

## ESPACES EUCLIDIENS

### PLAN

#### I : Produit scalaire

- 1) Définition
- 2) Inégalité de Cauchy-Schwarz
- 3) Bases orthonormées
- 4) Sous-espaces orthogonaux
- 5) projections et symétries orthogonales

#### II : Automorphismes orthogonaux

- 1) Groupe orthogonal
- 2) Groupe orthogonal en dimension 2
- 3) Groupe orthogonal en dimension 3
- 4) Matrices orthogonales
- 5) Orientation en dimension 2
- 6) Orientation en dimension 3

#### III : Applications affines

- 1) Définition
- 2) Exemples
- 3) Conservation du barycentre

#### IV : Isométries affines

- 1) Définition
- 2) Isométries du plan
- 3) Isométries de l'espace
- 4) Similitudes
- 5) Sous-groupes du groupe affine

Annexe 1 : isométries laissant invariant le tétraèdre régulier

Annexe 2 : isométries laissant invariant le cube

Annexe 3 : le cercle des neufs points d'Euler

### I : Produit scalaire

*Début de partie réservée aux MPSI, PCSI, PTSI avec option mathématiques*

#### 1- Définition

##### DEFINITION :

Un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{R}$  est dit euclidien s'il est muni d'un produit scalaire, à savoir une forme bilinéaire symétrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définie positive, ce qui signifie :

i) Pour tout  $y$  de  $E$ , l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $x$  associe  $\langle x, y \rangle$  est linéaire. Pour tout  $x$ , l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $y$  associe  $\langle x, y \rangle$  est linéaire.

ii)  $\forall x \in E, \forall y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

iii)  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iv)  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$

On note aussi le produit scalaire  $x.y$  s'il n'y a pas ambiguïté avec un autre produit.

**EXEMPLE :**

si  $E = C^0([a,b])$ ,  $E$  peut être muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

On associe au produit scalaire une norme dite euclidienne :

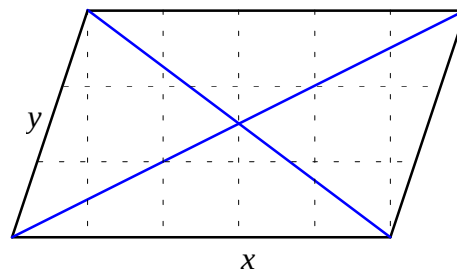
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^2}$$

Cette norme permet de définir une distance entre deux vecteurs  $x$  et  $y$  (considérés ici plutôt comme des points lorsque  $E$  est vu comme espace affine), à savoir  $\|x - y\|$ .

On peut retrouver le produit scalaire à partir de la norme. En effet :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

On peut interpréter l'égalité  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$  en disant que le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  est égal au quart de la différence des carrés des longueurs des deux diagonales du parallélogramme construit selon  $x$  et  $y$ .



Dans la figure ci-dessus,  $\langle x, y \rangle = 5$  alors que  $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = (3\sqrt{5})^2 - 5^2 = 20$ .

On a aussi l'identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

qui énonce que la somme des carrés des longueurs des diagonales ( $x + y$  et  $x - y$ ) d'un parallélogramme (de côtés  $x$  et  $y$ ) est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés. Dans la figure précédente, le parallélogramme est construit selon deux vecteurs,  $x$  de norme 5, et  $y$  de norme  $\sqrt{10}$ . La grande diagonale est portée par le vecteur  $x + y$  et a pour longueur  $3\sqrt{5}$  alors que la petite diagonale est portée par  $x - y$  et a pour longueur 5.

On a bien  $(3\sqrt{5})^2 + 5^2 = 2 \times 25 + 2 \times \sqrt{10}^2 = 70$ .

## 2- Inégalité de Cauchy-Schwarz

**PROPOSITION :**

Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire  $\langle , \rangle$ . Alors :

$$i) \forall x \in E, \forall y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$ii) \forall x \in E, \forall y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Démonstration :

i) Si  $x$  ou  $y$  est nul, l'inégalité est évidente. Dans le cas contraire, on considère l'application suivante :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle t + t^2 \langle y, y \rangle$$

Le trinôme du second degré en  $t$  est positif ou nul pour tout  $t$ . Il ne peut donc posséder deux racines distinctes, donc son discriminant est négatif ou nul. Donc :

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$\Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz. Elle permet de définir le cosinus de deux vecteurs comme étant égal à  $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$ .

ii) En élevant au carré, on obtient une inégalité équivalente :

$$\langle x+y, x+y \rangle \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Leftrightarrow \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|$$

ce qui découle du i). Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité triangulaire

### 3- Bases orthonormées

#### DEFINITIONS :

i) Un vecteur  $x$  est dit unitaire ou normé si  $\|x\| = 1$ .

ii) Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont dits orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

iii) Une base  $(e_1, \dots, e_n)$  est dite orthogonale si les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux.

iv) Une base  $(e_1, \dots, e_n)$  est dite orthonormale ou orthonormée si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont normés.

On peut remarquer que si un système de vecteurs non nuls est constitué de vecteurs deux à deux orthogonaux, alors, ce système est libre car :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \forall j, \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, e_j \rangle = 0 \Rightarrow \forall j, \alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = 0 \Rightarrow \forall j, \alpha_j = 0$$

Pour que ce soit une base, il suffit que le nombre de ces vecteurs soit égal à la dimension de l'espace.

L'intérêt d'une base orthonormée est que le produit scalaire s'y exprime très simplement. Si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

et  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ , alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ et } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

alors que dans une base quelconque, on a :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \langle e_i, e_i \rangle$$

ou encore, si l'on note  $M$  la matrice symétrique de terme général  $\langle e_i, e_j \rangle$  :

$$\langle x, y \rangle = {}^t X M Y$$

où  $X$  et  $Y$  sont les vecteurs colonnes, composantes de  $x$  et  $y$ . Dans le cas du produit scalaire usuel,  $\langle x, y \rangle = {}^t X Y$ .

## THEOREME DE PYTHAGORE

Soit  $V_1, \dots, V_p$  une famille de vecteurs orthogonaux. Alors :

$$\|V_1 + \dots + V_p\|^2 = \|V_1\|^2 + \|V_2\|^2 + \dots + \|V_p\|^2$$

Il suffit de développer le carré de gauche. Tous les doubles produits de deux vecteurs distincts sont nuls puisque les vecteurs sont orthogonaux.

Il est facile de construire une base orthonormée à partir d'une base orthogonale. Il suffit pour cela de diviser chaque vecteur par sa norme pour se ramener à des vecteurs unitaires. Nous allons décrire un procédé permettant de construire une base orthogonale à partir de n'importe quelle base. Ce procédé est appelé procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt :

□ Prendre  $\varepsilon_1 = e_1$

□ Par récurrence, pour construire  $\varepsilon_k$ , écrire

$$\varepsilon_k = e_k + \alpha_{k-1}\varepsilon_{k-1} + \dots + \alpha_1\varepsilon_1$$

On trouve la valeur de  $\alpha_j$  en écrivant  $\langle \varepsilon_k, \varepsilon_j \rangle = 0$ . On obtient :

$$0 = \langle e_k, \varepsilon_j \rangle + \alpha_j \langle \varepsilon_j, \varepsilon_j \rangle \text{ d'où } \alpha_j.$$

Pour simplifier les calculs, on peut au besoin prendre un multiple non nul de  $\varepsilon_k$ . On voit par récurrence que  $\varepsilon_k$  est combinaison linéaire de  $(e_1, \dots, e_k)$ , la composante suivant  $e_k$  étant 1. Il en résulte qu'aucun des  $\varepsilon_k$  n'est nul, et qu'ils constituent une base de E.

**EXEMPLE 1 :** Dans  $\mathbb{R}^4$ , on se donne le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension 2. Une base est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$e_1 \quad e_2$

On prend  $\varepsilon_1 = e_1$ . On cherche  $\varepsilon_2 = e_2 + \alpha\varepsilon_1$ , avec  $\alpha$  tel que :

$$\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle e_1, e_2 \rangle + \alpha \langle e_1, e_1 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 + 6\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{5}{6}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2$

Il suffit ensuite de normer chaque vecteur.

**EXEMPLE 2 :** Dans  $\mathbb{R}^4$ , on se donne l'hyperplan d'équation  $2x + 3y - z - 2t = 0$ . Trouver une base orthogonale de cet hyperplan. Une base de l'hyperplan est :

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_1 \ e_2 \ e_3$

On prend :

$$\varepsilon_1 = e_1$$

$$\varepsilon_2 = e_2 + \alpha \varepsilon_1 \text{ avec } \alpha \text{ tel que } 0 = \langle \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle = \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle + \alpha \varepsilon_1^2$$

$$\Rightarrow 0 = -3 + 13\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{13}$$

Pour éviter les dénominateurs, nous prendrons plutôt  $\varepsilon_2 = 13e_2 + 3e_1$

$$\text{Ainsi : } \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_3 = e_3 + \alpha \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_2 \text{ avec } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que :}$$

$$\begin{cases} 0 = \langle \varepsilon_3, \varepsilon_1 \rangle = \langle e_3, \varepsilon_1 \rangle + \alpha \varepsilon_1^2 = -3 + 13\alpha \\ 0 = \langle \varepsilon_3, \varepsilon_2 \rangle = \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle + \beta \varepsilon_2^2 = 4 + 728 \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{13} \\ \beta = -\frac{1}{182} = -\frac{1}{13 \cdot 14} \end{cases}$$

Nous prendrons plutôt  $\varepsilon_3 = 182e_3 + 42\varepsilon_1 - \varepsilon_2$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ -3 & 4 & 52 \\ 2 & 6 & 78 \\ 0 & 26 & -26 \\ 0 & 0 & 182 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir une base orthonormale, il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme, soit respectivement  $\sqrt{13}$ ,  $2\sqrt{182}$ ,  $78\sqrt{7}$ .

