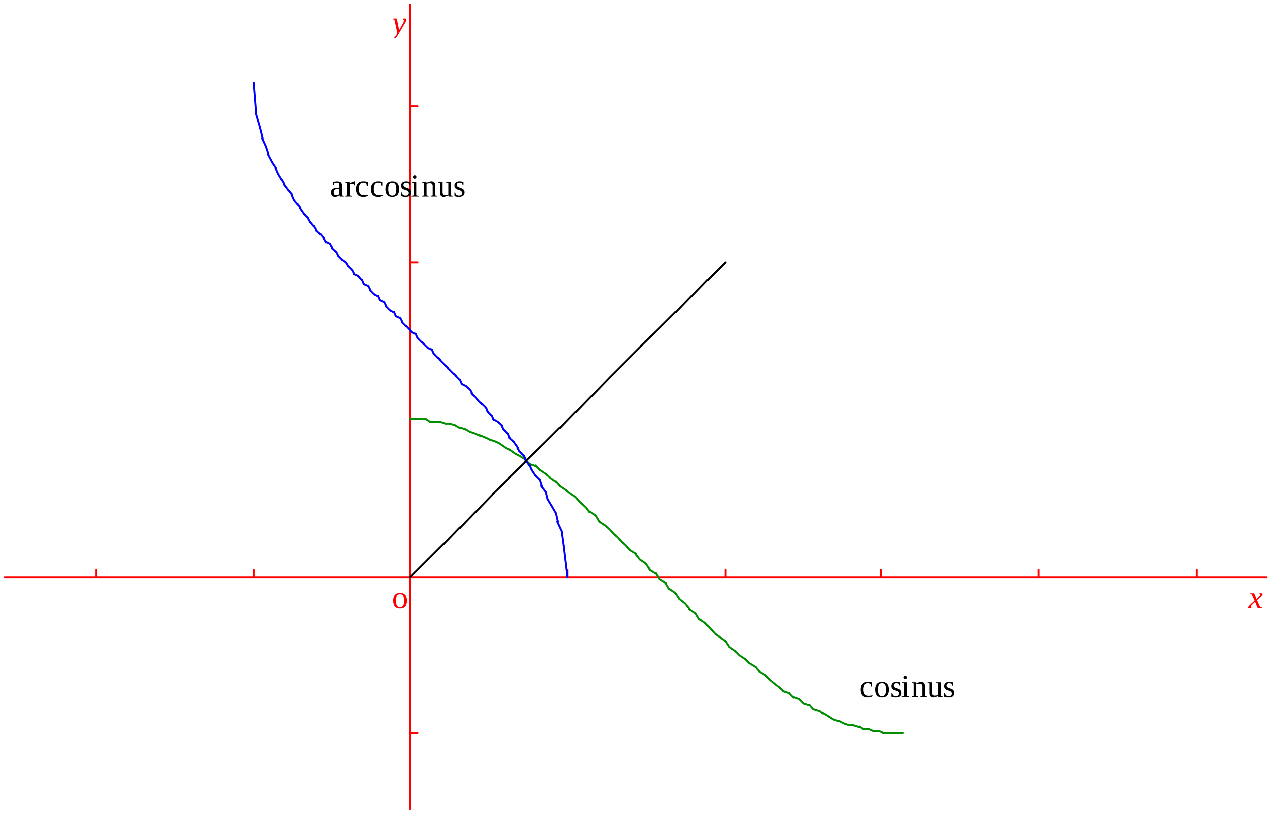
$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

En effet, $\theta = \arcsin(x) \Leftrightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin(\theta) = x$

$\Leftrightarrow x = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ et $\frac{\pi}{2} - \theta \in [0,\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = \arccos(x)$

La dérivée de $\arccos(x)$ est $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



c) arctan :

tan : $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est continue strictement monotone. Elle admet donc une réciproque notée arctan.

On a donc :

$$\theta = \arctan(x) \Leftrightarrow \theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ et } x = \tan(\theta)$$

Voici un tableau de valeurs :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\tan\theta$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	θ

arctan est strictement croissante, impaire :

$\arctan(-x) = -\arctan(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$

$\forall \theta \in]-\pi/2,\pi/2[, \arctan(\tan(\theta)) = \theta$

MAIS cette dernière relation est fausse si θ appartient à un autre intervalle.

Exemple : $\arctan[\tan(3\pi/4)] = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

car cos est positif sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et dans ce cas, $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}$

