Chapitre

GENERALITES SUR LE FILTRAGE

I-1 Définitions :

Nous commençons notre étude par les définitions et les explications de quelques grandeurs caractéristiques relatives aux actions de filtrage :

I-1-1Filtre :

Un filtre est un circuit électrique qui a pour but de laisser, dans un spectre de fréquence donné une certaine bande de fréquence en éliminant les autres.

D'une manière générale, on dira qu'un filtre électrique est un circuit qui apporte une modification à l'amplitude ou à la phase des composantes spectrales d'un signal.

Un filtre est donc un sélecteur de fréquence.

Un filtre sera vu aussi comme un quadripôle chargé de sélectionner une certaine gamme de fréquence :

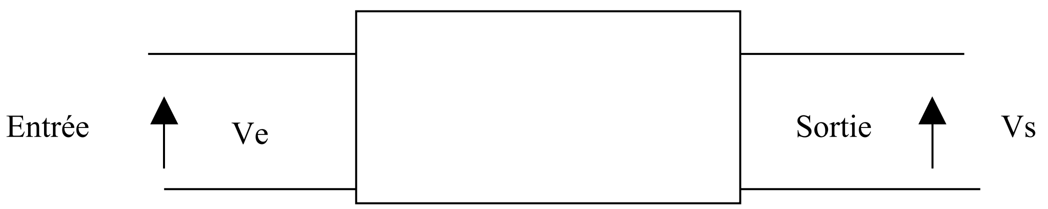


Figure I-1

La fonction de transfert en régime harmonique est donnée par :

$$H(p) = \frac{Vs(p)}{Ve(p)} \qquad \text{(I-1)}$$

p =jω

ω :Pulsation du signal

Le gain est représenté par :

$$G = 20\log\left|H(p)\right| \ [dB] \qquad \text{(I-2)}$$

On peut distinguer quatre types de filtre selon leurs fonctions :

- **Filtre passe bas :**

Ces filtres ne transmettent que les fréquences basses du spectre et éliminent les signaux à fréquences élevées.

Un filtre passe bas a une bande passante dans l'intervalle de fréquence $\left[0, \omega_p\right]$,et une bande coupée définie par l'intervalle $\left[\omega_b, \infty\right[$ avec $\omega_b > \omega_p$.

- **Filtre passe haut :**

Ces filtres laissent passer tous les signaux en dessus d'une certaine fréquence et suppriment le mieux possible ceux situés au-delà

Un filtre passe haut possède une bande coupée définie par l'intervalle $\left[0, \omega_p\right[$,et une bande passante $\left[\omega_b, \infty\right[$,avec $\omega_p < \omega_b$

- **Filtre passe bande :**

Ces filtres transmettent une unique bande de fréquences.

Un filtre passe bande possède une bande passante $\left[\omega_{ap}, \omega_{bp}\right]$, encadrée par deux bandes coupées $\left[0, \omega_{ab}\right]$ et $\left[\omega_{bb}, \infty\right[$ avec $\omega_{ab} < \omega_{ap}$ et $\omega_{bp} < \omega_{bb}$

- **Filtre coupe bande :**

Ces filtres laissent passer l'ensemble du spectre à l'exclusion d'une bande bien déterminée.

Un filtre coupe bande a une bande coupée définie par l'intervalle $\left[\omega_{ab}, \omega_{bb}\right]$ encadrée par deux bandes passantes $\left[0, \omega_{ap}\right[$ et $\left[\omega_{bp}, \infty\right[$

avec $\omega_{ap} < \omega_{ab}$ et $\omega_{bb} < \omega_{bp}$

- **Bande passante :**

On appelle « bande passante » ou « bande transmise »l'intervalle de fréquence où les composantes du signal sont transmises.

D'une autre façon, c'est l'intervalle où l'affaiblissement varie peu par rapport à celui de la bande bloquée.

- **Bande coupée :**

On appelle « bande bloquée » ou « bande coupée » l'intervalle de fréquence où les composantes du signal sont éliminées, on peut dire aussi que c'est l'intervalle de fréquence où l'affaiblissement est grand par rapport à celui de la bande passante.

- **Fréquence de coupure :**

Fréquence pour laquelle le signal de sortie subit une atténuation (en général une atténuation de 3db)

- **Gabarit :**

C'est un diagramme qui représente les conditions nécessaires à la réalisation d'un filtre ;

Ces conditions sont :

  - La fréquence de coupure
  - Le dépassement toléré, c'est-à-dire l'augmentation du gain de l'ensemble dans la bande passante.
  - L'atténuation minimale à partir d'une fréquence donnée f_o dans la bande bloquée.

- **Exemple de gabarit d'un filtre :**

Gabarit d'un filtre coupe bande :

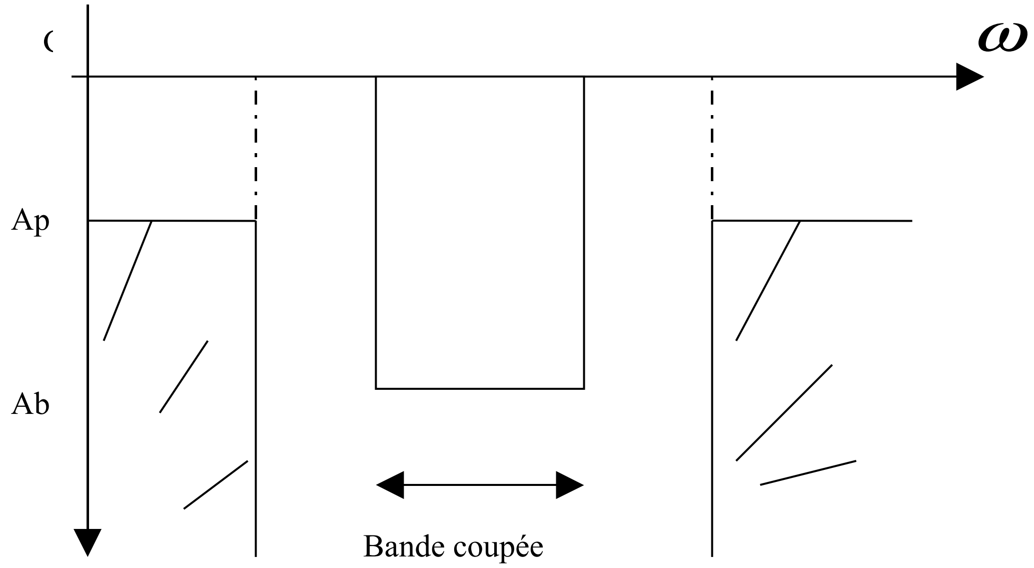


Figure I -2

Désignation des paramètres :

A_P : affaiblissement maximal admissible en bande passante.