**EXEMPLE 3 :** Dans  $\mathbb{R}^2$ , on considère le produit scalaire  $xx' + \frac{1}{2}(xy' + yx') + yy'$ . La base canonique  $(e_1, e_2)$  n'est pas orthonormée. On obtient une base orthogonale en posant :

$$\varepsilon_1 = e_1$$

$$\varepsilon_2 = e_2 + \lambda e_1$$

$$\text{avec } \lambda \text{ vérifiant } \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Il suffit ensuite de normer les vecteurs.

A chaque  $y$  on peut associer la forme linéaire  $f_y$  définie par :

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle$$

Inversement, si  $f$  est une forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, alors il existe  $y$  unique tel que  $f = f_y$ . Ce qu'on énonce ainsi :

**PROPOSITION :**

Soit  $f$  une forme linéaire d'un espace euclidien de dimension finie. Alors il existe un unique  $y$  tel que :  $\forall x, f(x) = \langle x, y \rangle$

Démonstration :

En effet, soit  $(e_i)$  une base orthonormée de  $E$ . Il suffit de prendre  $y = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i$ . On a bien alors :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \langle x, y \rangle. \text{ Quant à l'unicité, il suffit de remarquer que :}$$

$$[\forall x, \langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle] \Rightarrow y = z$$

Cet isomorphisme n'existe pas en dimension infinie. Soit en effet  $E$  l'espace  $C^0([0,1])$ , muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

L'application  $E \rightarrow \mathbb{R}$ , qui à  $f$  associe  $f(0)$  ne peut être définie à partir du produit scalaire. En effet, si on prend  $f_n$  défini par  $f_n(x) = 1 - nx$  sur  $[0, \frac{1}{n}]$  et 0 ailleurs, alors il faudrait  $g$  telle que, pour tout  $n$ ,  $1 = \int_0^{1/n} (1 - nt)g(t) dt$ . Or l'intégrale est majorée par  $\frac{1}{n} \text{Max } \{|g(t)|, t \in [0,1]\}$ , quantité qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $\infty$ .

#### 4- Sous-espaces orthogonaux

**DEFINITION :**

Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  d'un espace vectoriel euclidien sont dits orthogonaux si :

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0$$

Si on est en dimension finie, il suffit de vérifier que les vecteurs d'une base de  $F$  sont orthogonaux aux vecteurs d'une base de  $G$ . Par ailleurs,  $F$  et  $G$  sont en somme directe. En effet, soit  $x$  élément de  $F \cap G$ . On a :

$$\forall y \in F, \forall z \in G, \langle y, z \rangle = 0$$

Or  $x \in F$  et  $x \in G$   
donc  $\langle x, x \rangle = 0$

**DEFINITION :**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel  $E$  euclidien de dimension finie  $n$ . On appelle orthogonal de  $F$  l'ensemble des vecteurs  $y$  de  $E$  tels que :

$$\forall x \in F, \langle x, y \rangle = 0$$

Pour appartenir à l'orthogonal de  $F$ , il suffit de vérifier l'orthogonalité avec une base de  $F$ .

Il est facile de montrer que l'orthogonal de  $F$ , noté  $F^\perp$  ou  $F^0$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , orthogonal à  $F$ . Nous allons montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

i) Nous savons déjà que  $F$  et  $F^\perp$  sont en somme directe.

ii) Nous allons maintenant montrer que  $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $F$ . Considérons l'application :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ \Phi \quad x &\rightarrow \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \langle x, e_2 \rangle \\ \dots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Phi$  est une application linéaire. Son noyau est  $F^\perp$ . Son image est  $\mathbb{R}^p$ . En effet, un antécédent de

$(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  est  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ . D'après le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \text{Ker } \Phi + \dim \text{Im } \Phi \\ \Rightarrow \dim E &= \dim F^\perp + \dim F \end{aligned}$$

La méthode précédente permet d'ailleurs de définir  $F^\perp$  par un système de  $p$  équations.

Autres propriétés : si  $F$  est inclus dans  $G$ , alors  $G^\perp$  est inclus dans  $F^\perp$ . En effet :

$$x \in G^\perp \Rightarrow \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \in F^\perp$$

Enfin,  $(F^\perp)^\perp = F$ . En effet, ces deux espaces ont même dimension et on vérifie facilement que  $F$  est inclus dans  $(F^\perp)^\perp$ .

Cette propriété est fautive en dimension infinie ce qu'on peut montrer de la façon suivante : on prend  $E = C^0([0,1])$  et  $F$  le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. On définit le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

On peut montrer que la seule fonction orthogonale à tous les polynômes est la fonction nulle. Ainsi,  $F^\perp = \{0\}$ , et  $(F^\perp)^\perp = E \neq F$

Remarque : si  $A$  est une partie quelconque de  $E$ , on peut définir  $A^\perp$  par :

$$y \in A^\perp \Leftrightarrow \forall x \in A, \langle x, y \rangle = 0.$$

$A^\perp$  est alors un sous-espace vectoriel de  $E$ . On a seulement  $A \subset (A^\perp)^\perp$

## 5- projections et symétries orthogonales

Du fait que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $F$  est un supplémentaire de  $F$ , on peut définir une projection orthogonale sur  $F$  (parallèlement à  $F^\perp$ ) et une symétrie orthogonale par rapport à  $F$  (parallèlement à  $F^\perp$ ).

Dans le cas d'un hyperplan  $H$ , orthogonal à une droite  $D$ , ces fonctions s'expriment très simplement. Soit  $u$  un vecteur unitaire orthogonal à  $H$  (vecteur directeur de la droite  $D$ ).

*Projection sur  $D$  :*  $p(x) = \langle x, u \rangle u$

*Projection sur  $H$  :*  $q(x) = x - \langle x, u \rangle u$

En effet, on peut écrire :

$$x = \underbrace{[x - \langle x, u \rangle u]}_{= v} + \underbrace{\langle x, u \rangle u}_{\in D} = q(x) + p(x)$$

$v$  est élément de  $H$ . Il suffit de prouver que  $v$  est orthogonal à  $u$  :

$$\langle v, u \rangle = \langle x, u \rangle - \langle x, u \rangle \langle u, u \rangle = 0$$

Symétrie par rapport à  $D$  :  $s_D(x) = 2\langle x, u \rangle u - x = p(x) - q(x)$

Symétrie par rapport à  $H$  :  $s_H(x) = x - 2\langle x, u \rangle u = q(x) - p(x) = -s_D(x)$

On utilise la décomposition de  $x$  précédemment mise en évidence.

Les cas précédents permettent de traiter tous les cas de symétries et de projections dans un espace de dimension 3.

Dans le cas général d'une projection orthogonale sur  $F$  ou d'une symétrie orthogonale par rapport à  $F^\perp$ , si  $(e_i)$  est une base orthonormée de  $E$  dont les  $p$  premiers vecteurs forme une base de  $F$  (et donc les  $n-p$  restants une base de  $F^\perp$ ), la matrice de la projection  $p$  et de la symétrie  $s$  sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire que, puisque  $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$  et que  $(e_1, \dots, e_p)$  forme une base de  $F$  :

$$p(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$$

La quantité  $\|x - p(x)\|$  s'appelle distance de  $x$  à  $F$ .

*Fin de la partie réservée aux MPSI, PCSI, PTSI avec option mathématiques. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.*

## **II : Automorphismes orthogonaux**

*Dans toute la suite du chapitre, en PCSI et PTSI, on se placera en dimension 2 ou 3.*

### **1- Groupe orthogonal**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension finie. On s'intéresse aux endomorphismes  $u$  qui préserve la norme, c'est-à-dire tels que :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$

De tels endomorphismes sont qualifiés d'orthogonaux ou d'isométries vectorielles. Ils disposent des propriétés suivantes :

#### **PROPRIETES :**

- i) Un opérateur orthogonal est bijectif.
- ii) Un opérateur orthogonal conserve le produit scalaire.
- iii) L'ensemble des opérateurs orthogonaux forme un groupe avec la composition des applications appelé groupe orthogonal  $O(E)$ .
- iv) Un opérateur orthogonal admet pour déterminant 1 ou  $-1$ .
- v) L'ensemble des opérateurs orthogonaux de déterminant 1 forme un sous-groupe de  $O(E)$ , appelé groupe spécial orthogonal  $SO(E)$ .
- vi) Si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable par un opérateur orthogonal  $u$ , alors  $F^\perp$  est aussi stable par  $u$ .
- vii)  $u$  est un opérateur orthogonal si et seulement si il change une base orthonormée en une base orthonormée.

