Université du Maine – Faculté de Sciences Economiques
Année Universitaire 2003/2004
Microéconomie
2ème année de DEUG Sciences Economiques

Cours du Professeur J.-P. GAYANT

Introduction :

La distinction entre Microéconomie (où l'on tente d'analyser les décisions individuelles) et Macroéconomie (où l'on tente d'analyser l'interaction entre les grandeurs économiques au niveau d'une nation : Production, Consommation, Epargne, Investissement, Importations, Exportations, Prix, Taux d'Intérêt, Taux de Change) est née dans le courant du 20ème siècle. Elle a perdu de sa pertinence à partir de l'instant où il est devenu évident aux yeux de tous les économistes qu'il est nécessaire de donner des fondements microéconomiques à toute analyse macroéconomique. Néanmoins cette distinction reste pour de multiples raisons la distinction utilisée dans l'apprentissage des Sciences Economiques.

Un peu d'Histoire :

L'Economie politique naît en France sous Louis XIV au 17ème siècle. La pensée économique de l'époque s'appelle le Mercantilisme (dont le « Colbertisme » est l'expression extrême). Elle est caractérisée par une forte intervention de l'Etat dans les affaires économiques : L'Etat constitue de grands monopoles et administre les « Manufactures Royales » , il organise et réglemente le commerce maritime. Il taxe les échanges, et, s'il favorise l'exportation, dissuade l'importation. L'idée sous-jacente est que la Richesse de la Nation est déterminée par le stock d'or et de métaux précieux détenus dans les caisses du royaume. Une des manifestations les plus surréalistes de cette vision est l'obligation qui est faite aux navires de commerce de « rentrer à vide » : il faut exporter car le produit de la vente accroît le stock d'or et de métaux précieux, mais il est interdit d'acheter en retour des denrées et des biens, pour ne pas diminuer ce stock.
Le royaume de France s'appauvrit pendant le règne de Louis XIV. Des penseurs libéraux, vont, parallèlement à la réflexion politique (la « philosophie des lumières »), contester vivement l'ordre ancien et faire évoluer la réflexion économique. C'est l'avènement de la philosophie du « Laissez faire, Laissez passer ! » (J. de Gournay) et du courant des « Physiocrates » dont le fondateur est François Quesnay (1694-1774), premier médecin du roi Louis XVI. L'idée des physiocrates est que la seule richesse est agricole : la richesse d'une nation se mesure à l'aune de ce que la terre produit chaque année. Le principe est le suivant : chaque année, on utilise une certaine quantité « d'avances primitives » (semailles, travail des agriculteurs, …) et la terre produit plus que ce qui a été « avancé ». La différence (ou produit net) est ce que Quesnay appelle le « Don gratuit » de la terre (il voit la main de Dieu dans ce don gratuit…). Quesnay est le premier à raisonner sur le problème de l'accroissement des richesses ou « Croissance ». Un disciple de Quesnay va commencer à mettre en œuvre les idées libérales des physiocrates, c'est A.R.J. Turgot (1727-1781), qui accède aux Finances (« Contrôleur général des Finances ») en 1774. Mais victimes des intrigues de la Cour, il est destitué en 1776 avant d'avoir pu mettre en œuvre l'essentiel de ses réformes. A l'heure où commence la Révolution Industrielle en Angleterre, les conditions économiques d'un

décollage en France sont tuées dans l'œuf. La Révolution Française et la période de troubles politiques qui suit vont inhiber la Révolution industrielle en France pendant plusieurs décennies (l'Angleterre devient alors la première puissance mondiale, ce que la France ne redeviendra plus jamais puisque les Etats-Unis supplanteront le Royaume Uni dès la fin du 19ème siècle).
A l'heure où Turgot connaît la disgrâce, les économistes anglais, stimulés par la Révolution Industrielle qui se déroule sous leurs yeux, prennent le relais de la pensée économique. En 1776, Adam Smith publie « Recherche sur la nature et les causes de la Richesse des Nations ». Il est ainsi le « fondateur » d'un nouveau courant de pensée, le courant **Classique**. Il est le premier théoricien du marché, régulé par une « main invisible », comprend la nécessité de la division des tâches pour accroître la productivité et donne les premiers arguments analytiques justifiant le libre-échange (loi des avantages absolus). Les Classiques sont des théoriciens de l'Offre au sens où ce qui détermine la croissance d'une économie est le comportement d'Epargne, c'est à dire le comportement d'accumulation de la classe dominante. Les Classiques, comme avant eux les Physiocrates, raisonnent sur des « classes » et non sur les individus. Le vulgarisateur de la pensée de Smith en France est Jean-Baptiste Say, connu pour avoir énoncé la célèbre « Loi des débouchés : Toute offre crée sa demande ». David Ricardo qui publie en 1817 « Principes de l'Economie Politique et de l'impôt » approfondit les travaux de Smith. Il analyse le taux d'intérêt comme le prix de la renonciation à des biens présents au profit de biens futurs. Le taux d'intérêt est donc la variable qui est à l'origine de l'arbitrage entre les décisions de consommation et d'épargne et qui guide le comportement d'accumulation et donc la croissance de l'économie. Ricardo élargit la validité de l'analyse du commerce international de Smith en développant la loi des avantages relatifs. Ricardo est un théoricien de la valeur travail. Il est l'auteur auquel se réfèrent les deux grands courants de pensée antagonistes de la deuxième partie du 19ème siècle : le courant **Marxiste**, qui, en tant que pensée économique va sombrer et disparaître dans le courant du 20ème siècle et le courant **Néo-classique**, qui va s'imposer et demeure aujourd'hui encore le socle de l'analyse économique moderne.
Le **Marxisme** approfondit la théorie de la valeur travail : la valeur des marchandises est déterminée par la somme du temps de travail déjà incorporé dans les moyens de production et de la valeur ajoutée par le travail vivant. Le capital est du travail « cristallisé » : les biens sont produits avec des biens et du travail, donc, en dernière instance avec seulement du travail. La force de travail est une marchandise qui, dans le système capitaliste a une valeur inférieure à ce que peut produire cette même force. La différence entre les deux est la « plus-value » que s'approprient les détenteurs du capital. La théorie marxiste va progressivement perdre toute influence dans la seconde moitié du 20ème siècle.
L'analyse **Néo-classique** est à la fois dans la continuité de l'analyse classique, mais constitue également une rupture. L'auteur qui symbolise la transition entre les deux analyses est John Stuart Mill (1806-1873). Il est le premier à avoir formulé de manière moderne la loi de l'offre et de la demande. Il est aussi, dans le sillage de son père James Mill et de Jeremy Bentham, un des diffuseurs de la vision utilitariste en économie.
Au début des années 1870, 3 auteurs vont, indépendamment les uns des autres mais en menant un raisonnement très semblable, structurer l'analyse néo-classique. William Stanley Jevons en Grande Bretagne, Carl Menger en Autriche et le français Léon Walras en Suisse vont « inventer » le marginalisme et, pour ce dernier transformer « l'Economie Politique » en «Science Economique ». On raisonne désormais sur l'individu et non plus la classe et les décisions des agents sont déterminées comme le résultat d'un « calcul à la marge ». L'idée fondamentale est que toute décision optimale est caractérisée par l'égalité entre un « bénéfice » marginal et un « coût » marginal.

Léon Walras va plus loin en développant la théorie de l'Equilibre Général, cadre de référence de l'analyse économique moderne. Dans cette perspective, toutes les tensions entre les offres et les demandes sur tous les marchés doivent être appréhendées simultanément. Le système des prix d'équilibre doit être déterminé par la résolution d'un système de n équations à n inconnues. Le vecteur des prix d'équilibre véhicule toute l'information sur la rareté relative des biens. Cette construction sera reprise et améliorée un siècle plus tard par Kenneth Arrow et Gérard Debreu mais elle demeure la structure de référence au début du 21ème siècle.
Les avancées de Léon Walras n'ont malheureusement pas été comprises immédiatement. C'est l'économiste Alfred Marshall, qui étudie la fixation des prix dans un contexte d'équilibre partiel, qui restera longtemps la figure emblématique de l'analyse néo-classique. En publiant « Principes d'Economie Politique » en 1890, il donne l'impulsion de ce que sera pendant près d'un siècle la Microéconomie. Aujourd'hui encore, une grande partie de l'analyse microéconomique est celle initiée par Marshall. Mais il est indispensable de corriger ou d'améliorer cette vision à l'aide de la grille de lecture Walrassienne.
Au vingtième siècle va naître la **Macroéconomie** à la suite des travaux de John Meynard Keynes (« La Théorie Générale, 1936 ») et des auteurs keynésiens. Keynes, premier véritable « économiste de la demande » tente d'inverser la perspective de l'analyse économique, mais il omet les indispensables fondements microéconomiques. Les auteurs keynésiens tentent de réaliser « la synthèse néoclassique », c'est à dire la réconciliation des idées de Keynes et d'indispensables fondements néo-classiques. L'attaque de Milton Friedman et des Monétaristes puis des nouveaux-classiques va atténuer la portée de l'analyse keynésienne, en dépit des efforts des nouveaux-keynésiens pour restaurer la validité du paradigme keynésien.

Objet(s) de la microéconomie moderne.

L'objet de la microéconomie, outre sa vocation à fournir des fondements a la macroéconomie, est la modélisation des phénomènes sociaux. Il s'agit de comprendre et d'analyser les phénomènes économiques en se concentrant sur les traits essentiels, en délaissant les questions secondaires (les épiphénomènes). La modélisation, représentation simplifiée de la réalité, fait appel à l'outil mathématique. L'acception de mot « phénomènes sociaux » s'est élargie dans la seconde moitié du 20ème siècle, sous l'impulsion, en particulier, de Gary Becker (Prix Nobel d'Economie 1992).
Tous les choix des individus se sont faits en comparant rationnellement des coûts et des bénéfices, et dans le but de maximiser sa satisfaction. Qu'il s'agisse de s'adonner au commerce de la drogue ou d'en consommer, de voler, de tuer, de se marier, d'avoir des enfants, de tromper son conjoint ou de divorcer, l'individu effectue ses choix en comparant les coûts et les bénéfices. Dans le cas du crime, par exemple, l'individu rationnel compare les gains de cette activité à ses coûts, en particulier en terme de probabilité d'être capturé et la nature de la peine encourue. Becker considère que l'ensemble des décisions prises à l'intérieur de la cellule familiale, par exemple la répartition des tâches domestiques, peut aussi être analysée de cette manière. L'amour lui-même n'y échappe pas. En 1976 Becker écrit : *« A un niveau abstrait, l'amour et les autres liens d'ordre émotifs tels que l'activité sexuelle ou de fréquents contacts rapprochés avec une personne particulière, peuvent être considérés comme des marchandises domestiques particulières, non commercialisables, et , il n'y a pas grand chose à ajouter à l'analyse, dans la première partie, de la demande de marchandise ».*
Au delà du caractère provocateur de ces assertions, il apparaît que le domaine d'étude de la Microéconomie est très vaste. La question de l'allocation optimale des ressources conduit à se préoccuper de production et de consommation de biens et services privés traditionnels, mais aussi de biens et services publics (éclairage public, sécurité publique…), de biens et services privés produits sous contrôle de la puissance publique (électricité, transport ferroviaire,

acheminement et distribution du courrier postal…). L'analyse microéconomique conduit aussi à se préoccuper de questions de santé, de pollution, de valeur économique du temps ou de la vie humaine, de décision face aux risques (assurance, finance,…), de processus de choix et de votes optimaux, d'asymétries d'informations, de droit de la concurrence, … On peut également aborder la question de l'équité dans la répartition ou la redistribution des richesses.