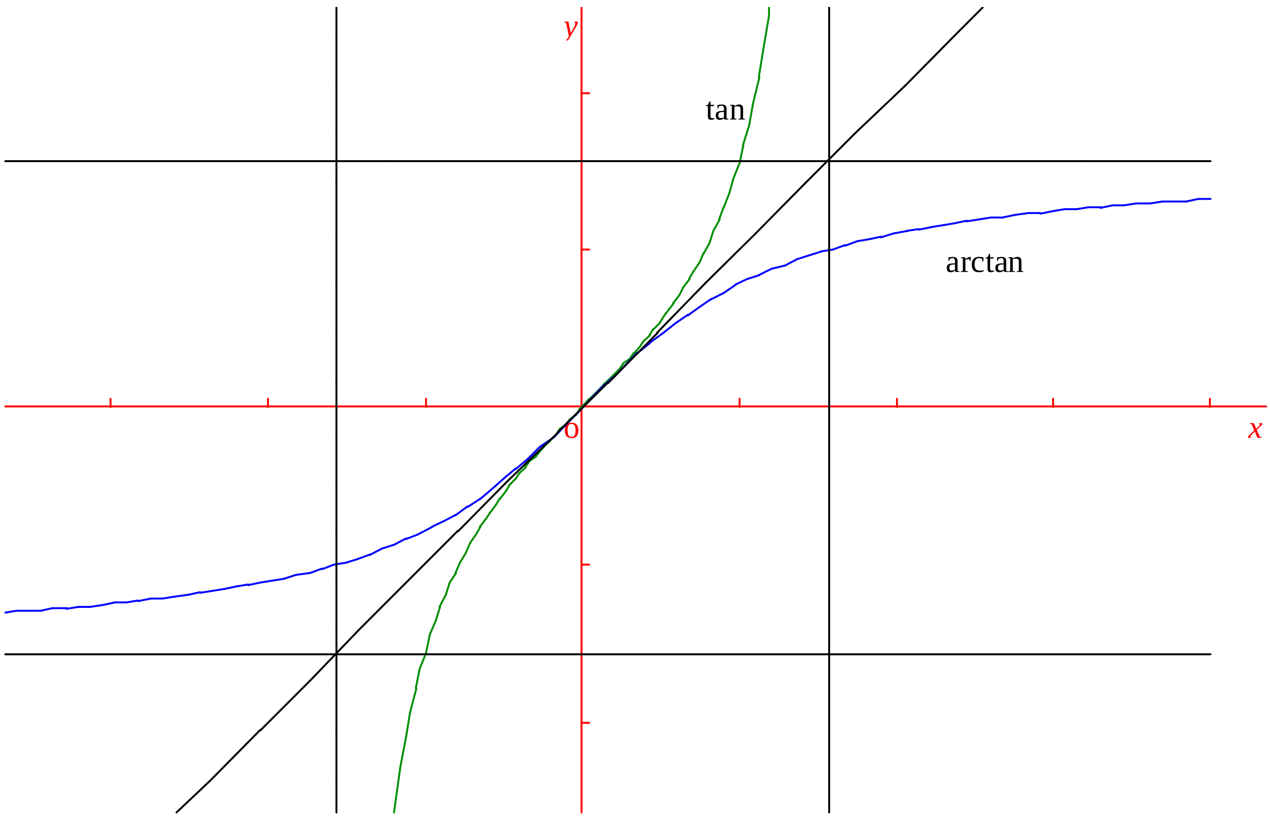
$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(x) \text{ où } \mathrm{sgn}(x) = 1 \text{ si } x > 0$$
$$= -1 \text{ si } x < 0$$

Les deux membres étant des fonctions impaires de x, il suffit de le montrer pour $x > 0$. Dans ce cas, on a :

$$\theta = \arctan(\frac{1}{x}) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \tan(\theta) \text{ et } \theta \in\ ]0, \frac{\pi}{2}[$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\tan(\theta)} = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) \text{ et } \frac{\pi}{2} - \theta \in\ ]0, \frac{\pi}{2}[$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = \arctan(x)$$

La dérivée d'arctan(x) est $\frac{1}{1+x^2}$.



Annexe : trigonométrie

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

FORMULES

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}[\cos(a + b) - \cos(a - b)]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

pour $t = \tan(\frac{x}{2})$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$

$$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$

$$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$$

$$\mathrm{ch}^2(x) = \frac{1 + \mathrm{ch}(2x)}{2}$$

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$

$$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$

$$\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$$

$$\mathrm{sh}^2(x) = \frac{\mathrm{ch}(2x) - 1}{2}$$

$$\mathrm{th}(a + b) = \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}$$

$$\mathrm{th}(a - b) = \frac{\mathrm{th}(a) - \mathrm{th}(b)}{1 - \mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}$$

$$\mathrm{th}(2x) = \frac{2\,\mathrm{th}(x)}{1 + \mathrm{th}^2(x)}$$

$$\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(a + b) + \mathrm{ch}(a - b)]$$

$$\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(a + b) - \mathrm{ch}(a - b)]$$

$$\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) = \frac{1}{2}[\mathrm{sh}(a + b) + \mathrm{sh}(a - b)]$$

$$\mathrm{ch}(p) + \mathrm{ch}(q) = 2\,\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}\,\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{ch}(p) - \mathrm{ch}(q) = 2\,\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\,\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{sh}(p) + \mathrm{sh}(q) = 2\,\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\,\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$$

pour $t = \mathrm{th}(\frac{x}{2})$

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}$$

$$\mathrm{th}(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

DERIVEES

$\cos'(x) = -\sin(x)$ $\sin'(x) = \cos(x)$ $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$ $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \tan^2(x)$

PARAMETRAGES

paramétrage de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $x = a\cos(t) \quad y = b\sin(t)$	paramétrage de l'hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $x = a\,\mathrm{ch}(t) \quad y = b\,\mathrm{sh}(t)$

EQUIVALENTS au voisinage de 0

$\sin(x) \sim x$ $\cos(x) \sim 1$ $\tan(x) \sim x$ $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$	$\mathrm{sh}(x) \sim x$ $\mathrm{ch}(x) \sim 1$ $\mathrm{th}(x) \sim x$ $\mathrm{ch}(x) - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$

DEVELOPPEMENTS LIMITES au voisinage de 0

$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$ $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$ $\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$