Démonstration :

i) E étant de dimension finie, il suffit de montrer qu'un tel opérateur est injectif. Or :

$$u(x) = 0 \Rightarrow \|u(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

ii) Cette propriété résulte de la relation :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} [\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2]$$

$$\Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = \frac{1}{2} [\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2]$$

$$\Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = \frac{1}{2} [\|u(x + y)\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2]$$

$$\Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = \frac{1}{2} [\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2] = \langle x, y \rangle$$

En particulier, un opérateur orthogonal conserve les angles.

iii) La vérification est aisée.

iv) Si  $(e_i)$  est une base orthonormée dans laquelle  $u$  possède une matrice  $M$ , alors on a, en notant  $X$  et  $Y$  les vecteurs composantes des vecteurs  $x$  et  $y$  :

$$\langle x, y \rangle = {}^tXY$$

$$\langle u(x), u(y) \rangle = {}^t(MX)MY = {}^tX^tMMY$$

ainsi :

$$\forall X, \forall Y, {}^tXY = {}^tX^tMMY$$

$$\Rightarrow {}^tMM = \text{Id}$$

$$\Rightarrow \det({}^tMM) = 1 = \det({}^tM)\det(M) = \det(M)^2 = \det(u)^2$$

v)  $\text{SO}(E)$  est le noyau du morphisme de groupe :

$$\text{O}(E) \rightarrow \{-1, 1\}$$

$$u \rightarrow \det(u)$$

Les éléments de  $\text{SO}(E)$  sont appelées rotations ou isométrie directe. Les autres isométries sont qualifiées d'indirectes.

vi)  $x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0$ .

Or  $u(F)$  est inclus dans  $F$  et  $u$  est bijective, donc  $u(F) = F$  (il y a égalité des dimensions). On peut donc écrire :

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F, \langle x, u(y) \rangle = 0 \quad (*)$$

Comme par ailleurs,  $\langle x, y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle$ , on a :

$$x \in F^\perp \Rightarrow \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \forall y \in F, \langle u(x), u(y) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow u(x) \in F^\perp \text{ d'après } (*)$$

vii) Un opérateur orthogonal transforme une base orthonormée en une base orthonormée. Cela découle directement de ii).

Inversement, supposons qu'un opérateur  $u$  transforme une base orthonormée  $(e_i)$  en une base

orthonormée  $(\epsilon_i)$ . Si  $x = \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i$ , on a :

$$\|u(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i u(\epsilon_i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|$$

Donc  $u$  est un opérateur orthonormé.

La matrice de  $u$  dans une base orthonormée vérifie donc les propriétés suivantes : les vecteurs colonnes sont de norme 1, les colonnes sont deux à deux orthogonales.

**EXEMPLE :** Les symétries orthogonales sont des opérateurs orthogonaux. Cela est évident en utilisant la définition : Soit  $s$  symétrie orthogonale par rapport à  $F$ . On a :

$$E = F \oplus F^\perp \rightarrow E$$

$$x = y + z \rightarrow s(x) = y - z$$

$$\text{et } \|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|s(x)\|^2$$

On peut également utiliser la propriété vii. Si  $(e_i)$  est une base orthonormée de  $E$  dont les  $p$  premiers vecteurs forme une base de  $F$  (et donc les  $n-p$  restants une base de  $F^\perp$ ), la matrice de la symétrie  $s$  est  $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$  qui est la matrice d'un opérateur orthogonal. Son déterminant vaut  $(-1)^{n-p}$  et donc  $s$  appartient à  $SO(E)$  si et seulement si  $n-p$  est pair. Ainsi, certaines symétries peuvent également être classée parmi les rotations. C'est le cas en dimension 3 pour les symétries par rapport à une droite, qui peuvent être également considérées comme des demi-tours autour de cette droite. Ce type de symétries ou de rotation est appelé demi-tour ou retournement.

Soit  $H$  un hyperplan et  $s_H$  la symétrie orthogonale par rapport à  $H$ . Alors  $s_H$  s'appelle une réflexion et son déterminant vaut  $-1$ .

## 2- Groupe orthogonal en dimension 2

En dimension 2, dans une base orthonormée, la matrice d'un opérateur orthogonal est de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1$ ,  $ac+bd=0$ . Il existe donc  $\theta$  et  $\Phi$  tels que  $a = \cos\theta$ ,  $c = \sin\theta$ ,  $b = \sin\Phi$ ,  $d = \cos\Phi$ , avec  $\sin(\theta+\Phi) = 0 \Rightarrow \theta = -\Phi [2\pi]$  ou  $\theta = \pi-\Phi [2\pi]$ .

Dans le premier cas, la matrice est  $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$  de déterminant 1. C'est la rotation  $R_\theta$  d'angle  $\theta$ .

Dans le second cas, la matrice est  $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$  de déterminant  $-1$ . C'est la symétrie  $S_{\theta/2}$  par rapport à la droite faisant un angle  $\theta/2$  avec le premier vecteur de base.

On vérifiera aisément que  $R_\theta \circ R_\Phi = R_{\theta+\Phi}$  et que  $(SO(E), o)$  est isomorphe à  $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ .

Les isométries sont produit de réflexions. En effet, en dimension 2, une isométrie est soit une réflexion, soit une rotation. Soit la rotation d'angle  $\theta$  de matrice  $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ . Prenons pour  $V$  le

premier vecteur de base.  $s_H$  est la symétrie transformant  $V$  en le premier vecteur colonne. Il s'agit donc de la symétrie  $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ . La composée des deux donne  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc : } \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### 3- Groupe orthogonal en dimension 3

Soit  $u$  un endomorphisme orthogonal en dimension 3. Nous raisonnerons sur la dimension du sous-espace des vecteurs invariants par  $u$  :

□ Si  $\dim(\text{Inv}(u)) = 3$ , alors  $u = \text{Id}$ .

□ Si  $\dim(\text{Inv}(u)) = 2$ , alors  $u$  est la réflexion par rapport au plan  $\text{Inv}(u)$ . En effet, la droite orthogonale à  $\text{Inv}(u)$  est globalement invariante et son vecteur directeur, n'appartenant pas à  $\text{Inv}(u)$ , est nécessairement transformé en son opposé par  $u$ .

□ Si  $\dim(\text{Inv}(u)) = 1$ , alors le sous-espace orthogonal à  $\text{Inv}(u)$  est un plan stable par  $u$ . La restriction de  $u$  à ce plan est une isométrie de ce plan, n'admettant aucun vecteur invariant. Il s'agit donc d'une rotation, dont l'axe est la droite  $\text{Inv}(u)$ .  $u$  est la composée de deux réflexions. La matrice de  $u$  dans

une base orthonormée adaptée est  $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Si  $a$  est un vecteur directeur unitaire de l'axe et si

$x$  est dans le plan orthogonal à  $\text{Inv}(u)$ , alors  $a \wedge x$  est lui aussi dans ce plan, est orthogonal à  $x$ , de même norme, et la base  $(a, x, a \wedge x)$  est directe. L'image par  $u$  de  $x$  est alors :

$$u(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta) a \wedge x$$

Pour un vecteur  $x$  quelconque, la composante de  $x$  appartenant à l'axe (à savoir  $\langle x, a \rangle a$ ) est invariante par  $u$ , alors que la composante de  $x$  appartenant au plan (à savoir  $x - \langle x, a \rangle a$ ) est transformé selon la formule précédente. On a donc, dans le cas général :

$$\begin{aligned} u(x) &= \langle x, a \rangle a + \cos(\theta)(x - \langle x, a \rangle a) + \sin(\theta) a \wedge (x - \langle x, a \rangle a) \\ &= \cos(\theta)x + (1 - \cos(\theta))\langle x, a \rangle a + \sin(\theta) a \wedge x \end{aligned}$$

□ Si  $\dim(\text{Inv}(u)) = 0$ , remarquons d'abord que  $u + \text{Id}$  possède un noyau non nul. En effet, le polynôme  $\det(u - \lambda I)$  est de degré 3, donc admet au moins une racine réelle, mais il ne peut admettre la racine 1 puisqu'il n'y a pas de vecteurs invariants, et l'on sait que les seules racines réelles possibles sont de valeur absolue égale à 1, compte tenu de la conservation des normes par  $u$ . Soit  $V$  un vecteur de ce noyau. Soit  $H$  le plan orthogonal à  $V$ .  $s_H \circ u$  laisse alors  $V$  invariant. Il s'agit donc d'une rotation autour de la droite engendrée par  $V$  puisque celle-ci est invariante. Il ne peut s'agir de l'identité car sinon, on aurait  $u = s_H$  qui admet un plan invariant. Ainsi,  $u$  est la composée d'une rotation autour d'un axe et de la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à cet axe, cette composition étant d'ailleurs commutative. La matrice de  $u$  dans une base orthonormée adaptée est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Un cas particulier est  $u = -\text{Id}$ . Ce type d'opérateur est parfois appelé anti-rotation.

| dimension du sous-espace invariant | valeur du déterminant | nature de l'isométrie |
|------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 3                                  | 1                     | Id                    |
| 2                                  | -1                    | réflexion $s_H$       |

|   |    |                                                   |
|---|----|---------------------------------------------------|
| 1 | 1  | rotation $r$ (y compris les retournements $s_D$ ) |
| 0 | -1 | anti-rotation $r$ o $s_H$                         |

#### 4– Matrices orthogonales

On appelle matrice orthogonale la matrice  $M$  d'un automorphisme orthogonal  $u$  dans une base orthonormée. Les propriétés de telles matrices sont analogues à celles des applications correspondantes, en particulier :

##### PROPRIETES :

- i) Une matrice orthogonale est inversible.
- ii) Une matrice orthogonale vérifie  ${}^tM.M = I$
- iii) L'ensemble des matrices orthogonales  $n \times n$  forme un groupe avec le produit des matrices appelé groupe orthogonal  $O(n)$ .
- iv) Une matrice orthogonale admet pour déterminant 1 ou -1.
- v) L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 forme un sous-groupe de  $O(n)$ , appelé groupe spécial orthogonal  $SO(n)$ .
- vi) —
- vii) Une matrice est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .

