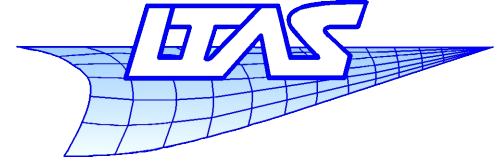


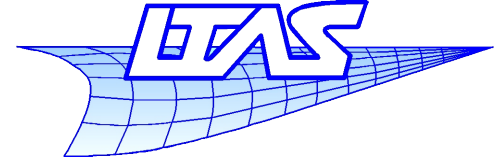
Une introduction à la méthode des éléments finis étendus



- Eric Béchet (it's me !)
 - Études d'ingénieur à Nancy (Fr.)
 - Doctorat à Montréal (Can.)
 - Carrière académique à Nantes puis Metz (Fr.)
 - Puis Liège...
- Contact :
eric.bechet@ulg.ac.be

Plan de la présentation

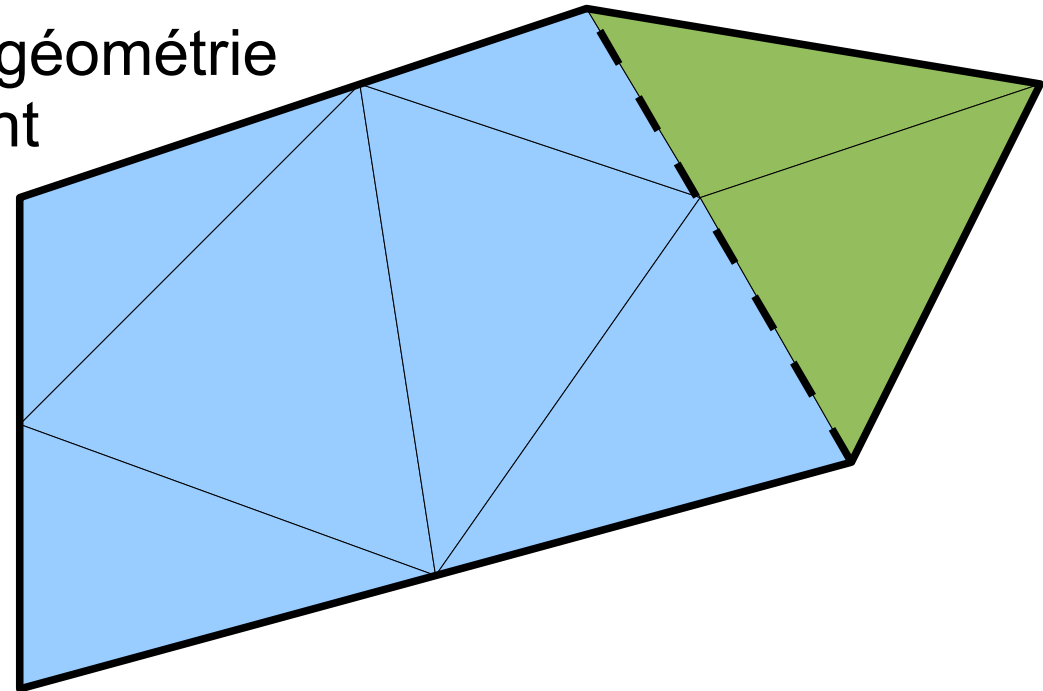
- Introduction
- Rappels
- Problème simple (saut sur la variable primale)
- Extensions en 2D / 3D
- Autre problème (saut sur la dérivée)
- Autres applications et recherche actuelle
- Références et littérature



Notes de cours disponibles à l'adresse

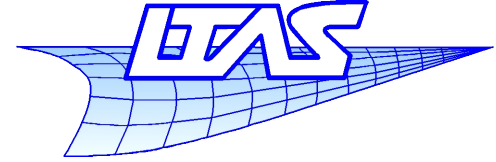
<http://www.cgeo.ulg.ac.be/X-FEM>

- Calcul par éléments finis « classiques »
 - Géométrie délimitée par les bords des éléments
 - Limites du domaine de calcul
 - Interfaces entre deux zones aux propriétés différents
 - Une modification de la géométrie implique un changement de maillage
 - Les problèmes évolutifs (temps) peuvent nécessiter un remaillage à chaque pas du calcul



Méthode des EF étendus

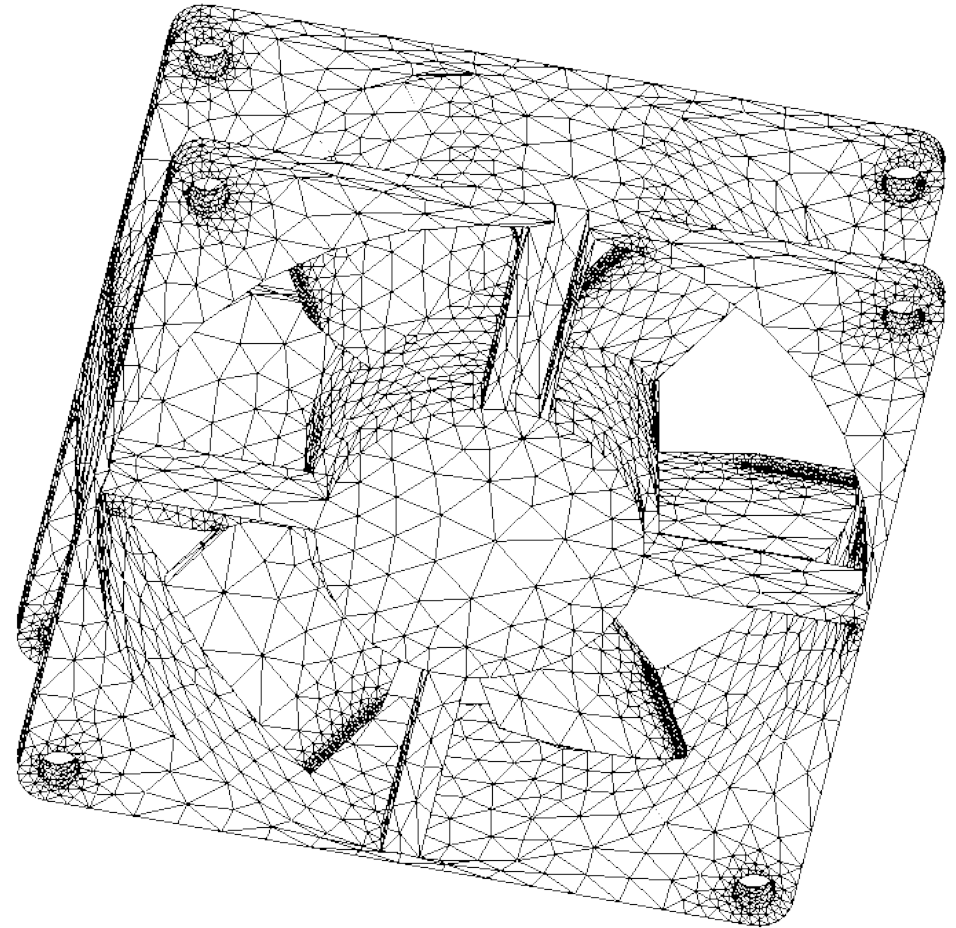
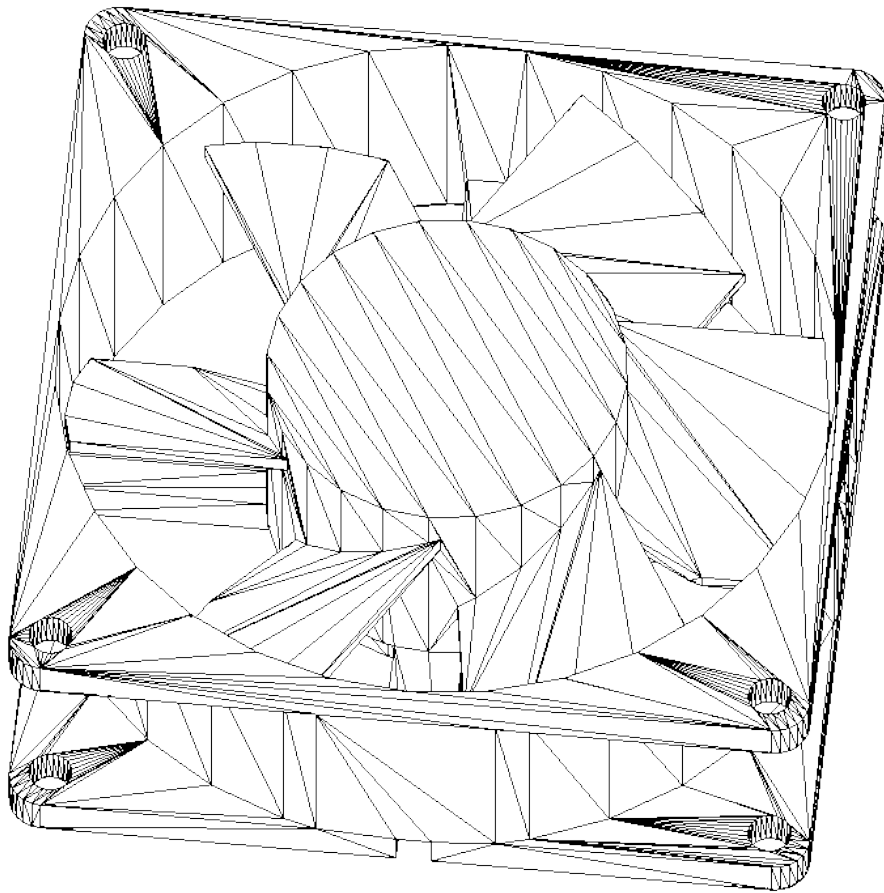
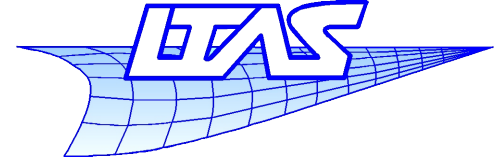
Introduction



- Techniques de génération de maillage
 - Peuvent être plus coûteuses en temps que le calcul par éléments finis lui-même
 - Impliquent une interaction homme-machine fréquente
 - Sont une source potentielle d'erreurs
 - Humaines
 - Robustesse des algorithmes

Méthode des EF étendus

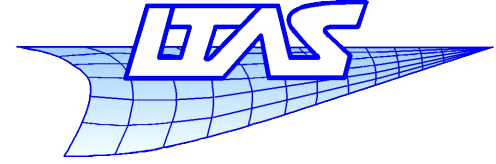
Introduction



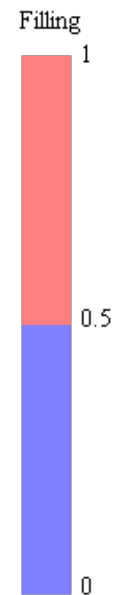
Cf. cours de CAO en 1er master Aero / Mécanique

Méthode des EF étendus

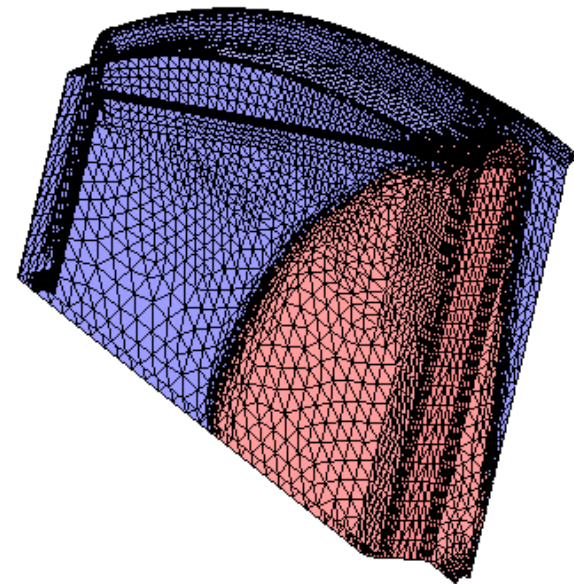
Introduction



- Idée ici:
 - Minimiser les contraintes sur le maillage utilisé
 - Mais la génération de maillage reste nécessaire
 - Calcul précis si éléments de plus faible taille
→ Adaptation de maillage



Time : 12 s.



Rappels

On se base sur la MEF en partant d'une forme faible :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

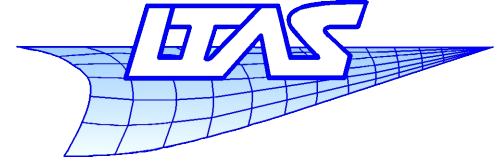
$$\int_{\Omega} a(u, v) d\Omega = \int_{\Omega} b(v) d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Discrétisation: On cherche u dans un espace discrétisé $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ (les fonctions tests v font partie du même espace)

$$u_h(x) = \sum_i \lambda_i N_i(x) \quad , \quad x \in \Omega$$

Méthode des EF étendus

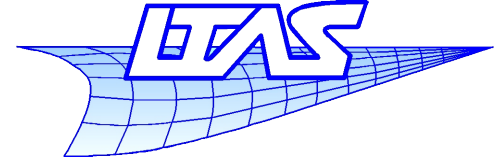
Rappels



- Un maillage conforme de l'espace sert à définir les fonctions de forme
- FF à support compact $u(x) = \sum_k \lambda_k N_k$ pour $x \in T_j$
- Partition de l'unité $\sum_i N_i = 1$
- Interpolation $u(x_i) = \lambda_i$

Méthode des EF étendus

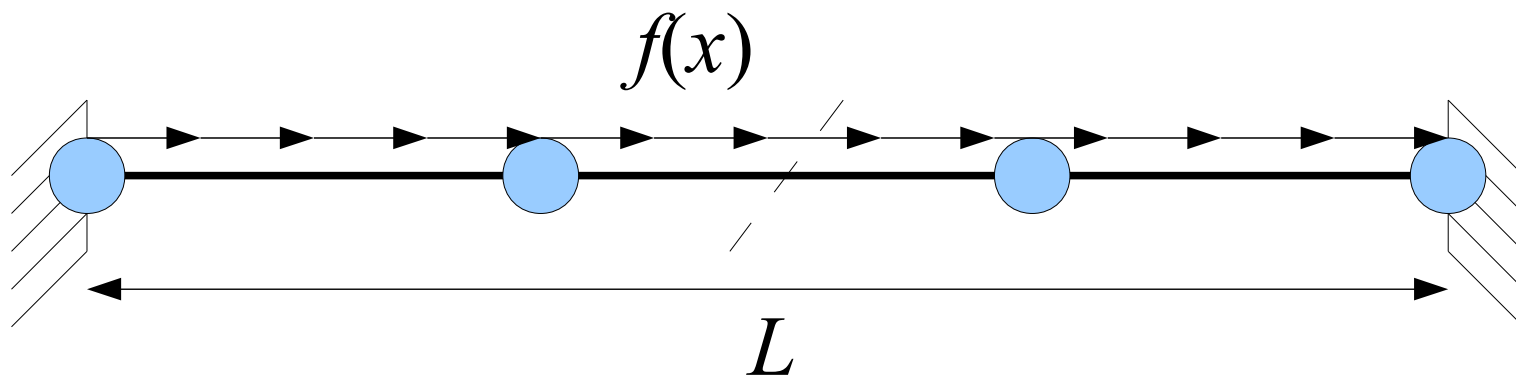
Rappels



- FF à support compact
 - Permet d'avoir des matrices creuses (donc peu volumineuses en mémoire)
- Partition de l'unité
 - On sait représenter un champ constant !
- Interpolation
 - Facilité pour imposer des conditions de Dirichlet
- Utilisation de maillages conformes
 - Préalcul de nombreuses opérations possible

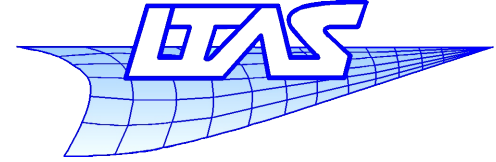
Problème simple

- Barre 1D (L , E , S) encastée soumise à un effort réparti $f(x)$
- On veut déterminer le déplacement $u(x)$ et on veut couper cette barre (penser à une fissure)
 - Avec la MEF standard
 - Avec la méthode des éléments finis étendus



Méthode des EF étendus

Problème simple



- Forme faible

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = b(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

avec

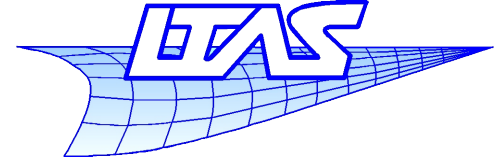
$$a(u, v) = \int_0^L ES \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \quad b(v) = \int_0^L f(x) \cdot v dx$$

Matrice élémentaire (de raideur)

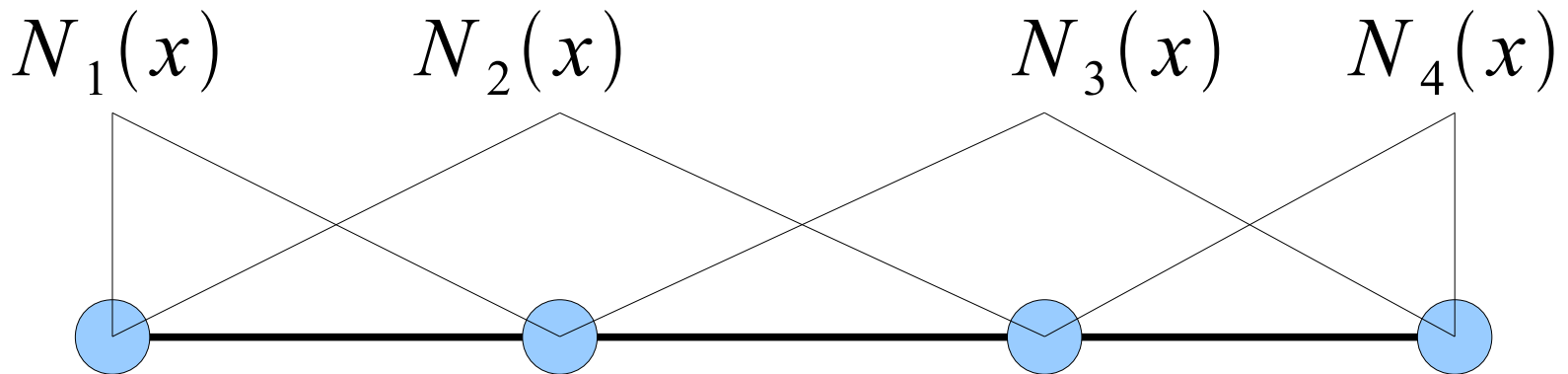
Vecteur élémentaire (efforts extérieurs)

Méthode des EF étendus

Problème simple



- Discrétisation : Éléments finis linéaires, fonctions de forme nodales.



$$u_h(x) = \sum_i \lambda_i N_i(x)$$

Problème simple

- En reportant la forme discrétisée de u et v dans la forme faible, on obtient le système linéaire suivant :

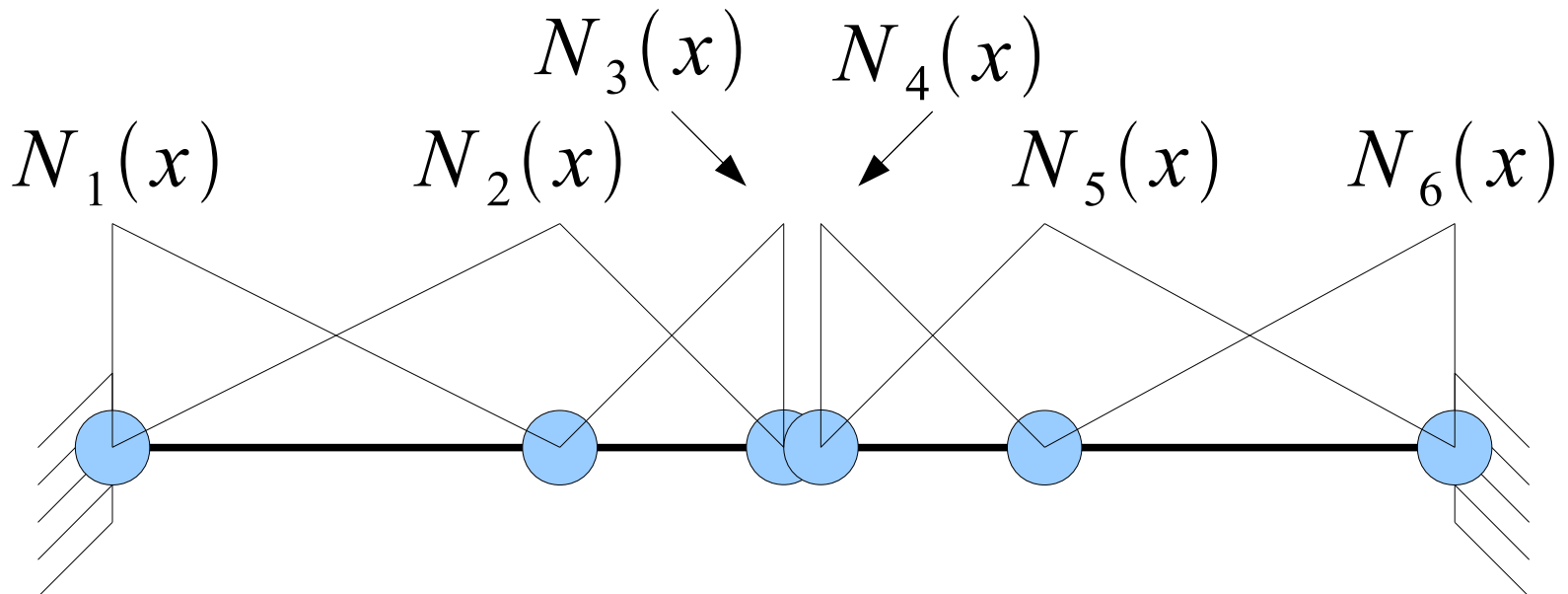
$$\begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

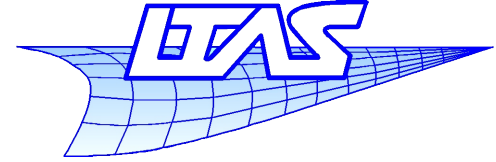
$$k_{ij} = \int_0^L ES \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} dx$$

$$f_i = \int_0^L N_i \cdot f(x) dx$$

- Ici, les coefficients λ_1 et λ_4 sont nuls (encastrement)

- Ajouter deux noeuds et refaire le calcul
 - Cela s'appelle « remailler », c'est rapide et robuste en 1D, moins en 2D et beaucoup moins en 3D





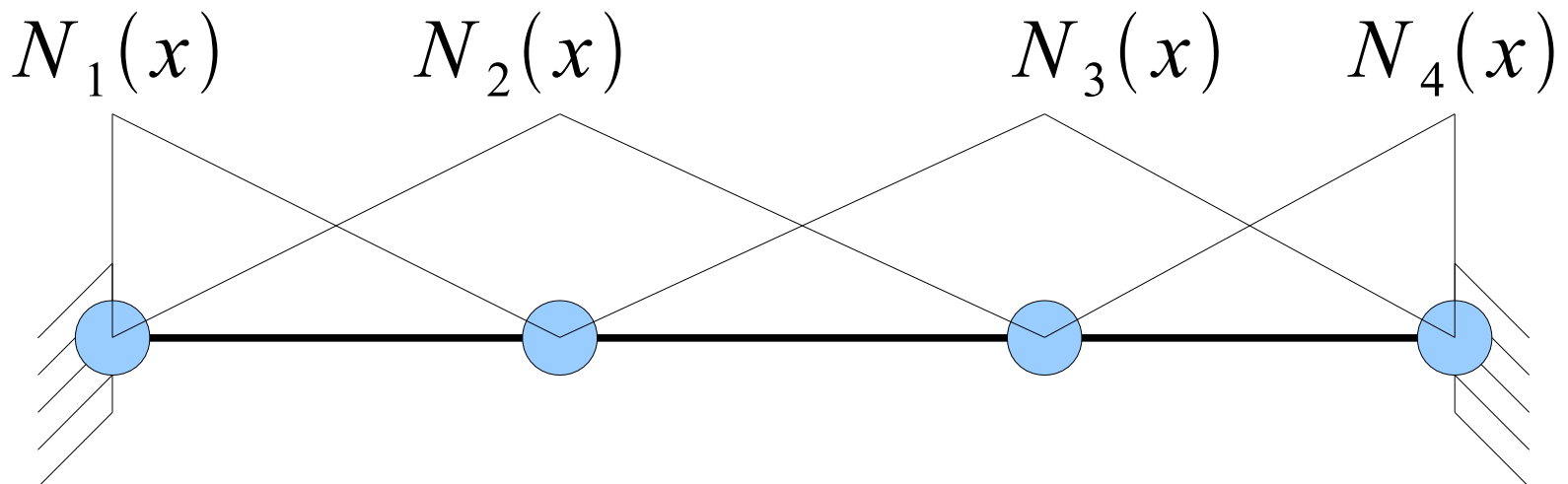
- Après discrétisation, on obtient :

$$\begin{bmatrix}
 \boxed{k_{22} \quad k_{23}} & 0 & 0 \\
 \boxed{k_{32} \quad k_{33}} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \boxed{k_{44} \quad k_{45}} \\
 0 & 0 & \boxed{k_{54} \quad k_{55}}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

- Les deux parties entourées sont indépendantes
- On peut faire deux calculs séparés pour résoudre chaque sous-problème

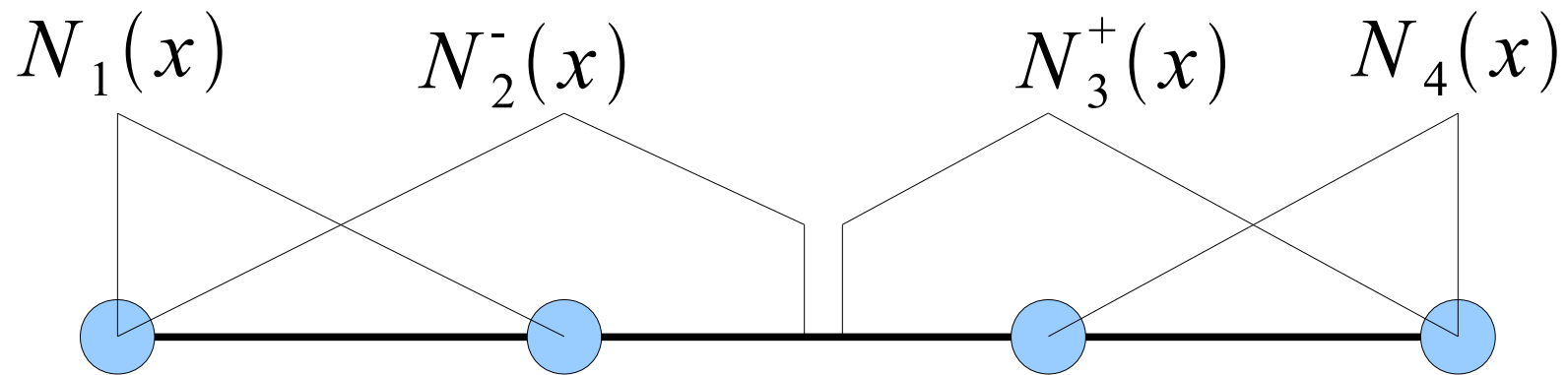
- La signification physique des DDL est conservée (λ_i signifie le déplacement au nœud i .)
- Il y a bien une discontinuité entre les déplacements aux nœuds 3 et 4
- Rien ne change à l'implémentation – seul le maillage et sa topologie sont modifiés

- On ne pas touche pas au maillage
- On peut par contre modifier/ajouter des fonctions de formes