A_b : affaiblissement minimal exigé en bande bloquante.

ω_{ap} : Dernière pulsation passante

ω_{bp} : Première pulsation passante

ω_{ab} : Première pulsation atténuée

ω_{bb} : Dernière pulsation atténuée

A_p : Affaiblissement maximal admissible en bande passante

A_b : Affaiblissement minimal exigé en bande coupée

- **Facteur de sélectivité :**

On définit alors la sélectivité par :

$K = \frac{\omega_p}{\omega_b}$ Pour un filtre passe bas

$K = \frac{\omega_b}{\omega_p}$ Pour un filtre passe haut

$K = \frac{\Delta\omega_p}{\Delta\omega_b}$ Pour un filtre passe bande

$K = \frac{\Delta\omega_b}{\Delta\omega_p}$ Pour un filtre coupe bande

C'est le facteur K avec A_P et A_b qui détermine la raideur minimale que la courbe doit avoir dans la zone de transition.

- **Largeur de la bande relative :**

On définit la largeur de la bande relative par :

$B_r = \frac{\Delta\omega_p}{\omega_0} = \frac{\Delta f_p}{f_o}$ pour un filtre passe bande

$B_r = \frac{\Delta\omega_b}{\omega_0} = \frac{\Delta f_b}{f_o}$ pour un filtre coupe bande

Avec : $\omega_0 = \sqrt{(\omega_{ap}\omega_{bp})} = \sqrt{(\omega_{ab}\omega_{bb})}$

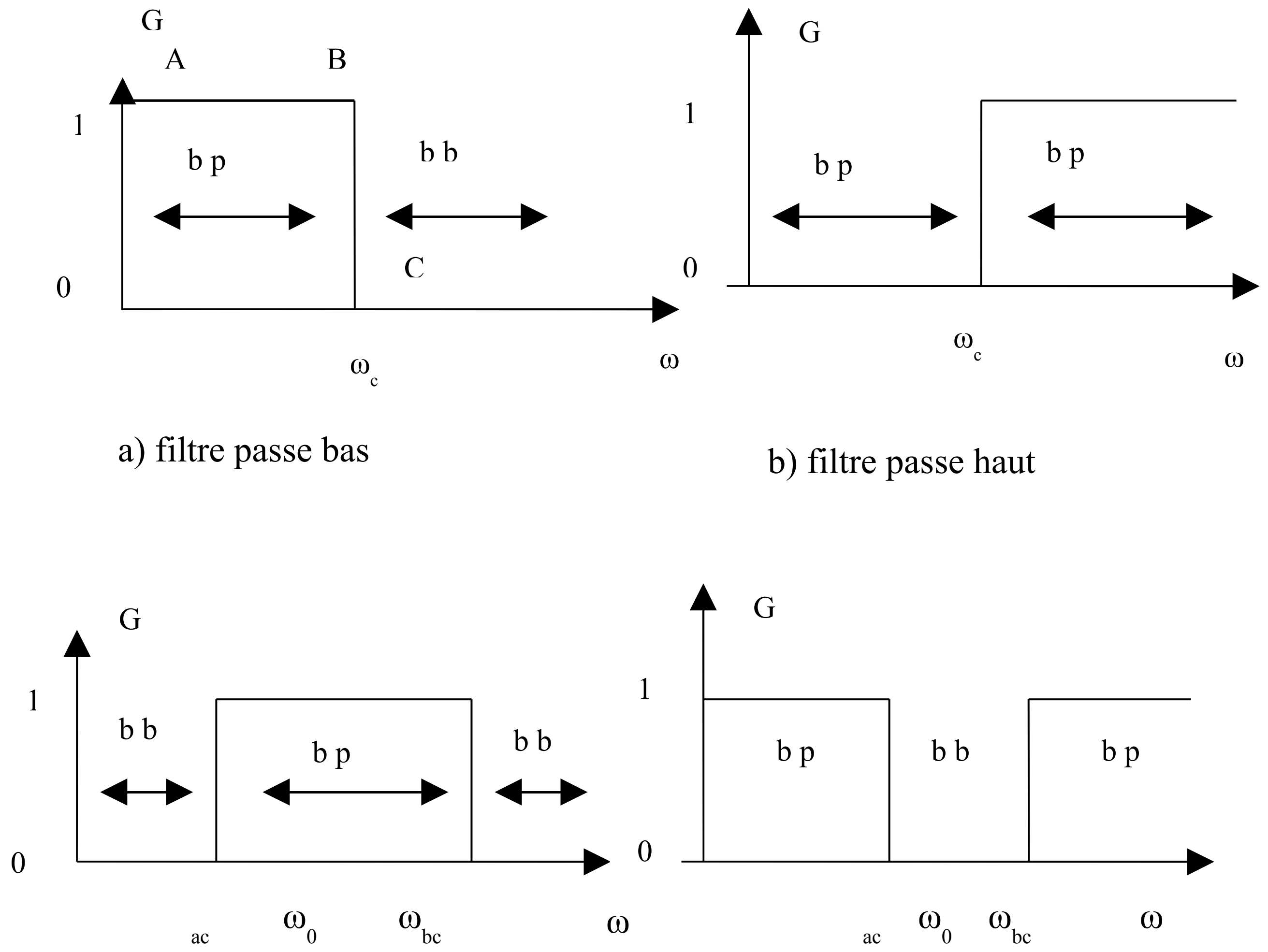
I-1-2Filtre idéal :

Un filtre est dit 'idéal' s'il possède la propriété de transmettre toutes les fréquences considérées par l'utilisateur comme utiles sans atténuation et sans déphasage, et d'éliminer toutes les autres :

D'une autre façon, un filtre idéal vérifie les conditions suivantes :

- L'affaiblissement est réel dans la bande passante
- L'affaiblissement est infini dans la bande bloquante
- Le déphasage est linéaire dans la bande passante.