La propriété ii) a été montrée dans le paragraphe 1). Elle résulte du fait que dans une base orthonormée, le produit scalaire s'exprime de la façon suivante :

$$\langle x, y \rangle = {}^tXY$$

$$\langle u(x), u(y) \rangle = {}^t(MX)MY = {}^tX{}^tMMY$$

La propriété vii signifie également que les matrices de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée sont orthogonales.

#### 5– Orientation en dimension 2

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension 2, munie d'une base orthonormée directe  $(i, j)$ . On appelle produit mixte de deux vecteurs  $u$  et  $v$  dans la base  $(i, j)$  la quantité  $\det(u, v) = \det(M)$  où  $M$  est la matrice des composantes de  $u$  et  $v$  dans la base donnée. On rappelle qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $u$  et  $v$  forment un système lié est que  $\det(u, v) = 0$ . Le produit mixte s'interprète géométriquement comme l'aire du parallélogramme défini par  $u$  et  $v$ .

Rappelons les points suivants, développés dans le chapitre relatif aux déterminants. Nous avons vu que, si on choisit une nouvelle base orthonormée, avec une matrice de passage  $P$ , le nouveau déterminant est égal au produit de  $\det(P)$  par l'ancien déterminant. Ainsi, le déterminant dépend de la base orthonormée choisie. Mais la matrice de passage entre bases orthonormées est orthogonale, et de déterminant  $\pm 1$ . De plus, si les bases ont même orientation, le déterminant est positif et vaut donc 1. Autrement dit, le déterminant ne dépend pas de la base orthonormée directe dans laquelle il est calculé. Le produit mixte ne dépend donc pas de la base directe choisie.

Si  $u$  est un opérateur orthogonal, on a  $\det(u(i), u(j)) = \det(u) \cdot \det(i, j)$ . Il résulte de cela que les rotations (élément de  $SO(E)$ ) conservent l'orientation des bases.

#### 6– Orientation en dimension 3

a) Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension 3, munie d'une base orthonormée directe  $(i, j, k)$ . On appelle produit mixte de trois vecteurs  $u, v$  et  $w$  dans la base  $(i, j, k)$  la quantité

$\det(u,v,w) = \det(M)$  où  $M$  est la matrice des composantes de  $u$ ,  $v$  et  $w$  dans la base donnée. Le produit mixte s'interprète géométriquement comme le volume du parallélépipède défini par  $u$ ,  $v$  et  $w$ . Les développements sur l'orientation en dimension 2 s'appliquent mot à mot en dimension 3. Il en résulte que le produit mixte ne dépend pas de la base directe choisie.

b) Considérons une rotation en dimension 3 d'axe la droite engendrée par  $k$ ,  $i$  et  $j$  étant une base du plan, de façon que  $(i, j, k)$  soit directe.  $(i, j)$  définit une orientation du plan. Cette orientation définit un angle de rotation  $\theta$ . Si l'on change le signe de  $k$ , alors une nouvelle base directe est  $(j, i, k)$ , de sorte que l'orientation du plan est modifiée, ainsi que l'angle de la rotation, qui devient  $-\theta$ . Ce choix est arbitraire, on ne peut parler de l'angle de la rotation que si le plan ou l'axe orthogonal au plan a été orienté. Seul le cosinus de l'angle ne dépend pas de l'orientation.

On peut procéder comme suit pour déterminer l'angle et l'axe d'une rotation  $r$  :

□ On détermine la droite invariante.

□ On choisit un vecteur  $a$  orthogonal à cette droite. On calcule  $\cos(\theta) = \frac{\langle r(a), a \rangle}{\|a\|^2}$ . Si on choisit  $\theta$  entre 0 et  $\pi$ , il suffit alors d'orienter l'axe au moyen du vecteur  $a \wedge r(a)$ .

**EXEMPLE :** Dans une base orthonormée directe, on donne la matrice d'une isométrie  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Les vecteurs invariants forme une droite engendrée par  $(1,1,1)$ . Il s'agit donc d'une rotation. Soit  $a$  de composantes  $(-1,0,1)$ , orthogonal à l'axe de rotation. Son image vaut  $r(a) = (1,-1,0)$ . L'angle entre les deux vecteurs vaut  $\frac{2\pi}{3}$  (le cosinus vaut  $-\frac{1}{2}$ ) en orientant l'axe dans le sens du vecteur  $K(1,1,1)$ . Si l'on avait pris un  $K$  opposé, on aurait défini l'angle comme étant  $-\frac{2\pi}{3}$ .

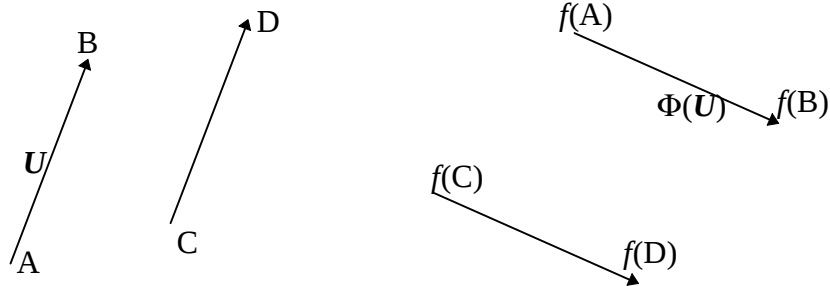
### III : Applications affines

#### 1- Définition

Une application affine  $f$  est une application d'un espace affine dans un autre et qui préserve la structure de ces espaces. Cela signifie en particulier que le parallélisme, les propriétés barycentriques, ... devront être conservés.

Soit  $U$  un vecteur égal à  $AB$  et à  $CD$ . La condition sur le parallélisme se traduit par le fait que,  $(AB)$  et  $(CD)$  étant parallèles (respectivement  $(AC)$  et  $(BD)$ ), il doit en être de même de leurs images. Ainsi le parallélogramme  $ABCD$  doit être transformé en un parallélogramme  $f(A)f(B)f(C)f(D)$ . Cela signifie entre autre que les vecteurs  $f(A)f(B)$  et  $f(C)f(D)$  sont égaux. Ces vecteurs ne dépendent donc que de  $U$  et non d'un couple de points représentant ce vecteur. Nous les noterons donc  $\Phi(U)$ . Nous avons donc :

$$f(A)f(B) = \Phi(AB)$$



Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 f(A)f(C) &= \Phi(AC) \\
 &= \Phi(AB + BC) \text{ d'une part} \\
 &= f(A)f(B) + f(B)f(C) \\
 &= \Phi(AB) + \Phi(BC) \text{ d'autre part}
 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que :

$$\Phi(U + V) = \Phi(U) + \Phi(V)$$

La condition de conservation du barycentre signifie que, si G est barycentre de  $(A, \lambda)$  et  $(B, 1-\lambda)$ , alors  $f(G)$  est barycentre de  $(f(A), \lambda)$  et  $(f(B), 1-\lambda)$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 GB &= \lambda AB \Rightarrow f(G)f(B) = \lambda f(A)f(B) \Rightarrow \Phi(GB) = \lambda \Phi(AB) \\
 \Rightarrow \Phi(\lambda AB) &= \lambda \Phi(AB).
 \end{aligned}$$

Il résulte des propriétés précédentes que  $\Phi$  est linéaire. Nous posons donc :

#### DEFINITION :

$f$  est une application affine de  $E$  dans  $F$  s'il existe une application linéaire de  $E$  dans  $F$  telle que :

$$\forall M \in A, \forall n \in A, f(M)f(N) = \Phi(MN).$$

Dans la plupart des cas, nous prendrons  $E = F$ .