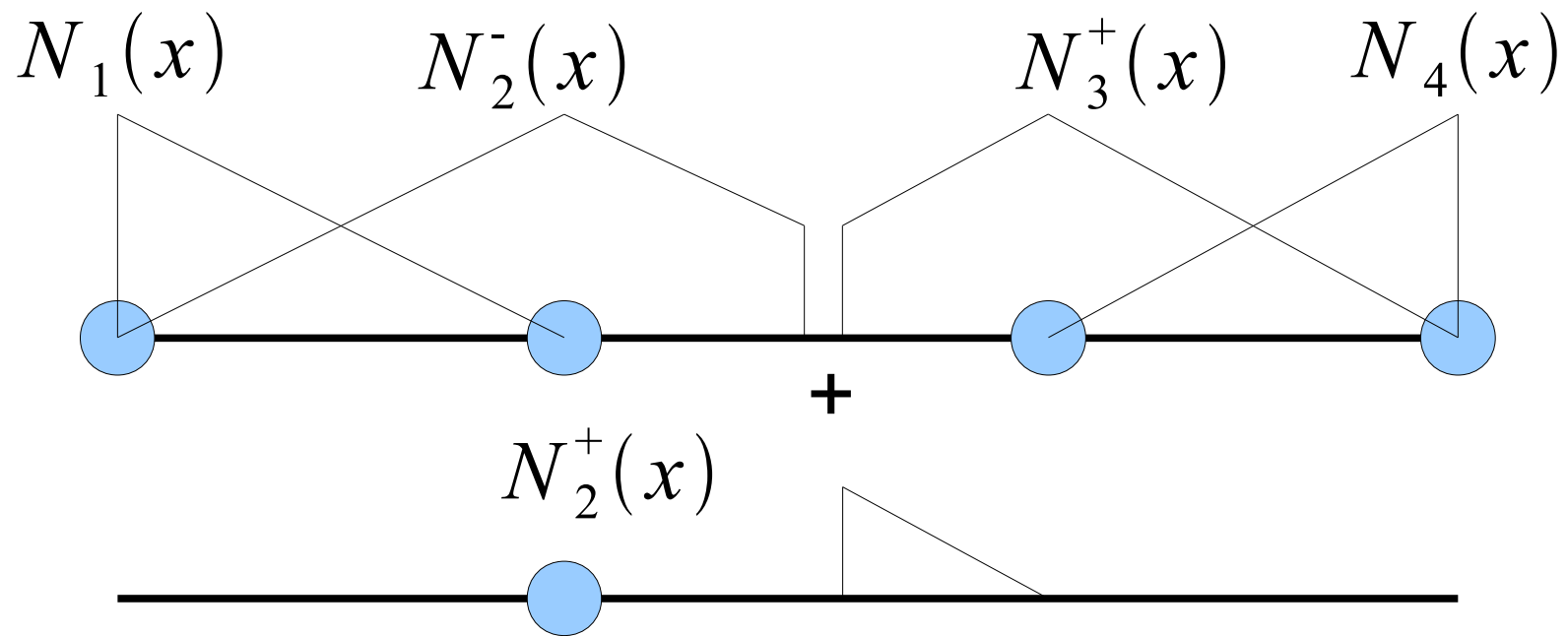


Cas X-FEM (I)

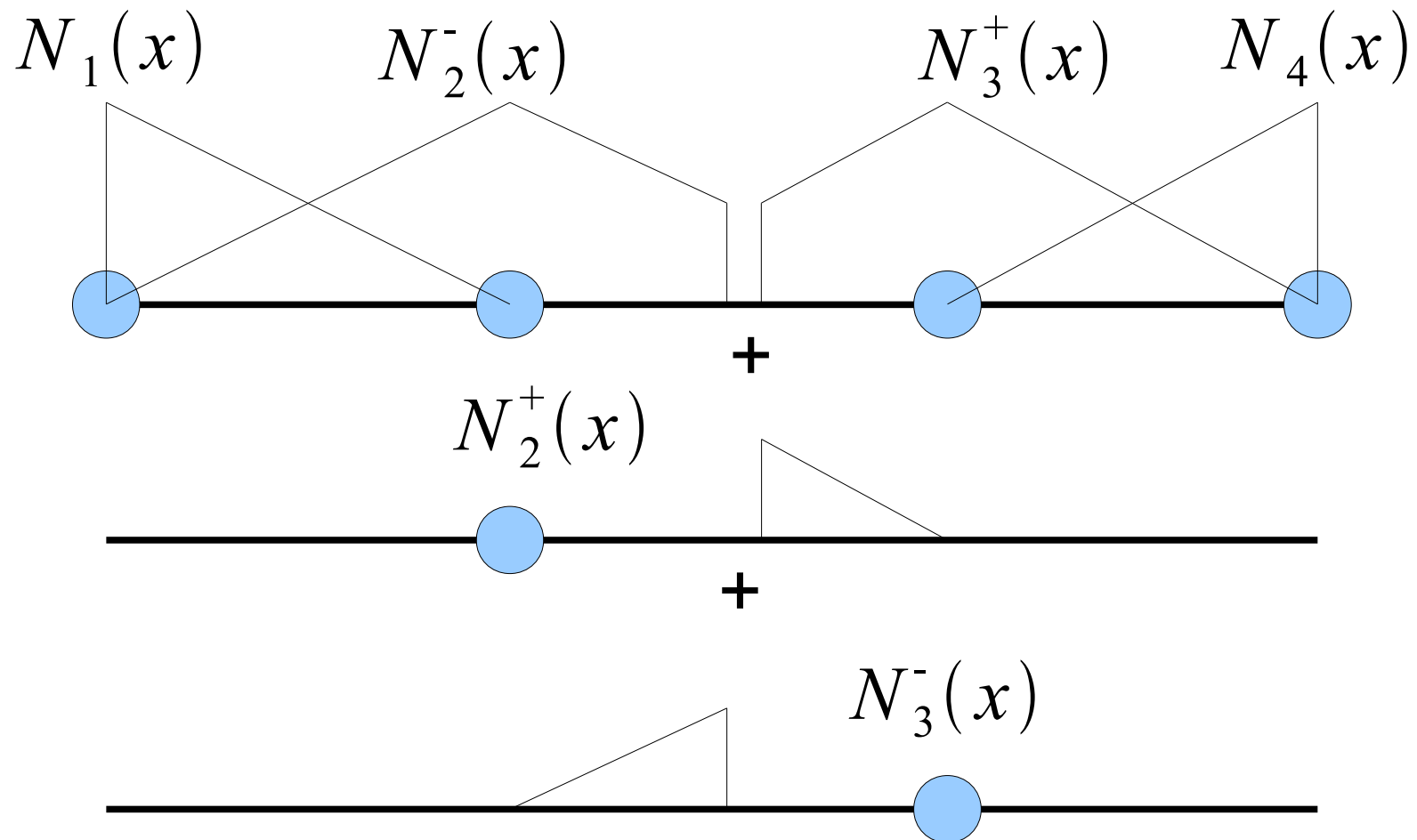
- Possibilité (I) :



- Possibilité (I) :



- Possibilité (I) :



- Comment calculer les $N_j^{+,-}$ à partir des N_i ?
 - On introduit la fonction Heaviside :

$$H(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0 \\ 1 & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

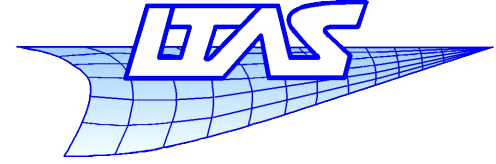
- Ainsi que son complément :

$$\bar{H}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \leq 0 \\ 0 & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

- s est la distance à la coupure (ici, $s = x - \frac{L}{2}$)

Méthode des EF étendus

Cas X-FEM (I)



- Avec ces notations, on a :

$$\begin{cases} N_i^+(x) = N_i(x) \cdot H(s) \\ N_i^-(x) = N_i(x) \cdot \bar{H}(s) \end{cases}$$

- On peut noter que la partition de l'unité est conservée

- On doit séparer les noeuds du maillage
 - Ceux qui ont des degrés de liberté «normaux» vont dans l'ensemble N
 - Ceux qui ont des degrés de liberté modifiés vont dans l'ensemble C
- Le champ u s'exprime alors :

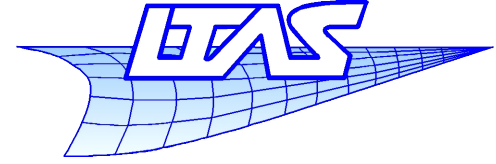
$$u(x) = \sum_{i \in N} \lambda_i N_i(x) + \sum_{j \in C} \lambda_j^+ N_j^+(x) + \sum_{k \in C} \lambda_k^- N_k^-(x)$$

- **Systeme linéaire**

- On numérote les DDL de façon suivante :

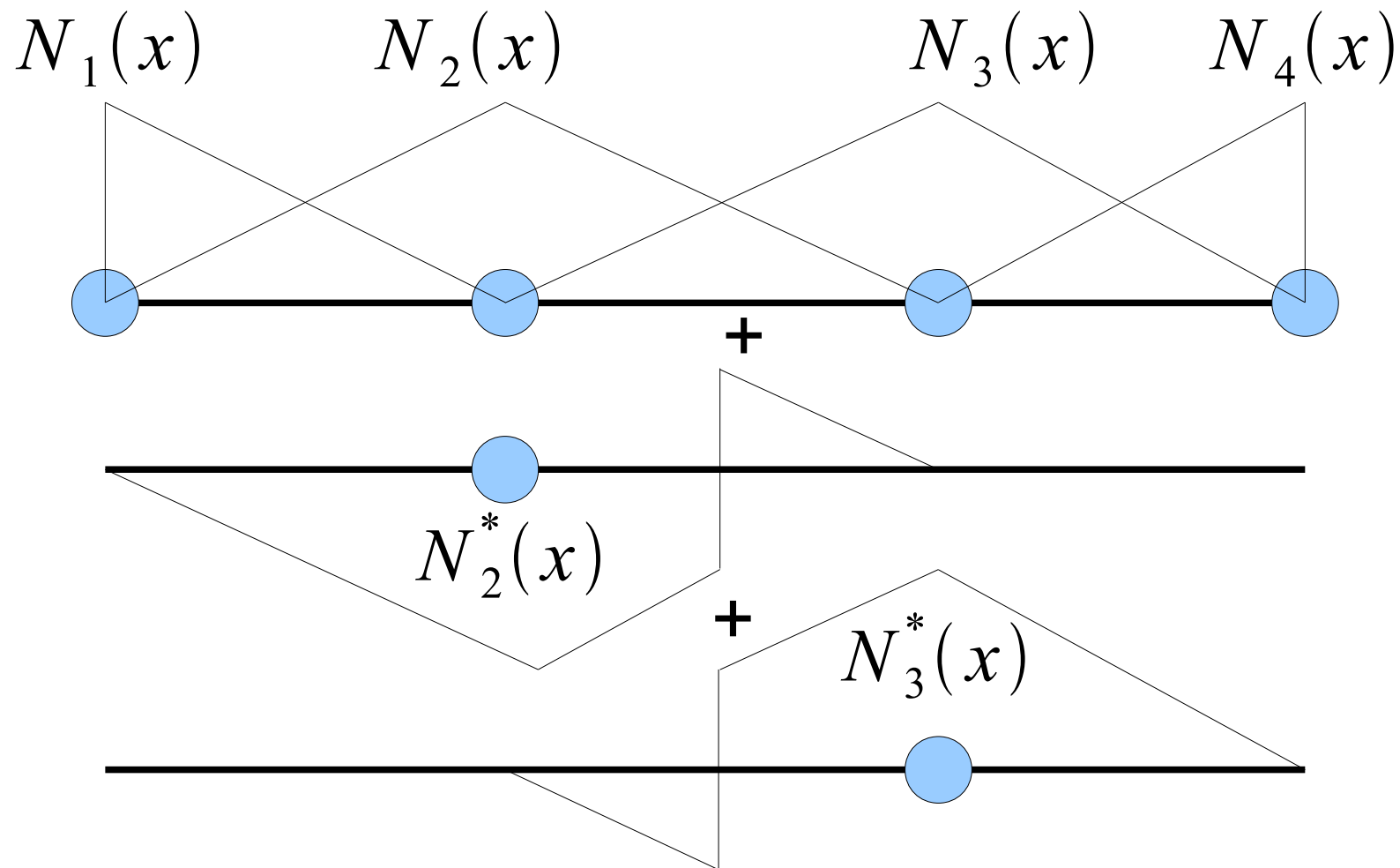
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \lambda_1 & \lambda_2^- & \lambda_3^- & \lambda_2^+ & \lambda_3^+ & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

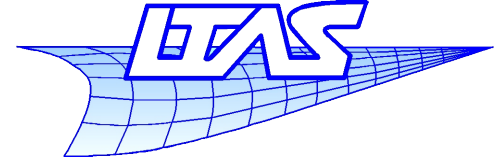
$$\begin{bmatrix} \boxed{k_{22}^- \quad k_{23}^-} & 0 & 0 \\ \boxed{k_{32}^- \quad k_{33}^-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{k_{22}^+ \quad k_{23}^+} \\ 0 & 0 & \boxed{k_{32}^+ \quad k_{33}^+} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2^- \\ \lambda_3^- \\ \lambda_2^+ \\ \lambda_3^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{f_2^-} \\ \boxed{f_3^-} \\ \boxed{f_2^+} \\ \boxed{f_3^+} \end{pmatrix}$$



- On arrive de nouveau à séparer les deux parties
- La signification des degrés de libertés est partiellement perdue
- On doit modifier certaines fonctions de formes et en rajouter d'autres
- Il faut deux fonctions Heaviside pour modifier les fonctions de base

- Sans toucher aux fonctions de base ! (cas II)



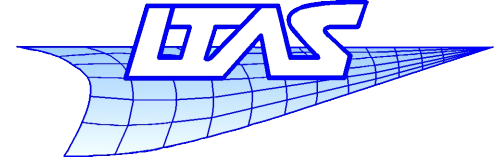


- Comment calculer les N_j^* à partir des N_i ?
 - On introduit la fonction Heaviside modifiée :

$$H^*(s) = \begin{cases} -1 & \text{si } s \leq 0 \\ 1 & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

- Avec cette notation, on a :

$$N_i^*(x) = N_i(x) \cdot H^*(s)$$



- On doit encore séparer les nœuds du maillage
 - Ceux qui portent des degrés de liberté modifiés vont dans l'ensemble C
 - Les fonctions classiques sont présentes partout
- Le champ u s'exprime alors :

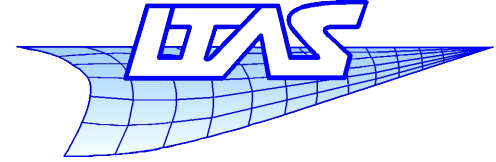
$$u(x) = \sum_{i \in \Omega} \lambda_i N_i(x) + \sum_{j \in C} \lambda_j^* N_j^*(x)$$

- **Systeme linéaire**

- On numérote les DDL de façon suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2^* & \lambda_3 & \lambda_3^* & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{22} & k_{22^*} & k_{23} & k_{23^*} \\ k_{2^*2} & k_{2^*2^*} & k_{2^*3} & k_{2^*3^*} \\ k_{32} & k_{32^*} & k_{33} & k_{33^*} \\ k_{3^*2} & k_{3^*2^*} & k_{3^*3} & k_{3^*3^*} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2^* \\ \lambda_3 \\ \lambda_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2^* \\ f_3 \\ f_3^* \end{pmatrix}$$



- Au niveau matriciel, les deux parties sont liées
- A-t-on réellement deux parties séparées ?
 - Assembler la matrice sans tenir compte des conditions aux limites et déterminer le nombre valeurs propres nulles de cette matrice.
 - Si il n'y a qu'une seule entité, on aura une seule valeur propre nulle (la condition de Dirichlet manquante pour avoir un système non singulier)
 - Deux VP nulles -> la barre est bien coupée en deux car on a deux conditions de Dirichlet à imposer afin d'avoir un système non singulier

- Cas sans coupure sans CL : matrice type

$$K^s = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(K^s - \alpha I) = 0$$

$$k = \frac{3ES}{L}$$

Une valeur propre nulle.

```
octave:27> K
K =
```

```

    1  -1  0  0
   -1  2  -1  0
    0  -1  2  -1
    0  0  -1  1
```

```
octave:28> E=eig(K)
E =
```

```

-2.67429966923143e-17
 5.85786437626905e-01
 2.00000000000000e+00
 3.41421356237310e+00
```

```
octave:29>
```

- Cas avec coupure sans CL : matrice type

$$K^c = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(K^c - \alpha I) = 0$$

Deux valeur propre nulles –
c'est OK

```
octave:17> K
```

```
K =
```

```

  1  -1  1  0  0  0
 -1  2 -1 -1  0  0
  1 -1  2  0 -1  0
  0 -1  0  2  1 -1
  0  0 -1  1  2 -1
  0  0  0 -1 -1  1
```

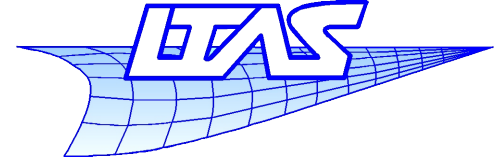
```
octave:18> E=eig(K)
```

```
E =
```

```

-1.30983399108489e-16
-4.76470136000792e-17
 1.00000000000000e+00
 1.00000000000000e+00
 4.00000000000000e+00
 4.00000000000000e+00
```

```
octave:19> █
```



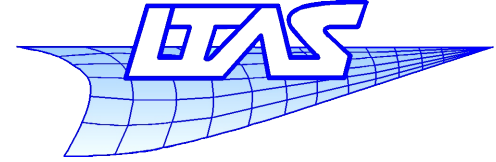
- La signification des degrés de libertés est perdue
- On garde les fonctions de base inchangées et on en rajoute d'autres par enrichissement
 - On construit une sorte de base EF hiérarchique
- Une seule fonction d'enrichissement pour la coupure (plus simple !)

- Les cas (I) et (II) sont équivalents (ils produisent exactement les mêmes résultats)

On a en effet une combinaison linéaire entre les fonctions de formes de (I) et (II) :

$$\begin{aligned} N_2(x) &= N_2^+(x) + N_2^-(x) & N_3(x) &= N_3^+(x) + N_3^-(x) \\ N_2^*(x) &= N_2^+(x) - N_2^-(x) & N_3^*(x) &= N_3^+(x) - N_3^-(x) \end{aligned}$$

- le cas (II) rentre dans un cadre théorique – utilisation d'une fonction d'enrichissement et synthèse « constructive »

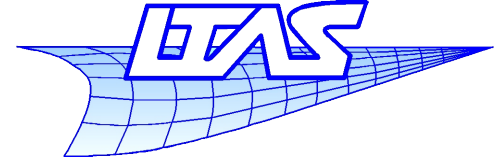


- Méthode des éléments finis étendus
 - Se base sur les fonctions de forme FEM classiques
 - Rajoute le produit de ces FF par une ou des fonctions d'enrichissement $E_k(x)$
 - Ces fonctions d'enrichissement représentent un comportement particulier de la solution que les FF classiques ne savent pas représenter (ex. discontinuité)

$$u(x) = \sum_{i \in \Omega} \lambda_i N_i(x) + \sum_k \sum_{j \in C} \lambda_{jk}^* N_j(x) \cdot E_k(x)$$

Méthode des EF étendus

En 2D / 3D



- Cas de l'élasticité linéaire
- Représentation de fissures
- Notion de Level-sets
- Propagation de fissures

Exemple 2D

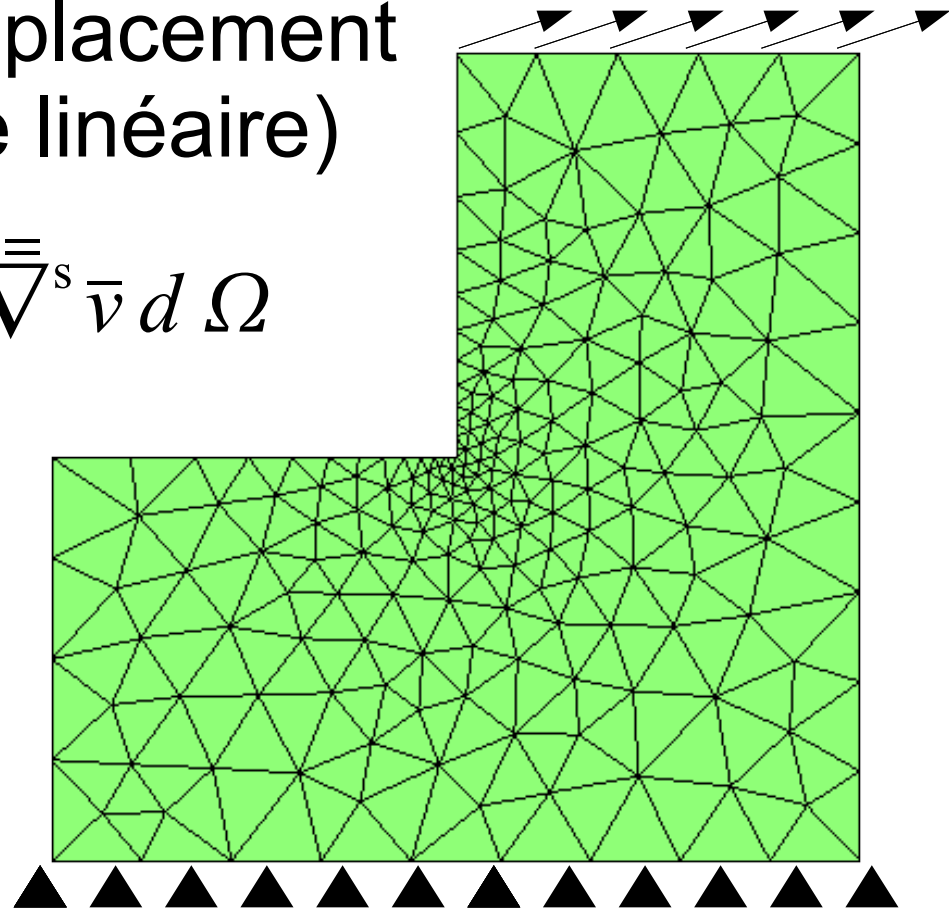
- Coin soumis à déplacement imposé (Elasticité linéaire)

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = \int_{\Omega} \bar{\nabla}^s \bar{u} : \bar{D} : \bar{\nabla}^s \bar{v} d\Omega$$

$$b(\bar{v}) = \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \bar{v} d\Omega$$

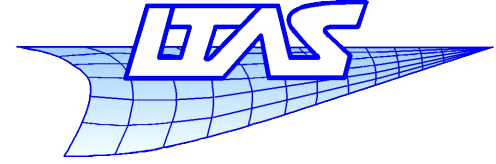
Trouver \bar{u} tel que

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = b(\bar{v}) \quad \forall \bar{v}$$



Méthode des EF étendus

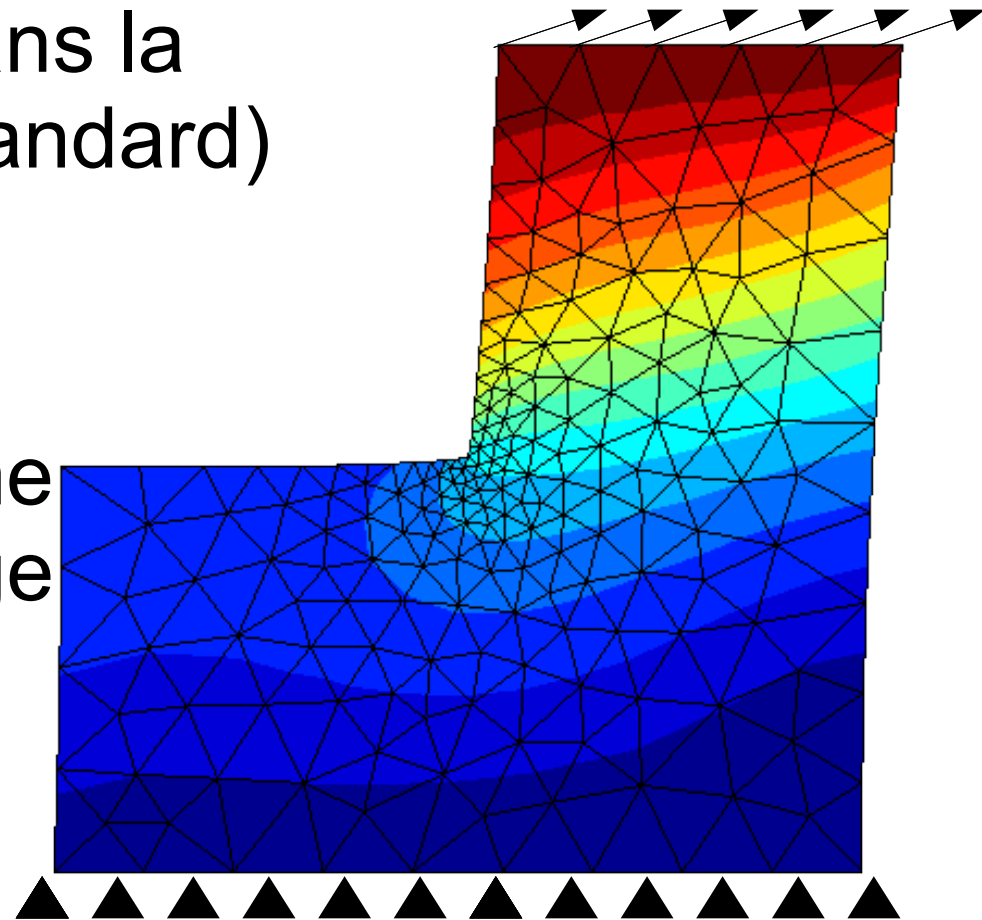
Exemple 2D



- Déplacements sans la coupure (FEM standard)

$$\bar{u}(x) = \sum \lambda_i \cdot \bar{N}_i(x)$$

Les $\bar{N}_i(x)$ sont les fonctions de forme linéaires (lagrange ordre 1)



DISPLACEMENT

0

0,028

0,0559

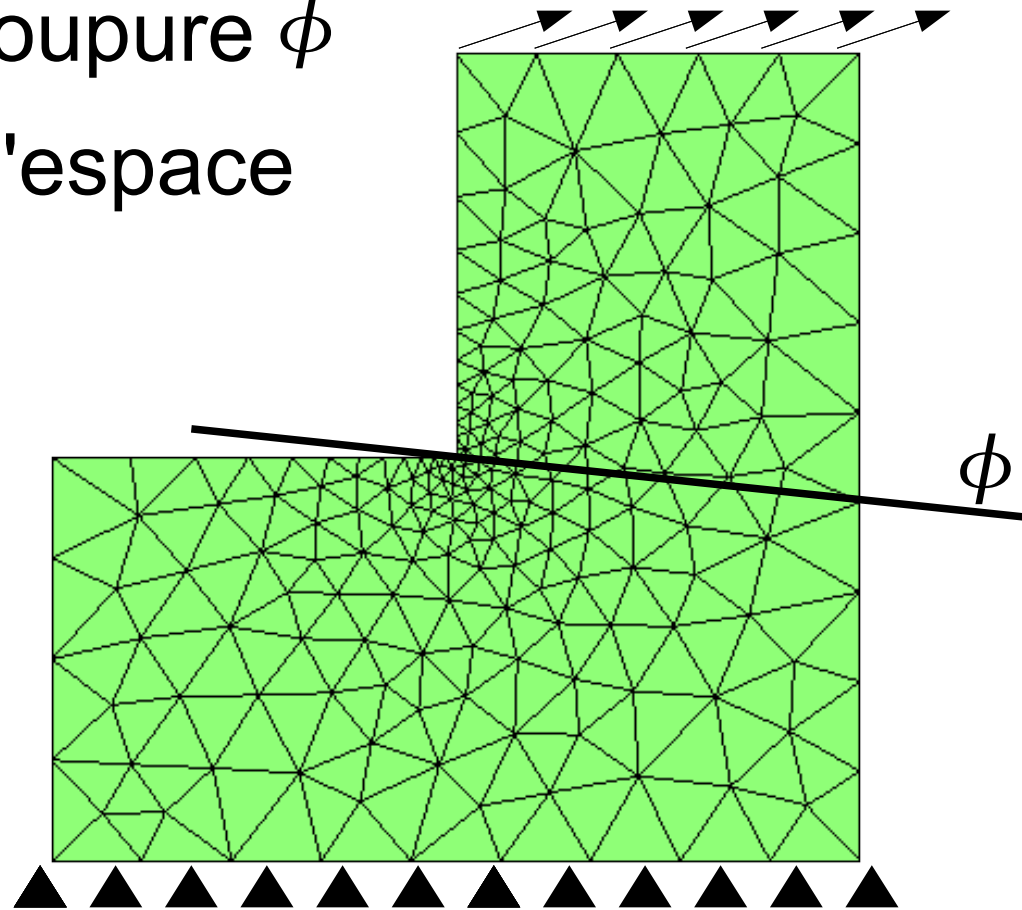


Exemple 2D

- On impose une coupure ϕ
- Modifications de l'espace fonctionnel :

$$\bar{u}(x) = \sum_{i \in \Omega} \lambda_i \cdot \bar{N}_i(x) + \sum_{i \in C} \lambda_i^* \cdot \bar{N}_i(x) \cdot H^*(s)$$

- Comment sont définis $H^*(s)$ et l'ensemble C ?