Eléments de Méthodologie.

La démarche scientifique « idéale » en économie est la démarche Hypothétiquo-Déductive (HD) balisée par Karl Popper (1902-1994). La démarche HD est la démarche attachée au Rationalisme qui est une conception de la connaissance dans laquelle la raison humaine peut parvenir à la vérité indépendamment de l'expérience. L'expérience, qui joue un rôle secondaire, est raisonnée, c'est à dire guidée par la raison. La déduction est l'inférence logique, un processus permettant de passer d'un énoncé à un autre énoncé sur la bases de motifs logiques. Tout modèle HD est constitué de 3 ingrédients, dans l'ordre : Les Conditions initiales, les Lois générales et les conclusions (ou Explanandum). Le passage des conditions initiales aux conclusions se fait par la logique déductive. Pour qu'un modèle soit explicatif, il faut qu'il y ait au moins une loi générale. La démarche proposée par Popper est la suivante : on se pose un problème, on construit un modèle HD pour le résoudre puis on tire de sa conclusion un énoncé testable. Si le test est positif, le modèle est corroboré (mais jamais définitivement validé) ; si le test est négatif, il faut établir une nouvelle théorie qui sera elle aussi soumise aux tests et ainsi de suite... La spécificité de la discipline « économie » ne permet pas de raisonner exclusivement dans un cadre HD. Il faut laisser une part à l'induction, procédé de raisonnement qui, à partir d'énoncés singuliers, aboutit à des énoncés universels.

Rappel : On distingue les variables <u>exogènes</u> et les variables <u>endogènes</u>. Soit une modélisation d'un quelconque phénomène social. Si la valeur que prend une certaine variable se détermine à l'intérieur de la résolution du modèle, il s'agit d'une variable endogène. Si la valeur que prend une certaine variable est une donnée extérieure au modèle, il s'agit d'une variable exogène.

Plan Général du Cours

Chapitre 1 – Rappels d'Optimisation
Chapitre 2 – La Décision Optimale du Consommateur
Chapitre 3 - La Décision Optimale du Producteur en Contexte Concurrentiel
Chapitre 4 - Les Monopoles
Chapitre 5 - Eléments de Théorie des Jeux
Chapitre 6 - La Concurrence Imparfaite
Chapitre 7 - La Décision face aux Risques

. Introduction à la Microéconomie, H.R. VARIAN, Ed. de Boeck, collec. Prémisses
. Eléments de Microéconomie, Théorie et Applications, P. PICARD, Ed. Montchrestien

Chapitre 1 – Rappels d'Optimisation

Optimisation sans contrainte : Rappels

Différentielle :

La différentielle est la généralisation de la notion de dérivé (qui mesure l'accroissement d'une fonction induit par un accroissement infinitésimal de sa variable). Soit $y = f(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$ une fonction de n variables réelles, la différentielle de cette fonction est la mesure de son accroissement, induit par un accroissement infinitésimal de toutes ses variables, décomposé en ses diverses origines :

$$dy=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ désigne la dérivé partielle de la fonction f relativement à la variable x_i.

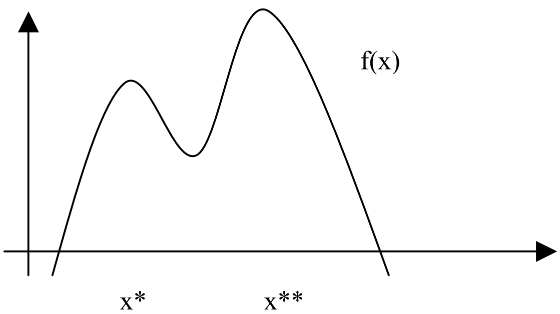
On rappelle que : $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1;x_2;...;x_i+\Delta x_i;...;x_n)-f(x_1;x_2;...;x_i;...;x_n)}{\Delta x_i}$

Définitions d'un maximum, d'un minimum (Fonctions d'une seule variable) :

Une fonction $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admet un maximum (respectivement un minimum) en x* si $f(x^*)\geq f(x)$ (resp. $f(x^*) \leq f(x)$) $\forall x\in\Re$.

Conditions nécessaires d'optimalité : Si f admet un maximum (respectivement un minimum) en x*, alors nécessairement $f'(x^*) = 0$ [cond. du 1^er^ ordre] et $f''(x^*) \leq 0$ (resp. $f''(x^*) \geq 0$) [cond. du 2^nd^ ordre].

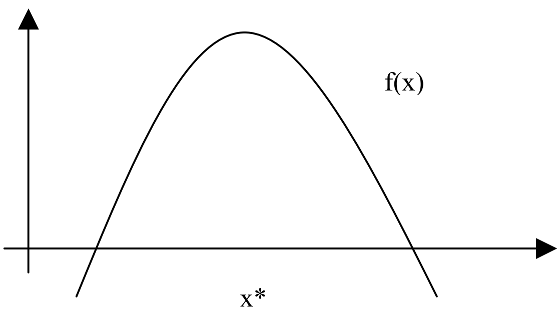
Remarque : il s'agit de conditions nécessaires, mais non suffisantes.



Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité : (Théorèmes)

. Si f est concave, x* est un maximum $\Leftrightarrow f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) < 0$

. Si f est convexe, x* est un minimum $\Leftrightarrow f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) > 0$

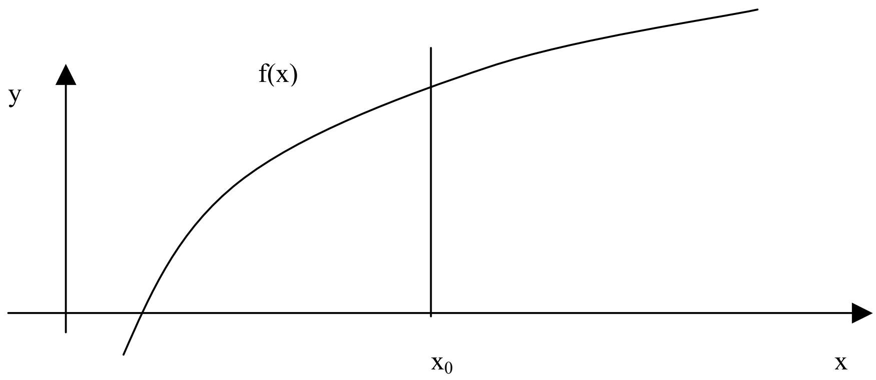


Dans le cas de fonctions de plusieurs variables, des conditions analogues prévalent. La dérivé première de la fonction est remplacée par le vecteur des dérivés (partielles) premières au point considéré (le « gradient ») ; la dérivé seconde de la fonction est remplacée par la matrice des dérivés (partielles) secondes au point considéré (la matrice « Hessienne »). Il s'agit d'examiner la nullité du gradient et le caractère (semi-)défini négatif (resp. positif) de la matrice Hessienne.

Optimisation sous contrainte : Le Lagrangien et les Théorèmes de Kühn et Tucker.

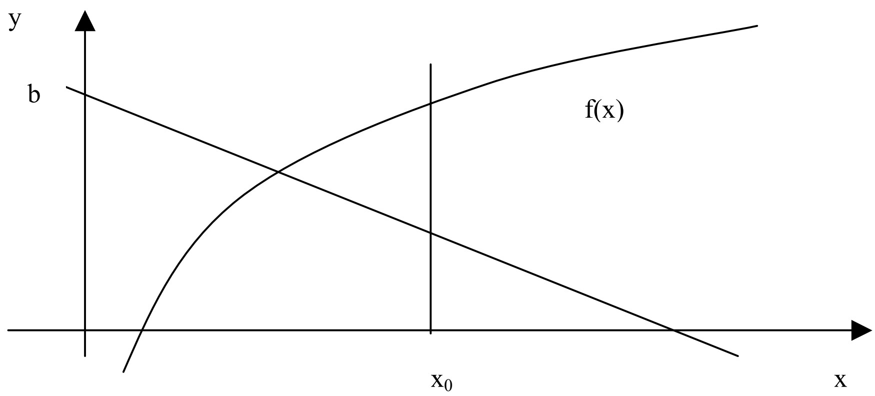
Formalisation des contraintes : On convient d'adopter une écriture standardisée des contraintes, sous la forme : $g(y ; x_1 ; x_2 ; ... ; x_n) \geq 0$

Exemples :
On cherche à maximiser f(x) sous contrainte $x \leq x_0$.



La contrainte sera formalisée comme $g(y ; x) = x_0 - x \geq 0$.

On cherche à maximiser f(x) sous les contraintes $x \leq x_0$ et $y \leq ax + b$



Les contrainte seront formalisées comme $g_1(y ; x) = x_0 - x \geq 0$ et $g_2(y ; x) = ax + b - y \geq 0$

Problème : On cherche à maximiser une fonction objectif $f(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$ sous des contraintes linéaires multiples $g_j(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n) \geq 0$ $j = 1,...,k$.

On forme le Lagrangien $L = f(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$ où $\lambda_j \geq 0$, $j = 1,...,k$.

(Les λ_j sont appelés « multiplicateurs de Lagrange »).

Remarque : Lorsque l'on cherche à **minimiser** une fonction objectif $f(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$ sous des contraintes linéaires multiples $g_j(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n) \geq 0$ $j = 1,...,k$, on forme le Lagrangien en associant un signe « **moins** » aux multiplicateurs de Lagrange. Ainsi on écrit :

$$L = f(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n) \text{ où } \lambda_j \geq 0, j = 1,...,k.$$

Théorèmes de Kuhn et Tucker

Théorème 1 : Conditions Nécessaires d'Optimalité (CNO)

Si $x^* = (x_1^* ; x_2^* ; ... ; x_n^*)$ est solution du problème d'optimisation, alors nécessairement il vérifie :

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x=x^*} = 0 \qquad i = 1,..., n$$

$\lambda_j g_j(x_1^* ; x_2^* ; ... ; x_n^*) = 0$ $j = 1,..., k$ (Relations d'exclusion)

Théorème 2 : Conditions Nécessaires et Suffisantes d'Optimalité (CNS)

Si f est strictement quasi-concave et si les $g_j(x_1; x_2; ... ; x_n)$ sont convexes ($j = 1,..., k$), s'il existe des réels $\lambda_j \geq 0$ ($j = 1,...,k$) tels que :

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x=x^*} = 0 \qquad i = 1,..., n$$

$\lambda_j g_j(x_1^* ; x_2^* ; ... ; x_n^*) = 0$ $j = 1,..., k$ (Relations d'exclusion)

alors $x^* = (x_1^* ; x_2^* ; ... ; x_n^*)$ est solution du problème d'optimisation.