Conséquences :

i) La connaissance de  $f$  ne nécessite que la connaissance de l'image d'un point donné par  $f$  et l'image d'une base de  $E$  par  $\Phi$ . La définition donnée est équivalente à :

$$f(N) = f(M) + \Phi(MN)$$

Si on note  $x$  le point  $M$  et  $b$  le vecteur  $MN$ , la relation précédente s'écrit :

$$f(x + b) = f(x) + \Phi(b)$$

Autrement dit, l'image d'un translaté de  $x$  par un vecteur  $b$  s'obtient en translatant l'image de  $x$  par  $\Phi(b)$ .

ii) Si l'on se donne, par exemple en dimension 2, un repère  $(O, i, j)$ , alors toute application affine est de la forme analytique suivante :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = \underbrace{a'x + b'y}_{\text{partie linéaire}} + c' \end{cases}$$

$\uparrow$   
 image de  $O$

Plus généralement, si on se donne une origine  $O$  permettant d'identifier le point  $N$  avec le vecteur  $\vec{ON}$ , alors  $f(N) = f(O) + \Phi(\vec{ON})$ , autrement dit, une application affine peut être vue comme la composée d'une application linéaire  $\Phi$  avec une translation de vecteur  $\vec{Of(O)}$ . Si on note  $x = N$  ou  $\vec{ON}$  et  $b = f(O)$ , on a  $f(a) = \Phi(a) + b$ .

### PROPOSITION :

La composée  $f_2 \circ f_1$  de deux applications affines  $f_1$  et  $f_2$ , associées aux applications linéaires  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  est une application affine associée à l'application linéaire  $\Phi_2 \circ \Phi_1$ .

#### Démonstration :

Posons  $M' = f_1(M)$ ,  $M'' = f_2(M')$ , et de même pour  $N$ . On a alors :

$$\begin{aligned} M''N'' &= f_2(M')f_2(N') = \Phi_2(\vec{M'N'}) = \Phi_2(f_1(\vec{MN})) = \Phi_2[\Phi_1(\vec{MN})] \\ &= \Phi_2 \circ \Phi_1(\vec{MN}). \end{aligned}$$

## 2- Exemples

i) L'application identique  $f = \text{Id}$  est une application affine associée à l'application vectorielle  $\Phi = \text{Id}$ .

ii) Inversement, si  $\Phi = \text{Id}$ , quelles sont les applications affines  $f$  qui lui sont associées ? Si  $\Phi = \text{Id}$ , alors on a :

$$\begin{aligned} f(M)f(N) &= \vec{MN} \\ \Rightarrow \vec{Mf(M)} &= \vec{Nf(N)} \end{aligned}$$

ou encore, avec d'autres notations :

$$\begin{aligned} f(N) - f(M) &= n - M \\ \Rightarrow f(N) - N &= f(M) - M \end{aligned}$$

Cela signifie qu'il existe un vecteur  $\vec{U}$  tel que, pour tout  $M$ ,  $\vec{Mf(M)} = \vec{U}$  ou encore  $f(M) = M + \vec{U}$ . Ainsi  $f$  est la translation de vecteur  $\vec{U}$ .

Une application affine est associée à l'application linéaire  $\text{Id}$  si et seulement si c'est une translation

iii) Soit  $\Phi = \lambda \text{Id}$ . Le cas  $\lambda = 1$  est traité en ii). Si  $\lambda = 0$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \forall M, \forall N, \vec{f(M)f(N)} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \forall M, \forall N, f(M) &= f(N) \text{ et } f \text{ est constante. Nous supposons désormais } \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Supposons  $\lambda \neq 1$  et  $\lambda \neq 0$ .  $\Phi$  est une homothétie vectorielle de rapport  $\lambda$ . Alors, on a :

$$\vec{f(M)f(N)} = \lambda \vec{MN} \quad (*)$$

On se pose la question de savoir si  $f$  est une homothétie affine. Cherchons donc les points fixes  $N$ , tels que  $N = f(N)$ , s'il en existe. Prenons une origine arbitraire  $M = O$  et écrivons :

$$\begin{aligned} \vec{f(O)N} &= \lambda \vec{ON} \\ \Leftrightarrow N - f(O) &= \lambda(N - O) \\ \Leftrightarrow N &= \frac{1}{1-\lambda} f(O) - \frac{\lambda}{1-\lambda} O \end{aligned}$$

Il existe donc un point fixe que nous noterons  $\Omega$ . Si nous remplaçons  $M$  par  $\Omega$  dans (\*), nous obtenons :

$$\vec{\Omega f(N)} = \lambda \vec{\Omega N}$$

ou bien  $f(N) = \Omega + \lambda \vec{\Omega N}$

$f$  est une homothétie affine de centre  $\Omega$  et de rapport  $\lambda$ .  $\Omega$  est le seul point fixe. L'identité peut être assimilée à une homothétie de centre quelconque de rapport 1. Tous les points sont invariants dans ce cas.

L'ensemble des homothéties vectorielles de rapport non nul, muni de la composition des applications, forme un groupe isomorphe à  $(\mathbb{R}^*, \times)$ . L'ensemble des applications affines qui leur sont associées, muni de la composition des applications, forme donc aussi un groupe. Cet ensemble est constitué des homothéties de centre quelconque, de rapport non nul (y compris l'identité), et des translations. Ce groupe s'appelle groupe des homothéties-translations. La nature de la composée de deux de ces applications se trouvent en regardant la composée des applications linéaires associées.

$$\text{translation\_de\_}U \circ \text{translation\_de\_}V = \text{translation\_de\_}U+V$$

$$\text{translation} \circ \text{homothétie\_de\_rapport\_}\lambda = \text{homothétie\_de\_rapport\_}\lambda$$

$$\text{homothétie\_de\_rapport\_}\alpha \circ \text{homothétie\_de\_rapport\_}\beta = \text{homothétie\_de\_rapport\_}\alpha\beta \quad \text{si } \alpha\beta \neq 1$$

$$\text{homothétie\_de\_rapport\_}\alpha \circ \text{homothétie\_de\_rapport\_}1/\alpha = \text{translation}$$

On peut chercher des sous-groupes du groupe des homothéties-translations en cherchant des sous-groupes du groupe des homothéties vectorielles, ou même de  $\mathbb{R}^*$ , par isomorphisme :

|                |                               |                                       |
|----------------|-------------------------------|---------------------------------------|
| $\mathbb{R}^*$ | {homothéties<br>vectorielles} | {homothéties–translation}             |
| {1}            | {Id}                          | {translation}                         |
| { $\pm 1$ }    | { $\pm \text{Id}$ }           | {symétries centrales<br>translations} |

etc...

**EXEMPLE :** théorème de Ménélaus

Soit un triangle ABC, et trois points distincts de A, B et C : P sur (AB), Q sur (BC) et R sur (AC). Alors P, Q et R sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$$

On considère  $u$  homothétie de centre P :  $B \rightarrow A$

$$\begin{array}{ccc} v & \text{---} & Q : C \rightarrow B \\ w & \text{---} & R : A \rightarrow C \end{array}$$

$h = u \circ v \circ w$  est donc une homothétie–translation. Comme A est invariant par  $h$ , il s'agit d'une homothétie. Son rapport est le membre de gauche de la relation demandée. Si les points P, Q et R sont alignés, la droite (PQR) est globalement invariante par  $h$  car elle l'est individuellement par  $u$ ,  $v$  et  $w$ , puisqu'elle contient le centre de chacune de ces homothéties. Or A, centre de  $h$  n'étant pas sur cette droite, la seule possibilité pour qu'elle soit invariante est que  $h = \text{Id}$ . Son rapport est donc égal à 1.

### 3– Conservation du barycentre

**PROPOSITION :**

Soit  $f$  une application affine. Si  $G$  est le barycentre des  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ , alors  $f(G)$  est le barycentre des  $(f(A_i), \lambda_i)_{i \in I}$ .

Démonstration :

Notons  $\Phi$  l'application linéaire associée à  $f$ . On peut supposer que  $\sum \lambda_i = 1$ . On a :

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i \cdot \mathbf{GA}_i = \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \Phi(\sum \lambda_i \cdot \mathbf{GA}_i) = \Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \sum \lambda_i f(\mathbf{G})f(\mathbf{A}_i) = \mathbf{0} \\ \Rightarrow & f(\mathbf{G}) \text{ est barycentre des } (f(\mathbf{A}_i), \lambda_i) \end{aligned}$$

Cette propriété se traduit donc de la façon suivante :

$$\mathbf{G} = \sum \lambda_i \mathbf{A}_i \Rightarrow f(\mathbf{G}) = \sum \lambda_i f(\mathbf{A}_i)$$

### **III : Isométries affines**

#### **1- Définition**

Les isométries sont les applications affines associées aux isométries vectorielles. Une isométrie affine associée à une isométrie vectorielle directe, élément de  $SO(E)$ , s'appelle déplacement. Une isométrie affine associée à une isométrie vectorielle indirecte s'appelle antidéplacement. Les translations sont les exemples les plus simples d'isométries affines directes.

Comme la composée d'isométries vectorielles est une isométrie vectorielle, la composée d'isométrie affine est une isométrie affine.

La composée d'une isométrie et d'une homothétie s'appelle une similitude, directe ou indirecte, suivant que l'isométrie est directe ou indirecte.