Exemple 2D

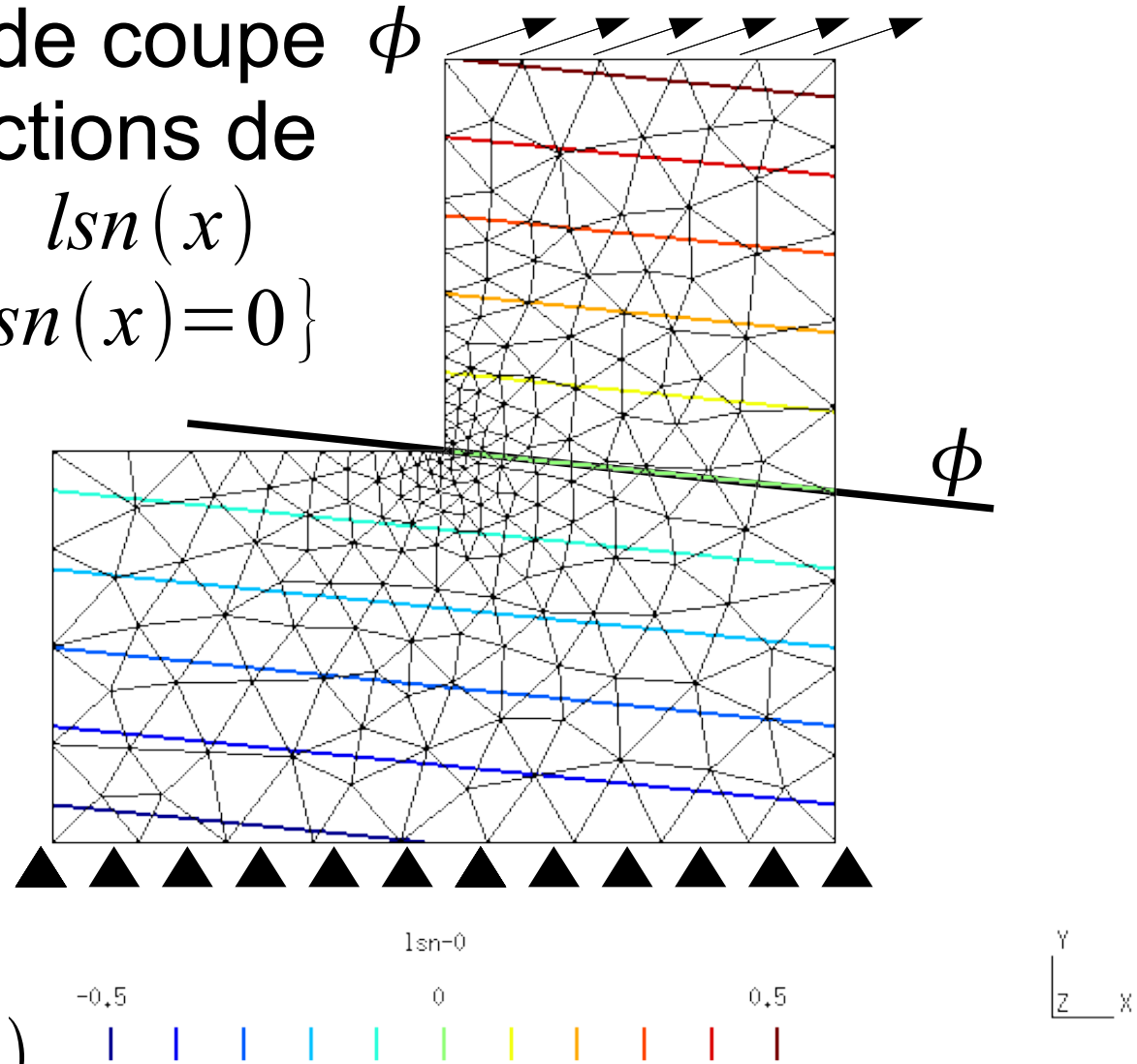
- On définit le plan de coupe ϕ à l'aide d'une fonction de niveau (level-set) $lsn(x)$
On a $\phi = \{x \in \mathbb{R}^3 / lsn(x) = 0\}$

- $lsn(x)$ est la distance signée à l'interface

- On prend simplement :

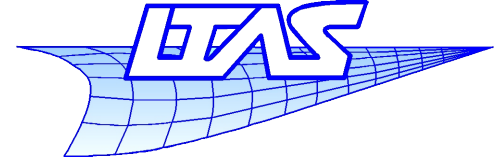
$$s = lsn(x)$$

$$H^*(s) = H^*(lsn(x))$$

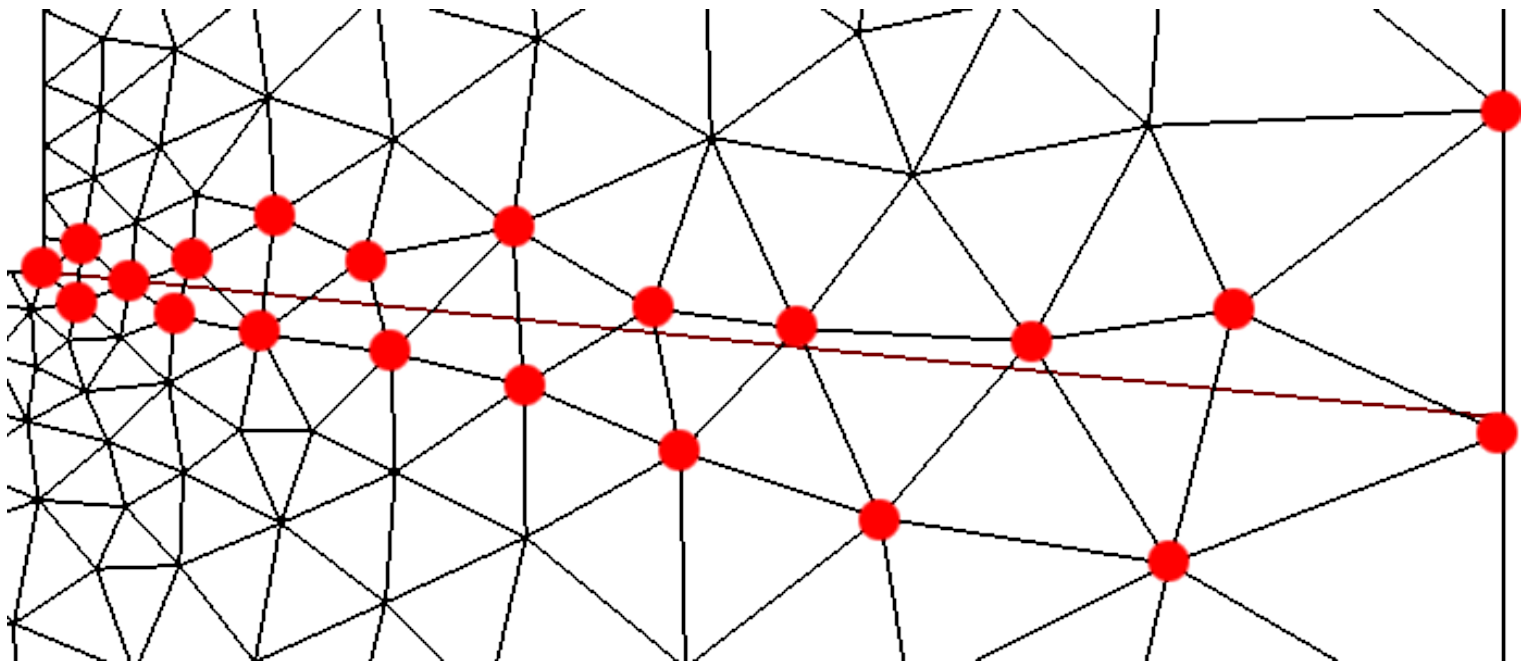


Méthode des EF étendus

Exemple 2D

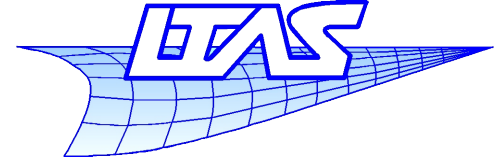


- Définition des degrés de liberté enrichis (ensemble C)
 - Ce sont les noeuds des éléments coupés par ϕ (iso-0 de la level-set)

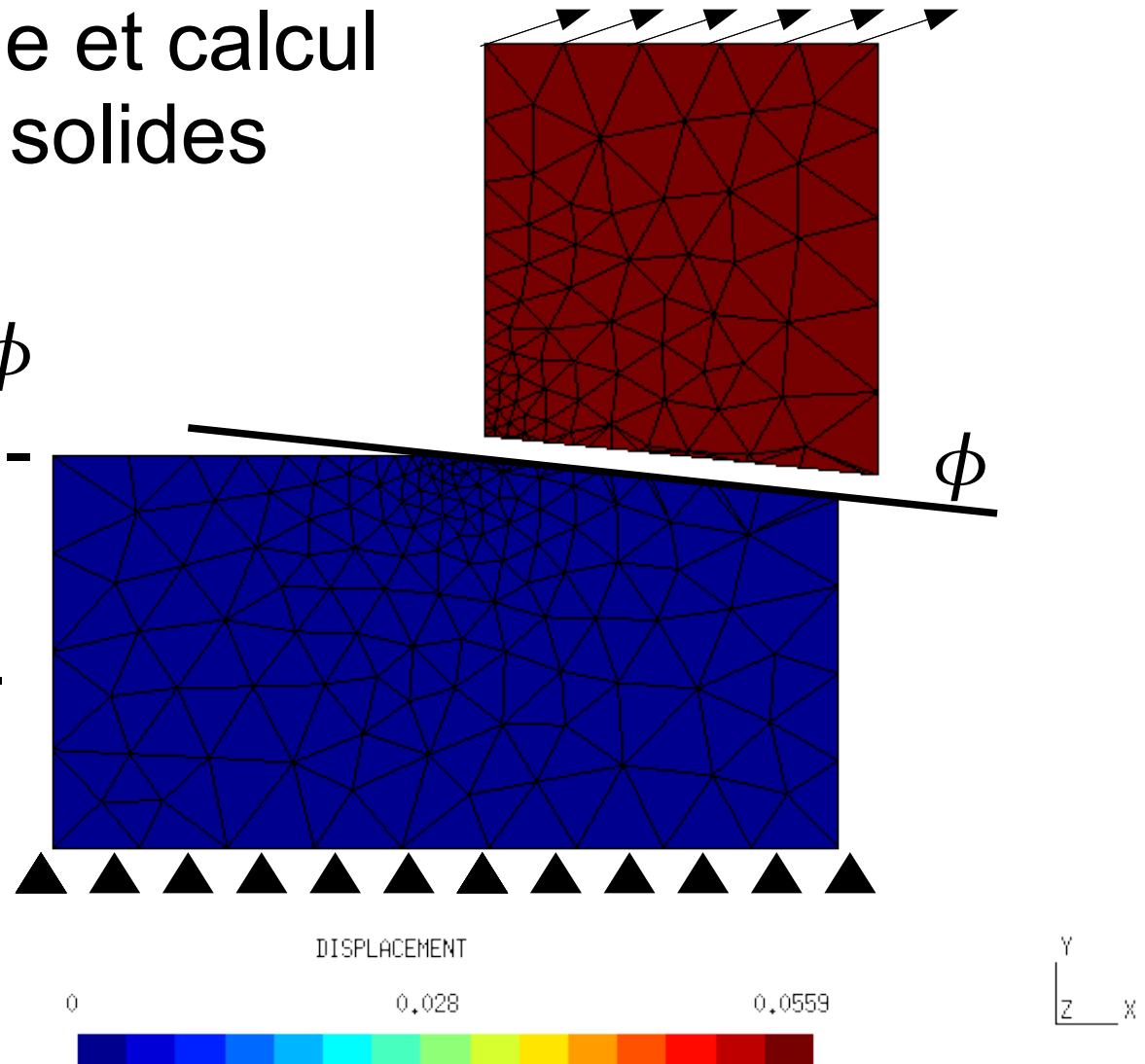


Méthode des EF étendus

Exemple 2D

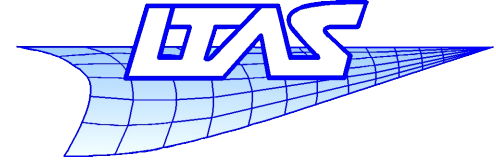


- Après assemblage et calcul on retrouve deux solides indépendants.
- La géométrie de ϕ peut être quelconque.
- Aucune modification du maillage

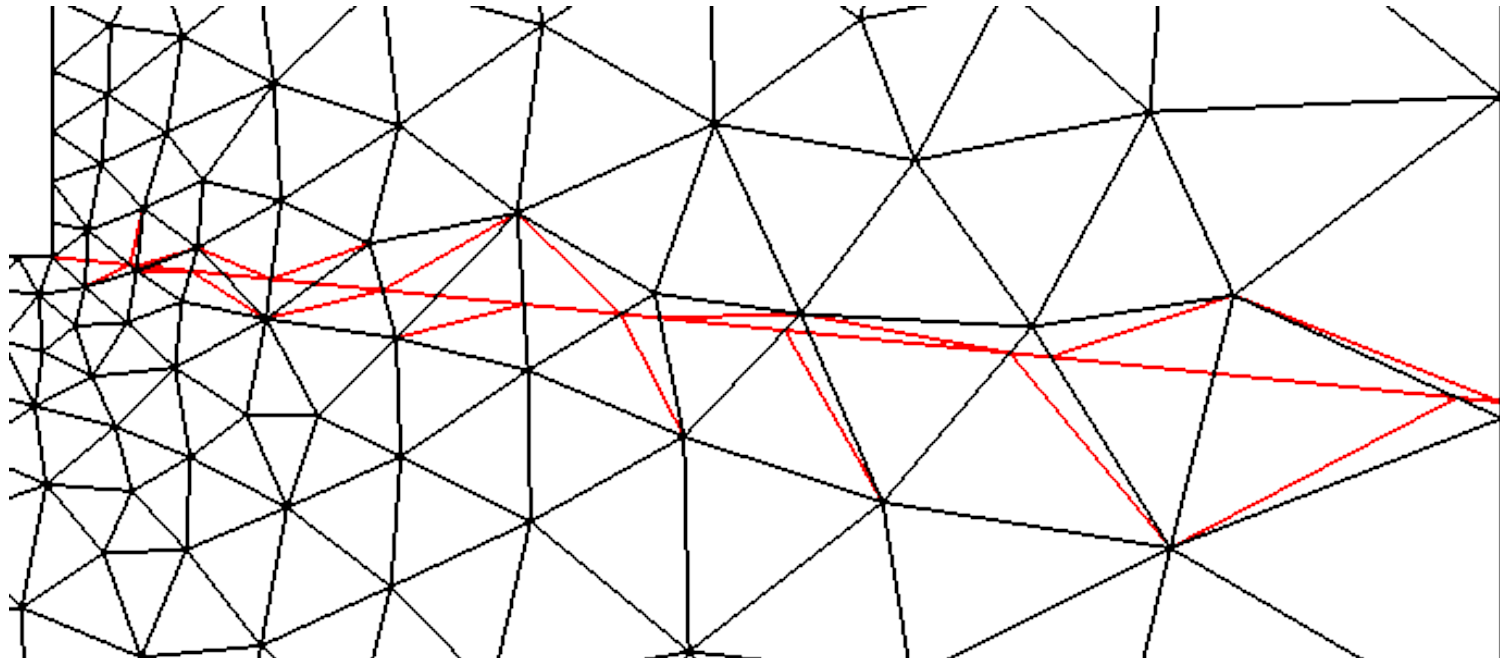


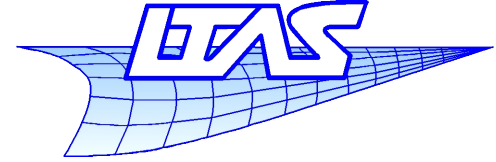
Méthode des EF étendus

Point délicat



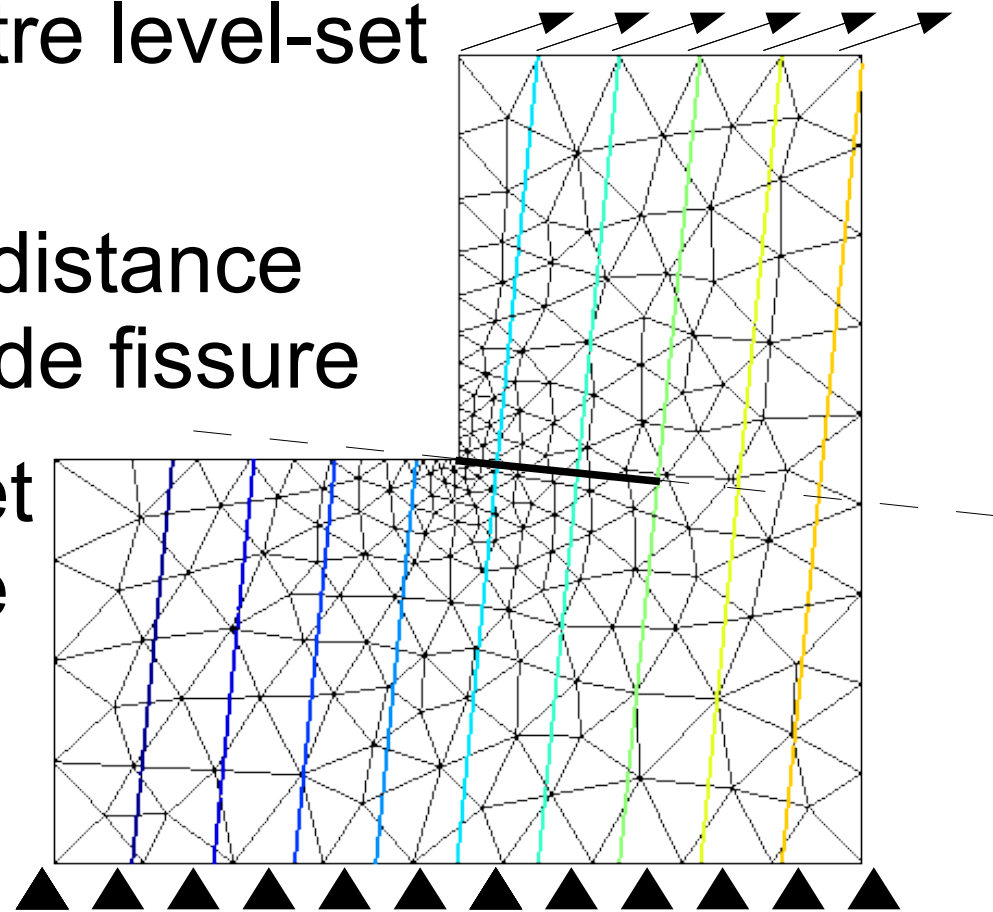
- Intégration
 - On doit sous-découper les éléments le long de l'interface
 - On doit augmenter l'ordre d'intégration en pointe de fissure





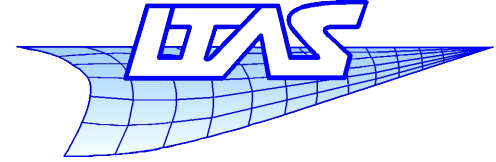
- On voudrait modéliser une fissure
 - Une fissure est une coupure incomplète dans le domaine
 - On a donc une modification de l'ensemble C
 - Comment prendre cela en compte ?
 - Il y a des phénomènes qui se passent en pointe de fissure (les déplacements sont en \sqrt{r} , r étant la distance à la pointe de fissure)
 - Les contraintes sont en $\frac{1}{\sqrt{r}}$!!!

- On utilise une autre level-set $lst(x)$
- Elle représente la distance normale au front de fissure
- Les deux level-set forment une base orthonormée en pointe de fissure



Méthode des EF étendus

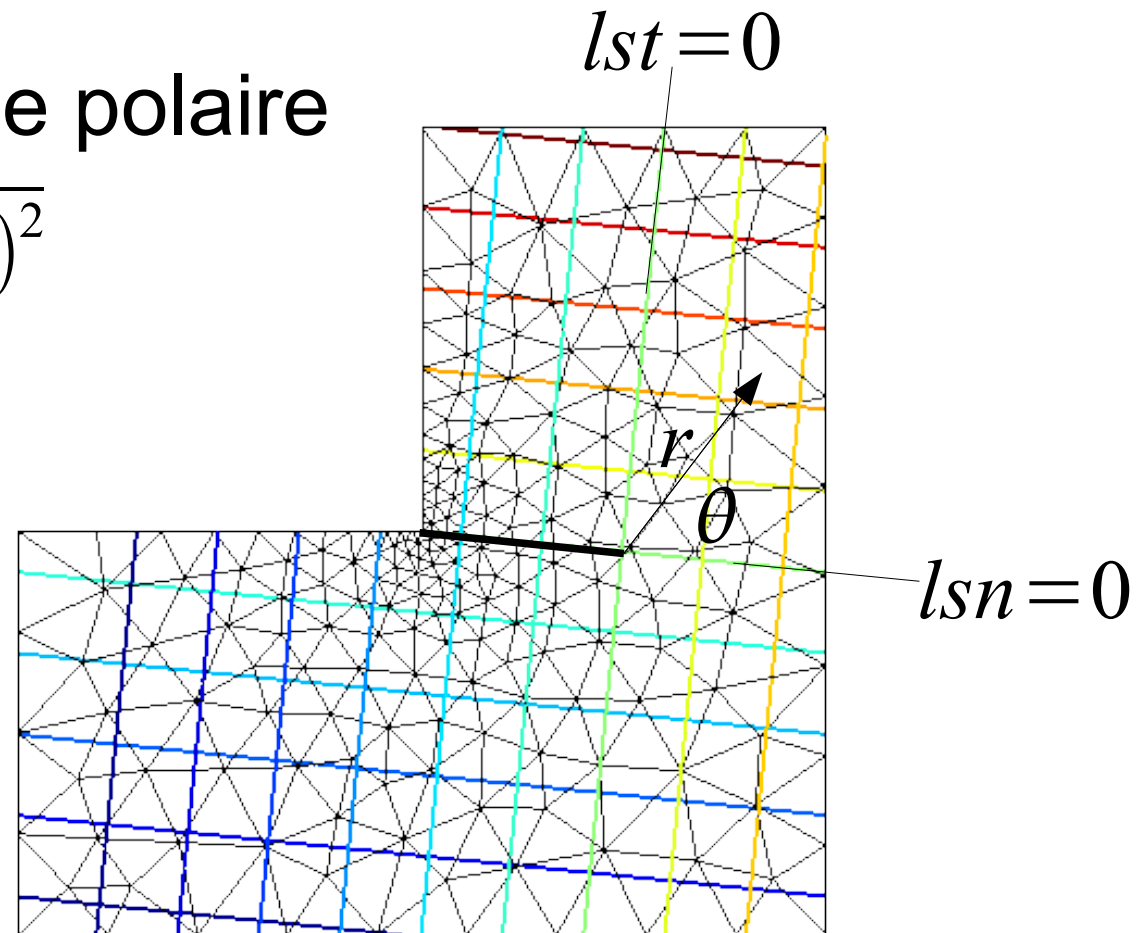
Fissures



- On définit une base polaire

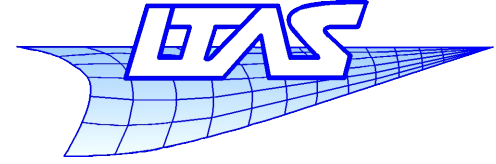
$$r = \sqrt{lsn(x)^2 + lst(x)^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{lsn(x)}{lst(x)}$$



Méthode des EF étendus

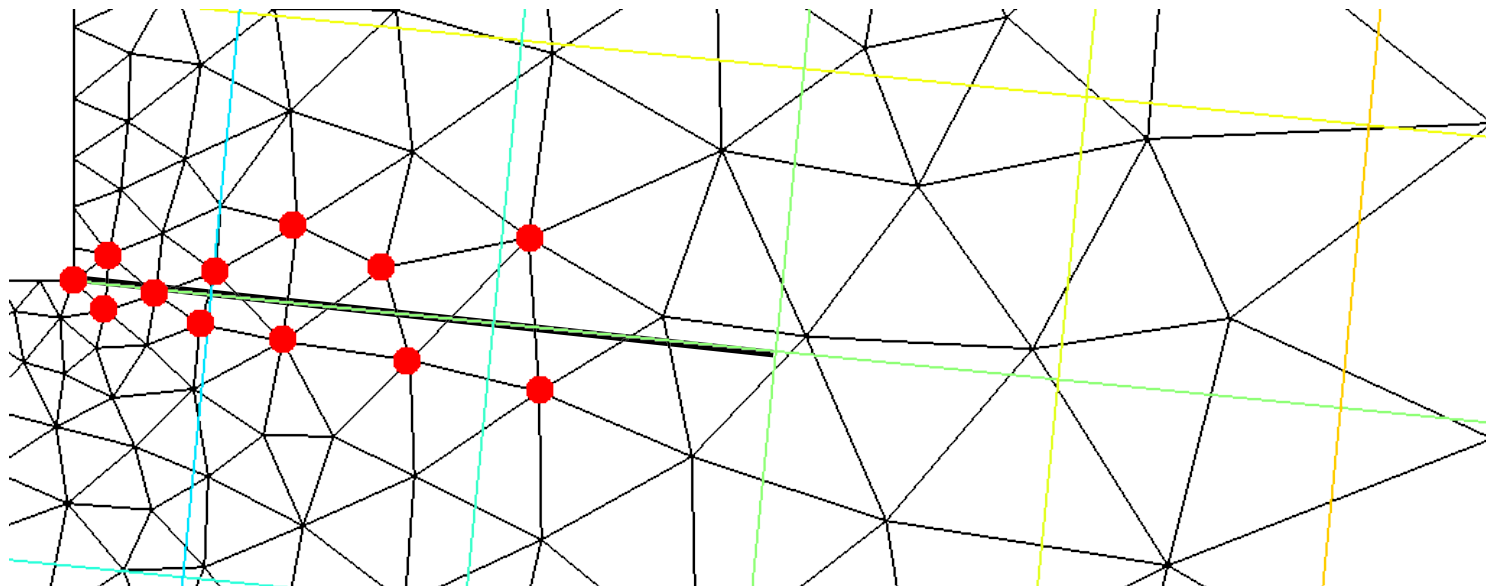
Fissures

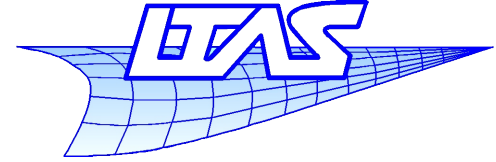


- Le lieu de la fissure est défini ainsi :

$$\phi = \{ x \in \mathbb{R}^3 / lsn(x) = 0, lst(x) \leq 0 \}$$

- La zone d'enrichissement C est modifiée





- On tient compte de la solution asymptotique en pointe de fissure (fissure en milieu infini)

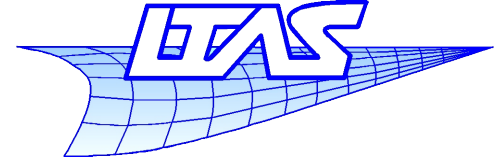
$$u_1 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_1 \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + K_2 \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 2 + \cos \theta) \right\}$$

$$u_2 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_1 \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \sin \theta) + K_2 \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 2 + \cos \theta) \right\}$$

$$u_3 = \frac{2}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_3 \sin \frac{\theta}{2} \right\}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\kappa = 3 - 4\nu$$



- Un peu de manipulation nous montre que:

$$u_1 = a_1 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} + a_2 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} + a_3 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta + a_4 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + CL(x)$$

$$u_2 = b_1 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} + b_2 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} + b_3 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta + b_4 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + CL(x)$$

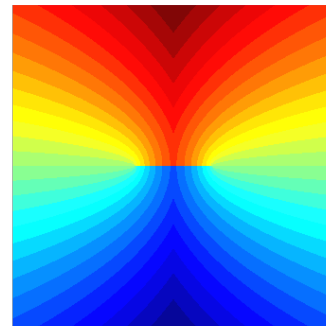
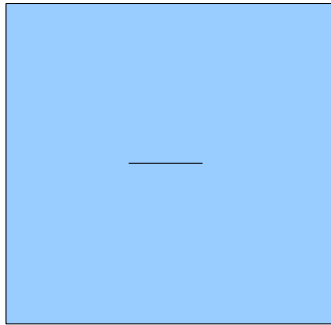
$$u_3 = c_1 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} + c_2 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} + c_3 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta + c_4 \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + CL(x)$$

- On peut donc enrichir l'espace fonctionnel avec les fonctions indépendantes:

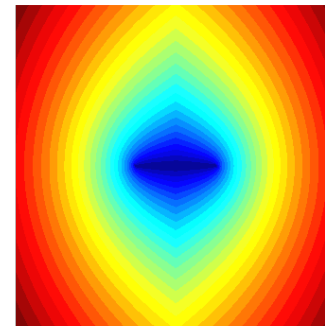
$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} & f_3 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ f_2 = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} & f_4 = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \end{array} \right.$$

- On peut noter que seule f_1 est discontinue.