On représente ci-dessous les courbes d'affaiblissement des quatre types de filtres idéaux.



a) filtre passe bas

b) filtre passe haut

a) filtre passe bande

b) filtre coupe bande

Figure I-3

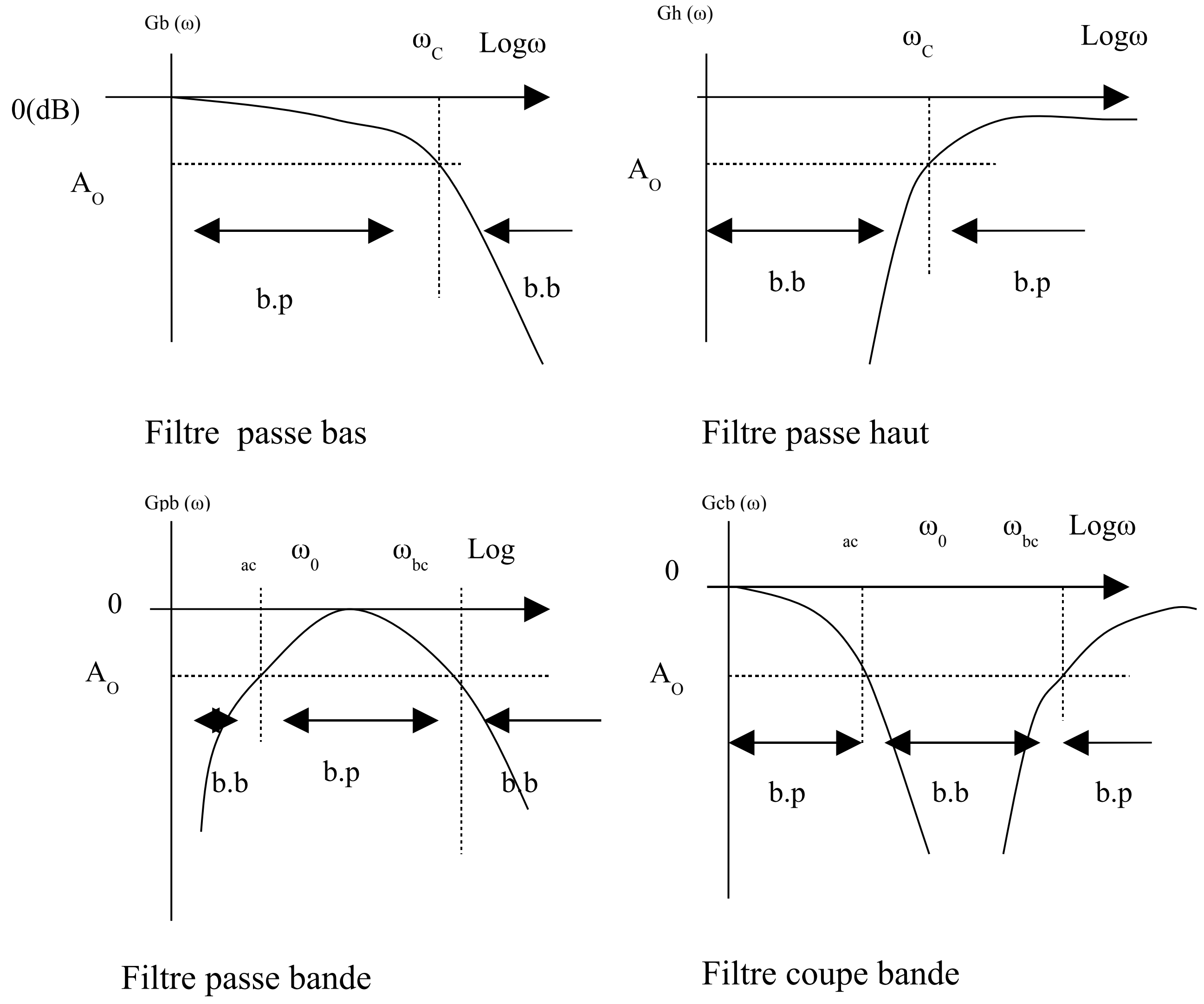
I-1-3Filtre réel :

Dans la pratique, il est impossible de construire des circuits électroniques satisfaisant les caractéristiques des filtres idéaux.

Les filtres réels présentent les défauts suivants :

- L'affaiblissement en bande bloquante n'est pas infini
- L'affaiblissement en bande passante n'est pas constamment nul
- La transition bande passante bande bloquante n'est pas brutale

La figure 1-3 montre les réponses des filtres réels :



Filtre passe bas

Filtre passe haut

Filtre passe bande

Filtre coupe bande

Figure I-4

ω_c : pulsation de coupure d'un filtre passe bas ou passe haut

ω_{ac} ; ω_{bc} : pulsation de coupure inférieure et supérieure d'un filtre passe bande ou coupe bande.

ω_0 : pulsation centrale d'un filtre passe bande ou coupe bande

b.p : bande passante

b.b : bande bloquante

A_o : atténuation correspondante à la pulsation de coupure

Chapitre TRANSFORMATION DE GABARIT

II-1 Fonction de réponse d'ordre n :

La fonction de réponse d'un filtre est donnée par la fonction de transfert du circuit (formule I-1), exprimée par la relation entre tension de sortie et tension d'entrée :

$H(p) = \dfrac{V_S(p)}{V_E(p)}$ Où p=jω

Cette réponse est une grandeur complexe caractérisée par son module et sa phase :

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)} \qquad \text{(II-1)}$$

En général, la fonction de transfert d'un filtre se présente sous forme d'une fraction rationnelle de deux polynômes :

$$H(p) = Ho\,\frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_m p^m}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_n p^n} \qquad \text{(II.-2)}$$

Avec $m \leq n$

a_i et b_j sont des coefficients réels de dimensions [sec^{-1}]

Et Ho une constante.