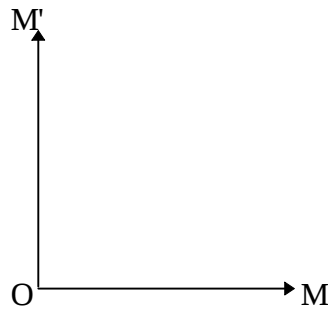
Nous utiliserons parfois le résultat suivant. Soit  $O$  un point arbitraire,  $\phi$  une application linéaire,  $f$  et  $f_0$  deux applications affines associées à  $\phi$ , telles que  $O$  soit invariant par  $f_0$ . Alors  $f$  est la composée d'une translation de vecteur  $\mathbf{Of(O)}$  et de  $f_0$ . En effet :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{M}) &= f(\mathbf{O}) + \phi(\mathbf{OM}) = f(\mathbf{O}) + \mathbf{f_0(O)f_0(M)} = f(\mathbf{O}) + f_0(\mathbf{M}) - f_0(\mathbf{O}) = f(\mathbf{O}) + f_0(\mathbf{M}) - \mathbf{O} \\ \Rightarrow f(\mathbf{M}) &= f_0(\mathbf{M}) + \mathbf{Of(O)} \text{ (i.e. } \mathbf{f_0(M)f(M)} = \mathbf{Of(O)}) \end{aligned}$$

On peut aussi voir ce résultat sous la forme suivante :  $t_{f(O)O} \circ f$  laisse  $O$  invariant.

De même,  $f \circ t_{f(O)O}$  laisse  $f(O)$  invariant.

Dans la figure ci-dessous,  $f_0$  est la rotation affine de centre  $O$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$  qui transforme le point  $M$  en le point  $M'$ .  $\Phi$  est la rotation vectorielle qui transforme le vecteur  $\mathbf{OM}$  en le vecteur  $\mathbf{OM'}$ . On voit donc que la seule différence entre  $f_0$  et  $\Phi$  réside uniquement dans le fait de savoir si on considère les objets que l'on traite comme des points ou comme des vecteurs. Quant à  $f$ , c'est la composée de  $f_0$  par une translation.



## 2- Isométries du plan

Voici des exemples d'isométries du plan :

- ☐ les translations
- ☐ les rotations de centre  $\Omega$ , d'angle  $\theta$ . A tout  $M$ , on associe  $N$  tel que  $\Omega N$  soit l'image de  $\Omega M$  par la rotation vectorielle d'angle  $\theta$ .
- ☐ les symétries orthogonales par rapport à une droite affine (parallèlement à une droite orthogonale à cette droite). Ces symétries s'appellent aussi réflexions affines. Si on se donne deux points distincts  $A$  et  $B$  du plan, il existe une et une seule réflexion affine échangeant  $A$  et  $B$ , c'est la réflexion par rapport à la médiatrice de  $[AB]$ .
- ☐ Les composées d'une telle réflexion avec une translation parallèlement à son axe (symétrie glissée).

Les déplacements sont les isométries affines associées à une rotation. Soit  $r$  une rotation vectorielle d'angle  $\theta$ , et soit  $f_0$  la rotation affine d'angle  $\theta$  de centre un point arbitraire noté  $O$ .  $f_0$  est ainsi associée à  $r$ . Soit  $f$  un déplacement associé à  $r$ . Quelle est la nature de  $f$  ?  $f$  est la composée de  $f_0$  et de la translation de vecteur  $U = Of(O)$ . Si nous supposons que  $f_0$  n'est pas l'identité (rotation d'angle nul), alors nous allons prouver que  $f$  est une rotation affine. Pour cela, nous cherchons les points  $\Omega$  invariants. Ils vérifient :

$$\begin{aligned}\Omega &= f(\Omega) = f(O) + r(O\Omega) \\ \Rightarrow f(O)\Omega &= r(Of(O) + f(O)\Omega) \\ \Rightarrow (\text{Id} - r)(f(O)\Omega) &= r(Of(O))\end{aligned}$$

Si  $r$  n'est pas l'identité, l'application  $\text{Id} - r$  est injective (comme on peut le vérifier en cherchant son noyau), donc bijective et il existe donc un unique vecteur dont l'image par  $\text{Id} - r$  est  $r(Of(O))$ . Il existe donc un unique point fixe  $\Omega$ . On a alors :

$$\Omega f(M) = f(\Omega) f(M) = r(\Omega M)$$

ce qui prouve que  $f$  est bien une rotation de centre  $\Omega$ .

On en déduit que les déplacements sont :

- ☐ les translations.
- ☐ les rotations.

Toute isométrie est composée de réflexions. En effet, soit  $O$  un point fixé du plan affine. Toute isométrie  $f$  est la composée d'une isométrie  $f_0$  laissant  $O$  invariant et d'une translation. En ce qui concerne  $f_0$ , sa décomposition comme produit de réflexions affine laissant invariant  $O$  est comparable à la décomposition de l'isométrie vectorielle  $\Phi$  associée en produit de réflexions, comme nous l'avons vu dans le II-2). Il suffit donc de montrer qu'une translation est engendrée par des réflexions. C'est effectivement le cas. Deux réflexions par rapport à  $D$  et  $D'$  droites parallèles telles que  $D'$  se déduisent de  $D$  par une translation de vecteur  $u$ , orthogonal à  $D$  sont telles que :

$$S_D \circ S_{D'} = t_{2u}.$$

Il suffit, pour montrer cela, de voir que l'application linéaire associée à la composée est l'identité, pour conclure que la composée est une translation et de chercher l'image d'un point particulier.

### 3– Isométries de l'espace

On rappelle que les isométries vectorielles de l'espace sont :

- les réflexions (symétries orthogonales par rapport à un plan)
- les rotations autour d'une droite (et en particulier l'identité et les demi-tours)
- les anti-rotations, composée d'une rotation et d'une réflexion.

Comme dans le plan, si  $O$  est un point donné de l'espace, nous pouvons considérer toute isométrie comme la composée d'une isométrie laissant invariant  $O$ , associée à une isométrie vectorielle précédemment décrite, et d'une translation.

Considérons la composée  $f$  d'une rotation d'angle non nul autour d'une droite  $D$ , et d'une translation de vecteur  $U$ , non nul. Deux cas particuliers sont à étudier :

□  $U$  est orthogonal à  $D$ . Dans ce cas, tout plan orthogonal à  $D$  est globalement invariant, et d'après l'étude des isométries dans le plan, la composée est une rotation. Si  $\Omega$  est un point invariant dans un plan, alors la droite parallèle à  $D$  et passant par  $\Omega$  est invariante dans l'espace. En effet, si  $M$  est un point de cette droite, on a :

$$\Omega f(M) = f(\Omega) f(M) = r(\Omega M) = \Omega M \text{ où } r \text{ est la rotation vectorielle associée.}$$

□  $U$  est parallèle à  $D$ . Alors il n'y a aucun point invariant. On obtient un vissage.

Dans le cas général, tout vecteur pouvant se décomposer en la somme de deux vecteurs correspondants aux cas décrits précédemment, on voit que tout déplacement (toute application affine associée à une rotation) est un vissage (et éventuellement une translation si l'angle de la rotation est nulle, et une rotation si le vecteur de translation est nul). L'axe du vissage est caractérisé par le fait d'être stable (ou globalement invariante) par  $f$ . Si le vecteur de translation est nul et si l'angle de rotation vaut  $\pi$ , on a un demi-tour. Il s'agit également de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe. On remarque que la rotation et la translation de vecteur parallèle à l'axe de la rotation commutent.

Les déplacements de l'espace sont donc constitués des vissages, avec comme cas particuliers, les rotations et les translations.

### 4– Similitudes

Une similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport non nul. Les similitudes sont caractérisées par le fait qu'elles multiplient les distances dans un rapport donné, appelé rapport de la similitude. Si ce rapport vaut 1, il s'agit d'une isométrie. Une similitude conserve les angles. La similitude est dite directe (respectivement indirecte) si l'isométrie est directe (respectivement indirecte).

Dans le cas du plan, les similitudes directes peuvent être étudiées au moyen des complexes. On dispose des transformations suivantes :

i)  $z \rightarrow e^{i\theta} z$  rotation de centre  $O$  d'angle  $\theta$

ii)  $z \rightarrow rz, r \in \mathbb{R}$  homothétie de centre  $O$  de rapport  $r$ , si  $r \neq 0$ , ou application constante nulle si  $r = 0$ .

iii)  $z \rightarrow z + b, b \in \mathbb{C}$  translation de vecteur  $b$

La composition de i) et ii) donne les transformations  $z \rightarrow az$ , similitude directe de centre O, de rapport  $r = |a|$  et d'angle  $\theta = \arg(a)$ , si  $r \neq 0$ , ou application constante nulle si  $r = 0$ .

Les applications précédentes sont de la forme  $f : z \rightarrow az+b$ , avec  $a$  non nul. Etudions ces applications. Possèdent-elles des points invariants ?

$$az + b = z \Leftrightarrow z(1-a) = b$$

Si  $a = 1$ , alors si  $b = 0$ , tous les points sont invariants ;  $f = \text{Id}$ .

si  $b \neq 0$ , aucun point n'est invariant ;  $f$  est la translation de vecteur  $b$ .