La solution du problème est un compromis entre des forces antagonistes. La variable λ_j mesure l'intensité avec laquelle la jème contrainte est saturée **à l'optimum**.
Ainsi si la jème contrainte est saturée ($g_j(x^*)=0$), λ_j est, sauf circonstances particulières, strictement positif. Plus la jème contrainte pèse sur le processus d'optimisation, plus λ_j est élevé. A l'inverse, si la jème contrainte n'est pas saturée ($g_j(x^*)>0$), λ_j est nul.
Si l'on fait varier la position d'une contrainte et que l'on observe la valeur prise par le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte en fonction de la position de cette contrainte, on constate que la valeur du multiplicateur, après être restée nulle va subitement croître (mesurant, ce faisant, la tension que la contrainte fait subir sur la fonction objectif) ou, à l'inverse, va progressivement décroître puis s'annuler et demeurer nulle.

Chapitre 2 – La Décision Optimale du Consommateur

I) Les Préférences

La première tâche du microéconomiste est de construire une modélisation de l'expression des préférences de tout individu. Schématiquement, le principe est le suivant : nous allons supposer que chaque individu est caractérisé par un préordre (une relation de préférence) qui lui est propre ; ce préordre résume tous les éléments de la subjectivité, des goûts de l'individu considéré. Bien que propre à chaque individu, le préordre doit cependant respecter des règles supposées communes à tous les individus. Le choix de ces règles va délimiter les contours de la rationalité individuelle. Une modification, même infime, de la liste ou de la teneur des règles postulées par le modélisateur peut déplacer sensiblement la limite entre les comportements admis comme rationnels et ceux réputés irrationnels. C'est pourquoi nous allons définir avec grand soin les propriétés supposées être vérifiées par l'ensemble des agents économiques.

Une fois définies ces propriétés, nous allons nous intéresser à la seconde étape du travail de l'économiste : traduire numériquement la hiérarchie qu'établit le préordre de l'individu (de manière à obtenir un outil utilisable en économie). Même si la quantification de l'intensité de la satisfaction éprouvée par l'individu n'est qu'ordinale, elle permet de bâtir des applications (c'est à dire de réfléchir à des problèmes économiques concrets).

Définissons tout d'abord formellement les ingrédients nécessaires à la construction de notre modèle de représentation numérique des préférences.

1) Relation binaire

Définition

Etant donné en ensemble $\mathcal{E}$ (par exemple l'ensemble des paniers de n biens certains), et $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ le produit cartésien usuel de toutes les paires (x ; y) où à la fois x et y sont des éléments de $\mathcal{E}$, une relation binaire B sur l'ensemble $\mathcal{E}$ est formellement définie comme un sous-ensemble de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ ($\mathsf{B} \subset \mathcal{E}\times\mathcal{E}$).

Si la paire (x ; y) appartient à ce sous-ensemble, on notera $(x ; y) \in \mathsf{B}$ ou, plus usuellement, $x\,\mathsf{B}\,y$.

1er Exemple : Supposons que $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ et que la relation binaire B soit la relation « supérieur ou égal à » notée $\geq$. La paire (7;2) est un élément de la relation binaire, tandis que la paire (9;15) n'en est pas un (car $7 \geq 2$ tandis que Non « $9 \geq 15$ »).

2ème Exemple : Supposons que $\mathcal{E}$ = « Ensemble des annonces possibles dans un jeu de belote » et que la relation binaire B soit la relation « rapporte strictement plus de points que », notée $\succ$. La paire (Carré;Tierce) est un élément de la relation binaire, et l'on peut noter Carré $\succ$ Tierce.

2) Propriétés usuelles d'une relation binaire

Nous n'allons pas présenter une liste exhaustive de propriétés que peut vérifier une relation binaire B définie sur un ensemble $\mathcal{E}$. Nous allons nous limiter ici à celles utiles aux définitions d'une relation de « préférence » et d'une relation de « préférence ou indifférence ».

. Asymétrie

Une relation binaire B définie sur un ensemble $\mathcal{E}$ est asymétrique si $\forall$ x, y $\in \mathcal{E}$,

$$x \, B \, y \Rightarrow \text{Non « } y \, B \, x \text{ »}$$

. Transitivité négative

Une relation binaire B définie sur $\mathcal{E}$ est négativement transitive si $\forall$ x, y, z $\in \mathcal{E}$,

$$\text{Non « } x \, B \, y \text{ » et Non « } y \, B \, z \text{ »} \Rightarrow \text{Non « } x \, B \, z \text{ »}$$

. Transitivité

Une relation binaire B définie sur un ensemble $\mathcal{E}$ est transitive si $\forall$ x, y, z $\in \mathcal{E}$,

$$x \, B \, y \text{ et } y \, B \, z \Rightarrow x \, B \, z$$

Remarque sémantique :

Une relation binaire vérifiant la propriété de transitivité est appelée préordre.

. Complétude

Une relation binaire B définie sur un ensemble $\mathcal{E}$ est complète si $\forall$ x, y $\in \mathcal{E}$,

$$x \, B \, y \text{ ou } y \, B \, x$$

Remarque sémantique :

Une préorde vérifiant la propriété de complétude est dit total (a « weak order » en anglais).

. Réflexivité

Une relation binaire B définie sur un ensemble $\mathcal{E}$ est réflexive si $\forall$ x $\in \mathcal{E}$,

$$x \, B \, x$$

Il est nécessaire de choisir entre deux options pour la définition d'une relation ordonnant les paniers de biens : la préférence au sens strict (relation de « préférence ») ou la préférence au sens large (relation de « préférence ou indifférence »). Selon l'option choisie, les hypothèses de départ postulées pour la relation seront différentes :

- Dans le cas de la préférence au sens strict (généralement notée $\succ$), les propriétés d'asymétrie et de transitivité négative sont retenues.
- Dans le cas de la préférence au sens large (généralement notée $\succsim$), les propriétés de transitivité, de complétude et de réflexivité sont retenues.

Dans la construction d'un modèle, le choix de la relation au sens strict plutôt que la relation au sens large ou l'option inverse n'a aucune forme d'importance : il est possible de construire un même modèle à partir de postulats (différents) sur l'une ou l'autre des relations. En outre, les relations se déduisent l'une de l'autre par l'équivalence :

$$\forall \, x, y \in \mathcal{E}, \; x \succsim y \;\Leftrightarrow\; \text{Non « } y \succ x \text{ »}$$

Il est également possible de définir la relation « d'indifférence », notée $\sim$ et définie soit à partir de la relation $\succ$ ($\forall$ x, y $\in \mathcal{E}$, x~y $\Leftrightarrow$ Non « x $\succ$ y » et Non « y $\succ$ x »), soit à partir de la relation $\succsim$ ($\forall$ x, y $\in \mathcal{E}$, x~y $\Leftrightarrow$ x $\succsim$ y et y $\succsim$ x).

3) Principe de la représentation numérique des préférences

On part du principe que chaque individu rationnel, chaque « homo economicus », possède une relation binaire $\succsim$ définie sur un ensemble $\mathcal{E}$ (par exemple sur l'ensemble des paniers de n biens) qui lui est propre (individualisme méthodologique). Cette relation binaire « résume » ses goûts, sa subjectivité.

D'autre part, on suppose que la relation $\succsim$ respecte un certain nombre de règles raisonnables, communes à tous les individus. Ces règles sont les axiomes de comportement. On s'efforce, ce faisant, de délimiter les contours de la rationalité individuelle.
Dans tout modèle de décision, l'objectif est de traduire numériquement la hiérarchie établie par la relation binaire entre les différents éléments de $\mathcal{E}$. La forme que prend cette traduction numérique est totalement conditionnée par les axiomes de comportement postulés pour la relation. Le socle de cet ensemble d'axiomes est une petite liste de propriétés fondamentales usuelles dont le rôle est de déterminer la nature de la relation binaire étudiée (relation de « préférence », relation de « préférence ou indifférence, …). S'y ajoute une série d'axiomes plus singuliers dont le rôle est de délimiter les contours de ce qu'est notre acception du comportement rationnel des individus. Le choix de ces axiomes va déterminer la forme et les propriétés de la fonction numérique traduisant les préférences incarnées par la relation binaire.
Le phénomène principal attaché à cette correspondance est la relation entre le degré de généralité des axiomes et celui de la fonction numérique représentative des préférences : des axiomes faibles conduisent à une forme fonctionnelle très générale, des axiomes forts conduisent à une forme fonctionnelle très particulière. Par axiomes « faibles », il faut entendre axiomes n'excluant que très peu de types de comportements : il est alors cohérent d'aboutir à un modèle de décision très général pour lequel la fonction représentative des préférences peut prendre une grande variétés de spécifications possibles, traduisant une grande variétés de comportements (supposés) rationnels possibles. A l'inverse, des axiomes très forts, très restrictifs, conduiront à un type de fonctions numériques très particulier. On peut ainsi voir apparaître un phénomène d'emboîtement : la transition d'une série d'axiomes forts vers une série d'axiomes plus faibles conduit à une généralisation du modèle de décision. En affaiblissant par étapes les axiomes d'une liste, on aboutit à des généralisations successives du modèle.
La transition entre les axiomes de comportement et la fonction numérique représentative des préférences se fait par le biais d'un théorème de représentation. La forme générale de tels théorèmes est la suivante :
<u>Théorème de représentation</u> : Etant donnée une relation binaire $\succsim$ définie sur un ensemble $\mathcal{E}$, les propositions (i) et (ii) sont équivalentes :

i) La relation $\succsim$ vérifie une certaine liste d'axiomes,

ii) Il existe une fonction V : $\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ vérifiant une certaine liste de propriétés , telle que :

$$\forall\, x,y \in \mathcal{E},\ x \succsim y \Leftrightarrow V(x) \geq V(y)$$

La fonction V(.) ci-dessus est la fonction de valeur ou fonction représentative des préférences.
La démonstration d'un tel théorème n'est pas chose aisée. Il s'agit généralement d'une démonstration en deux parties. La partie la plus simple consiste à montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i) : connaissant la fonction V(.), ses propriétés, et les propriétés de la relation binaire $\geq$ définie sur $\mathbb{R}$, il est assez facile d'établir les axiomes que vérifie la relation binaire $\succsim$. Montrer que (i) $\Rightarrow$ (ii) est plus délicat : il faut, en quelque sorte, construire morceau par morceau la fonction V(.). Une bonne dose d'astuces n'est jamais superflue, comme dans toute démonstration mathématique.

4) Application : Le choix entre des paniers de n biens certains
On s'intéresse au choix des individus rationnels entre des paniers de n biens. Un panier est une collection de n biens dans lequel chaque bien apparaît en quantité positive ou nulle. On

note x_1 la quantité consommée du bien 1, x_2 la quantité consommée du bien 2, … ; x_n la quantité consommée du bien n. On peut regrouper ces quantités dans un vecteur ou n-uplet $x = (x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$. On notera $x \in \mathbb{R}^n$.
On suppose que chaque individu possède une relation binaire $\succsim$ définie sur les paniers de n biens, qui lui est propre.
Au socle d'axiomes établissant la nature de la relation binaire considérée, **Transitivité + Complétude + Réflexivité** (il s'agit donc d'une relation de « préférence ou indifférence »), nous allons ajouter 1 axiome dont le rôle est de délimiter les contours de ce qu'est notre acception du comportement rationnel des individus : l'axiome de « **Non Saturation** ».