II-2 Gabarit normalisé

En général, les fonctions de transfert sont données en passe bas.Pour obtenir d'autres types de fonctions, on emploie le plus souvent des transformations sur la variable pulsation. On rapporte alors la pulsation réelle ω à une pulsation de référence ω_r .On définit ainsi une pulsation normalisée $\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_r}$

Comme p=jω on définit une variable de Laplace normalisée s par :

$$s = \frac{p}{\omega_r} \tag{II.-3}$$

On a donc s=jΩ ou $\Omega = \frac{s}{j}$ et la fonction de transfert normalisée est :

$$\left(H(s) = H\left(\frac{p}{\omega_r}\right) \right) = Ho \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_m s^m}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_n s^n} \tag{II.-4}$$

Avec m≤ n

Puisqu'on travaille souvent avec des fonctions de réponse normalisées, on transforme le gabarit d'un filtre quelconque en un gabarit de filtre passe bas normalisé dit « filtre passe bas prototype ».

Par conséquent, les pulsations sur le gabarit après normalisation deviennent :

Ω_p' et Ω_b'

On effectue tous les calculs sur ce filtre passe bas prototype

Le problème consiste donc à trouver une fonction qui définit cette transformation.

II-2-1 Transformation passe bas

La normalisation de fréquence d'un filtre passe bas correspond à une transformation linéaire :

$$p = j\omega \longrightarrow s = j\frac{\omega}{\omega_r} = \frac{p}{\omega_r} \tag{II.-5}$$

Supposons qu'on ait trouvé une fonction de réponse appropriée, il suffit alors de poser s= $\frac{p}{\omega_r}$ dans $H_{bp}(s)$ ou $p = s\omega_r$ dans $H_b(p)$ pour avoir les coefficients de $H_b(p)$.

Cette transformation est illustrée par le schéma suivant :

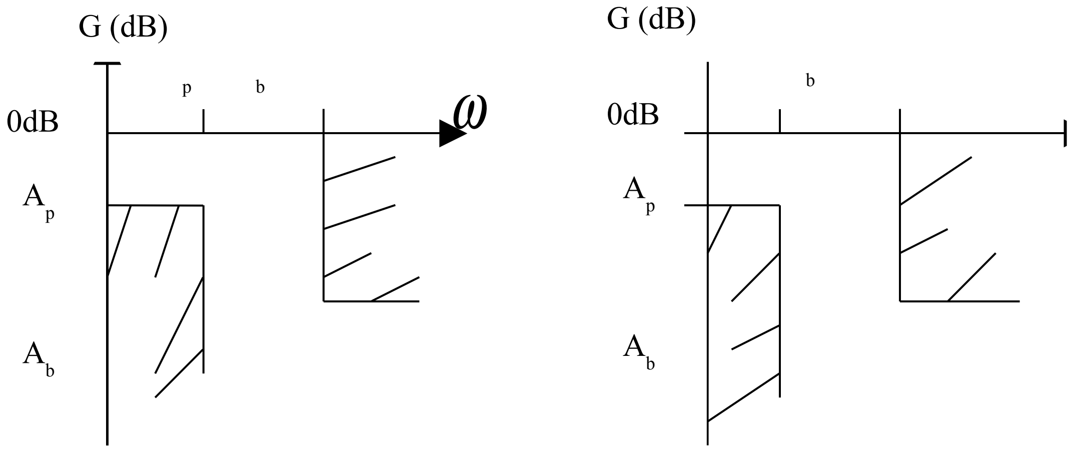


Figure II-1

Sur ce schéma on voit sur le gabarit prototype que les pulsations deviennent

$$\Omega'_p = \frac{\omega_p}{\omega_r} \text{ et } \Omega'_b = \frac{\omega_b}{\omega_r} \qquad \text{(II.-6)}$$

II-2-2 Transformation passe haut :

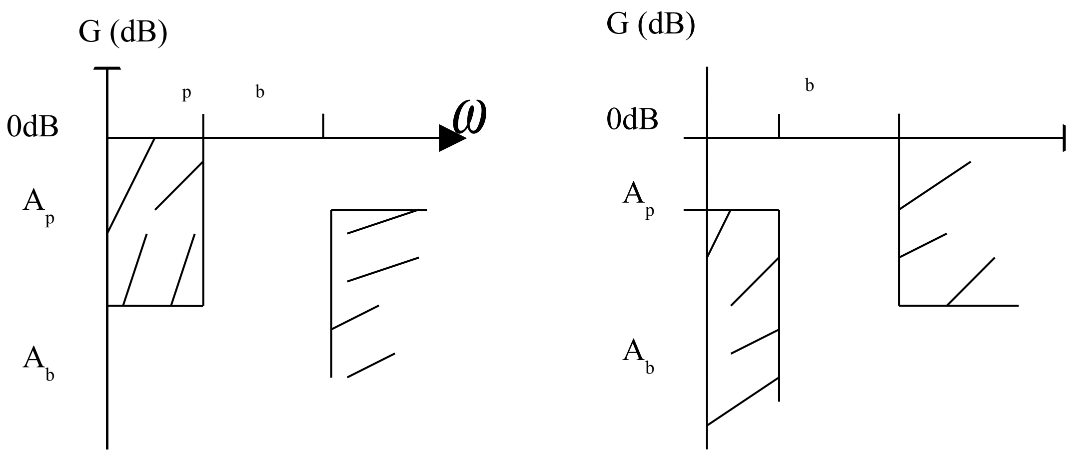


Figure II-2

L'échelle de l'axe de la pulsation étant logarithmique la courbe de réponse d'un filtre passe haut est symétrique à la courbe du passe bas prototype correspondant, on peut écrire alors :