Si  $a \neq 1$ , il y a un point invariant unique  $z_0 = \frac{b}{1-a}$ . On a alors :

$$f(z) - z_0 = az + b - z_0 = az - az_0 = a(z - z_0)$$

Si  $a \neq 0$ ,  $f$  est la similitude de centre  $z_0$ , de rapport  $|a|$ , d'angle  $\arg(a)$ . En particulier, si  $\arg(a) = 0$  ou  $\pi$ , alors on dispose d'une homothétie de centre  $z_0$ . Si  $a$  est de module 1, on a une rotation de centre  $z_0$ .

|            | $a = 1$     | $a \in \mathbb{R}^*$ | $ a  = 1$ | autres $a$ |
|------------|-------------|----------------------|-----------|------------|
| $b = 0$    | Identité    | homothétie           | rotation  | autre      |
| autres $b$ | translation |                      |           | similitude |

Etudions maintenant la composée de telles applications. Notons  $f_{a,b}$  l'application définie par :

$$f_{a,b}(z) = az + b$$

et soit  $G = \{f_{a,b} \mid a \neq 0\}$ , muni de la composition des applications. Considérons également  $G' = \{(a,b) \mid a \neq 0\}$ .

On peut munir  $G'$  d'une loi de façon que  $G$  et  $G'$  soit isomorphes, au moyen de l'isomorphisme suivant :

$$G \rightarrow G'$$

$$f_{a,b} \rightarrow (a,b)$$

$$\text{On a } f_{a,b} \circ f_{c,d}(z) = f_{a,b}(cz + d) = acz + ad + b = f_{ac,ad+b}(z)$$

Posons donc  $(a,b) * (c,d) = (ac,ad+b)$ . On réalise ainsi un isomorphisme entre  $(G,o)$  et  $(G',*)$ .

$*$  est interne et il en est donc de même de  $o$ . La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

$o$  est associative, donc  $*$  aussi

Id est le neutre de  $o$ , donc  $(1,0)$  est le neutre de  $*$

Le symétrique de  $(a,b)$  est  $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$  ce qui définit l'inverse de la similitude  $f_{a,b}$ .

On dispose donc de deux groupes isomorphes. Ces deux groupes sont également isomorphes au groupe des matrices suivantes, muni du produit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le groupe  $(G',*)$  permet également de voir facilement que la composée de deux similitudes de rapport  $a$  et  $\frac{1}{a}$  est une translation.

Ces groupes admettent comme sous-groupe le groupe des homothéties-translations, obtenues pour  $a$  réel.

La structure de groupe permet de montrer que l'on a obtenu **toutes** les similitudes directes. Une similitude directe quelconque est en effet la composée d'une translation ( $z \rightarrow z + b$ ) ou d'une rotation quelconque ( $z \rightarrow a(z - z_0) + z_0$  avec  $a$  de module 1) et d'une homothétie de rapport non nul ( $z \rightarrow r(z - z_1) + z_1$  avec  $r$  réel). La composée de ces fonctions est bien de la forme étudiée.

**PROPOSITION :**

Soit  $[A,B]$  et  $[A',B']$  deux segments distincts de longueur non nulle. Il existe une similitude directe et une seule transformant  $A$  en  $A'$  et  $B$  en  $B'$ .

Démonstration :

On cherche en effet  $a$  et  $b$  tels que :

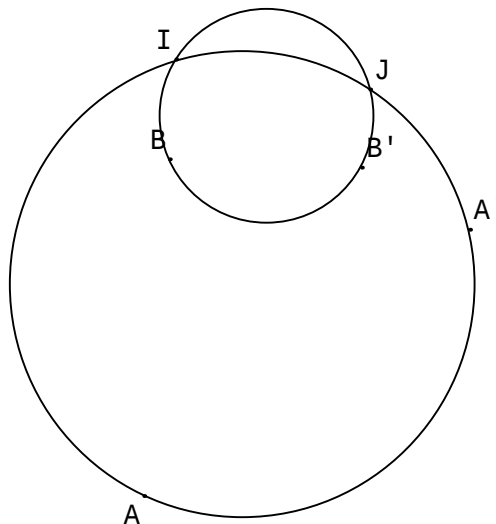
$$\begin{cases} Z_{A'} = aZ_A + b \\ Z_{B'} = aZ_B + b \end{cases}$$

Ce système admet comme solution unique :

$$a = \frac{Z_{A'} - Z_{B'}}{Z_A - Z_B} \text{ et } b = \frac{Z_A Z_{B'} - Z_B Z_{A'}}{Z_A - Z_B}$$

avec  $a$  non nul.

Cette similitude a évidemment pour rapport  $\frac{A'B'}{AB}$  et pour angle  $(AB, A'B')$ , mais comment trouver géométriquement son centre ? Nous nous intéresserons d'abord au cas le plus général, où  $(AB)$  et  $(A'B')$  se coupent en un point  $I$ , distinct de  $A, B, A', B'$ .



Considérons les cercles  $(AA'I)$  et  $(BB'I)$  qui se coupent en un autre point  $J$ . Nous allons montrer que le centre de la similitude est  $J$ .

$$\text{On a } (\mathbf{IA}, \mathbf{IA}') = (\mathbf{IB}, \mathbf{IB}') = (\mathbf{AB}, \mathbf{A'B'}) \text{ modulo } \pi$$

Or le centre  $\Omega$  de la similitude vérifie également :

$$(\mathbf{\Omega A}, \mathbf{\Omega A'}) = (\mathbf{\Omega B}, \mathbf{\Omega B'}) = (\mathbf{AB}, \mathbf{A'B'}) \text{ modulo } \pi = \text{angle de la similitude}$$

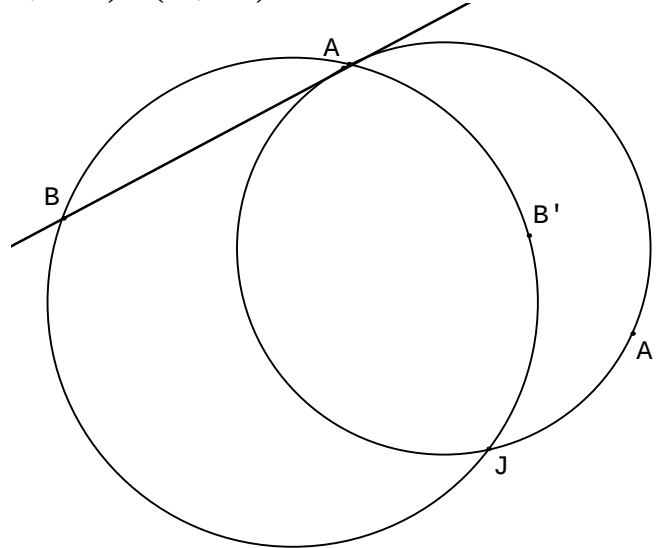
Donc  $\Omega$  appartient au cercle  $(AA'I)$  et au cercle  $(BB'I)$ . Il s'agit donc de  $I$  ou de  $J$ . Supposons que  $I$  soit le point recherché. Posons :

$$\mathbf{IB} = \lambda \mathbf{IA}$$

En appliquant la similitude, on en déduit que  $IB' = \lambda IA'$ , donc  $BB' = \lambda AA'$  et les droites  $(BB')$  et  $(AA')$  sont parallèles. Cela signifie que  $B'$  et  $A'$  sont respectivement les images de  $B$  et  $A$  par une homothétie de centre  $I$ . Il en est de même des cercles  $(IAA')$  et  $(IBB')$ . Ces deux cercles sont donc tangents en  $I$ , et  $I = J$ . On en conclut donc, que, si  $I$  et  $J$  sont distincts,  $\Omega$  est égal à  $J$ .

Dans le cas où  $I$  est égal à  $A$ , par exemple, on a toujours :

$$(\Omega B, \Omega B') = (AB, A'B') = (IB, IB') \text{ modulo } \pi$$



dont  $\Omega$  appartient au cercle  $(IBB')$  et :

$$(\Omega A, \Omega A') = (AB, A'B') = (IB, IA') \text{ modulo } \pi$$

donc  $\Omega$  appartient au cercle passant par  $I$  et  $A'$  et tangent en  $I$  à  $(IB)$ . Une similitude de centre  $I$  ne peut changer  $A$  en  $A'$ , donc le centre cherché est en  $J$ , autre point d'intersection des deux cercles.

### **Annexe 1 : isométries laissant invariant le tétraèdre régulier**

Une isométrie laissant invariant le tétraèdre régulier permute les quatre sommets. Inversement, soit une permutation des quatre sommets, trouver une isométrie  $f$  correspondant à cette permutation.

On dénombre 24 isométries, dont 12 directes.

□ Si les quatre points sont invariants,  $f = \text{Id}$ .

□ Si un seul point est invariant, les trois autres sont permutés. Il s'agit d'une rotation dont l'axe passe par la hauteur contenant le point invariant et d'angle  $\pm \frac{\pi}{3}$ . Il existe 8 telles permutations.

Notons  $r_A$  la rotation laissant  $A$  invariant, d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

□ Si deux points  $A$  et  $B$  sont invariants, les deux autres  $C$  et  $D$  étant permutés,  $f$  est la symétrie orthogonale par rapport au plan passant par  $A$  et  $B$  et le milieu de  $[C,D]$ . Il y a 6 telles permutations. Notons  $s_{AB}$  cette réflexion.

□ Si  $A$  et  $B$  sont permutés entre eux, de même que  $C$  et  $D$ , il s'agit du demi-tour d'axe la droite passant par le milieu de  $[A,B]$  et de  $[C,D]$ . Il y a 3 telles permutations. Notons  $d_{AB,CD}$  ce demi-tour.