<u>. Non Saturation</u> :
$\forall$ x,y $\in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall$ i $\in$ {1,2, …, n} $x_i \geq y_i$ et $\exists$ j $\in$ {1,2, …, n} tel que $x_j > y_j$, alors $x \succ y$.

<u>Théorème de représentation</u> : Etant donnée une relation binaire $\succsim$ définie sur $\mathbb{R}^n$, les propositions (i) et (ii) sont équivalentes :

iii) La relation $\succsim$ vérifie les axiomes de transitivité, complétude, réflexivité et non saturation.

iv) Il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et définie à une transformation croissante près, telle que :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n,\ x \succsim y \Leftrightarrow V(x) \geq V(y)$$

Ce théorème dit qu'il est possible de représenter la relation $\succsim$ par une fonction V(x). Cette fonction est habituellement appelée fonction d'utilité pour les biens, notée u(x), ou encore $u[(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)]$ ou encore $u(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$.

5) Notion de Taux Marginal de Substitution

La structure des préférences de tout individu est maintenant convenablement définie et représentable par une fonction $u(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$. Nous souhaiterions maintenant établir une mesure *des proportions dans lesquelles l'individu est prêt à échanger un bien contre un autre, sans que cela ne modifie sa satisfaction*. Par exemple, nous souhaiterions savoir quelle quantité de bien 2 l'agent est-il prêt à céder contre quelle quantité de bien 1 (en supplément) sans que cela n'altère son niveau de satisfaction. Spontanément, on songe à construire un rapport de variations absolues : Taux de Substitution ½ = $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ (ce quotient est nécessairement négatif puisque Δx_1 doit être positif si Δx_2 est négatif et vice versa).
De manière plus satisfaisante, nous allons choisir de travailler avec un rapport de variations infinitésimales : **T**aux **M**arginal de **S**ubstitution ½ = $\frac{dx_2}{dx_1}$ (le terme « Marginal » fait référence au calcul en variations infinitésimales ou, en d'autres termes, au calcul différentiel). Que vaut ce rapport ? Si nous nous intéressons à une modification du panier de biens ne modifiant pas le niveau d'utilité obtenu par l'agent, nous devons partir de l'équation :

$$u(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n) = \text{Constante}$$

Différencions cette équation :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n=0$$

Si l'on intéresse au TMS ½, on doit supposer que les quantités des biens autres que les biens 1 et 2 sont inchangées, c'est à dire que $dx_3 = 0$, $dx_4 = 0$, …, $dx_n = 0$. Il reste ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}$$

$$\Leftrightarrow TMS_{1/2}=-\frac{Um_1}{Um_2}$$

Le TMS entre deux biens est donc égal au rapport entre les Utilités marginales de ces deux biens

II) Représentation graphique des préférences

Dans le cas de biens divisibles (biens dont les quantités consommées sont des nombres réels), on peut représenter graphiquement les préférences à l'aide de surfaces d'indifférences. L'équation générique de toute surface d'indifférence ou d'iso-utilité est :

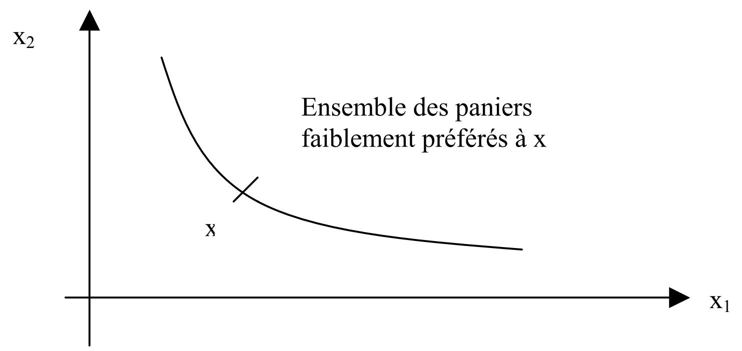
$\{x \in \mathbb{R}^n / u(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n) = K\}$ où K désigne une constante.

Ces surfaces d'indifférence sont des courbes dans le cas où le panier n'est constitué que de deux biens. De telles courbes, sous les axiomes de transitivité, complétude, réflexivité et non saturation sont décroissantes, ne se coupent pas et correspondent à des niveaux d'utilité d'autant plus élevés que l'on se situe plus haut, vers la droite.

Convexité des préférences :

Convexité (stricte) des préférences : si pour tout panier $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble des paniers faiblement préférés à x est (strictement) convexe.

Cas de paniers de 2 biens :



Remarque : Le terme « faiblement » fait référence à la relation de préférence « au sens faible » c'est à dire la relation de « préférence ou indifférence ».

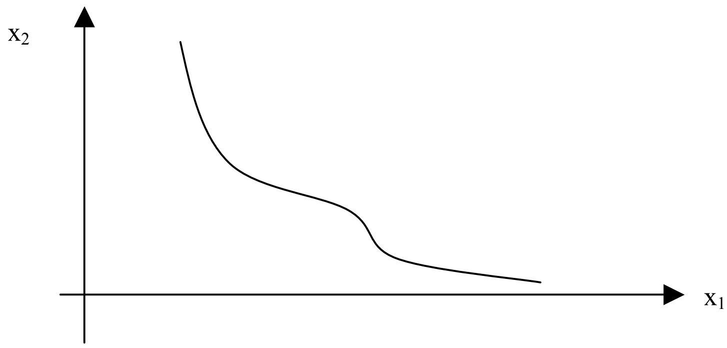
Théorème 1 : Convexité (stricte) des préférences ⇔ Convexité (stricte) des courbes d'indifférence.

Théorème 2 : Convexité (stricte) des préférences ⇔ (stricte) quasi-concavité de la fonction d'utilité.

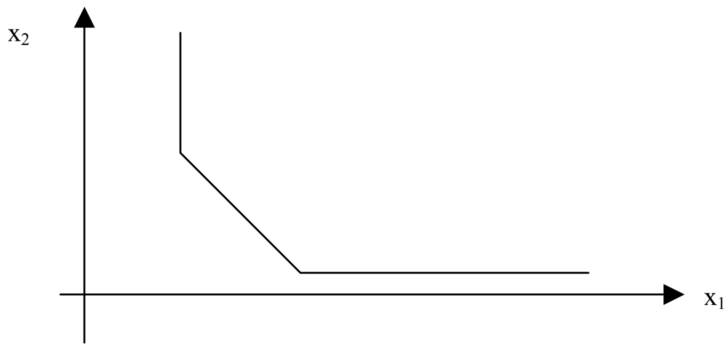
Interprétation : Convexité (stricte) des préférences = goût pour la diversité, la variété, les mélanges.

Les préférences des individus relativement aux biens ne sont pas toujours convexes. Mais cette hypothèse de convexité est une hypothèse commode pour l'opérateur : dans les problèmes standards de décision optimale du consommateur, elle garantit l'existence et l'unicité de la solution.

Exemple de préférences non convexes :



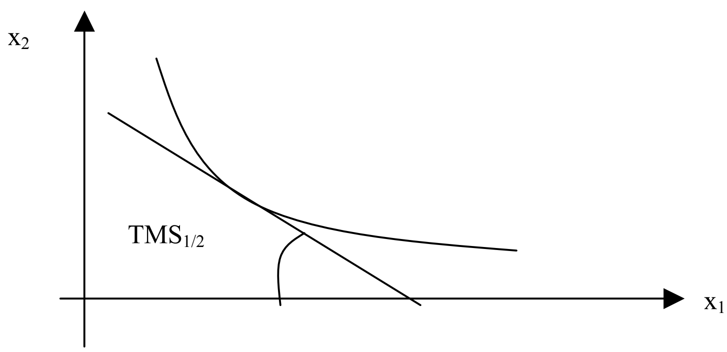
Exemple de préférences convexes mais non strictement convexes :



Visualisation du TMS :

Rappel : Etant donnée une fonction $x_2 = f(x_1)$ tracée dans un repère avec la variable x_1 en abscisse et la variable x_2 en ordonnée, le terme $\frac{dx_2}{dx_1}$ mesure structurellement la pente de la tangente à la courbe en tout point de cette courbe.

Or, dans le cas des courbes d'indifférence, $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = TMS_{1/2}$. Donc, la pente de la tangente à la courbe d'indifférence mesure, en tout point, le TMS entre les biens.



III) La décision optimale du consommateur

1) L'ensemble budgétaire du consommateur

Nous allons travailler dans une perspective Marshallienne d'équilibre partiel : le prix des biens et le revenu sont des données exogènes. Ces prix et ce revenu donnés délimitent l'ensemble des paniers de biens susceptibles d'être acquis par l'individu, ce que l'on appelle l'ensemble budgétaire.

Nous désignons par R le Revenu de l'individu et par $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les prix des biens 1, 2,…, n.
La contrainte budgétaire de l'individu s'écrit donc :

$$\text{Dépenses} \leq \text{Ressources}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n \leq R$$

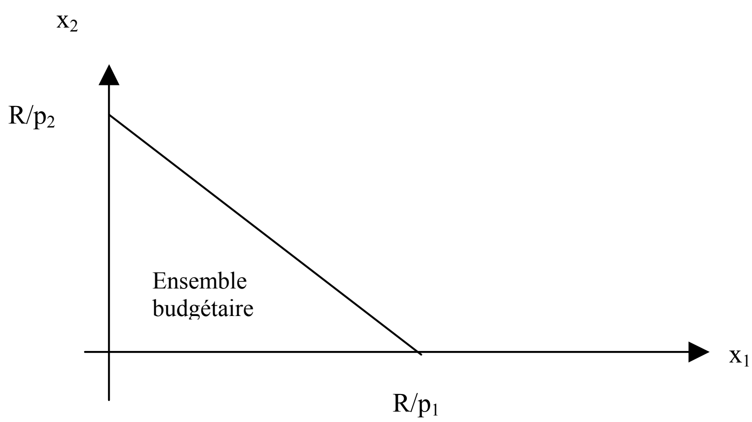
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq R$$

Dans le cas de paniers de 2 biens, il est possible de représenter graphiquement la contrainte budgétaire. En effet,

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 \leq \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

L'ensemble budgétaire du consommateur est donc l'ensemble délimité par les axes et la droite d'équation : $x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$



Les axes sont-ils inclus dans l'ensemble budgétaire ?

Le plus souvent, on fait l'hypothèse de **biens nécessaires**, sous laquelle les axes sont <u>exclus</u> de l'ensemble budgétaire.