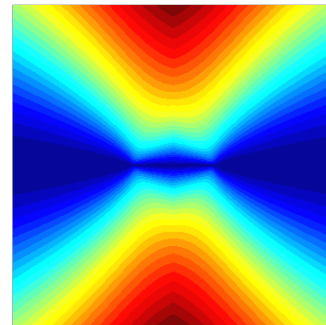
- Allure des fonctions d'enrichissement (fissure d'Irwin)



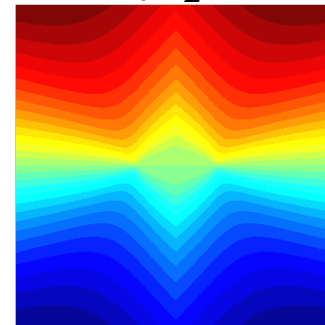
f_1



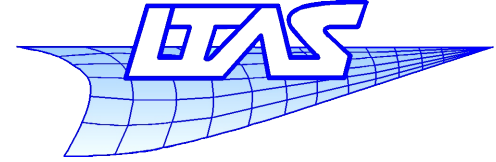
f_2



f_3



f_4



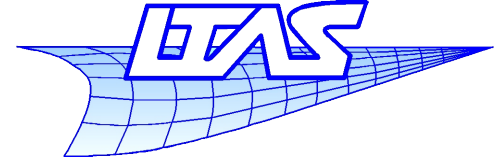
- **Nouvel espace fonctionnel**

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(x) = & \sum_{i \in \Omega} \lambda_i \cdot \bar{N}_i(x) \\
 & + \sum_{i \in C} \lambda_i^* \cdot \bar{N}_i(x) \cdot H^*(s) + \sum_{i \in T} \sum_{j \in 1..4} \lambda_i^j \cdot \bar{N}_i(x) \cdot f_j(r, \theta)
 \end{aligned}$$

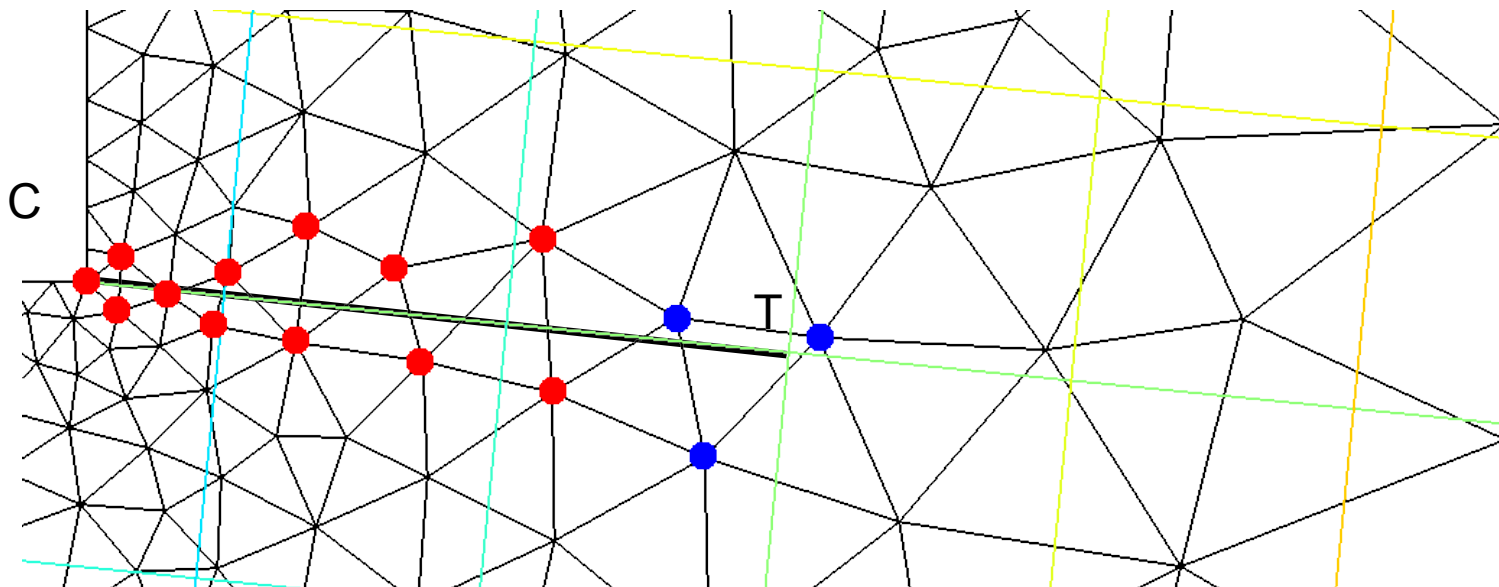
- **Où enrichir ?**
 - En pointe de fissure (T) , car le reste du domaine est déjà concerné par l'enrichissement Heaviside
 - La solution utilisée pour construire les $f_j(r, \theta)$ n'est valable que dans le voisinage de la pointe.

Méthode des EF étendus

Fissures

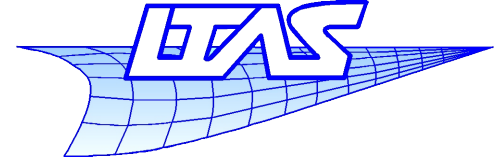


- L'ensemble C concerne les noeuds dont le support est entièrement coupé par la fissure
- L'ensemble T concerne les noeuds dont le support contient ou touche la pointe de fissure

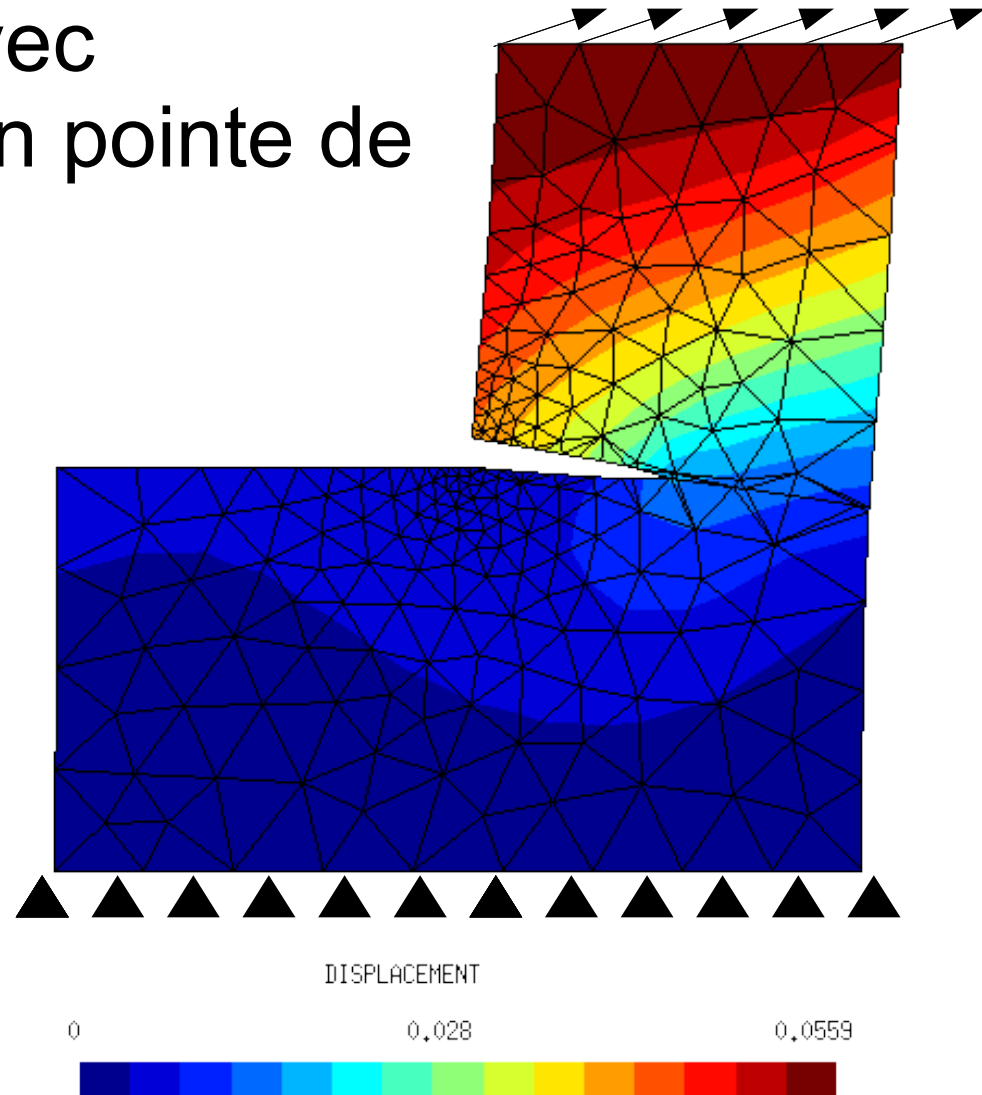


Méthode des EF étendus

Fissures

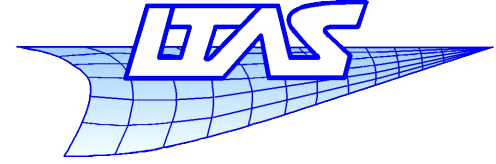


- Déplacements avec enrichissement en pointe de fissure

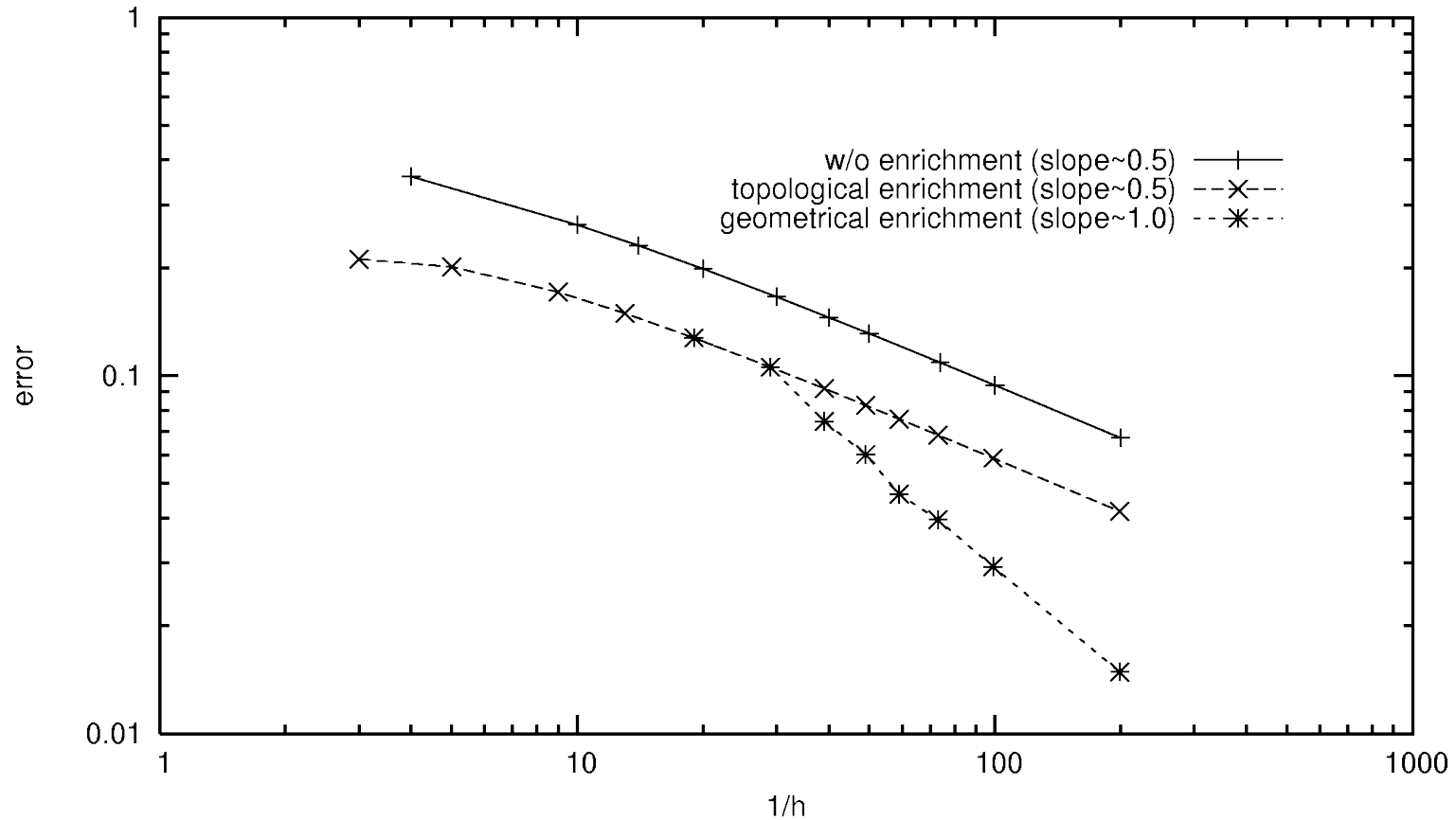


Méthode des EF étendus

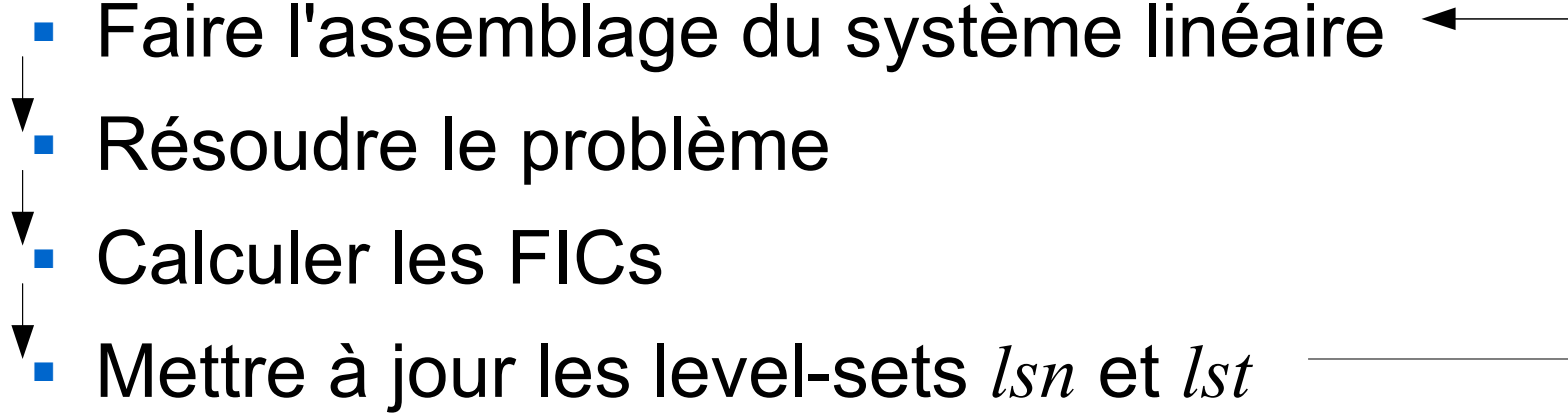
Fissures



- En choisissant bien l'enrichissement, amélioration du taux de convergence



Propagation de fissures

- Pour faire se propager une fissure, il faut:
 - Faire l'assemblage du système linéaire
 - Résoudre le problème
 - Calculer les FICs
 - Mettre à jour les level-sets l_{sn} et l_{st}
 - La propagation de la fissure se fait selon des lois bien définies
 - Fatigue
 - Fracture fragile
 - etc...
- 

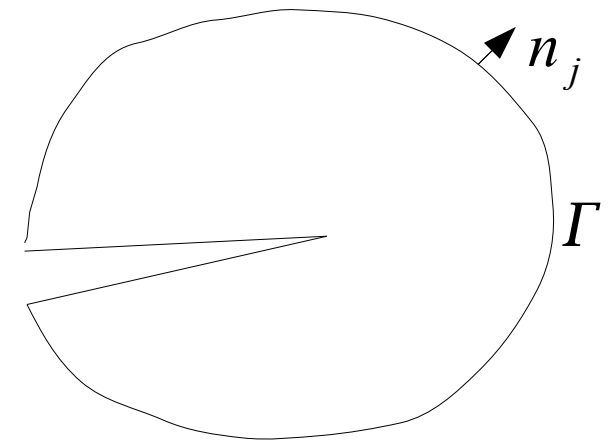
- Calcul des facteurs d'intensité de contraintes
 - On utilise les intégrales d'interaction

$$J = \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
 J^{(1+2)} &= \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \\
 &= J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1+2)}
 \end{aligned}$$

$$I^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[\sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma$$

$$I^{(1+2)} = 2 \frac{(1-\nu^2)}{E} (K_1^{(1)} K_1^{(2)} + K_2^{(1)} K_2^{(2)}) + \frac{1}{\mu} K_3^{(1)} K_3^{(2)}$$



Propagation de fissures

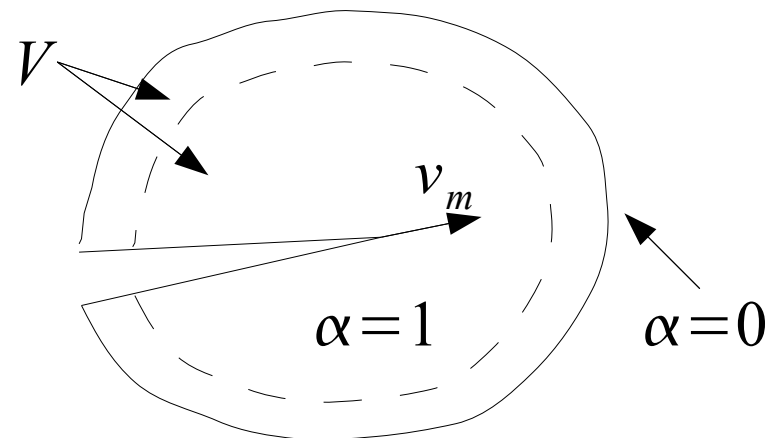
- Passage d'une intégrale de contour à une intégrale de volume (fissure non chargée)

$$I^{(1+2)} = \int_V \frac{\partial q_m}{\partial x_j} \left(\sigma_{kl}^{(1)} \epsilon_{kl}^{(2)} \delta_{mj} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_m} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_m} \right) dV$$

On a : $q_m = \alpha \cdot v_m$ et α vaut 1 à l'intérieur du domaine et tend vers 0 sur la frontière Γ .

v_m est la vitesse virtuelle de propagation de la fissure (norme 1)

On interpole α sur le maillage.



Propagation de fissures

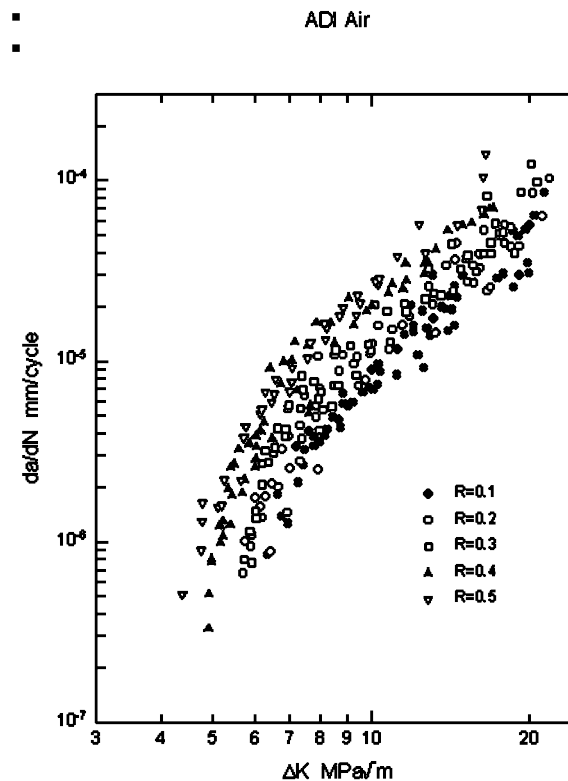
- Vitesse de propagation

Exemple : Alliages sous sollicitation cyclique

- Loi de Paris pour la vitesse :

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m$$

Alliage	m	C (m/cycle)
Acier	3	10^{-11}
Aluminium	3	10^{-12}
Nickel	3.3	$4 \cdot 10^{-12}$
Titane	5	10^{-11}



Propagation de fissures

- Direction selon la contrainte tangentielle $\sigma_{\theta\theta}$ maximale :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_1}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} 3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} + \frac{K_2}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -3\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix}$$

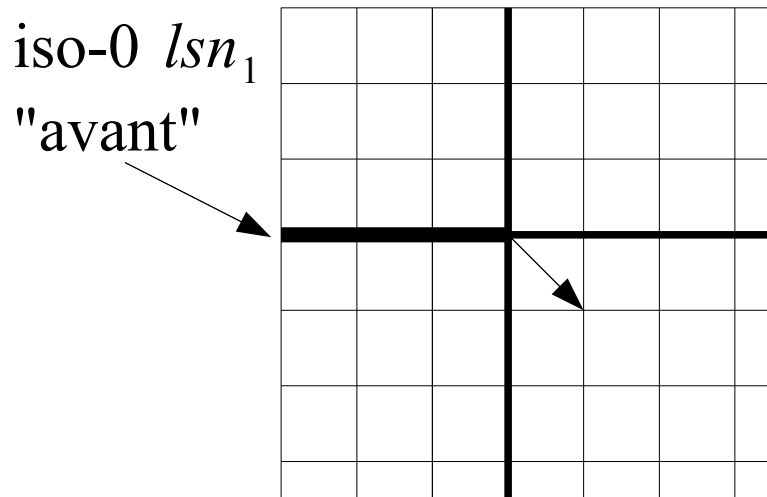
$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\frac{\theta_c}{2} \left[\frac{1}{2} K_1 \sin\theta_c + \frac{1}{2} K_2 (3\cos\theta_c - 1) \right] = 0$$

$$\theta_c = 2 \arctan \frac{1}{4} \left(\frac{K_1}{K_2} \pm \sqrt{\left(\frac{K_1}{K_2} \right)^2 + 8} \right)$$

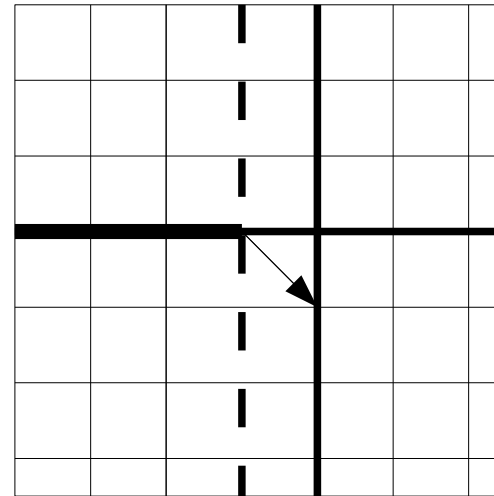
- On choisit le θ_c qui correspond à $\sigma_{\theta\theta}$ maximal (en traction).

