Chapitre V :

Caractéristiques géométriques des figures planes

Christian HUYGENS (14 avril 1629 - 8 juillet 1695 à La Haye)
Un mathématicien, un astronome et un physicien néerlandais.

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

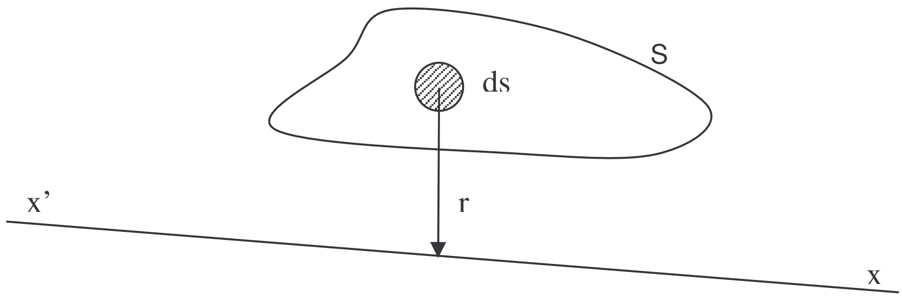
Sommaire

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

Lors de l'étude de la torsion d'un cylindre ou de la flexion d'une poutre, nous verrons parvenir la surface de la section droite de ce cylindre ou de cette poutre, non directement, mais par l'intermédiaire de grandeurs appelées moments.

1. Moment statique d'une surface plane par rapport à un axe

On considère une surface plane (S) et un axe x'x. Soit ds une petite surface élémentaire à l'intérieur de (S)



1/ On appelle moment statique de élément ds par rapport à x'x, le produit ds affecté du signe (+) ou (-) selon que (S) est d'un côté ou de l'autre de x'x.

2/ On appelle moment statique d'une surface plane (S), par rapport à un axe x'x, la somme algébrique des moments statique de toutes les surface élémentaires :

$$M_s = \sum_i r_i ds_i$$

D'une manière générale, le moment statique s'écrit

$$M_s = \int_s r ds$$

Le centre de gravité de la surface est un point G tel que par rapport à un axe quelconque passant par ce point, le moment statique est nul :

$$\int_s \overrightarrow{GP}.ds = 0$$

Le point G a pour coordonnées :

$$X_G = \frac{1}{G}\int_s x ds$$

$$Y_G = \frac{1}{G}\int_s y ds$$

Si on prend l'axe des y du repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$ pour l'axe x'x on aura :

$$\int_s x ds = \int_s r ds = M_s = X_G . S$$

D'où :

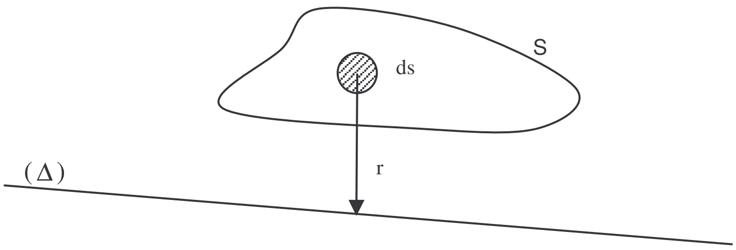
Le moment statique d'une aire plane par rapport à un axe (Δ), est égale au produit de S (surface) par la distance d_G de son centre de gravité G à l'axe (Δ).

$$M_S = d_G . S$$

2. Moment d'inertie des aires planes

On appelle moment d'inertie de l'aire S par rapport à l'axe (Δ), la quantité :

$$I_\Delta = \int_s r^2 ds$$



2.1. Rayon de giration

On appelle rayon de giration de l'aire S autour de l'axe Δ, la quantité r_Δ telle que :

$$r_\Delta^2 = \frac{I_\Delta}{S}$$

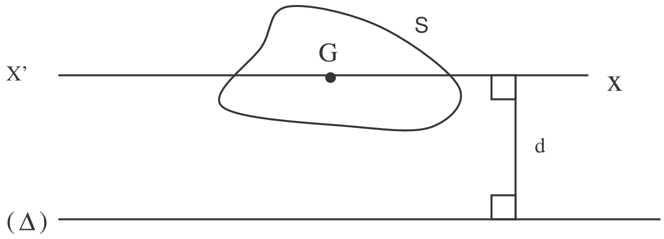
2.2. Théorème de HUYGHENS

Le moment d'inertie d'une surface plane S par rapport à un axe quelconque Δ de son plan est égal à la somme :

- du moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe x'x , parallèle à l'axe Δ et passant par son centre de gravité G ;
- du produit de cette surface par le carré de la distance d des deux axes.

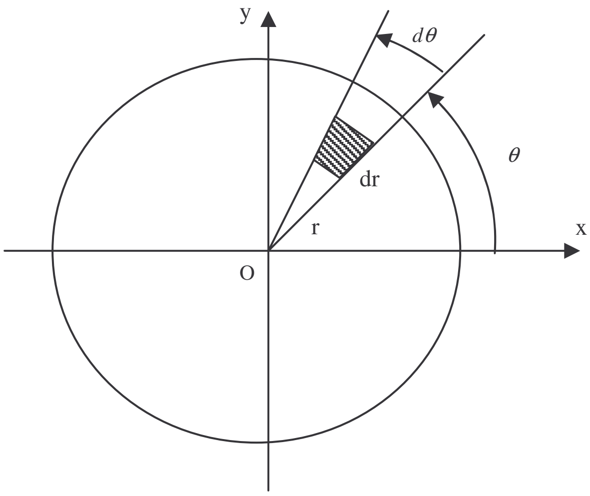
$$I_\Delta = I_{x'x} + Sd^2$$

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science



3. Application

Calculer le moment d'inertie d'une section circulaire par rapport à un diamètre D



Solution :

$$I_D = I_x = I_y$$

$$I_D = \int_S y^2 ds = \int_S x^2 ds$$

Avec $ds = rdr.d\theta$, $y = r\sin\theta$ et $x = r\cos\theta$

$$I_D = \int_0^{2\pi}\int_0^{D/2} r^3 dr \cos^2\theta . d\theta = \frac{\pi D^4}{64}$$

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science