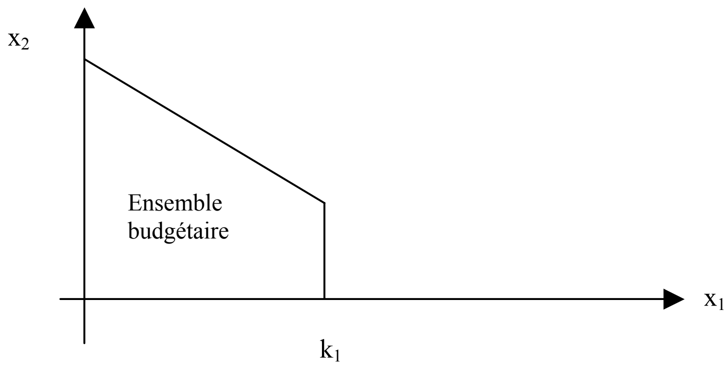
<u>Définition</u> : Un bien est nécessaire si, dès que le revenu est strictement positif, la quantité consommée de ce bien est strictement positive (même si elle est infime).

Formalisation de cette hypothèse : tous les biens nécessaires seront identifiés par une contrainte de positivité stricte. Ainsi, si l'on suppose que le bien i est nécessaire, on écrira $x_i > 0$.

Remarque importante : par défaut, les biens seront supposés nécessaires. Autrement dit, si rien n'est spécifié, il sera implicite que $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, …, $x_n > 0$.

A l'inverse, si l'un ou plusieurs des biens du panier sont « non nécessaires », il sera explicitement spécifié une contrainte de positivité large. Par exemple , si le bien j est « non nécessaire », on écrira nécessairement : $x_j \geq 0$.

Effet de l'instauration d'un rationnement :
Si l'on instaure un rationnement sur l'un des biens, l'ensemble budgétaire sera réduit. Par exemple, si la quantité maximale de bien 1 que chaque individu est autorisé à acquérir est limitée à k_1, on écrira dans le programme du consommateur $x_1 \leq k_1$ (où $k_1 < R/p_1$) et l'ensemble budgétaire du consommateur sera ainsi réduit :



2) Résolution du programme du consommateur
Le consommateur a pour objectif de maximiser la satisfaction tirée de la consommation des différents biens contenus dans le panier (satisfaction mesurée par la fonction d'utilité). Cette maximisation se fait sous contrainte de ressources :

$$\underset{x_1,x_2,\ldots,x_n}{\text{Max}}\ u(x_1;x_2;\ldots;x_n)$$
$$\text{s.c.}\ p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n \leq R$$

Pour résoudre ce programme, on forme le Lagrangien :

$$L = u(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n) + \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2 - \ldots - p_nx_n)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont :

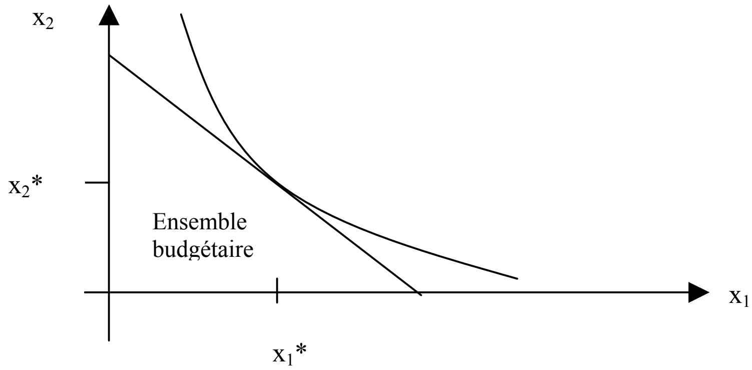
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}-\lambda p_1=0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{\partial u}{\partial x_2}-\lambda p_2=0 \\ \ldots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}=\frac{\partial u}{\partial x_n}-\lambda p_n=0 \\ \lambda(R-p_1x_1-p_2x_2-\ldots-p_nx_n)=0 \end{cases}$$

On obtient la caractérisation suivante de la décision optimale du producteur :

$$\forall\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ i \neq j,\ \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial x_j}}=\frac{p_i}{p_j}$$

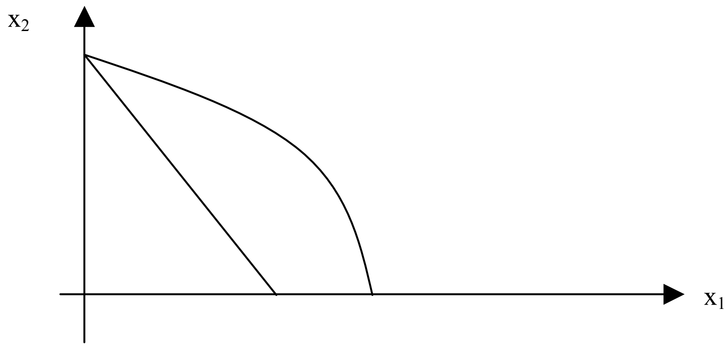
A l'optimum, le choix du consommateur constitue un **arbitrage** entre des quantités de chaque type de biens. Cet arbitrage est tel que le Taux Marginal de Substitution (TMS) entre tout couple de biens coïncide avec le rapport des prix de ces biens. En d'autres termes, la décision optimale est telle que l'agent parvient à faire coïncider le rapport de proportions (subjectif) dans lequel il est prêt à substituer un bien par un autre, avec le rapport (objectif) des prix, qui exprime, en quelque sorte, le rapport de proportions dans lequel le marché « autorise » la substitution d'un bien par un autre.
La solution du problème d'optimisation est un vecteur de demandes optimales de biens, chacune notée $x_i^*(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (demandes Marshalliennes).

Graphiquement (cas de deux biens) :
L'optimum correspond à la plus haute courbe d'indifférence compatible avec l'ensemble budgétaire.



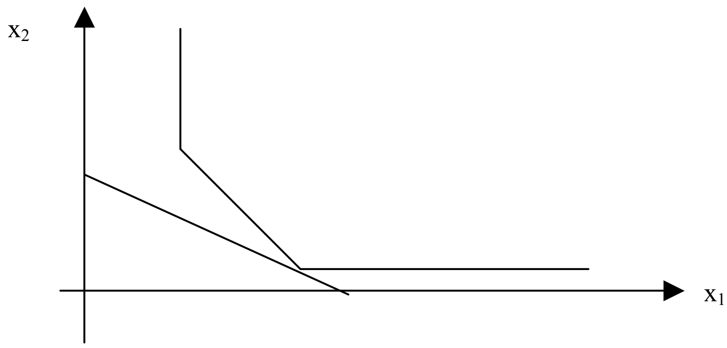
Le cas ci-dessus représenté est un « problème standard » du consommateur : la stricte convexité des préférences de l'individu garantit l'existence et l'unicité de l'optimum (c'est, par exemple le cas d'une fonction Cobb-Douglas).
Evoquons graphiquement quelques problèmes « non standards » de décision optimale du consommateur :

Cas de préférences strictement concaves :



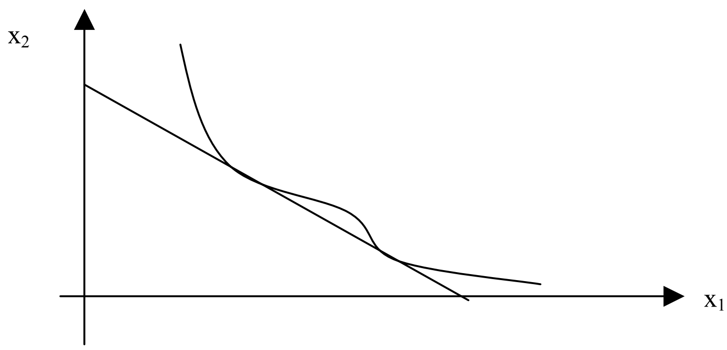
Dans le cas de biens nécessaires, **il n'existe pas d'optimum**. Si un ou plusieurs biens sont « non nécessaires », il peut exister 1 optimum (en coin). Une valeur particulière de la pente de la droite de budget peut même conduire à l'existence d'un couple d'optima.

Cas de préférences convexes mais non strictement convexes :



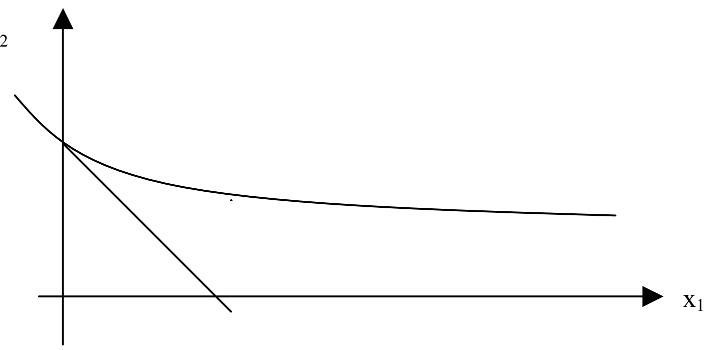
Le plus souvent, il existe un optimum unique. Cependant, une valeur particulière de la pente de la droite de budget peut conduire à l'existence d'une infinité d'optima.

Cas de préférences ni convexes ni concaves :



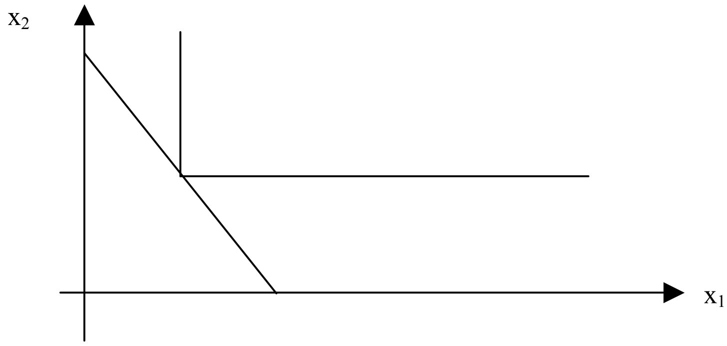
Il peut apparaître une multiplicité d'optima.

Cas de courbes d'indifférences strictement convexes coupant un des axes :



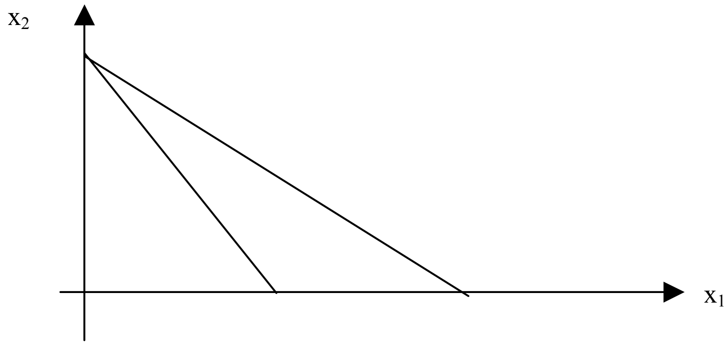
Dans le cas de biens nécessaires, il peut ne pas exister d'optimum. Dans le cas de biens « non nécessaires », il existe nécessairement un optimum, fût-il en coin.

Cas de biens complémentaires :



Dans le cas de biens complémentaires, il existe nécessairement un optimum unique.