$H_{bp}(s') = H_h(\frac{1}{s})$ ou $H_h(s) = H_{bp}(\frac{1}{s'})$ (II-7)

D'où

$s' = \theta(s) = \frac{1}{s}$ (II-8)

Et comme $s = \frac{p}{\omega_p}$ pour un filtre passe haut

$\omega_r = \omega_p$ (II-9)

On a :

$s' = \frac{\omega_p}{p}$ (II-10)

Et on a les transformations suivantes:

$\omega_p \longrightarrow \Omega'_p = 1$ et $\omega_b \longrightarrow \Omega'_b = \frac{\omega_p}{\omega_b}$ (II-11)

II-2-3 Transformation passe bande :

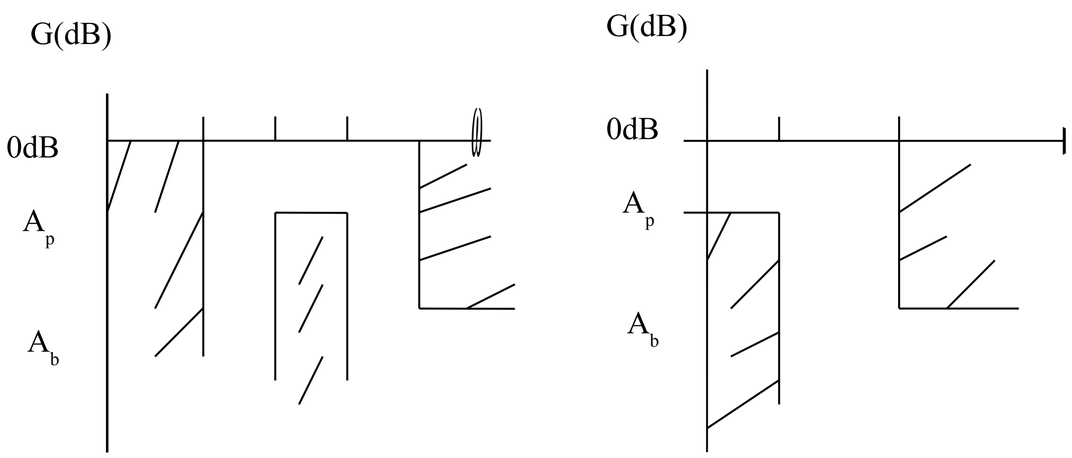


Figure II-3

Pour les variables de Laplace $p=j\omega$ et $s'=j\Omega'$ on a les correspondances suivantes :

$p=j \longrightarrow s'=j\infty$

$p=j\omega_0 \longrightarrow s'=0$

$p=0 \longrightarrow s'=j(-\infty)$

C'est une fonction homographique

$$s' = Ap + \frac{B}{p} \qquad \text{(II-12)}$$

On montre que $B = A(\omega_0)^2$ avec $\omega_0^{\,2} = \omega_{ap}\,\omega_{bp}$ (II-13)

On a la correspondance

$$\omega_{bp} \longrightarrow \Omega_p' = A\omega_{bp} - \frac{B}{\omega_{bp}} \qquad \text{(II-14)}$$

et avec la normalisation $\omega_r' = \omega_p'$ pour le passe bas prototype il s'en suit que :

$$A\omega_{bp} - A\frac{\omega_0^{\,2}}{\omega_{bp}} = 1 \qquad \text{(II-15)}$$

D'où

$$A = \frac{1}{\omega_{bp} - \omega_{ap}} = \frac{1}{\Delta\omega_p} \qquad \text{(II-16)}$$

La fonction de transformation passe bande devient alors :

$$s' = \theta(p) = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_p}\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right) \qquad \text{(II-17)}$$

On définit la largeur de la bande relative par la grandeur :

$$B_r = \frac{\omega_{bp} - \omega_{ap}}{\omega_0} \qquad \text{(II-18)}$$

Comme $s = \frac{p}{\omega o}$,la transformation de gabarit peut s'exprimer par

$$s' = \theta(s) = \frac{1}{B_r}\left(s + \frac{1}{s}\right) \qquad \text{(II-19)}$$

A partir de cela on a :

$$\Omega_p' = 1 \text{ et } \Omega_b' = \frac{\Delta\omega_b}{\Delta\omega_p} \qquad \text{(II-20)}$$

II-2-4 Transformation coupe bande :

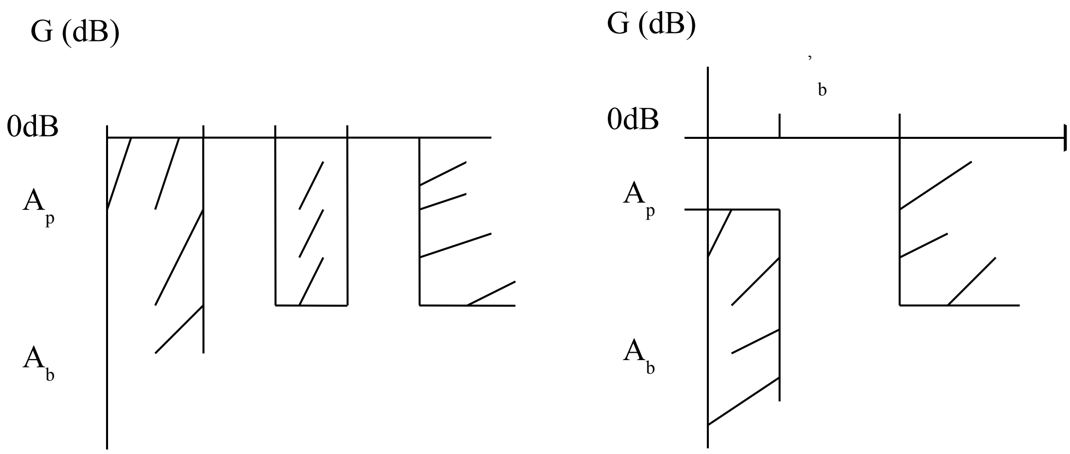


Figure II-4

C'est la transformation inverse du filtre passe bande on peut donc poser :

$$\frac{1}{s} = A'p + \frac{B'}{p} \tag{II-21}$$

On trouve que :