- Il existe plusieurs algorithmes mais l'essentiel est de :
 - conserver la notion de distance signée à l'interface pour lsn
 - Avoir au voisinage de la pointe de fissure un repère orthonormé constitué par (lst, lsn)

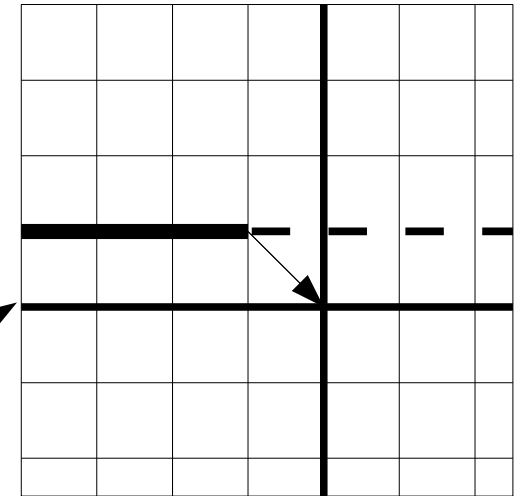
- Transport de l_{sn} et l_{st}



iso-0 l_{st_1} "avant"



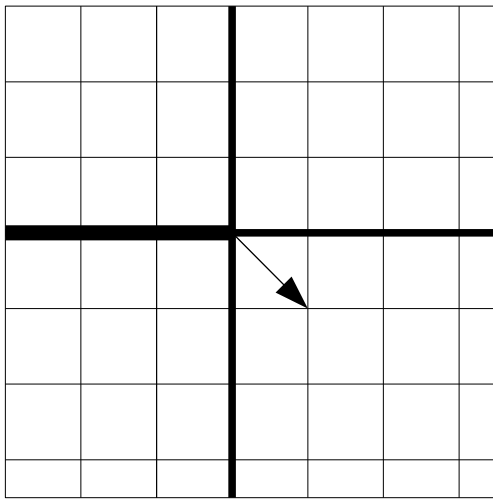
iso-0 l_{sn_2}
"après"



iso-0 l_{st_2} "après"

Mise à jour des level-sets

- Reconstruction de l_{sn} et l_{st}



l_{sn_1} & l_{st_1} "avant"

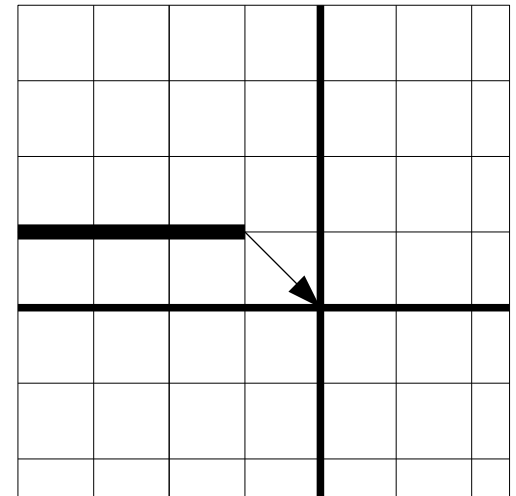
$$l_{st} = l_{st_2}$$

$$l_{sn} = l_{sn_1}$$

$$dx = l_{st_1} - l_{st_2}$$

$$dy = l_{sn_1} - l_{sn_2}$$

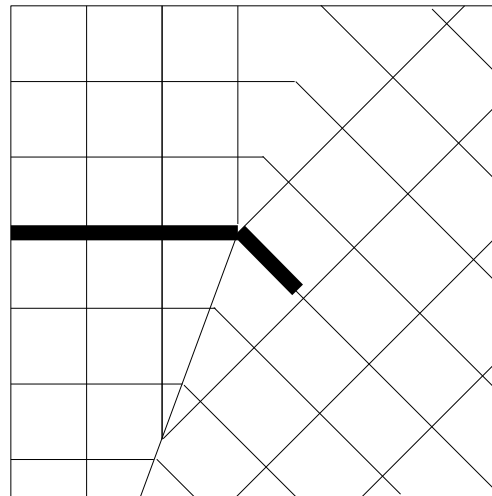
$$\alpha = \text{atan2}(dy, dx)$$



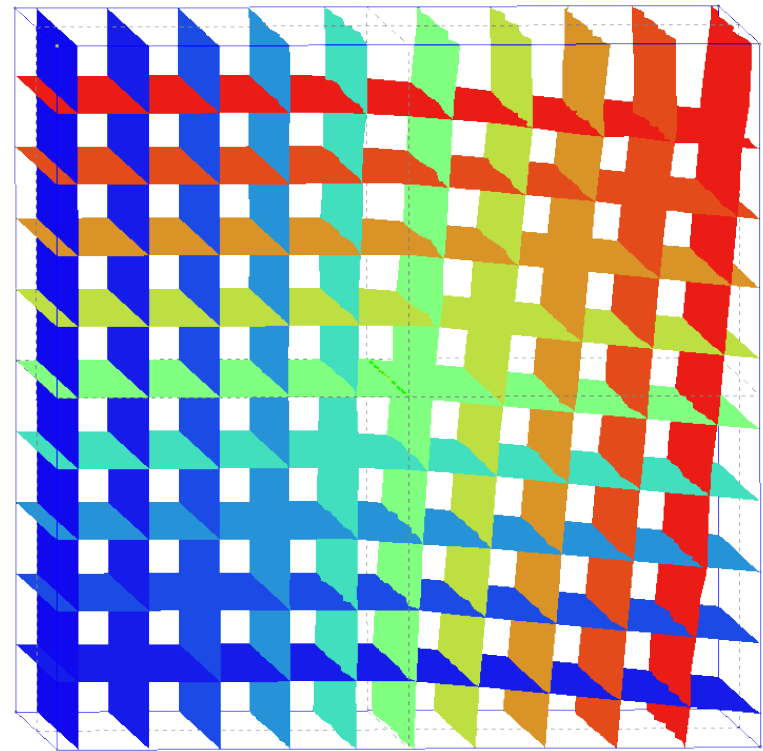
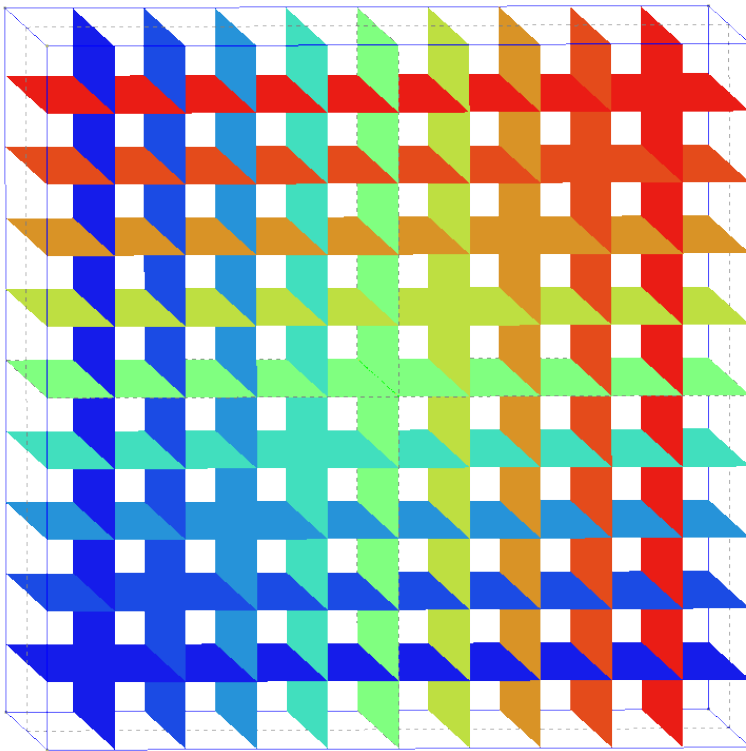
l_{sn_2} & l_{st_2} "après"

$$l_{st} = \cos(\alpha) \cdot l_{st_2} + \sin(\alpha) \cdot l_{sn_2}$$

$$l_{sn} = -\sin(\alpha) \cdot l_{st_2} + \cos(\alpha) \cdot l_{sn_2}$$

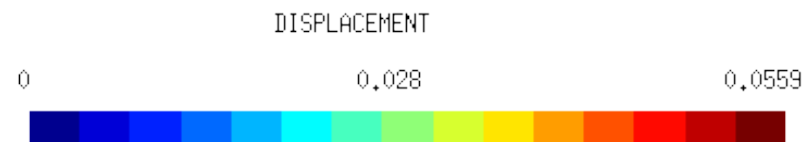
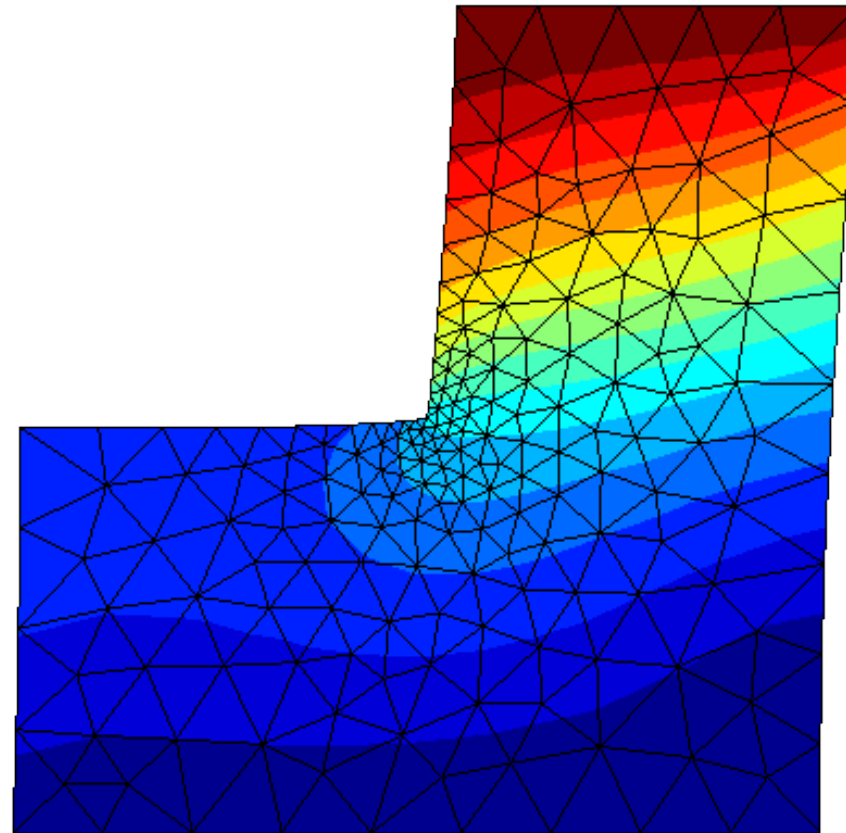
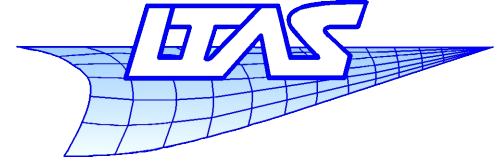


Mise à jour des level-sets



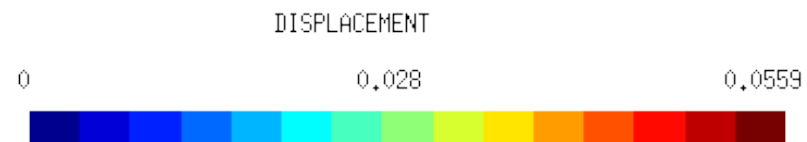
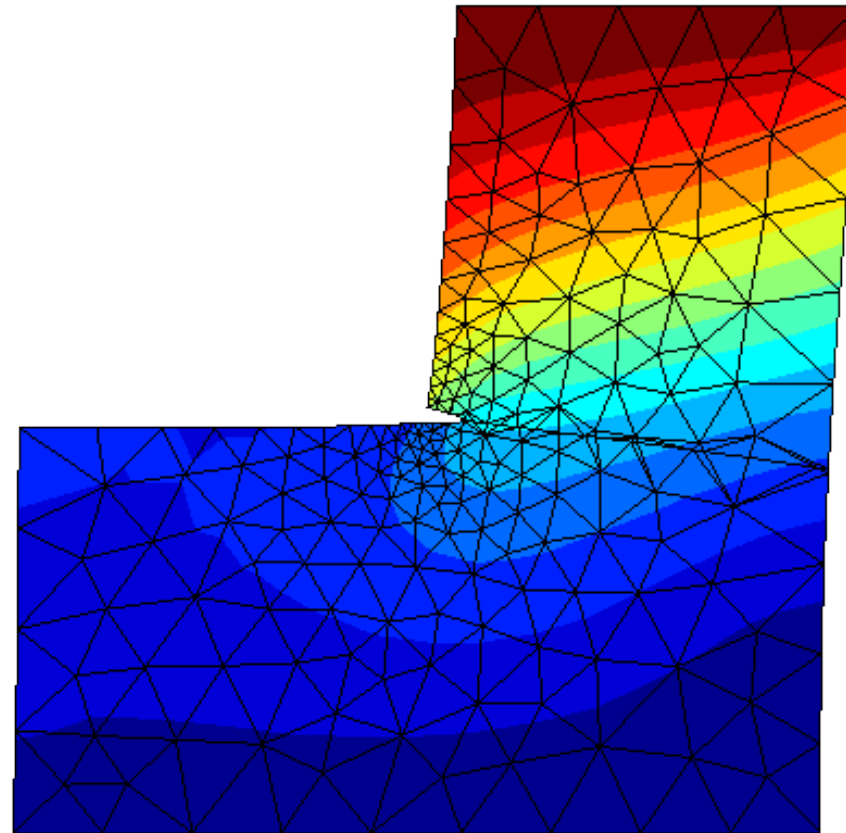
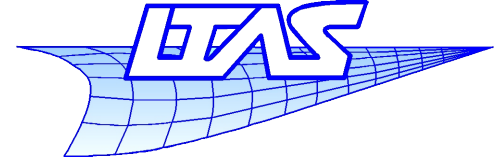
Méthode des EF étendus

Propagation



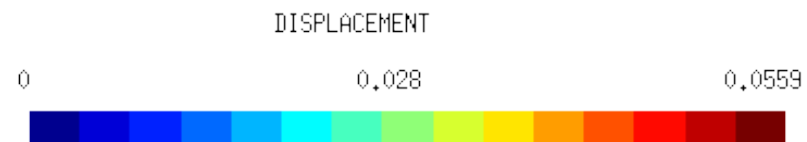
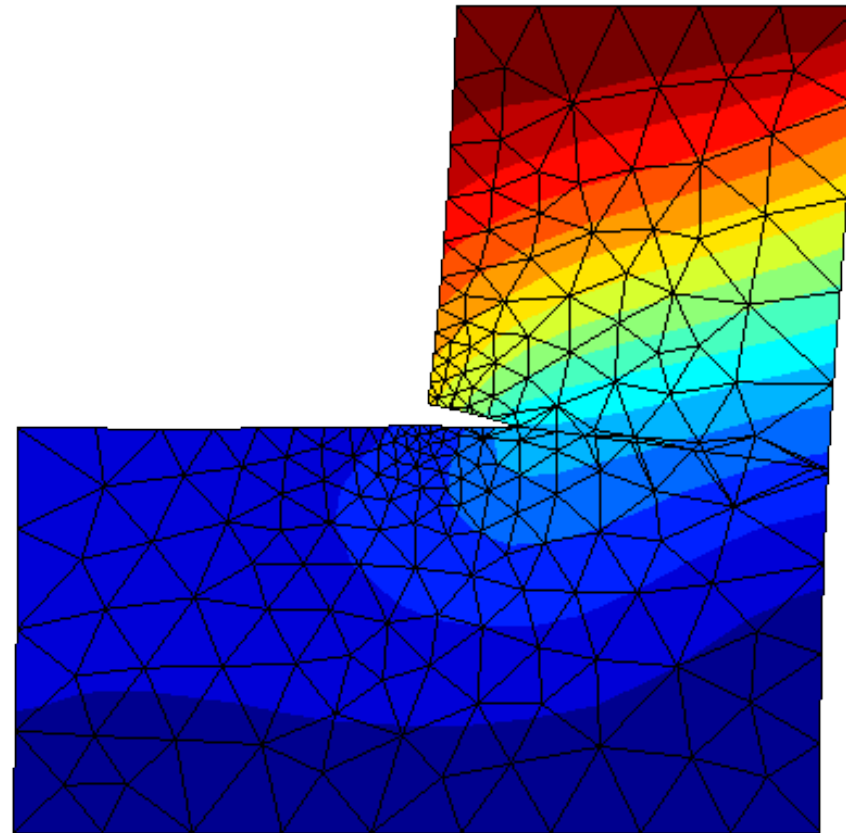
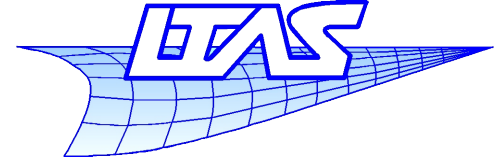
Méthode des EF étendus

Propagation



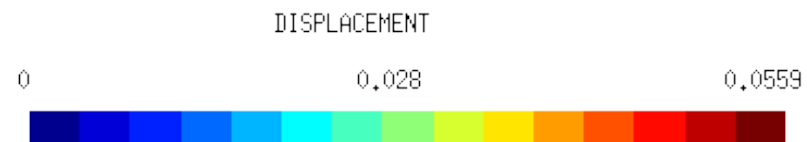
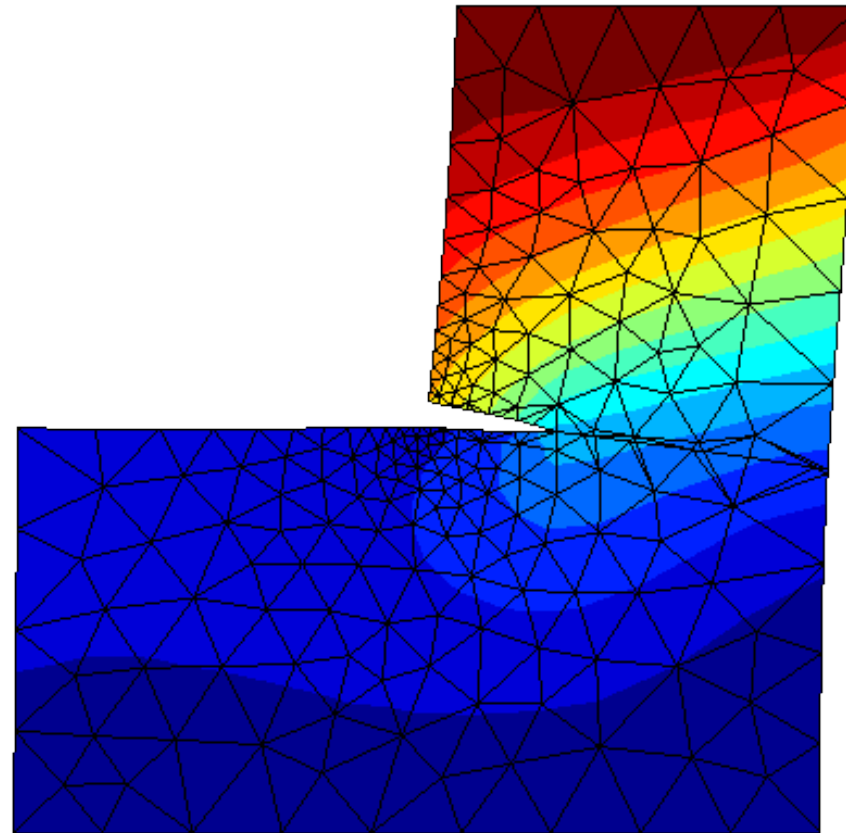
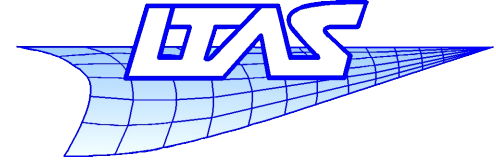
Méthode des EF étendus

Propagation



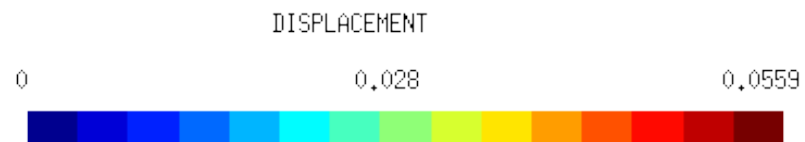
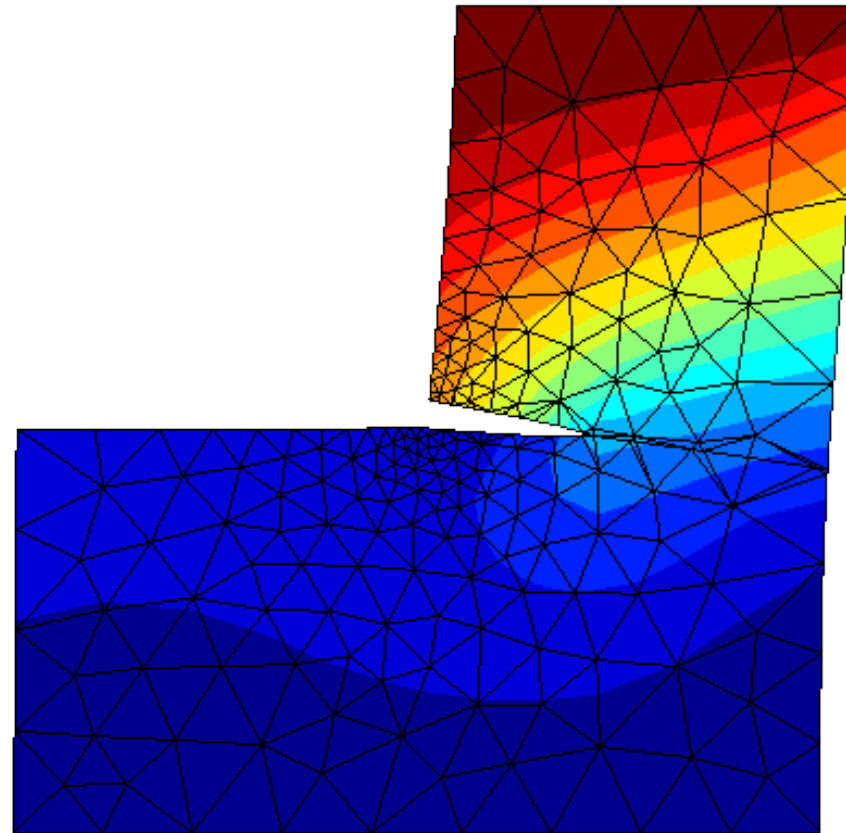
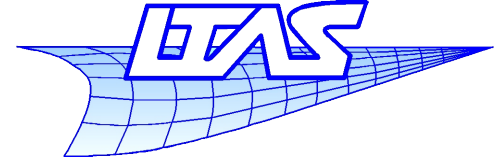
Méthode des EF étendus

Propagation



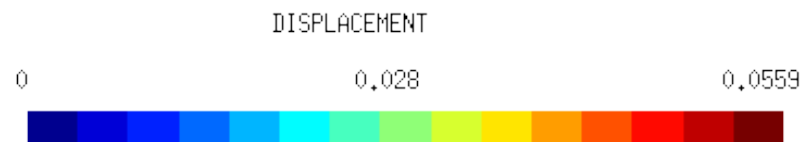
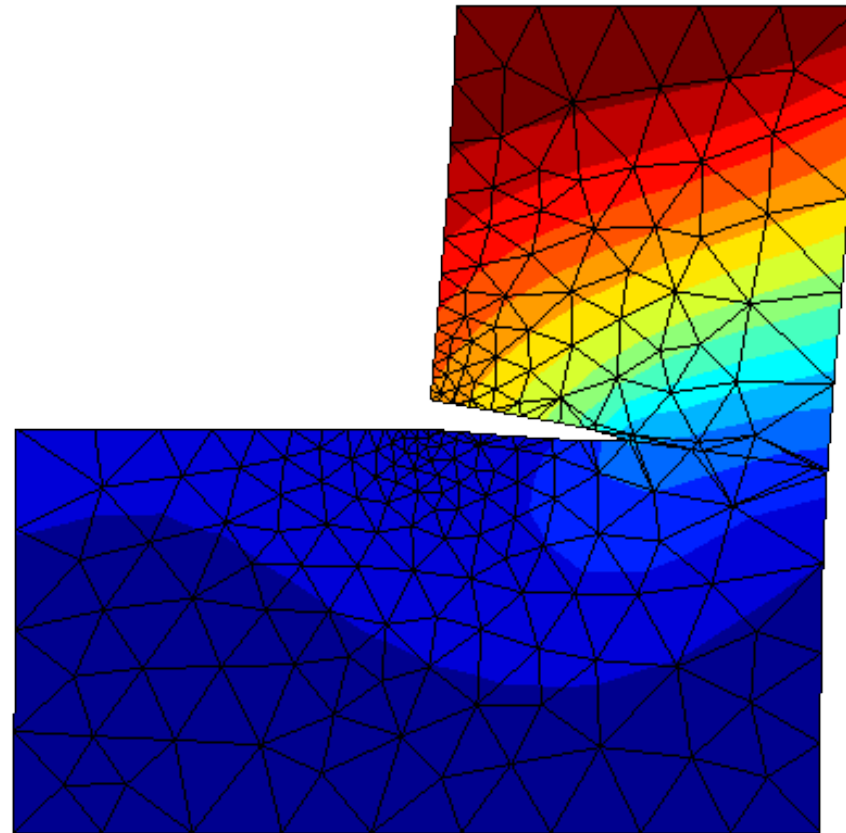
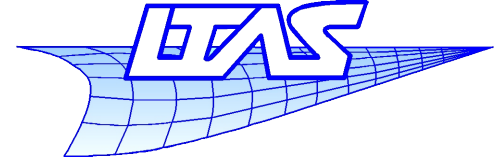
Méthode des EF étendus

Propagation



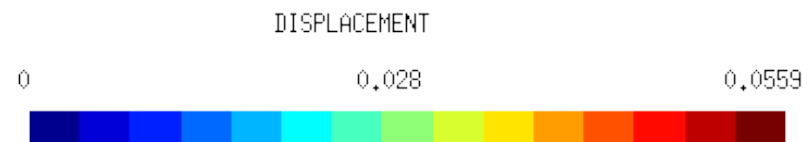
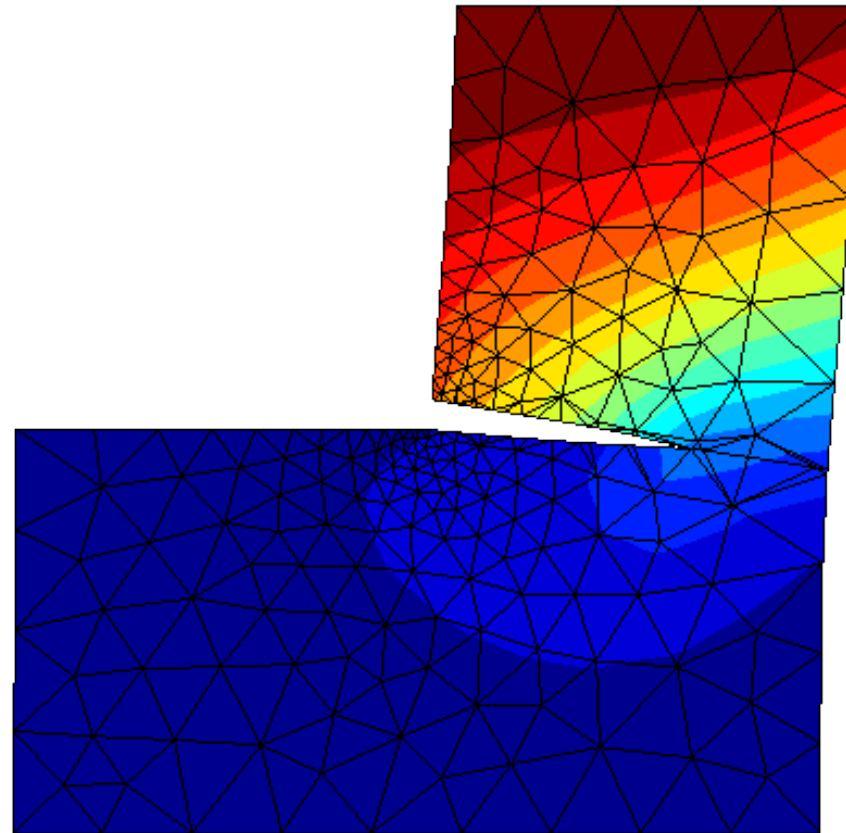
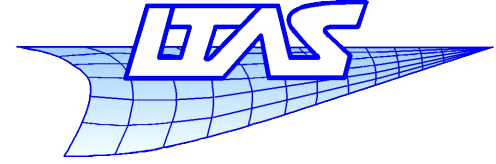
Méthode des EF étendus