Cas de biens substituables :



Dans le cas de biens nécessaires, sauf dans le cas fortuit où la droite de budget a une pente identique à celle des courbes d'indifférence, il n'existe pas d'optimum (en revanche, dans le cas fortuit de l'égalité des pentes, il existe une infinité d'optima). Dans le cas de biens « non nécessaires » il existera un optimum unique (en coin) ou une infinité d'optima.

Effet d'une variation de prix.

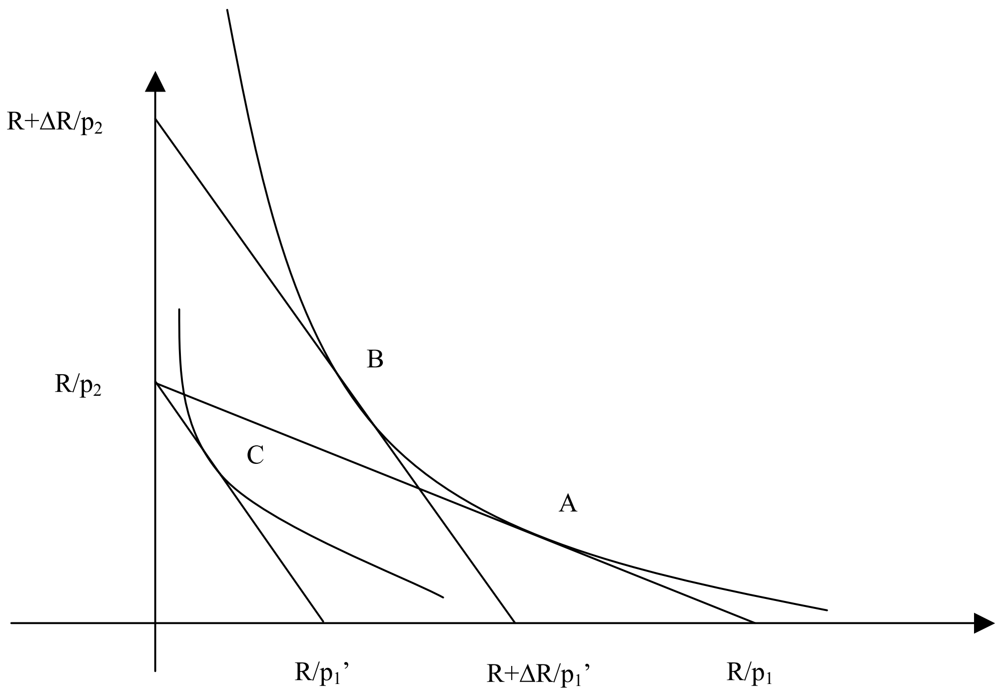
On peut décomposer l'effet de la variation du prix de l'un des biens sur les demandes de tous les biens en un effet substitution et un effet revenu. L'effet substitution est défini à partir d'une variation compensatrice de revenu virtuelle permettant de maintenir l'individu à son niveau de satisfaction initial.

L'idée est la suivante : supposons qu'il n'y ait que deux biens et que le prix du bien 1 augmente (et passe de p_1 à p_1', où $p_1' > p_1$). Nous savons que la consommation de bien 1 va diminuer, mais nous ignorons si la consommation du bien 2 va augmenter ou diminuer. Il y a effectivement deux effets contradictoires qui s'affrontent :

- *l'effet de substitution* d'un bien devenu relativement plus cher par un bien devenu relativement moins cher (dans le cas présent, ceci pousse à consommer plus de bien 2)
- *l'effet revenu*, autrement dit la perte globale de pouvoir d'achat qui incite à consommer globalement moins (dans le cas présent, ceci pousse à consommer moins de bien 2).

Comment isoler un des deux effets ? Si nous pouvions neutraliser l'effet revenu, l'effet substitution apparaîtrait par solde. Voici le raisonnement à partir duquel nous allons isoler l'effet substitution :

A Revenu inchangé R, le consommateur va nécessairement subir une baisse de satisfaction (sa satisfaction passe d'un niveau U à un niveau U', où U' < U). Supposons que nous accordions à l'individu *une variation compensatrice de revenu* ΔR, précisément calculée de manière à ce que l'accroissement du prix du bien 1 conjugué à cette variation de Revenu maintienne la satisfaction de l'individu exactement au niveau initial U. L'effet observé sur la consommation des différents biens est alors exclusivement l'effet substitution. Par extension, la comparaison entre cette situation virtuellement obtenue et la situation effectivement observée nous indique l'ampleur exacte de l'effet revenu.



Passage de A à B : Effet Substitution
Passage de B à C : Effet Revenu
Passage de A à C : Effet Total

Remarque : Dans le cas d'une fonction Cobb-Douglas, les deux effets sur la demande de bien j d'une modification du prix de bien i ($i \neq j$) se compensent exactement.

Elasticités :
Une élasticité de la demande est une mesure (normalisée) de sensibilité de la demande aux variations de l'une de ses variables.

- Elasticité prix directe :

$$\varepsilon_{i;i} = \frac{\dfrac{\partial x_i(p_1,p_2,...,p_n,R)}{\partial p_i}}{\dfrac{x_i(p_1,p_2,...,p_n,R)}{p_i}}$$

- Elasticité prix croisée :

$$\varepsilon_{i;j}=\frac{\dfrac{\partial x_i(p_1,p_2,...,p_n,R)}{\partial p_j}}{\dfrac{x_i(p_1,p_2,...,p_n,R)}{p_j}}$$

- Elasticité Revenu :

$$\varepsilon_{i;R}=\frac{\dfrac{\partial x_i(p_1,p_2,...,p_n,R)}{\partial R}}{\dfrac{x_i(p_1,p_2,...,p_n,R)}{R}}$$

A titre anecdotique, rappelons une typologie des biens liée à leurs élasticités :

<u>Bien Ordinaire versus bien Giffen</u> : Un bien ordinaire est un bien dont l'élasticité prix directe est négative (Un bien Giffen est un bien dont l'élasticité prix directe est positive).
<u>Bien Normal versus bien Inférieur</u> : Un bien normal est un bien dont l'élasticité revenu est positive (Un bien Inférieur est un bien dont l'élasticité revenu est négative). Parmi les biens Normaux, on distingue les biens de luxe (élasticité revenu supérieure à 1) et les biens de nécessité (élasticité revenu inférieure à 1).

On peut aussi définir l'**élasticité de substitution** entre deux biens comme les proportions dans lesquelles un bien sera substitué par un autre suite à une modification du prix relatif des biens considérés.

Soient $x_i(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R)$ et $x_j(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R)$ les demandes optimales de biens i et j, on définit l'élasticité de substitution entre ces biens par :

$$\sigma_{i;i}=\frac{\dfrac{\partial\left(\dfrac{x_i(p_1,p_2,...,p_n,R)}{x_j(p_1,p_2,...,p_n,R)}\right)}{\partial\left(\dfrac{p_i}{p_j}\right)}}{\dfrac{\dfrac{x_i(p_1,p_2,...,p_n,R)}{x_j(p_1,p_2,...,p_n,R)}}{\dfrac{p_i}{p_j}}}$$

Fonction d'utilité indirecte.
Etant donné un vecteur de prix $(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n)$ et un niveau de Revenu R , la maximisation de l'utilité sous contrainte budgétaire conduit à la détermination de n fonctions de demandes optimales de biens $x_i^*(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R)$, $i = 1, 2, \dots, n$. A partir de ces fonctions, il est possible de générer une fonction établissant le niveau maximal d'utilité que le consommateur peut atteindre pour tout système de prix et de Revenu. Cette fonction est obtenue en substituant chaque x_i par sa valeur à l'optimum $x_i^*(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R)$ dans la fonction d'utilité. Ainsi :

$$V(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R) = u[x_1^*(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R), \dots, x_n^*(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R)]$$

La fonction d'utilité indirecte mesure *la satisfaction atteinte par le consommateur sachant qu'il a réalisé sa combinaison optimale de consommation*.

Propriété : Le multiplicateur de Lagrange est, à l'optimum, égal à l'utilité marginale du revenu.

$$\lambda=\frac{\partial V(p_1,p_2,...,p_n,R)}{\partial R}$$

Le multiplicateur de Lagrange est d'autant plus élevé que la contrainte de ressources pèse sur le choix du consommateur. Si le Revenu du consommateur s'accroît marginalement, le surcroît de satisfaction induit sera, bien entendu, très élevé si le consommateur est initialement très rationné (faute de ressource) et faible si la contrainte de budgétaire ne pèse initialement guère sur sa décision.

3) L'analyse duale de la décision du consommateur

L'analyse « duale » de la décision du consommateur n'est pas fondamentalement différente de l'analyse précédente (qualifiée, par opposition, d'analyse « primale »). Il s'agit seulement de traiter le problème sous un autre angle, de mener la démarche d'optimisation d'une autre manière : les résultats que nous allons obtenir vont contribuer à enrichir l'analyse primale.
Dans l'analyse primale, nous étudiions le désir du consommateur de maximiser sa satisfaction sous contrainte de ne pas dépenser plus que ses ressources. Dans l'analyse duale, nous allons envisager le même problème de détermination des demandes optimales de biens sous l'angle d'une minimisation de la dépense de consommation sous contrainte d'atteindre un niveau de satisfaction seuil.
Programme dual du consommateur :

$$\underset{x_1,x_2,...,x_n}{\text{Min}}\ p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n$$

$$\text{s.c. } u(x_1;x_2;...;x_n)\geq U$$

U est un niveau de satisfaction exogène arbitraire (tout comme R était un niveau de Revenu exogène arbitraire dans le problème primal).

La solution du problème d'optimisation est un vecteur de demandes optimales de biens, $x_i^*(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; U)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, qui, pour les distinguer des précédentes seront notées $\mathbf{h_i^*(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; U)}$ (demandes Hicksiennes, parfois encore appelées demandes compensées).
Les demandes Hicksiennes dépendent du vecteur exogène des prix (comme les demandes Marshalliennes) et du niveau de satisfaction cible U (alors que les demandes Marshalliennes dépendaient du niveau de ressources donné R).