$B' = A'p\omega_0^2$ et avec Ω_p' =1 pour le passe bas prototype,

Il s'ensuit :

$$s' = \theta(p) = \frac{1}{\frac{\omega_0}{\Delta\omega_p}\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)} \tag{II-22}$$

ou

$$s' = \theta(s) = \frac{1}{\frac{1}{B_r}\left(-s + \frac{1}{s}\right)} \tag{II-23}$$

Avec

$$B_r = \frac{\omega_{bp} - \omega_{ap}}{\omega_0} \tag{II-24}$$

Remarques :

Dans notre étude, nous traitons les filtres standard dont les spécifications sont données en affaiblissement (gabarit d'affaiblissement)

Dans le cas du gabarit d'un filtre passe bande ou coupe bande, il faut s'assurer que le gabarit est symétrique du sens logarithmique avant de transformer en passe bas prototype.C'est à dire il faut avoir la relation suivante :

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{ap}\,\omega_{bp}} = \sqrt{\omega_{ab}\omega_{bb}} \tag{II-25}$$

Chapitre

APPROXIMATION DE LA FONCTION DE RÉPONSE

III-1 Problème d'approximation :

L'approximation consiste à trouver, pour un degré déterminé une fraction rationnelle dont l'affaiblissement ou le déphasage soit le plus proche de celui du filtre passe bas.

III-2 Approximation analytique :

On parle d'approximation analytique lorsque la fonction de transfert a une expression calculable au moyen d'une formule simple :

Ecrivons la fonction de transfert du filtre sous la forme :

$$H(j\Omega) = \frac{N(j\Omega)}{D(j\Omega)} \qquad \text{(III-1)}$$

Afin de trouver une fonction approximante, posons :

$$(|H|^2) = \frac{1}{1 + h^2 K^2(\Omega)} \qquad \text{(III-2)}$$

Où $K(\Omega)$ est une fonction paire ou impaire

h est un coefficient d'erreur appelé « facteur de forme »

Le produit C $(\Omega) = hK(\Omega)$ est désigné « fonction caractéristique », pour le module on peut donc écrire :

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}(\Omega)} \qquad \text{(III-3)}$$

III-3 Fonction caractéristique:

Les fonctions caractéristiques se divisent en deux catégories :

III-3-1 Les fonctions polynomiales :

Elles se présentent sous la forme d'un polynôme (fonction de Butterworth, de Tchebychev, de Bessel …), elles s'écrivent sous la forme :

$$C^2(\Omega) = h^2 P_n^{\,2}(\Omega) \qquad \text{(III-4))}$$

$$\Rightarrow \ |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + h^2 P_n^{\,2}(\Omega)}} \qquad \text{(III-5)}$$

Les filtres polynomiales passe bas ont les propriétés suivantes :

- Dans la bande passante la fonction de réponse présente une ondulation dont les valeurs extrêmes sont toutes égales
- En dehors de la bande passante, la courbe de réponse décroît de façon monotone et possède un pôle d'affaiblissement à l'origine.

III-3-2 Les fonctions qui se présentent sous forme d'une fraction rationnelle (cas des filtres elliptiques) :

Dans ce cas la fonction s'écrit comme suit :

$$C(\Omega) = \frac{h^2 P_n^{\,2}(\Omega)}{Q_m^{\,2}(\Omega)} \qquad \text{(III-6)}$$

$$\text{et } \ |H(j\Omega)| = \frac{|Q_m(\Omega)|}{\sqrt{Q^2{}_m(\Omega) + h^2 P_n^{\,2}(\Omega)}} \qquad \text{(III-7)}$$

Q_m est polynôme pair avec :

m=n si n est pair

m=n-1 si n est impair

Les filtres elliptiques ont les propriétés suivantes :

- La courbe de réponse présente en bande passante et en bande bloquante une ondulation
- La fonction de réponse possède (n/2 +1) pôles d'affaiblissement Ap et Ab donnés, la courbe de réponse du filtre elliptique est plus raide que celle du polynomial dans la bande transition.

Remarque :

Dans toute la suite, nous étudierons, plus particulièrement le cas des filtres polynomiaux (filtres de Butterworth, filtre de Tchebycheff)

Chapitre

DÉTERMINATION DE LA FONCTION DE RÉPONSE

La détermination de la fonction de réponse se fait en deux étapes :

- Choix de la fonction approximante
- Calcul des coefficients du polynôme $D(s)$ dénominateur de la fonction de réponse du filtre passe bas prototype.

IV-1 Critères de choix de la fonction caractéristique :

A partir d'un gabarit donné (c'est-à-dire affaiblissement Ap, Ab et pulsations de coupure connues on peut tirer deux critères concernant la fonction caractéristique C (Ω) :

L'affaiblissement exprimé en dB est donné par :

$$A(\Omega) = 20\log\left|H(j\Omega)\right| = 20\log\left(\sqrt{1+C^2(\Omega)}\right) \quad \text{(IV-1)}$$

En bande passante $(0 \leq \Omega \leq \Omega_p = 1)$, on doit avoir :

$$20\log\sqrt{1+C^2}(\Omega) \leq Ap \quad \text{(IV-2)}$$

$$\Leftrightarrow\ 20\log\left(1+C^2(\Omega)\right)^{1/2} \leq Ap \quad \text{(IV-3)}$$

$$\Leftrightarrow\ 10\log\left(1+C^2(\Omega)\right) \leq Ap \quad \text{(IV-4)}$$

$$\Leftrightarrow\ \log\left(1+C^2(\Omega)\right) \leq \frac{1}{10}Ap \quad \text{(IV-5)}$$

$$\Leftrightarrow\ \log\left(1+C^2(\Omega)\right) \leq 0.1Ap \quad \text{(IV-6)}$$

$$\Rightarrow\ 1+C^2(\Omega) \leq 10^{0.1Ap} \quad \text{(IV-7)}$$

$$\Rightarrow\ C^2(\Omega) \leq 10^{0.1Ap} - 1 \quad \text{(IV-8)}$$

On pose $\varepsilon^2 = 10^{0.1Ap} - 1$ (IV-9)

alors :

$$C^2(\Omega) \leq \varepsilon^2 \quad \text{(IV-10)}$$

Pour la bande bloquante $(\Omega b \leq \Omega \leq \infty)$, on doit avoir :

$$A(\Omega) > Ab \quad \text{(IV-11)}$$

$$\Rightarrow\ C^2(\Omega) \geq 10^{0.1Ab} - 1 \quad \text{(IV-12)}$$

De même on pose :

$$\gamma^2 = 10^{0.1Ab} - 1 \quad \text{(IV-13)}$$

ε et γ déterminent la valeur maximale de $C^2(\Omega)$ dans la bande passante et sa valeur minimale dans la bande bloquante.