Propagation



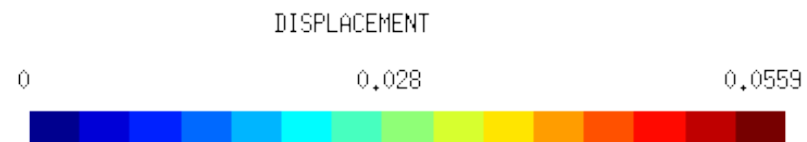
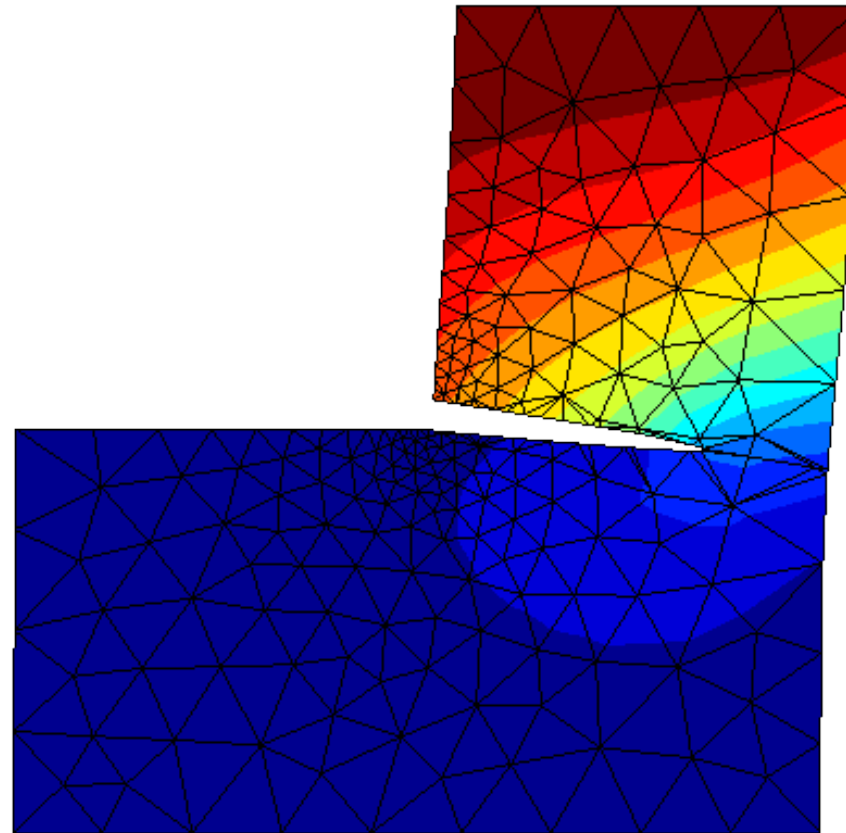
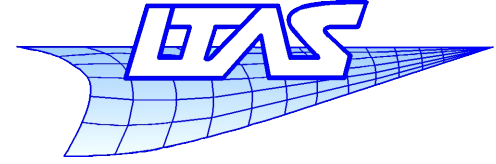
Méthode des EF étendus

Propagation



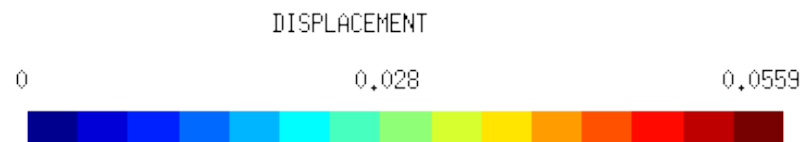
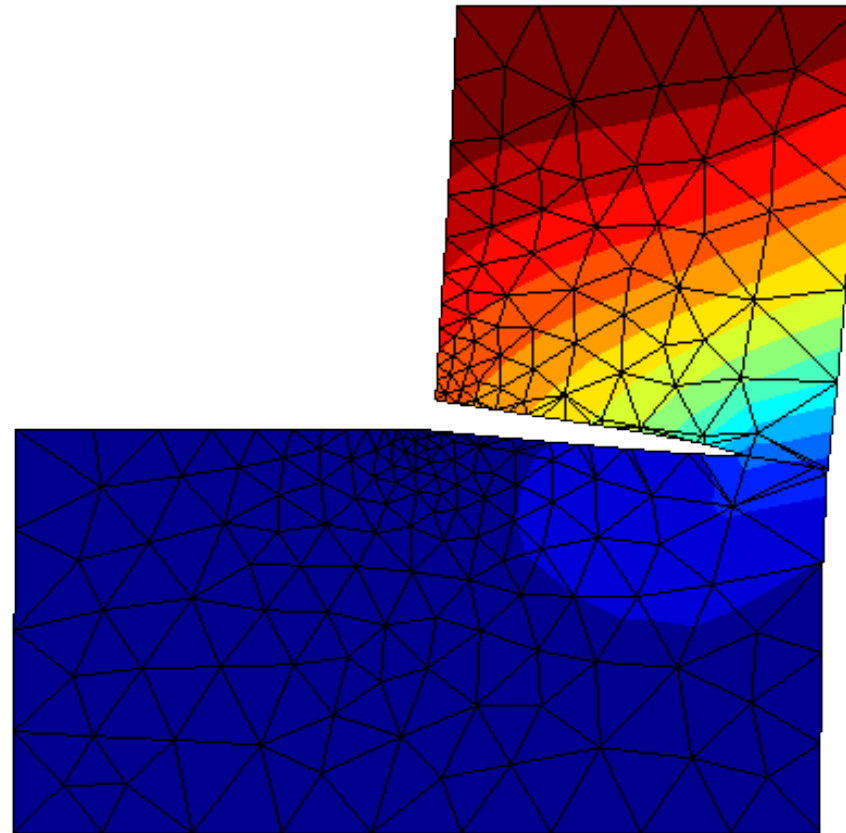
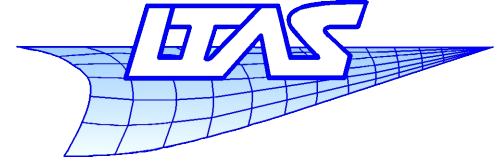
Méthode des EF étendus

Propagation



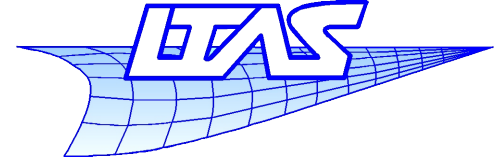
Méthode des EF étendus

Propagation

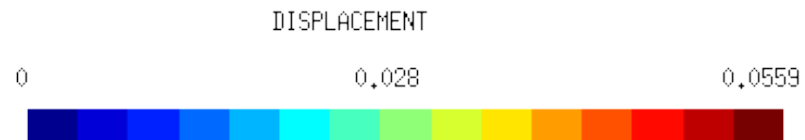
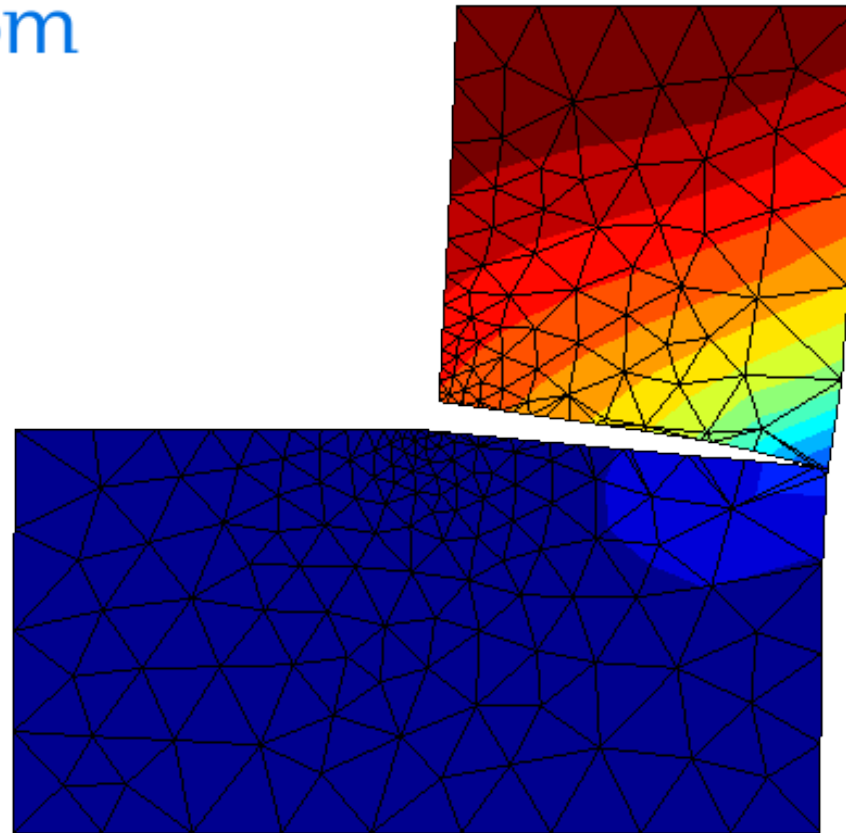


Méthode des EF étendus

Propagation

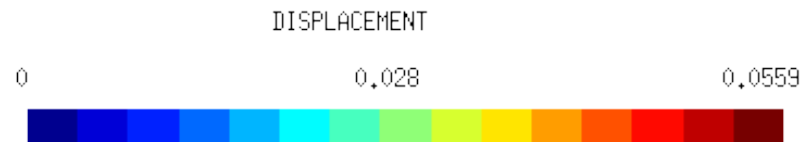
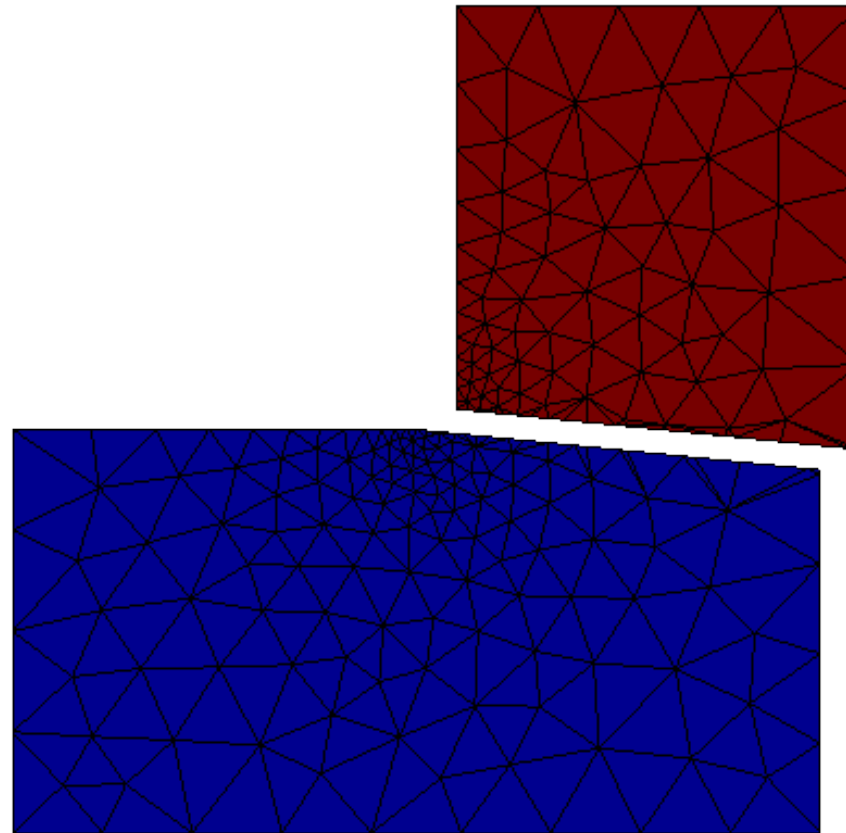
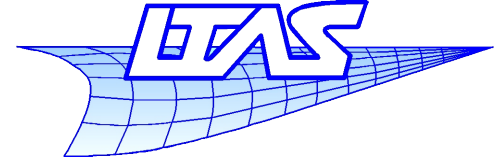


MCours.com



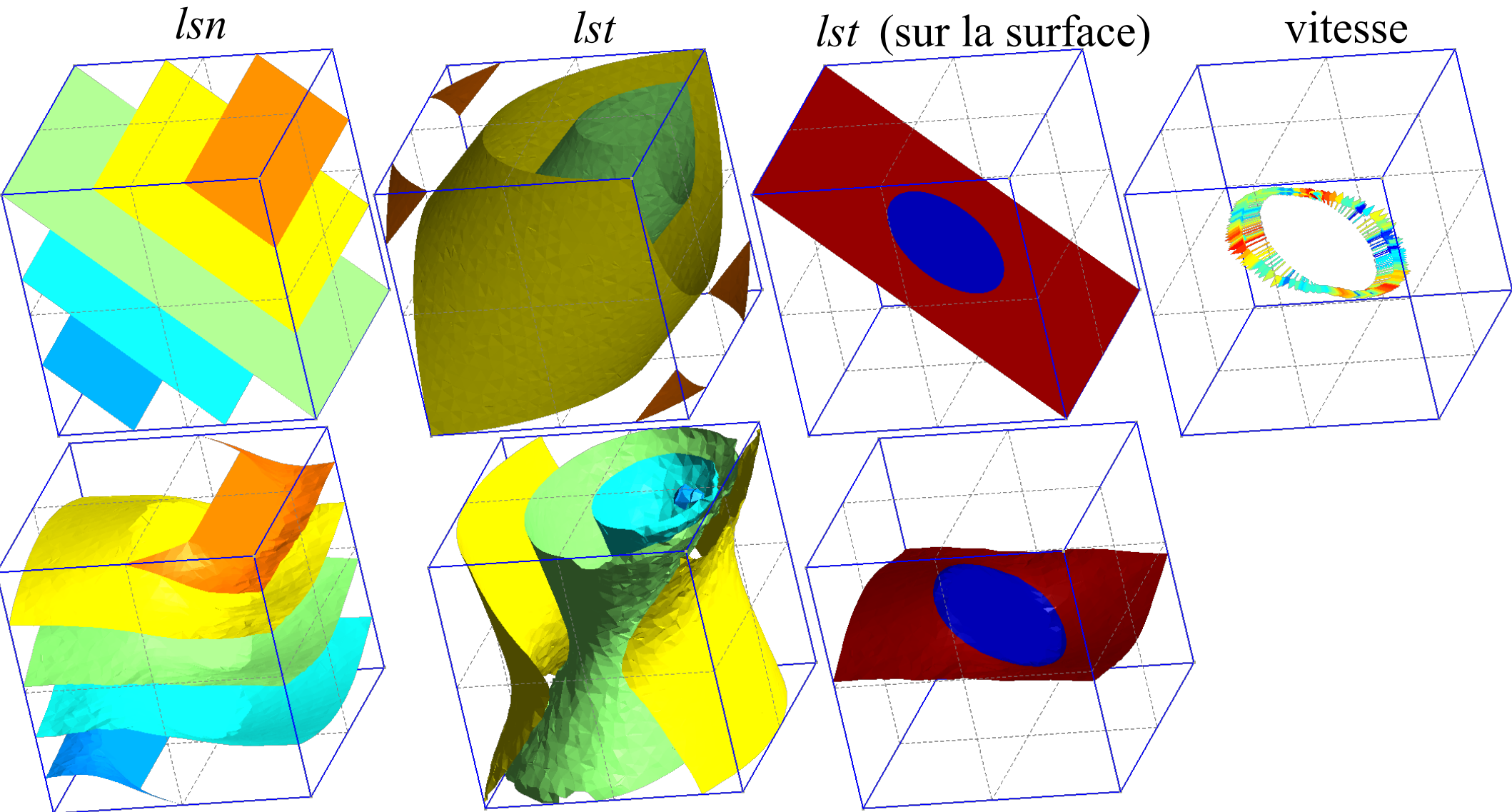
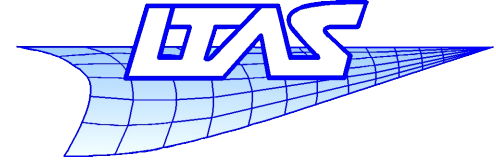
Méthode des EF étendus

Propagation



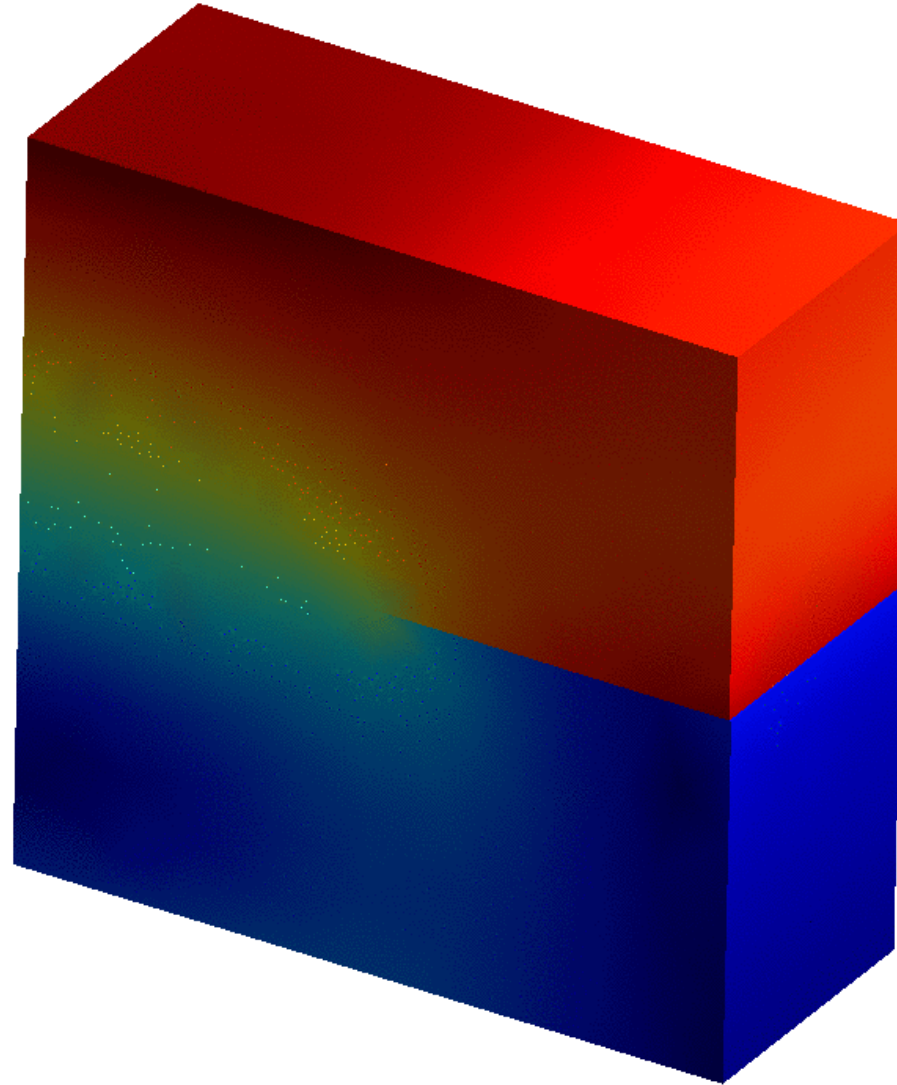
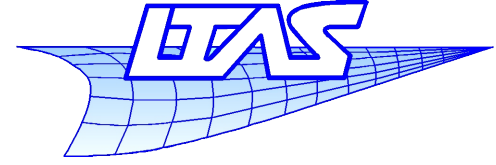
Méthode des EF étendus

Propagation 3D



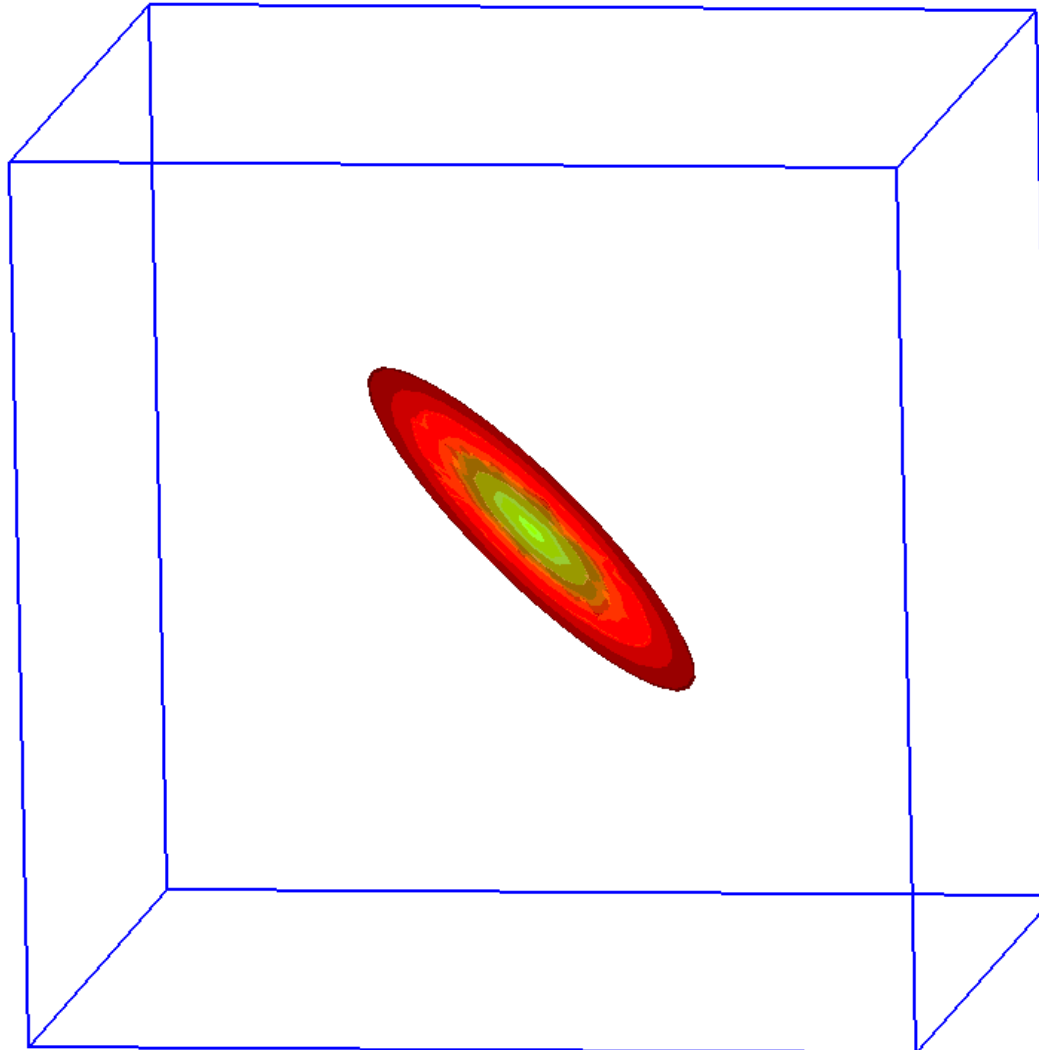
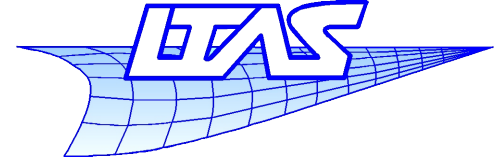
Méthode des EF étendus

Propagation 3D



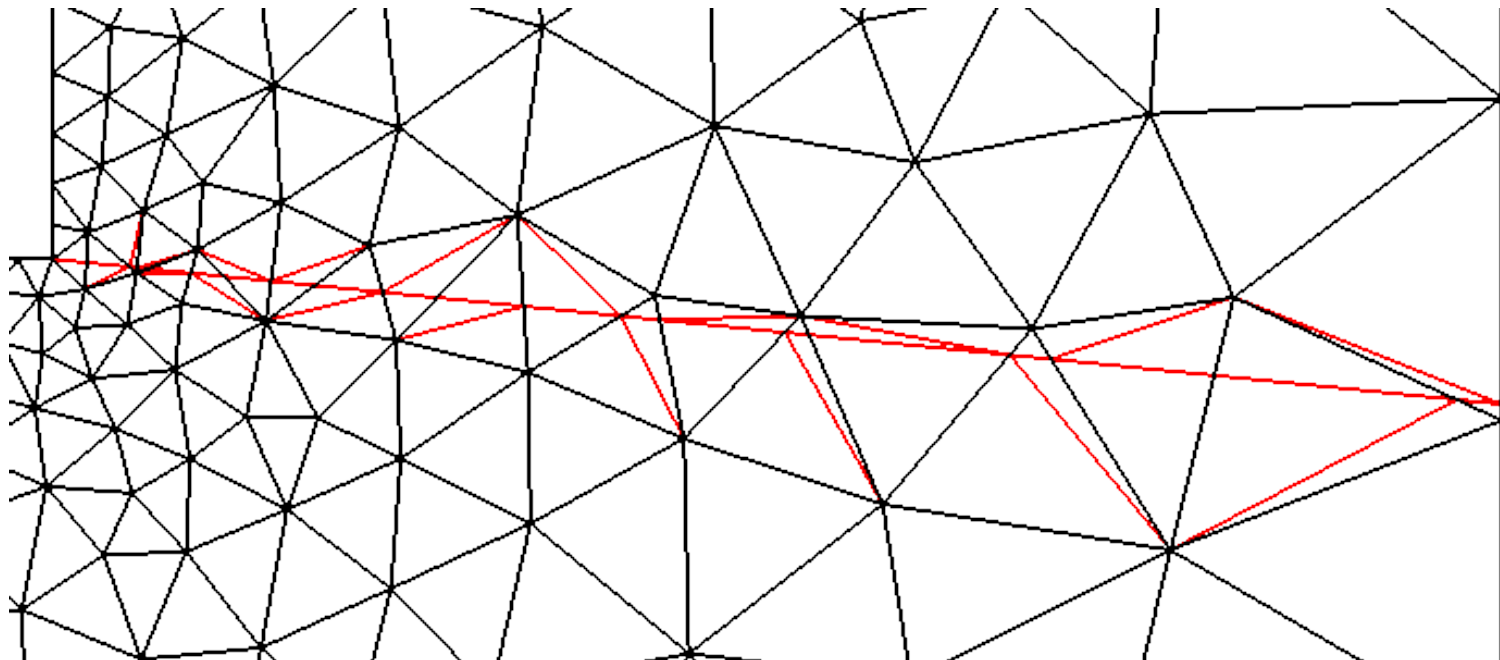
Méthode des EF étendus

Propagation 3D



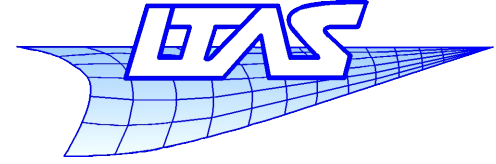
- **Intégration**

- On doit sous-découper les éléments le long de l'interface
- On doit augmenter l'ordre d'intégration en pointe de fissure