<u>Relations entre l'analyse primale et l'analyse duale du consommateur :</u>
On peut tout d'abord définir, une fonction de dépense $\mathbf{e(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; U)}$ (e pour « expenditure ») de manière analogue à la définition de la fonction d'utilité indirecte.
A partir des fonctions de demandes Hicksiennes, il est possible de générer une fonction établissant le niveau minimal de dépense que le consommateur doit consentir pour tout système de prix et niveau de satisfaction cible. Cette fonction est obtenue en substituant chaque x_i par sa valeur à l'optimum $h_i^*(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; U)$ dans la fonction objectif du programme dual. Ainsi :

$$e(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; U) = p_1h_1^*(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; U) + \ldots + p_nh_n^*(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; U)$$

Propriété : La fonction de Dépense est l'inverse de la fonction d'Utilité Indirecte

$$e(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; U) = R \Leftrightarrow V(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R) = U$$

Conséquences :

$$. \; e[p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; V(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R)] = R$$
$$. \; V[p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; e(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; U)] = U$$

En outre, $\forall$ i = 1, …, n

$$. \; x_i(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R) = h_i[p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; V(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R)]$$
$$. \; h_i(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; U) = x_i[p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; e(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; U)]$$

Identité de Roy :

$$\forall \, i = 1, \ldots, n, \qquad x_i(p_1 ; p_2 ; ... ; p_n ; R) = - \frac{\dfrac{\partial V(p_1,p_2,...,p_n,R)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial V(p_1,p_2,...,p_n,R)}{\partial R}}$$

Equation de Slutsky :

$\forall$ i, j $\in$ {1, …, n}

$$\frac{\partial x_j(p_1,p_2,...,p_n,R)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j(p_1,p_2,...,p_n,U)}{\partial p_i} - x_i(p_1,p_2,...,p_n,R)\frac{\partial x_j(p_1,p_2,...,p_n,R)}{\partial R}$$

L'équation de Slutsky décompose la variation de la demande de bien j induite par une variation du prix du bien i en un effet substitution et un effet revenu. L'effet substitution est mesurée à partir de la demande Hicksienne ou demande compensée, dont la particularité est d'établir l'expression de la demande de bien j à niveau d'utilité donné. Ainsi, lorsque le prix varie, la modification induite de la demande n'est pas altérée par un effet revenu. En d'autres termes, il n'est pas utile de créer artificiellement une variation compensatrice de revenu puisque celle-ci est implicitement présente dans la demande Hicksienne (en réalité, le problème ne se pose plus en ces termes).

Application : Approximation de la décomposition « Effet Substitution-Effet Revenu » suite à une variation de la demande de bien j induite par une variation du prix du bien i.
Si l'on considère un petit accroissement du prix du bien i noté Δp_i, on peut approximer Δx_j, la variation induite de la demande de bien j, par le terme $\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\Delta p_i$ (car $\frac{\Delta x_j}{\Delta p_i} \approx \frac{\partial x_j}{\partial p_i}$). D'après l'équation de Slutsky, on a donc :

$$\Delta x_j \approx \frac{\partial h_j}{\partial p_i}\Delta p_i - x_i \frac{\partial x_j}{\partial R}\Delta p_i$$

Remarque : L'équation de Slutsky est suffisamment générale pour également décomposer la variation de la demande de bien **i** induite par une variation du prix du bien **i**.

$$\forall \, i \in \{1, \ldots, n,\} \; \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{\partial h_i}{\partial p_i} - x_i \frac{\partial x_i}{\partial R}$$

4) Les fonctions CES (à Constante Elasticité de Substitution).

Les fonctions CES sont un type de fonctions aux propriétés remarquables.
Nous allons ici présenter la forme générale des fonctions CES en nous limitant à des fonctions de 2 variables :

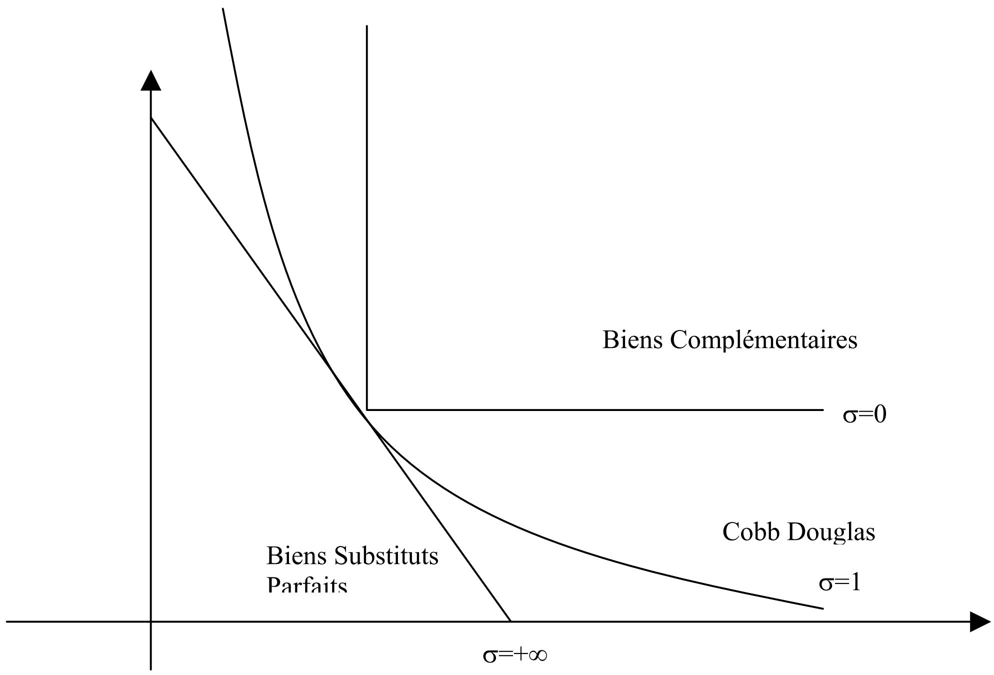
Fonctions CES : $\boxed{f(x_1 ; x_2) = (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{1/\rho} \quad \text{où } \rho \in]-\infty ; 1]}$

Définissons le réel σ par : $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$. Remarquons que ce réel σ appartient nécessairement à $[0 ; +\infty[$ et que $\rho = \frac{\sigma-1}{\sigma}$. En particulier :

$$\rho = -\infty \Leftrightarrow \sigma = 0$$
$$\rho = 0 \Leftrightarrow \sigma = 1$$
$$\rho = 1 \Leftrightarrow \sigma = +\infty$$

On peut alors réécrire la fonction : $f(x_1 ; x_2) = (x_1^{(\sigma-1)/\sigma} + x_2^{(\sigma-1)/\sigma})^{\sigma/(\sigma-1)}$

Dans le cas où la fonction CES $f(x_1 ; x_2)$ est une fonction d'utilité, le paramètre σ mesure exactement l'élasticité de substitution entre les biens 1 et 2. Ce degré de substituabilité entre les biens est visualisable en traçant les courbes d'indifférence associées aux diverses configurations possibles :



5) L'arbitrage consommation-loisir.

Intéressons nous à une application directe de l'étude du comportement du consommateur : l'arbitrage consommation-loisir. La consommation (d'un bien composite) et le loisir sont deux « biens » désirables dont les prix seront supposés exogènes. En ce sens l'étude que nous allons mener ne diffère pas de ce qui précède. Mais, le temps consacré au loisir étant par définition « non consacré » au travail, nous allons devoir tenir compte de ce que le revenu disponible n'est désormais plus indépendant de la décision de consommation.

Hypothèse : Nous raisonnons sur une période de temps donnée, notée ℓ_0 (par exemple $\ell_0 = 24$ heures ou 7 jours ou 1 mois ou …). A l'intérieur de cette période, l'individu va choisir de travailler une certaine durée ℓ ($\ell \leq \ell_0$). Pour ce travail, l'individu sera rémunéré au taux w (taux de salaire), soit, en niveau $w \times \ell$. Ce revenu salarial sera supposé être, dans un premier temps, les seules ressources de l'agent, consacrées à la consommation d'un bien composite unique , vendu au prix p. Nous noterons c la quantité consommée de ce bien.

La fonction d'utilité de l'individu est définie sur deux variables :

- la quantité consommée du bien composite : c
- la quantité consommée du bien « loisir », ce bien étant défini comme le « non-travail ». Il s'agit de la variable : $(\ell_0 - \ell)$

Quel est le prix du bien « loisir » ? Ecrivons la contrainte budgétaire de l'individu ; nous avons $w \times \ell$ du côté des ressources et $p \times c$ du côté des emplois, la contrainte est donc :

$$pc \leq w\ell$$

On peut réécrire cette contrainte de manière à faire apparaître le bien « loisir » :

$$pc + w\ell_0 \leq w\ell + w\ell_0$$

$$\Leftrightarrow \quad pc + w\ell_0 - w\ell \leq w\ell_0$$

$$\Leftrightarrow \quad pc + w(\ell_0 - \ell) \leq w\ell_0$$

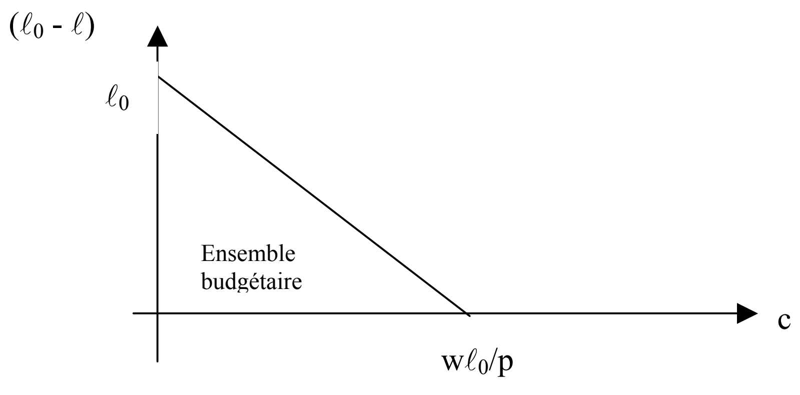
Le « prix » du bien loisir est donc manifestement w : tout se passe comme si l'individu « achetait » du loisir au prix w. Chaque heure de loisir correspond en effet à un coût égal aux ressources salariales dont le ménage se prive du fait du temps consacré aux loisirs. On parlera d'un **coût d'opportunité**, puisqu'il s'agit d'une perte de ressources potentielles due au fait que l'individu renonce à travailler pendant l'intégralité de la dotation en temps disponible (mais pendant une fraction seulement).

La fonction d'utilité est donc de type $u[c ; (\ell_0 - \ell)]$, parfois encore notée $u(c ; t)$ où $t = (\ell_0 - \ell)$.