IV-2 Approximation de Butterworth :

IV-2-1 Critère de l'approximation :

Le premier type de fonction classique que nous allons examiner est celui dit de ButterWorth ou « maximally flat ». On abrège cette dernière dénomination en MF $_n$ avec n indice donnant l'ordre de la fonction .Le type d'approche ,ici envisagé,de la fonction idéale consiste surtout à bien reproduire le segment horizontal AB (voir figure I-3 passe bas).

En d'autre terme,la fonction approximante approche ,autour de l'origine ,la fonction objectif du filtre avec la plus petite erreur possible

La courbe de réponse d'un filtre passe bas de ButterWorth est tangente à l'origine et ne présente aucune ondulation.

On prend comme fonction caractéristique la fonction

$$C^2(\Omega) = \Omega^{2n} \tag{IV-14}$$

IV-2-2 Calcul de l'ordre :

Comme $C^2(\Omega) \geq \gamma^2 \Leftrightarrow \Omega^{2n} \geq \gamma^2$ (IV-15)

$\Rightarrow$

$$\Omega^n{}_b > \gamma \Rightarrow \Omega_b{}^n \geq \gamma \tag{IV-16}$$

$$\Longrightarrow \text{n log}\,\Omega_b \geq \log(\gamma) \tag{IV-17}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\log(\gamma)}{\log(\Omega_b)} \tag{IV-18}$$

IV-2-3 Calcul des pôles du module de la fonction de transfert :

Les pôles du module de la fonction de transfert sont les racines de $1 + C^2(\Omega)$ à parties réelles négatives

$$1 + C^2(\Omega) = 1 + \left(\frac{s}{j}\right)^n = 0 \tag{IV-19}$$

$$\Rightarrow 1 + (-1)^n s^{2n} = 0 \tag{IV-20}$$

Deux cas peuvent se présenter suivant la parité de n :

- Premier cas n impair :

On a :

$$1 - s^{2n} = 0 \tag{IV-21}$$

$\Rightarrow \ s^{2n} = e^{j2k\pi} \quad (n+1) < k < n$ (IV-22)

Les solutions sont :

$$S_k = e^{j2k\pi} \tag{IV-23}$$

Si l'on pose :

$$S_k = \sigma_k + j\Omega_k \tag{IV-24}$$

$$\sigma_k = \left[\cos\frac{k\pi}{n}\right] \tag{IV-25}$$

Et

$$\Omega_k = \left[\sin\frac{k\pi}{n}\right] \tag{IV-26}$$

- Deuxième cas n est pair

On a $1 + s^{2n} = 0$ (IV-27)

$$\Rightarrow \ s^{2n} = -1 = e^{j(2k-1)\pi} \tag{IV-28}$$

$$\Rightarrow \ s_k = e^{j\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\pi} = e^{2\left(\frac{k-1}{2n}\right)\pi} \tag{IV-29}$$

Les pôles de Butterworth sont répartis sur un cercle unité (affaiblissement A_p=3(dB))

IV-3 Approximation des Tchebycheff :

IV-3-1 Critère de l'approximation :

La seconde approche de la courbe passe bas idéale s'effectue en mettant l'accent sur la zone d'atténuation au détriment de la linéarité du segment AB. Les fonctions employées à cette fin sont dites de Tchebycheff.

On les nomme souvent « equal ripple » (même valeur d'ondulation) ou en abrégé ER $_n$ avec en indice l'ordre de la fonction.

L'approximation se fait selon le critère minimal, c'est-à-dire que l'on cherche à minimiser le maximum de l'erreur de la fonction approximante par rapport à la fonction objective dans un intervalle de fréquence.

Le filtre de Tchebycheff d'ordre n et d'ondulation 20log (1+ε^2) a pour réponse en fréquence :

$$\left|H(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\Omega)} \tag{IV-31}$$

$\Leftrightarrow$

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}} \quad \text{(IV-32)}$$

$T_n(\Omega)$ sont les polynômes de Tchebycheff et sont définis par les expressions suivantes :

$T_n(x) = \cos(n\arccos(x))$ pour $|x| \leq 1$ (IV-33)

(IV-34)

$T_n(x)$ =ch (n nargch(x)) pour $|x|$>1

Les zéros x $_i$ de $T_n(x)$ sont situés dans $[-1,1]$

$x_i = \cos(\frac{2i-1)}{2n}\Pi)$ i = $1\cdots n$ (IV-35)

Les extrêmes dans cet intervalle sont donnés par :

x $_k$ $=\cos(\frac{k\Pi}{n})$ $k = 1\cdots n$ (IV-36)

Les polynômes de Tchebycheff obéissent aussi à la relation de récurrence :

$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ (IV-37)

IV-3-2 Calcul de l'ordre du filtre de Tchebycheff:

En appliquant la condition

C² $(\Omega) \geq$ 10 $^{0.1Ab} - 1$ (IV-38)

$\Leftrightarrow$ $C^2{}_n(\Omega_b) \geq \gamma^2$ avec $\Omega_b > 1$ (IV-39)

$\Leftrightarrow$ $\varepsilon^2 T^2{}_n(\Omega) \geq \gamma^2$ (IV-40)