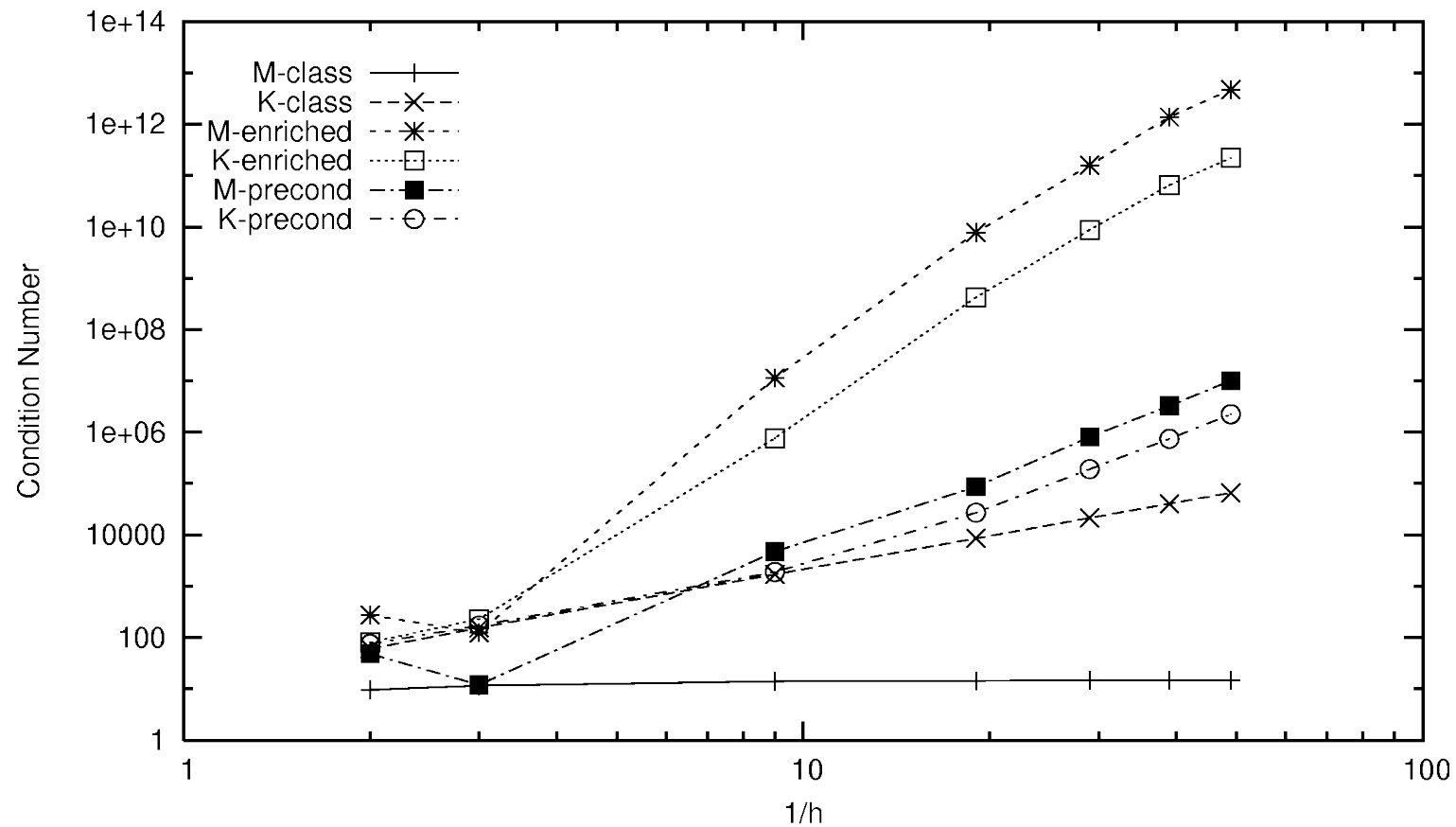
Méthode des EF étendus

Points délicats



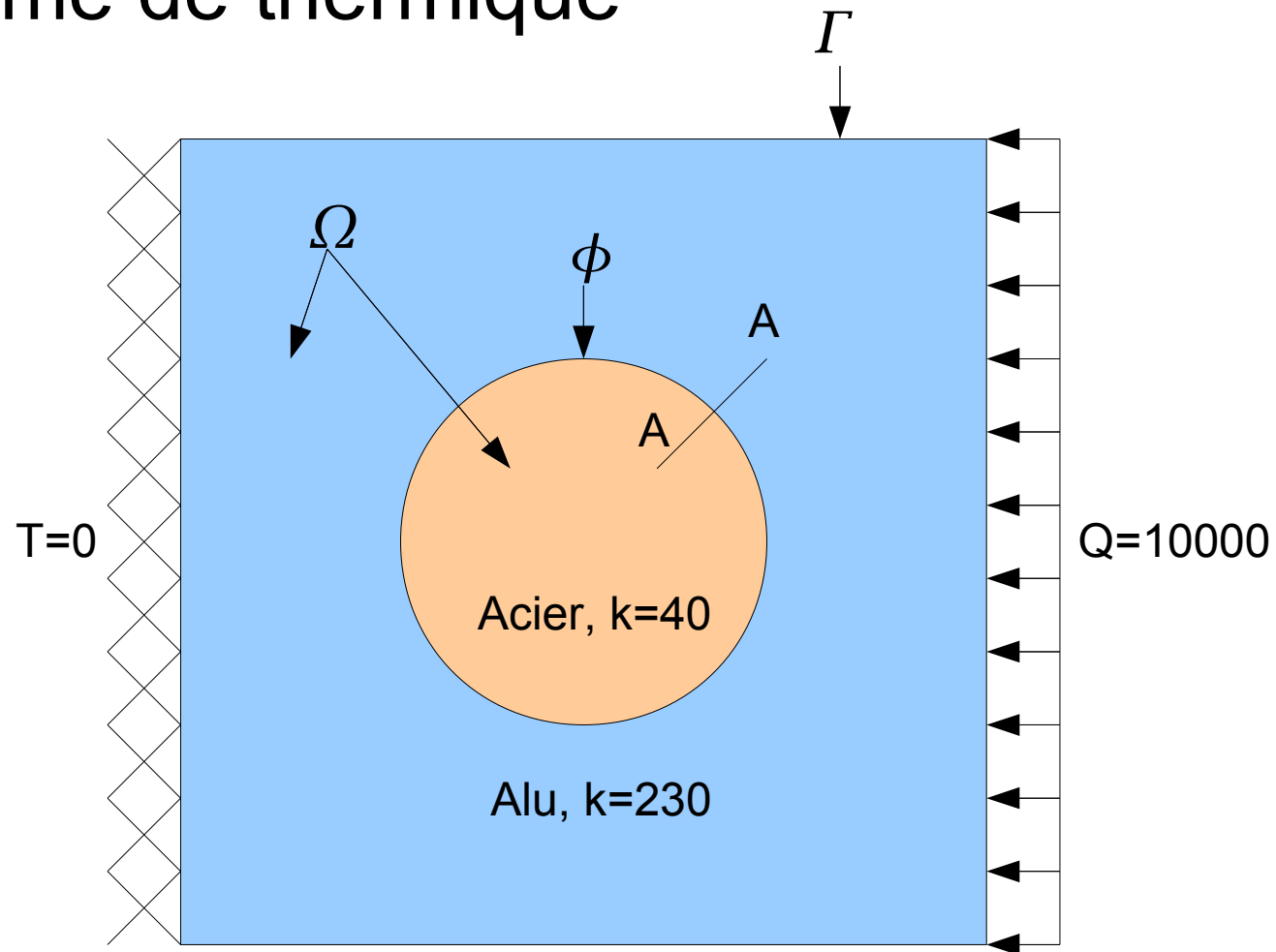
- Conditionnement
 - Si le choix des ddl enrichis est mauvais, possibilité d'une matrice de raideur singulière
 - Passage de la fissure proche d'un noeud -> on impose de passer sur le noeud.
 - Les fonctions d'enrichissement en pointe de fissure peuvent induire un mauvais conditionnement (elles se « ressemblent »)
 - Utilisation d'un préconditionneur adapté

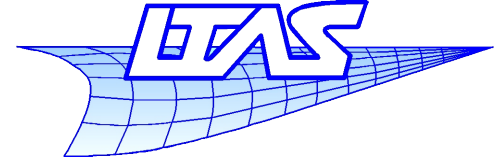
■ Conditionnement



Interface bi-matériau

- Problème de thermique





- L'interface est représentée par une level-set :

$$\phi = \{ x \in \Omega \ / \ ls(x) = 0 \}$$

- Cette interface peut être de géométrie complexe ou changeante
 - Pas de correspondance avec le maillage

- Modèle élément finis

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

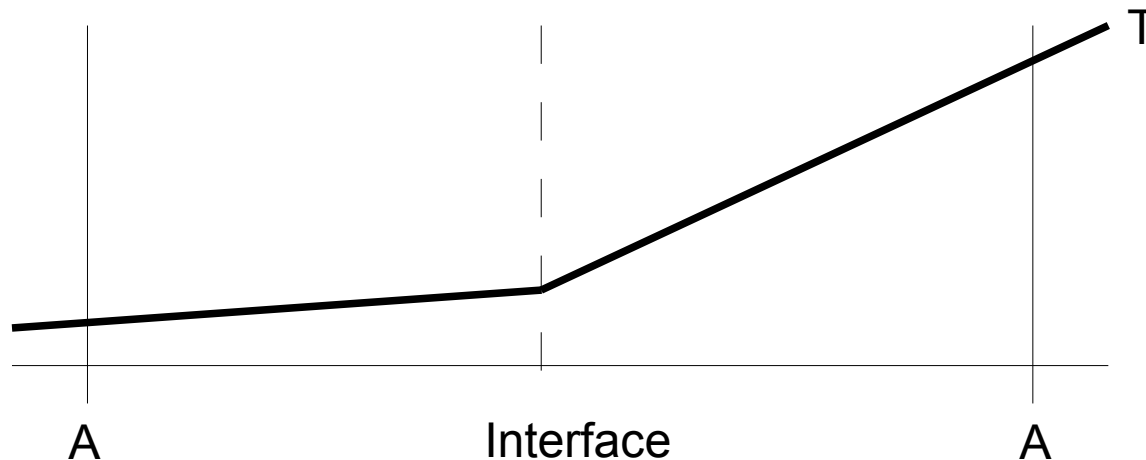
$$a(u, v) = b(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

tel que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} k (\nabla u \cdot \nabla v) d\Omega \quad b(v) = \int_{\Gamma} f(x) \cdot v d\Gamma$$

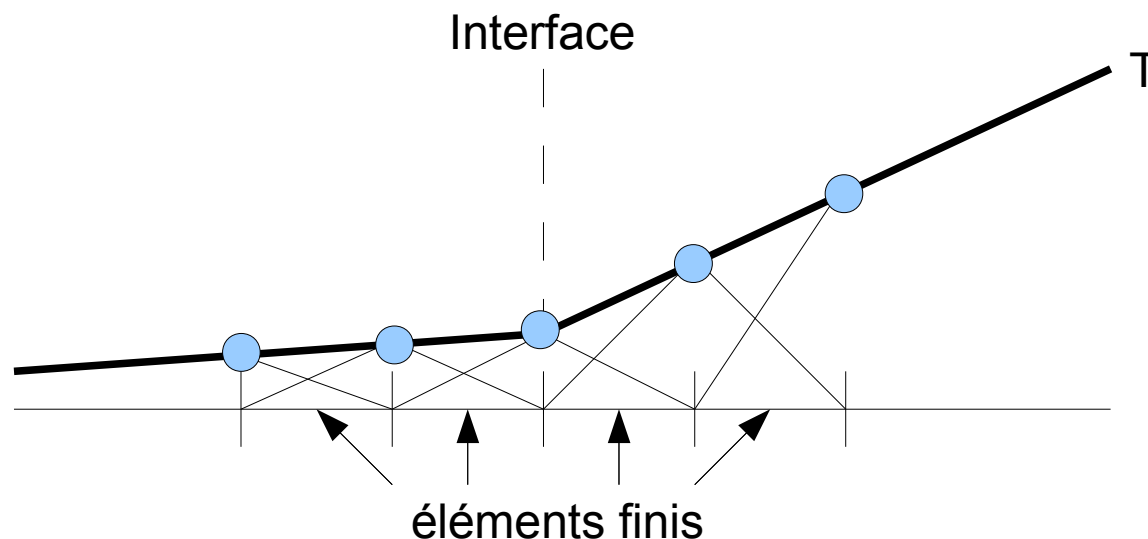
Interface bi-matériau

- On souhaite représenter correctement le profil de température le long de l'interface
 - Coupe A-A : allure de T théorique



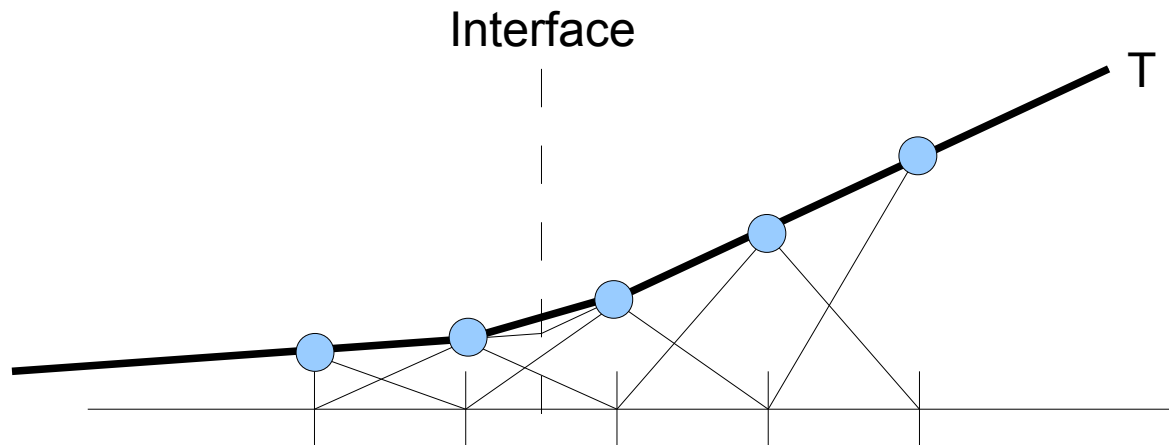
Interface bi-matériau

- La discontinuité est sur la dérivée de T
- Si l'interface passe par les frontières entre les éléments finis, alors la discontinuité fait naturellement partie de l'espace fonctionnel.



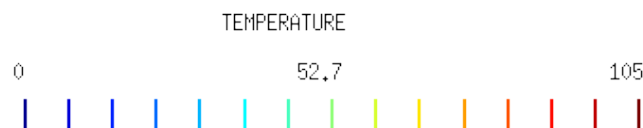
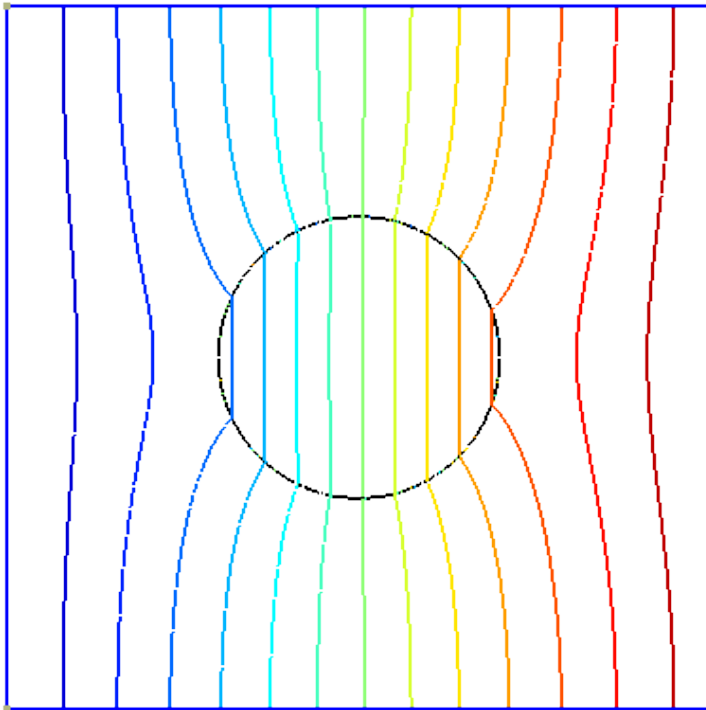
Interface bi-matériau

- La discontinuité est sur la dérivée de T
- Si l'interface ne passe pas par les arêtes des éléments finis, alors ...

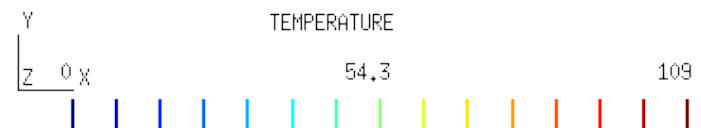
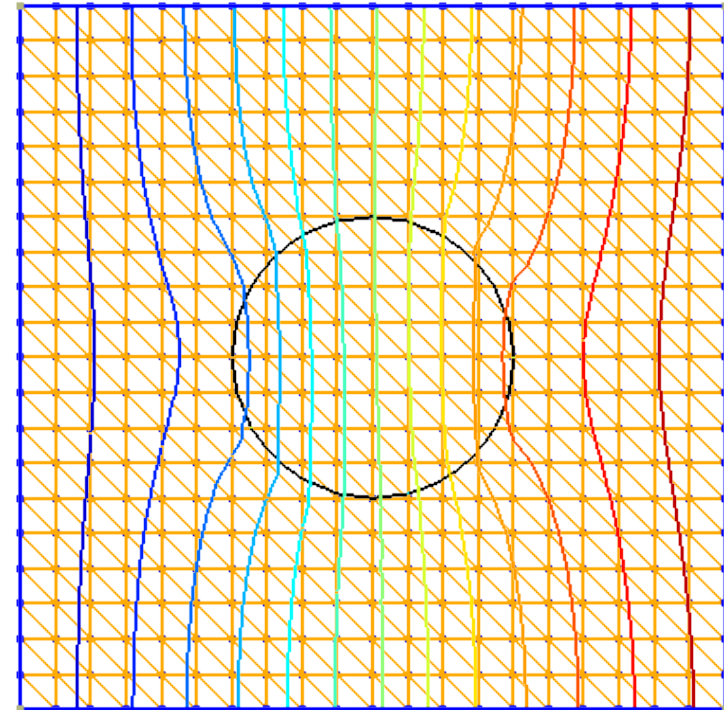


- Ceci explique la solution approximative

Solution exacte



Solution EF standard

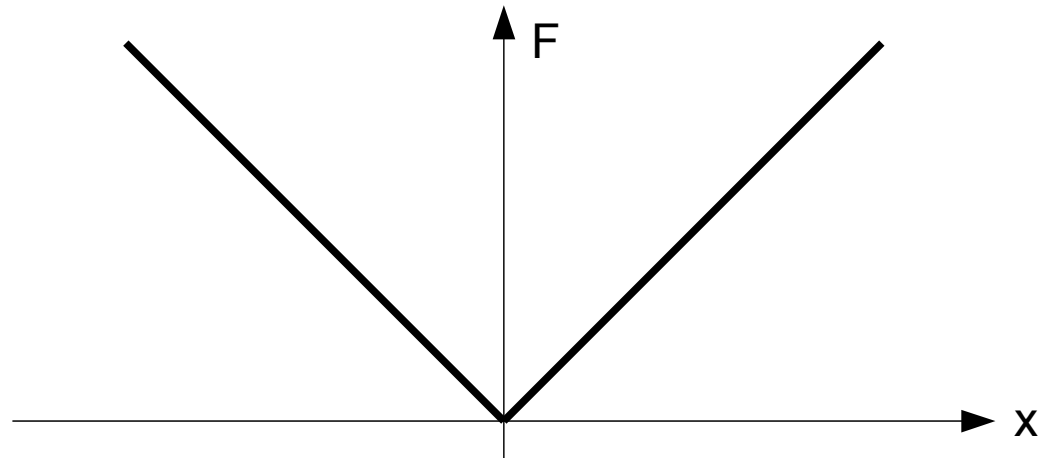


- L'idée est d'enrichir la discrétisation éléments finis afin de faire apparaître une discontinuité sur le gradient.

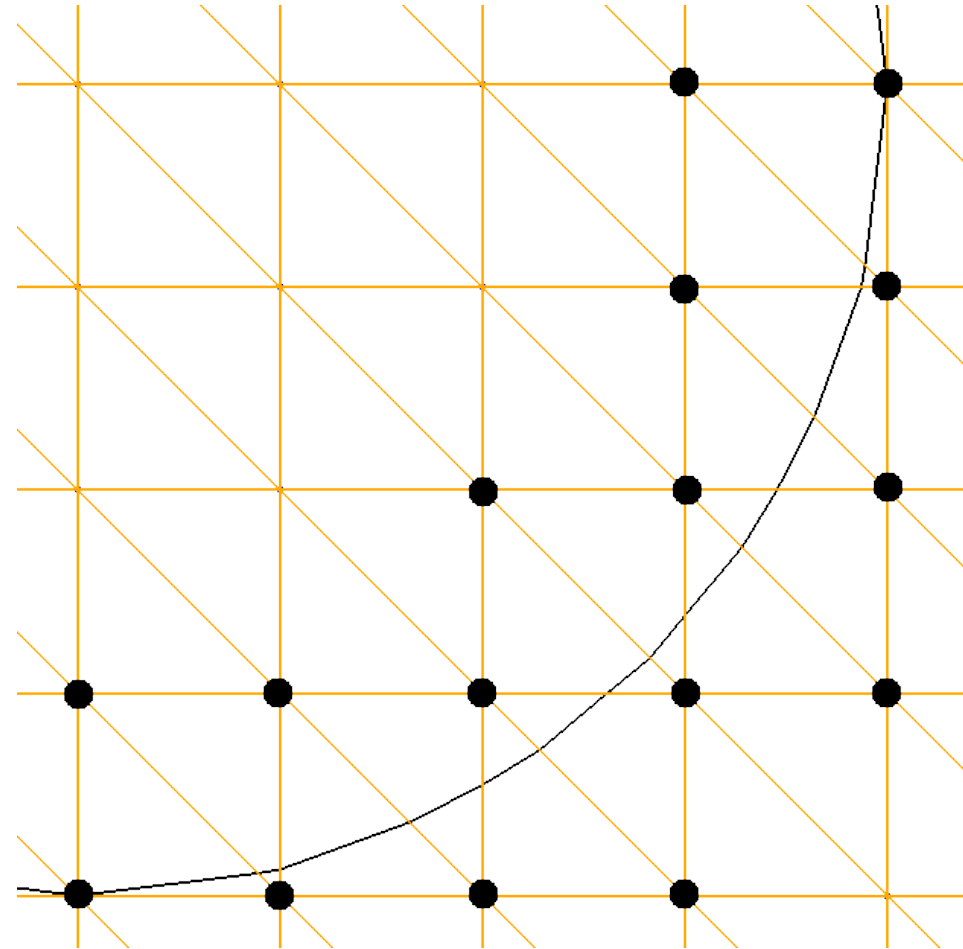
$$u(x) = \sum_{i \in \Omega} \lambda_i N_i(x) + \sum_{j \in C} \lambda_j^* N_j(x) \cdot F(x)$$

- Il existe plusieurs possibilités. La plus simple est la suivante:

$$F_1(x) = |ls(x)|$$



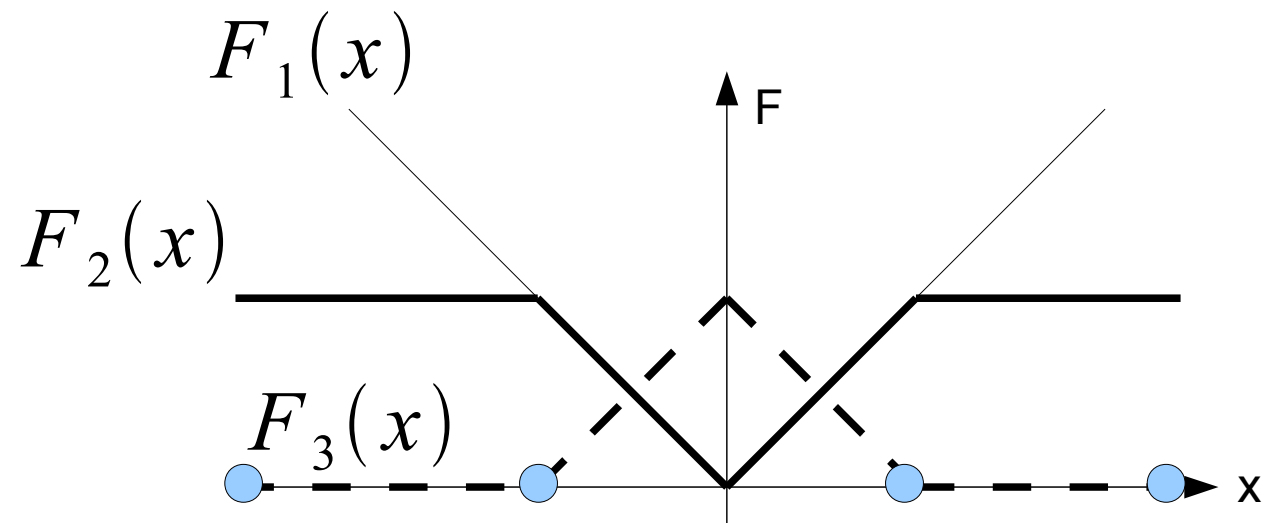
- Définition de l'ensemble C des noeuds enrichis
 - Cette fois, seuls les noeuds dont au moins un élément du support est coupé sont enrichis
 - En particulier, si l'interface longe les frontières des éléments, il n'y a pas d'enrichissement



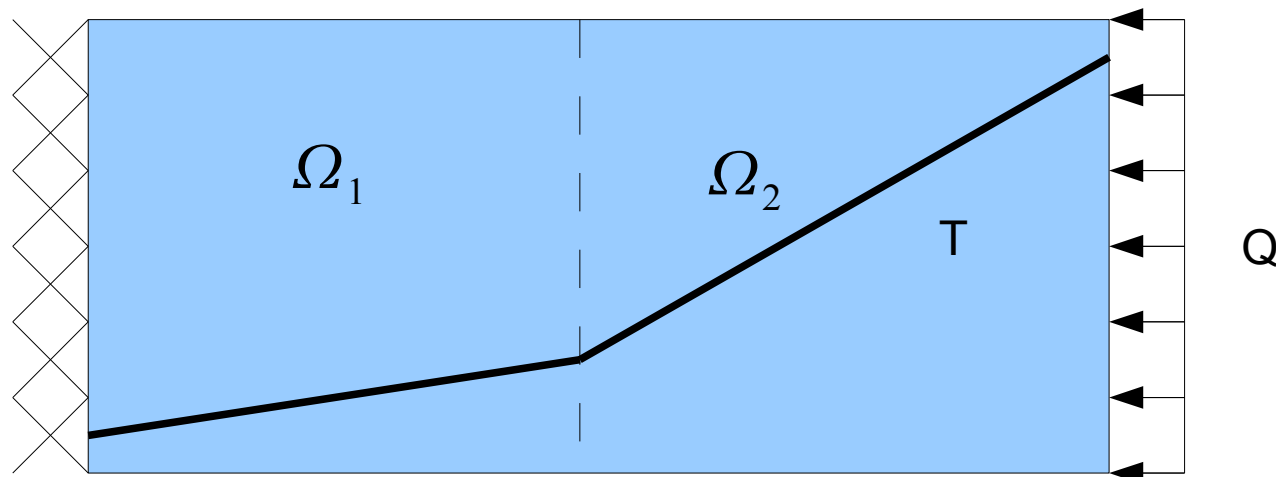
- Voici d'autres fonctions d'enrichissement

$$F_2(x) = \begin{cases} |ls(x)| & \text{dans les éléments coupés} \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$F_3(x) = \sum_i |ls_i| \cdot N_i(x) - \left| \sum_i ls_i \cdot N_i(x) \right|$$

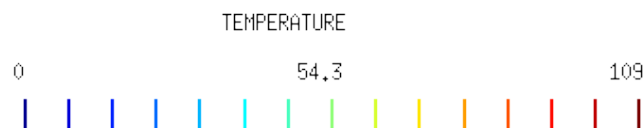
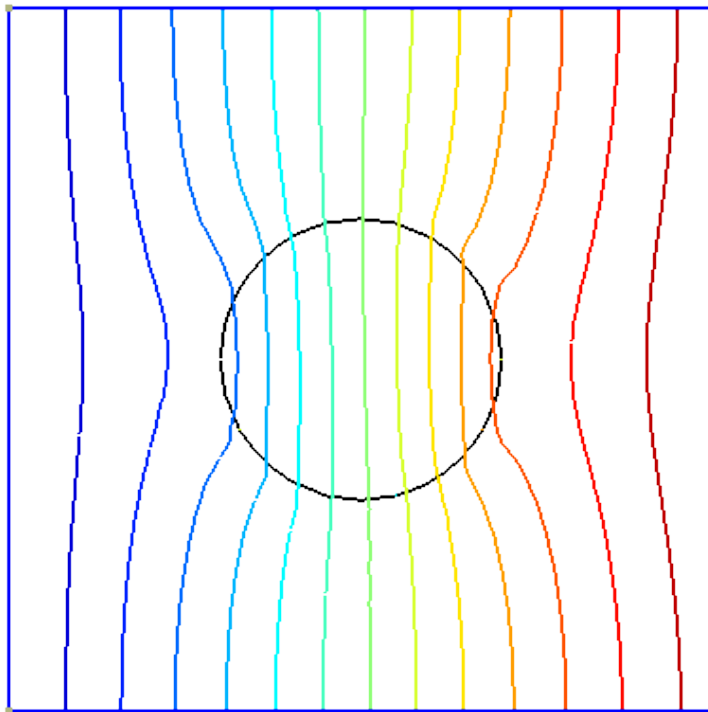


- En pratique, $F_3(x)$ donne les meilleurs résultats
 - Sur un problème simple, les fonctions $F_2(x)$ et $F_3(x)$ sont capables de redonner la solution exacte (linéaire par morceaux) lorsque l'interface n'est pas maillée, mais pas $F_1(x)$.