□ Il reste 6 permutations circulaires, par exemple  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ . On peut les considérer comme la composée d'une rotation par rapport à la hauteur passant par A, qui permute  $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ , et de la réflexion par rapport au plan passant par C, D et le milieu de [A,B]. Il s'agit donc d'un anti-déplacement. Il existe un point invariant G, centre du tétraèdre qui appartient à l'axe de la rotation et au plan de réflexion. Il s'agit donc d'une réflexion ou d'une anti-rotation. Il ne peut s'agir d'une réflexion car  $f \circ f \neq \text{Id}$ . Il s'agit donc d'une antirotation. Puisque  $f \circ f \circ f \circ f = \text{Id}$ , l'angle de l'anti-rotation est  $\frac{\pi}{4}$ . On remarque que l'isométrie permute circulairement les milieux de [A,B], [B,C], [C,D], et [D,A]. Mais ces quatre points sont coplanaires et le plan les contenant est globalement invariant. Il s'agit donc du plan de l'anti-rotation. Notons  $a_{ABCD}$  cet anti-rotation.

Ayant trouvé 24 isométries, cela prouve que le groupe des isométries du tétraèdre est bien isomorphe au groupe des permutations de {A,B,C,D}

On s'entraînera à effectuer quelques comparaisons, par exemple :

Groupe des isométries

$$r_A \circ r_B = r_D^{-1}$$

$$r_A \circ s_{AB} = s_{AD}$$

$$r_A \circ s_{BC} = a_{ABCD}$$

$$s_{AB} \circ d_{AC,BD} = a_{ADBC}$$

isométries directes

isométries indirectes

déterminant

Groupe des permutations

$$(BCD)(CAD) = (ABC)$$

$$(BCD)(CD) = (BC)$$

$$(BCD)(AD) = (ABCD)$$

$$(CD)(AC)(BD) = (ADBC)$$

permutations paires

permutations impaires

signature

## Annexe 2 : isométries laissant invariant le cube

Il existe 48 isométries. En effet, si l'on se donne un sommet A et trois vecteurs  $i, j$  et  $k$  portés par les côtés du carrés, il y a huit images possibles pour A, 3 pour  $i$ , 2 pour  $j$ . Le cube image peut alors être reconstitué de manière unique. Parmi ces isométries, 24 sont directes et 24 sont indirectes. En effet, si  $s_0$  est la symétrie par rapport au centre du cube, l'application  $f \rightarrow s_0 \circ f$  réalise une bijection entre les isométries directes et les isométries indirectes.

Il suffit donc de trouver les 24 rotations. On a :

□ l'identité

□ 6 rotations d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , d'axe passant par les centres de deux faces opposées.

□ 3 demi-tours d'axe passant par les centres de deux faces opposées.

□ 6 demi-tours d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées.

□ 8 rotation d'angle  $\pm \frac{2\pi}{3}$  d'axe les diagonales du cube.

Les antidéplacements sont :

□ la symétrie  $s_0$  par rapport au centre O du cube.

□ 6 anti-rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  par rapport au plan médiateur de quatre côtés parallèles du cube.

□ 3 réflexions par rapport au plan médiateur de quatre côtés parallèles du cube.

□ 6 réflexions par rapport au plan contenant deux côtés opposés.

□ 8 anti-rotations d'angle  $\frac{\pi}{3}$ , d'axe les diagonales, par rapport au plan orthogonal à la diagonale, passant par O. Ce plan coupe les côtés du cube selon un hexagone.

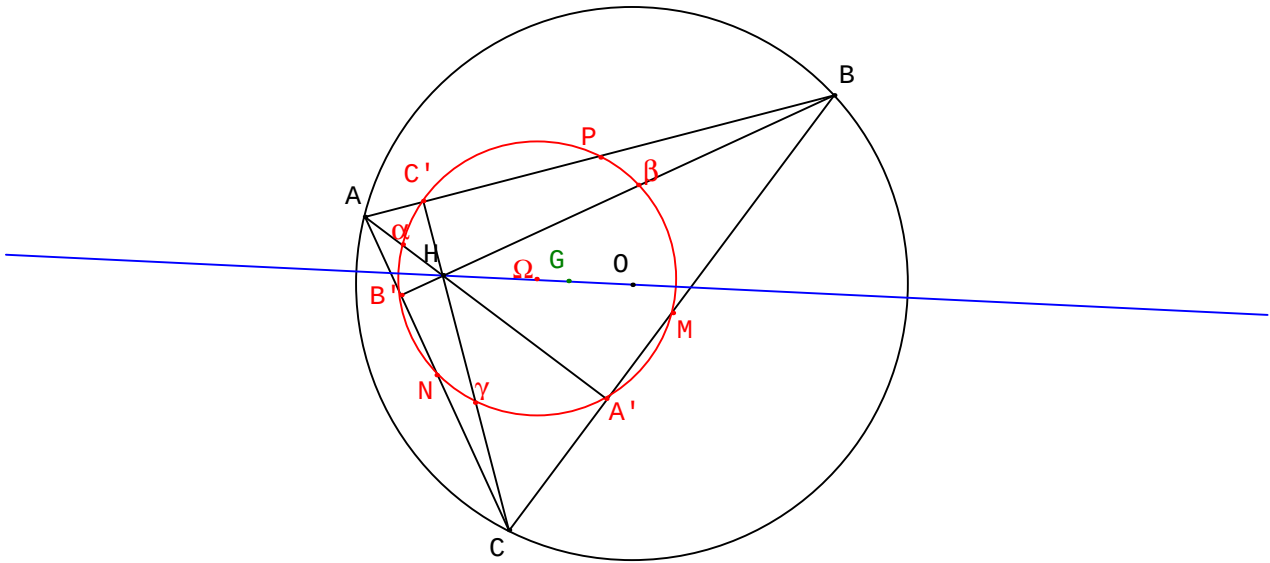
### Annexe 3 : le cercle des neufs points d'Euler

Soit un cercle circonscrit à un triangle ABC. Notons M, N, P les milieux des côtés respectivement opposés à A, B, C. On appelle cercle d'Euler le cercle passant par M, N, P. Soit O le centre du cercle initial, H l'orthocentre de ABC, G son centre de gravité,  $\Omega$  le centre du cercle d'Euler. Notons A', B' et C' les pieds des hauteurs du triangle ABC. Soient enfin  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les milieux de [A,H], [B,H] et [C,H]. Nous allons montrer que :

les quatre points O, G, H,  $\Omega$  sont alignés.

$\Omega$  est le milieu de [O,H]

A', B', C' ainsi que  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  appartiennent tous au cercle d'Euler



Soit en effet  $h_G$  l'homothétie de centre G de rapport  $-\frac{1}{2}$ .  $h_G$  transforme les objets de la façon suivante :

|                        |   |                    |
|------------------------|---|--------------------|
| A                      | → | M                  |
| B                      | → | N                  |
| C                      | → | P                  |
| Cercle circonscrit ABC | → | Cercle d'Euler MNP |

|                                |                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| Rayon du cercle circonscrit    | → Rayon du cercle d'Euler           |
| Orthocentre H de ABC           | → Orthocentre O de MNP              |
| O centre du cercle circonscrit | → $\Omega$ centre du cercle d'Euler |

Il résulte des propriétés de l'homothétie (de centre G, de rapport  $\frac{1}{2}$ ) que :

- ☐ Le rayon du cercle d'Euler est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit.
- ☐ O, G, H sont alignés et  $\vec{GO} = -\frac{1}{2}\vec{GH}$ .
- ☐ De même,  $\vec{G\Omega} = -\frac{1}{2}\vec{GO}$
- ☐ En retranchant membre à membre les deux égalités précédentes, on obtient :  
 $\vec{O\Omega} = -\frac{1}{2}\vec{HO} = \frac{1}{2}\vec{OH}$ , ce qui signifie que le centre  $\Omega$  du cercle d'Euler est au milieu de

[O,H].

☐ Les points M, N, P, A', B', C' appartiennent au cercle d'Euler. En effet, si l'on considère la projection orthogonale sur (BC), H se projette en A', O en M et  $\Omega$  milieu de [O,H] en le milieu de [M,A'], ce qui signifie que  $\Omega$  est sur la médiatrice de [M,A'], et donc que  $M\Omega = \Omega A'$ .

En considérant maintenant  $h_H$  homothétie de centre H de rapport  $\frac{1}{2}$ , on a :

|                                  |   |                                   |
|----------------------------------|---|-----------------------------------|
| A                                | → | $\alpha$                          |
| B                                | → | $\beta$                           |
| C                                | → | $\gamma$                          |
| O                                | → | $\Omega$                          |
| Rayon du cercle circonscrit      | → | Rayon du cercle d'Euler           |
| ⇒ Cercle circonscrit de centre O | → | Cercle d'Euler de centre $\Omega$ |

Il en résulte que :

- ☐ Les points  $\alpha, \beta, \gamma$  appartiennent au cercle d'Euler
- ☐ Les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit. En effet, l'image de ces symétriques par  $h_H$  n'est autre que A', B' et C' qui appartiennent au cercle d'Euler. Les symétriques, antécédents de ces points par  $h_H$ , appartiennent donc au cercle circonscrit.