$\Leftrightarrow$ $\varepsilon^2 ch^2[n\arg ch\Omega_b] \geq \gamma^2$ (IV-41)

$\Leftrightarrow$ $ch[n\arg ch\Omega] \geq \frac{\gamma}{\varepsilon}$ (IV-42)

$\Leftrightarrow$ $n\arg ch\Omega \geq \arg ch\frac{\gamma}{\varepsilon}$ (IV-43)

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\arg ch\frac{\gamma}{\varepsilon}}{\arg ch\Omega} \quad \text{(IV-44)}$$

On a: (IV-45)

$$n \geq \frac{\arg ch(\frac{\gamma}{\varepsilon})}{\arg ch(\Omega_b)}$$

$$\Omega_b = \frac{1}{K}$$

K : facteur de sélectivité du filtre original

IV-3-3Calcul des pôles de la fonction de transfert pour le filtre de Tchebytcheff :

Les pôles de la fonction de transfert sont obtenus en résolvant l'équation :

$$1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega) = 0 \qquad \text{(IV-47)}$$

Comme $s = j\Omega$,on peut écrire :

$$1 + \varepsilon^2 T^2{}_n(\frac{s}{j}) = 0 \qquad \text{(IV-48)}$$

En supposant que S_k sont les racines de cette équation on a :

$$1 + \varepsilon^2 T^2{}_n(\frac{S_k}{j}) = 0 \qquad \text{(IV-49)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 T_n^2(\frac{S_k}{j}) = -1 = j^2 \qquad \text{(IV-50)}$$

$$\Rightarrow T_n^2(\frac{S_k}{j}) = \frac{j^2}{\varepsilon^2} \qquad \text{(IV-51)}$$

$$\Rightarrow T_n(\frac{S_k}{j}) = \pm \frac{j}{\varepsilon} \qquad \text{(IV-52)}$$

En tenant compte de (IV-34)

Soit $x_k = U_k + jV_k = \arccos(\frac{S_k}{j})$ (IV-53)

Sachant que : $\cos(a + jb) = \cos a ch b - j \sin a sh b$

$$\cos(nx_k) = \cos(nU_k + jnV_k)$$

$$= \cos(nU_k)ch(nV_k) - j\sin(nU_k)sh(nV_k) = \pm\frac{j}{\varepsilon} \qquad \text{(IV-54)}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires on a :

$$\cos(nU_k)ch(nV_k) = 0 \qquad \text{(IV-55)}$$

$$j\sin(nU_k)sh(nV_k) = \pm\frac{j}{\varepsilon} \qquad \text{(IV-56)}$$

Or la fonction coshyperbolique est toujours différente de zéro donc on obtient :

$$\cos(nU_k) = 0 \qquad \text{(IV-57)}$$

D'où :

$$U_k = \frac{\pi}{2n}(2k-1) \qquad k = 1.\cdots 2n \qquad \text{(IV-58)}$$

D'où :

$$V_k = V = \frac{1}{n}\arg sh(\frac{1}{\varepsilon}) \qquad \text{(IV-59)}$$

Les pôles de la fonction sont donnés par :

$$S_k = j\cos(U_k + jV_k) = j\left[\cos U_k shV_k + j\sin U_k shV_k\right] \qquad \text{(IV-60)}$$

$$S_k = \sigma_k + j\Omega_k \qquad \text{(IV-61)}$$

Avec :

$$\sigma_k = -shV_k \sin[(2k-1)\frac{\pi}{2n}] \qquad \text{(IV-62)}$$

$$\Omega_k = chV_k \cos\left[\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right] \qquad \text{(IV-63)}$$

IV-4 Autres types de réponses :

Il y a d'autre courbe de réponse, comme les courbes de Bessel dont l'approximation est au sens du critère de méplat du temps de propagation de groupe dans la bande passante du filtre, c'est-à-dire on cherche à approcher au mieux le déphasage du filtre passe bas idéal. Le module de la fonction de transfert d'un filtre de Bessel s'écrit comme :

$$\left|H(j\Omega)\right| = \frac{1}{\left|B_n(j\Omega)\right|} \qquad \text{(IV-64)}$$

Les polynômes de Bessel $B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n-1)!x^i}{(2^{n-i})i!(n-i)!}$ où l'on pose 0 !=1

Les polynômes de Bessel peuvent être générés par une formule de récurrence :

$B_o(x) = 1$

$B_1(x) = 1 + x$

$B_2(x) = 3 + 3x + x^2$ $\qquad B_k(x) = (2n - 1)B_{k-1}(x) + x^2 B_{k-2}(x)$

Pour les calculs des coefficients de la fonction de transfert d'un filtre de Bessel, dont la variable s est normalisée par rapport à la valeur inverse du temps de propagation de groupe à la pulsation $\Omega = 0$,on peut utiliser la formule :

$D_1 = 1$

$$D_i = \frac{2(n - i + 1)}{i(2n - i + 1)} D_{i-1} \tag{IV-65}$$

IV-5 Conclusion :

Pour conclure l'étude concernant l'approximation des courbes de réponses des filtres polynomiaux on peut faire les observations suivantes :

Du point de vue de la régularité de la courbe amplitude –fréquence, les filtres de Butterworth donnent le meilleur résultat .Etant très simples à calculer et peu sensibles aux variations des éléments qui les constituent, les filtres de Butterworth présentent de plus une réponse transitoire convenable .Par contre ,leur coupure est peu franche et la bande de transition n'est pas très abrupte .ils seront utilisés pour des applications ne nécessitant pas une grande précision et pour les quelles la simplicité de conception et de réalisation est le critère le plus important.

Les filtres de Tchebycheff sont, parmi les filtres polynomiaux, ceux qui présentent la coupure la plus franche ; ils seront utilisés de préférence chaque fois que la raideur de la coupure amplitude-fréquence sera le critère le plus important.

La courbe de Bessel présente le plus grand intérêt lorsque le filtre est utilisé pour déphaser ou retarder un signal composite du fait de sa réponse en phase plus linéaire.