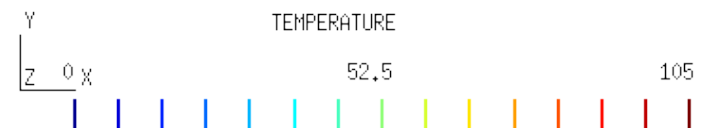
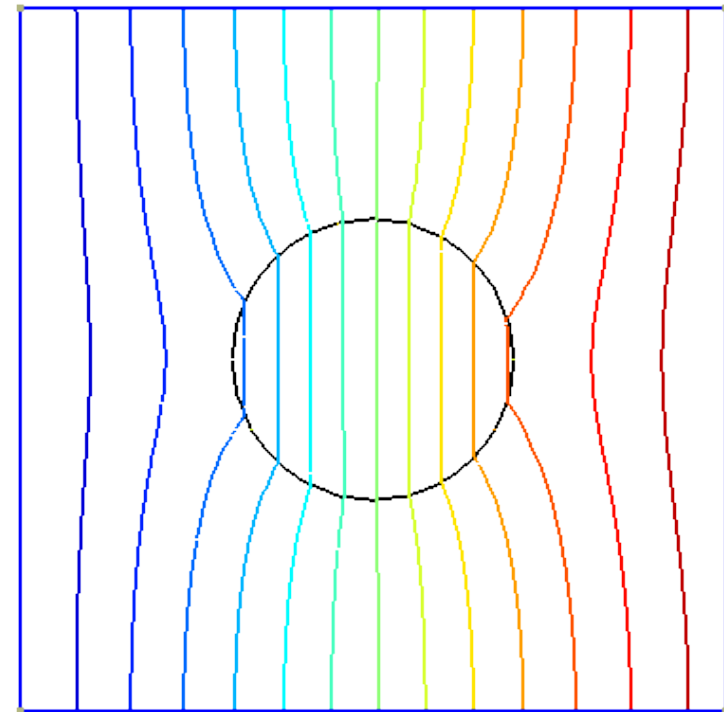


- Comparaison des solutions obtenues

Solution sans enrichissement

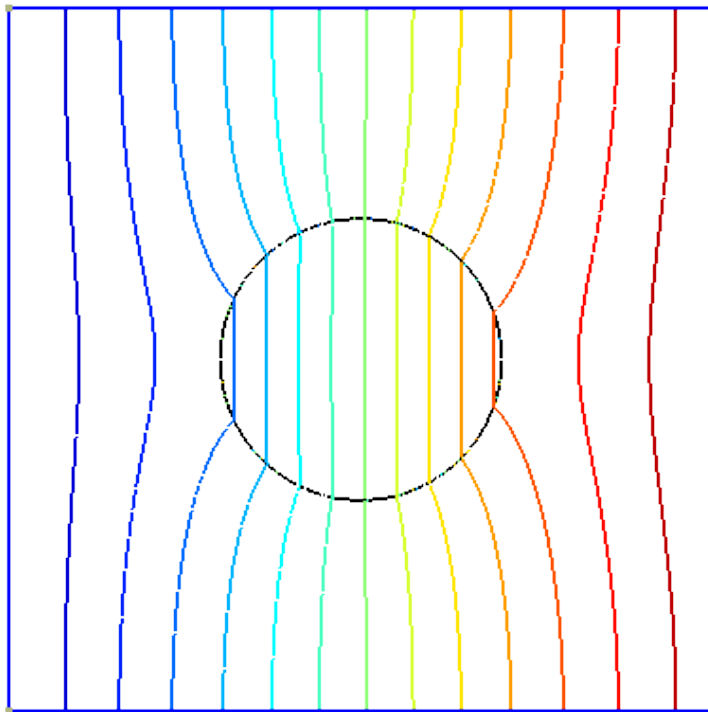


Solution avec enrichissement

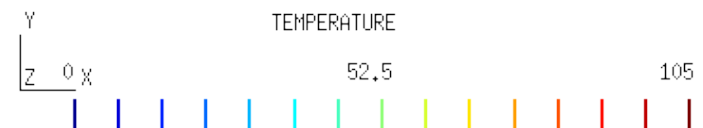
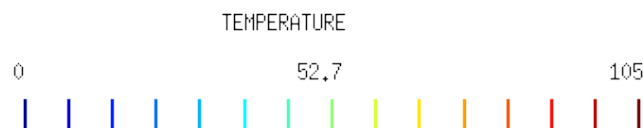
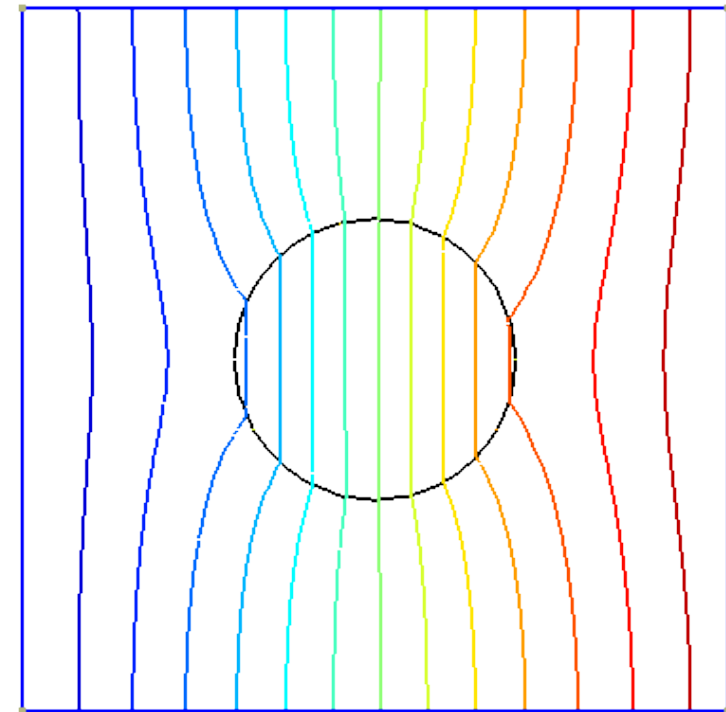


- Comparaison des solutions obtenues

Solution exacte

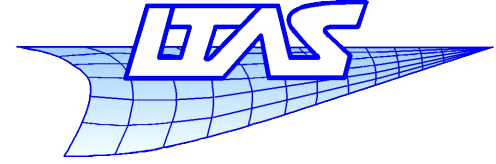


Solution avec enrichissement



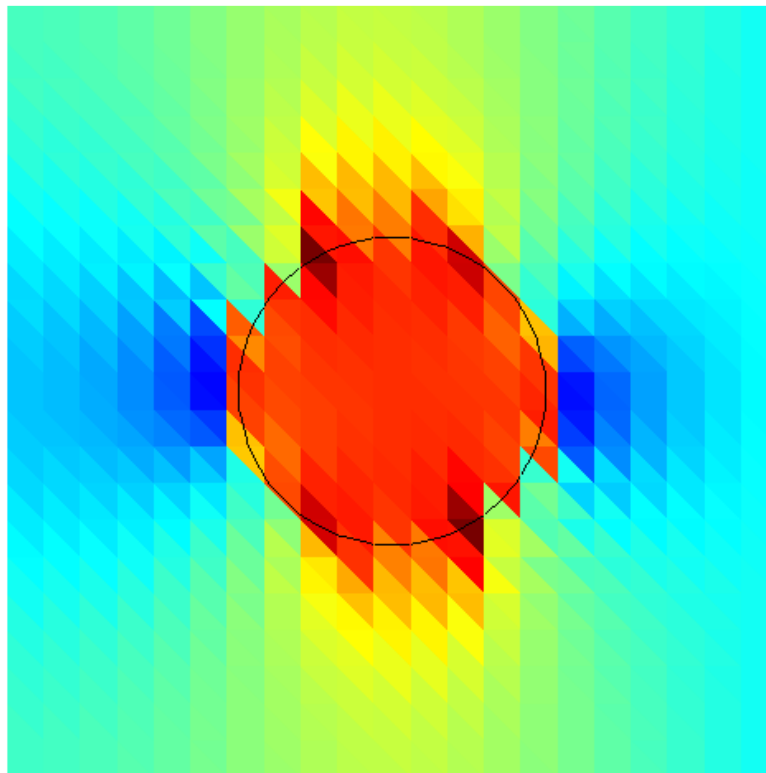
Méthode des EF étendus

Interface bi-matériau



- Comparaison du gradient

Solution sans enrichissement

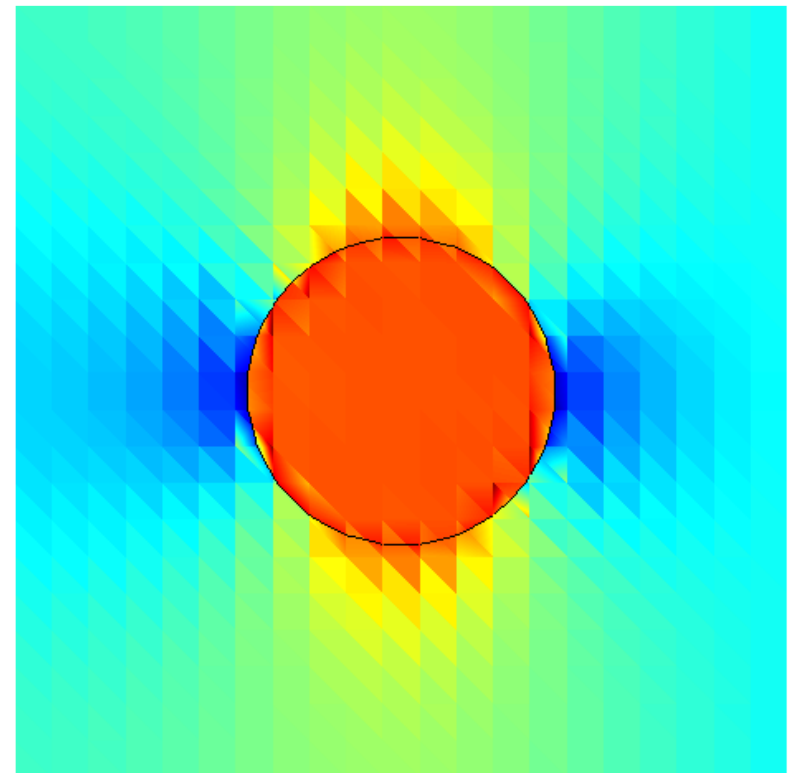


GRADTEMPERATURE

10 55 100



Solution avec enrichissement



GRADTEMPERATURE

10 55.2 100

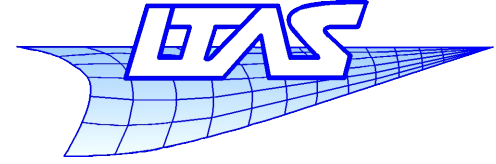


Y
Z X

Y
Z X

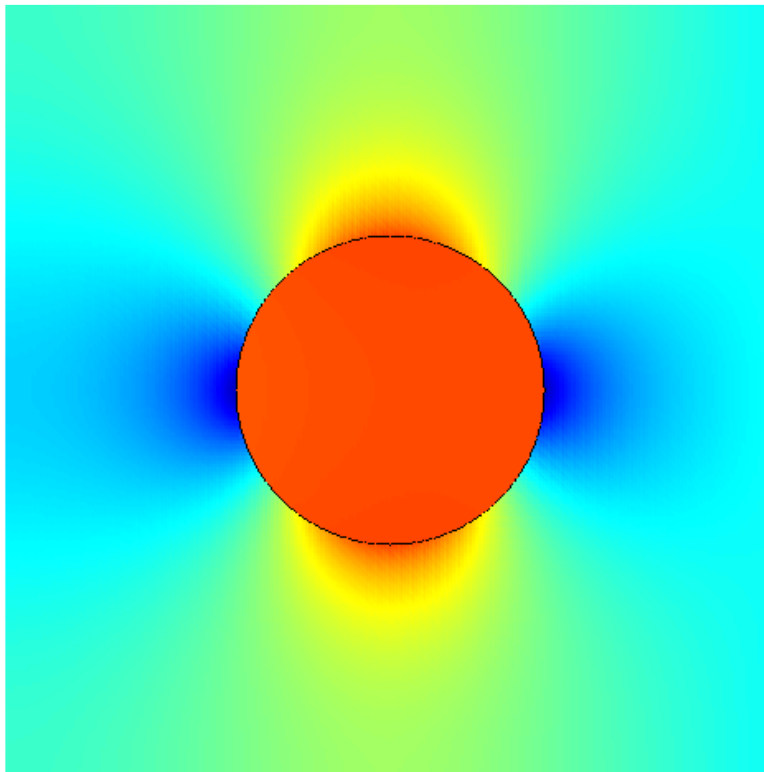
Méthode des EF étendus

Interface bi-matériau



- Comparaison du gradient

Solution exacte

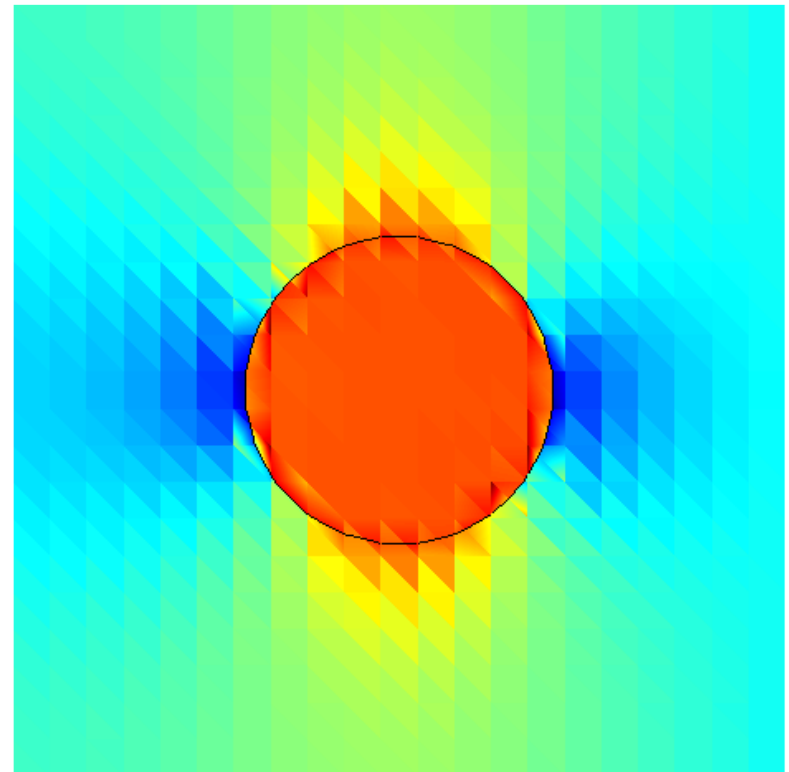


GRADTEMPERATURE

10 55 100



Solution avec enrichissement



GRADTEMPERATURE

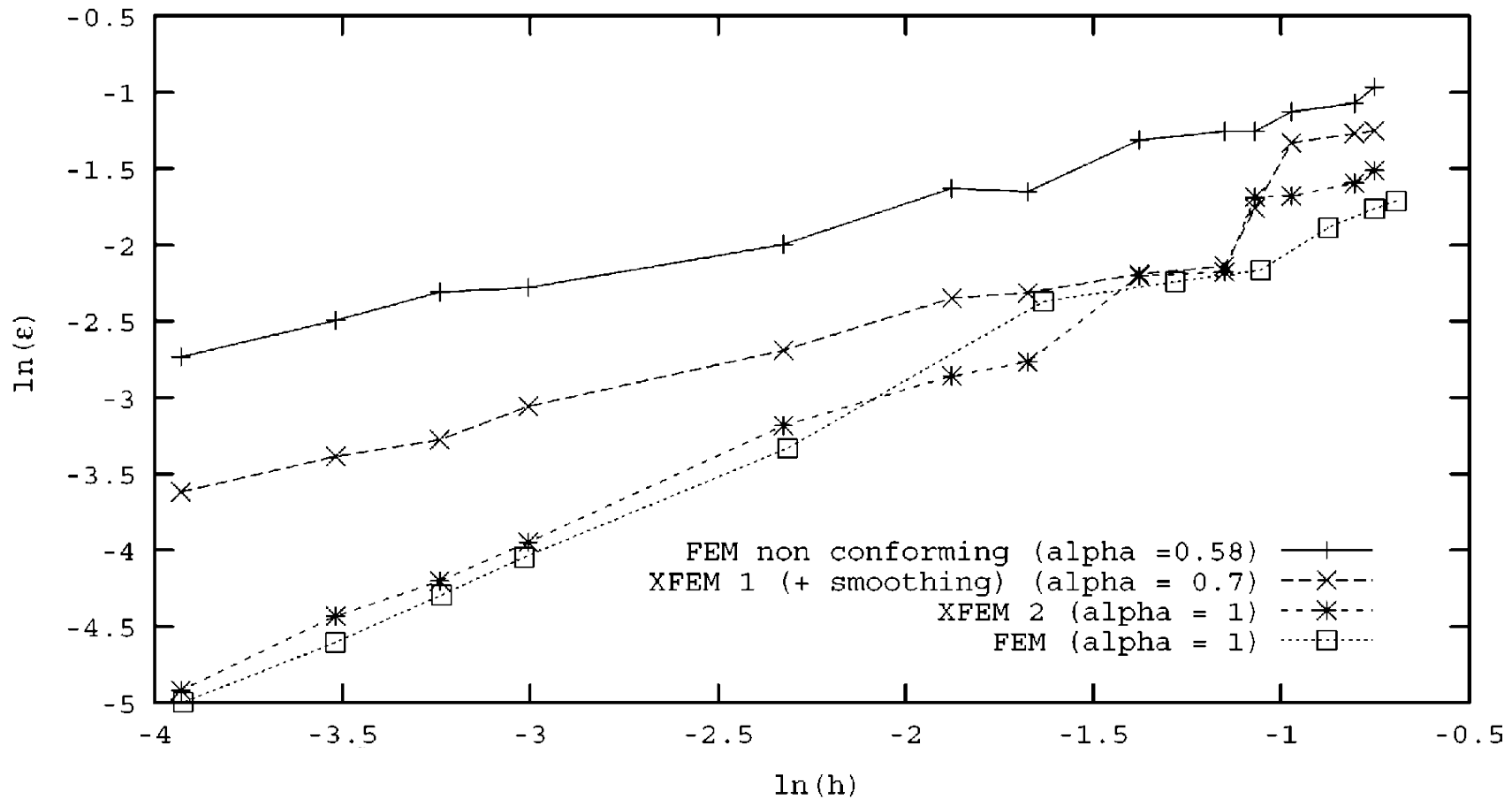
10 55.2 100



Y
Z X

Y
Z X

■ Convergence



- **Discontinuités dans la variable primale**
 - Fissures
 - non linéaire, plasticité
 - propagation dynamique
 - Suivi de front de solidification
 - hydrogels
- **Discontinuités dans la dérivée**
 - Homogénéisation
 - Interfaces bi-matériau

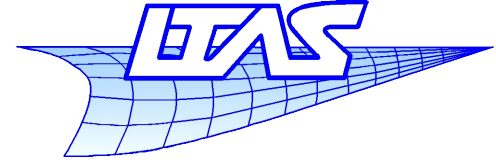
- Amélioration de la qualité des algorithmes de propagation de fissures
- Applications à d'autres matériaux
 - Plasticité confinée
 - Matériaux piézoélectriques
 - Matériaux composites

- **Interfaçage direct avec la CAO pour la simulation numérique**
 - Passage d'une représentation explicite des surfaces à une représentation implicite par level-sets
 - Frontières des solides non maillées
 - Imposition des conditions aux limites (dirichlet et autres)
 - Interfaces matérielles non maillées

- Applications en dynamique explicite
 - Géométrie non maillée -> pb de pas de temps critique
 - Propagation de fissure dynamique (changement d'enrichissement en pointe de fissure -> problèmes de conservation de l'énergie)

Méthode des EF étendus

Conclusion



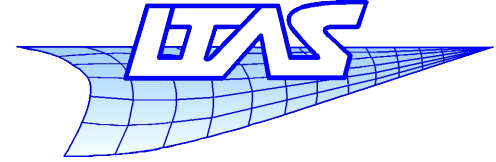
La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) date d'une dizaine d'année (Moës 1999). Elle est basée sur la méthode de partition de l'unité (Babuska 1997)

Comparée à la méthode des éléments finis classique, elle permet de relaxer les contraintes imposées au maillage pour la simulation de phénomènes physiques divers, par exemple propagation de fissures, interfaces matériaux et bien d'autres. Elle est fréquemment associée à la technique des level-sets (Sethian 1998) pour la modélisation des interfaces

Le but est d'améliorer la FEM, pas de la remplacer, et de conserver ses attraits en y ajoutant des particularités permettant de faire des choses impossibles par ailleurs.

Méthode des EF étendus

Conclusion



La méthode des éléments finis étendus permet de faire apparaître dans l'espace fonctionnel des éléments finis des discontinuités ou des formes particulières de solution.

Discontinuités sur le champ primal :

- Fissures (discontinuité sur le déplacement)

Discontinuités sur le champ gradient :

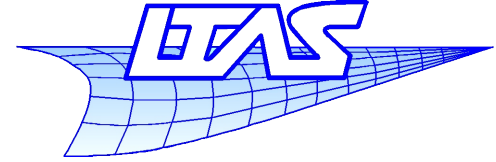
- Interface entre deux matériaux aux propriétés différentes (discontinuité sur le gradient du déplacement)

Fonctions mal représentées par les éléments finis :

- Champs autour d'un angle concave (concentration de contraintes), champs dans une couche limite, pointe de fissure...

Méthode des EF étendus

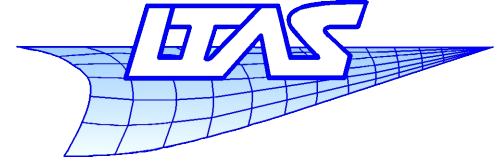
Bibliographie



- Babuska I. Melenk J.M. « The partition of unity method » IJNME, 40:727-758,1997
- Barth T.J. Sethian J.A. « Numerical schemes for the hamilton-jacobi and level-set equations on triangulated domains » JCP 145:1-40,1998
- Béchet E. Minnebo H. Moës N. Burgardt B. « improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks » IJNME 64:1033:1056,2005
- Béchet E. Scherzer M, Kuna M, « Applications of the X-FEM to the fracture of piezoelectric materials, IJNME 77:1535:1565,2009
- Béchet E. Moës N. Wohlmuth B. « A stable lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method » IJNME, Accepted, Early view on publisher website.
- Belytschko T. Moës N, Usui S, Parimi C, « arbitrary discontinuities in finite elements » IJNME 50:993-1013,2001
- Belytschko T. Chessa J. Zi G. Xu J. Th extended finite element method for arbitrary discontinuities, Computational mechanics – Theory and practice »K.M. Mathisen, T. Kvamsdal et K.M. Okstad (dir), CIMNE Barcelona, Spain 2003
- Breitkopf P (dir) « La méthode des éléments finis – extensions et alternatives » Hermes-Lavoisier, France, 2006
- Daux C Moës N. Dolbow J Sukumar N Belytschko T. « Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method » IJNME 48:1741-1760,2000
- Dolbow J. Moës N. Belytschko T. « Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method » FEAD 36:235-260,2000
- Gravouil A. Moës N. Belytschko T. « Non planar 3D crack propagation by the extended finite element method and level-sets part II: level-set update » IJNME 53:2569-2586,2002
- Legrain G. Moës N. Verron E « stress analysis around crack tips in finite strain problems using the X-FEM » IJNME 63:290-314,2005
- Moës N. Béchet E. Toubier M. « Imposing essential boundary conditions in the extended finite element method »IJNME 67:1641-1669
- Moës N. Cloirec M. Cartraud P. Remacle J.F. « a computational approach to handle complex microstructure geometries » CMAME 53:3163-3177,2003
- Moës N. Dolbow J. Belytschko T. « A finite element method for crack growth without remeshing », IJNME 46:133-150,1999

Méthode des EF étendus

Bibliographie



- Moës N. Gravouil A. Belytschko T. « Non planar 3D crack propagation by the extended finite element method and level-sets part I : Mechanical model IJNME 53:2549-2568,2002
- Osher S, Fedkiw R. « level-set methods and dynamic implicit surfaces » Springer-verlag 2002
- Rhetore J. Gravouil A. Combescure A. « an energy conserving scheme for dynamic crack growth with the X-FEM » IJNME 63:631-659,2005
- Sethian J.A. « level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision and material sciences » Cambridge university press, UK, 1999
- Sukumar N. Chopp D.L. Moës N. Belytschko T. « modeling holes and inclusions by level-sets in the extended finite element method » CMAME 190:6183-6200,2001
- Sukumar N. Moës N. Moran B. Belytschko T. « Extended finite element method for three dimensional crack modelling » IJNME 48:1549-1570,1999
- Strouboulis T. Babuska I. Copps K. « The design and analysis of the generalized finite element method » CMAME 181:43-71,2000

Nota :

- IJNME = International journal for numerical methods in engineering (Wiley)
- CMAME = Computer methods in applied mechanics and engineering (Elsevier)
- FEAD = Finite element in analysis and design (Elsevier)
- JCP = Journal of computational physics (Elsevier)