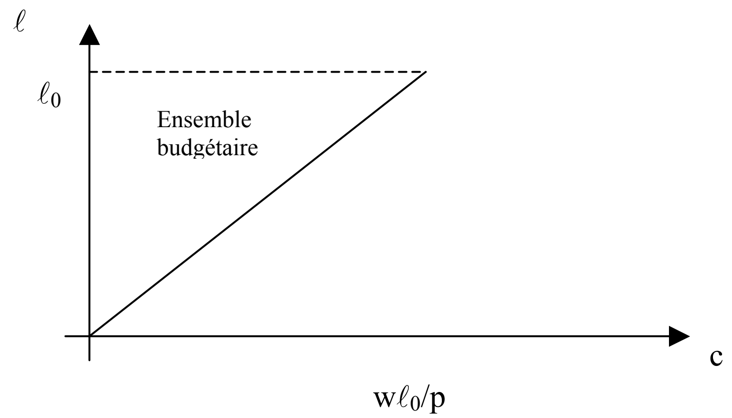
Le programme du consommateur est donc :

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & u[c ; (\ell_0 - \ell)] \\ \text{s.c.} & pc + w(\ell_0 - \ell) \leq w\ell_0 \end{array}$$

On peut représenter graphiquement l'ensemble budgétaire dans le repère $(0 ; c ; (\ell_0 - \ell))$:



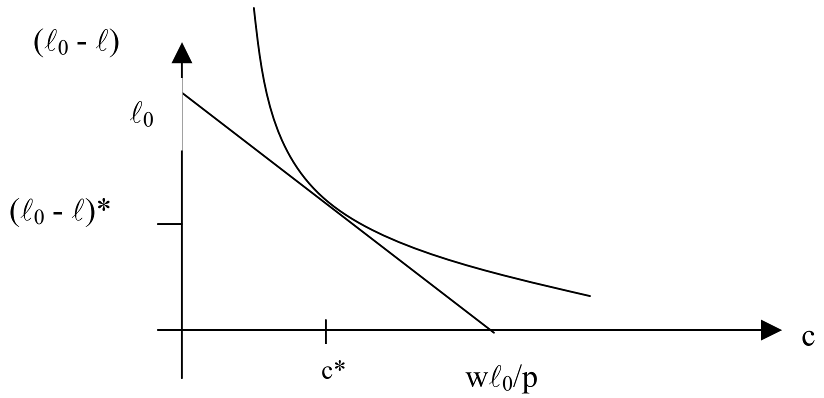
On peut aussi représenter l'ensemble budgétaire dans le repère (0 ; c ; ℓ) :



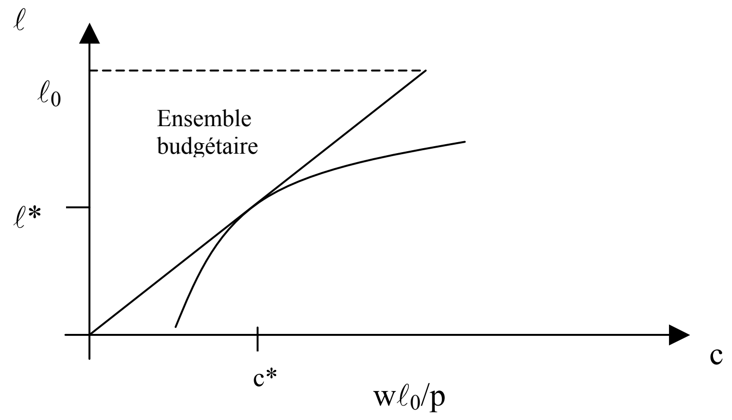
En résolvant le programme du consommateur, on obtient la condition d'optimalité suivante :

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial(\ell_0-\ell)}}{\frac{\partial u}{\partial c}}=\frac{w}{p}$$

En d'autres termes, le TMS loisir-consommation doit être, à l'optimum, égal au salaire réel. Graphiquement, la décision optimale du consommateur peut être figurée comme suit :



Ou encore :

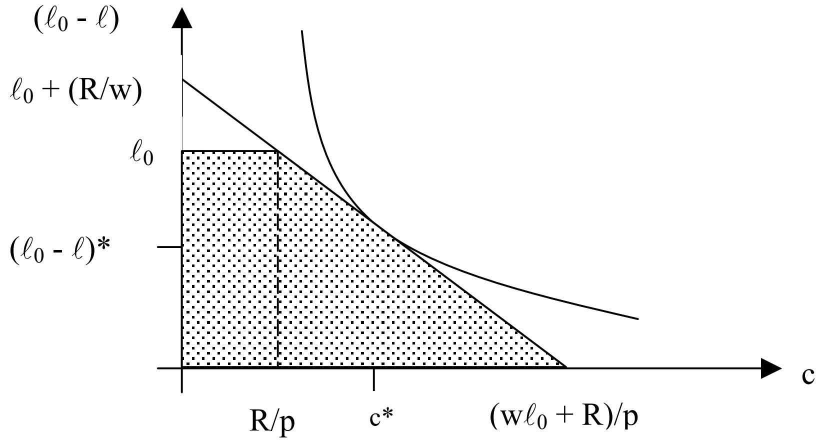


Elargissons maintenant le problème en introduisant un revenu non salarial exogène R. La nouvelle contrainte budgétaire devient :

$$pc \leq w\ell + R$$

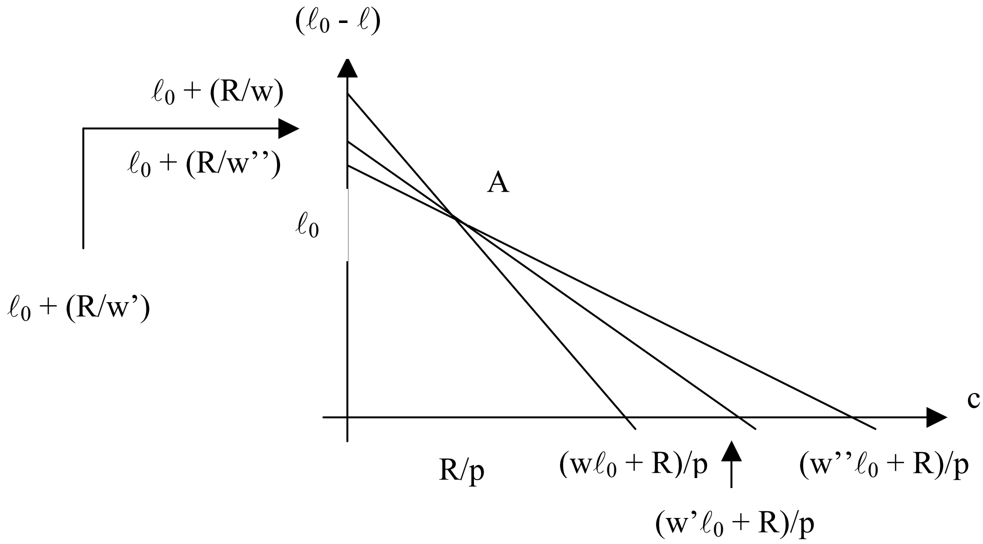
$$\Leftrightarrow \qquad pc + w(\ell_0 - \ell) \leq w\ell_0 + R$$

La condition d'optimalité est inchangée à la suite de l'introduction d'un revenu non salarial. En revanche, la représentation graphique de la contrainte budgétaire et de la décision optimale du consommateur est modifiée :

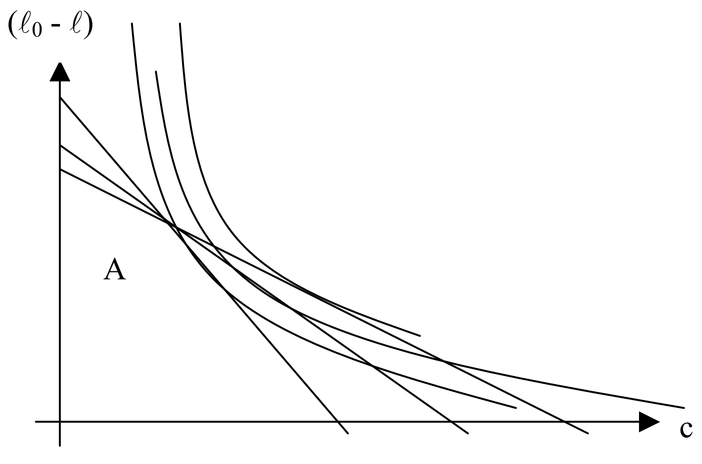


Dans ce cadre général, examinons, maintenant, l'effet, sur la demande de loisir, de l'accroissement du salaire w (le prix du bien composite p demeurant inchangé). Nous allons étudier deux séquences d'augmentation : tout d'abord le salaire passe de w à w' (w' > w), puis le salaire passe de w' à w'' (w'' > w').

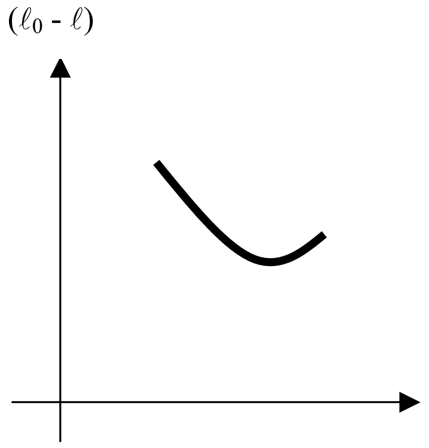
Etudions tout d'abord comment se déplace la contrainte suite à un accroissement de salaire. Puisque la pente de la droite (en valeur absolue) est p/w, la droite devient moins pentue. L'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine se modifient. Le seul point par lequel passe toutes les droites de budget est le point A d'abscisse R/p et d'ordonnée ℓ_0.

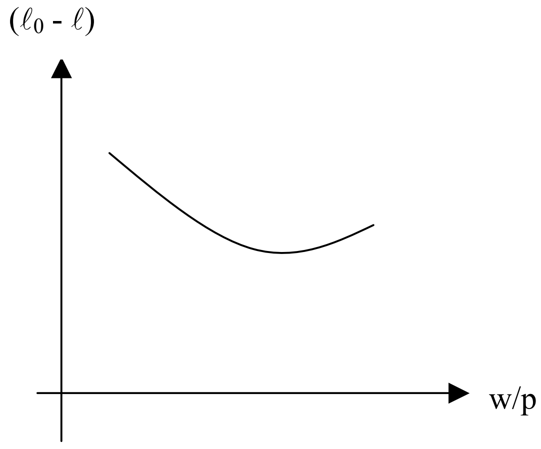


Comment va se déplacer l'optimum ? Va-t-on demander plus ou moins de loisir ? Cela dépend ! Il se peut en effet que la demande de loisir décroisse initialement suite à une hausse de salaire (par exemple suite au passage de w à w'), en raison du renchérissement du bien loisir relativement au coût du bien de consommation (effet de substitution dominant). Mais il se peut, ensuite, que la demande de loisir croisse (par exemple suite au passage de w' à w''), en raison de l'accroissement de pouvoir d'achat lié à la hausse des ressources (effet richesse dominant).

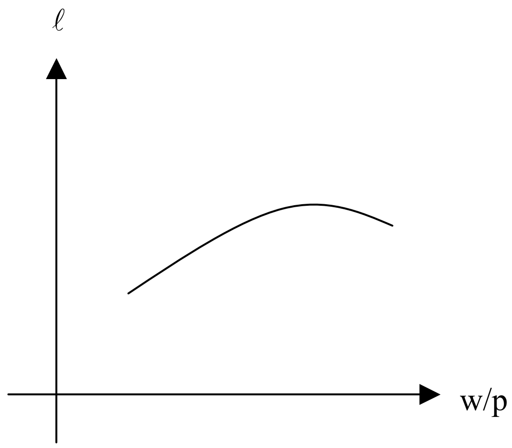


Si l'on trace la courbe qui relie les optima (en fonction des valeurs de w), on obtient une courbe d'abord décroissante puis croissante :





En conséquence l'offre de travail ℓ a cette forme :



L'offre de travail est une fonction d'abord croissante, puis décroissante du salaire réel. Ce résultat peut avoir des conséquences intéressantes en macroéconomie. Il démontre que la recherche de fondements microéconomiques aux comportements macroéconomiques est indispensable !

6) L'arbitrage inter-temporel de consommation

Envisageons maintenant une nouvelle application, dans laquelle le consommateur choisit les quantités consommées d'un même bien au cours de deux périodes : la période 1 (ou période actuelle) et la période 2 (ou période future). Nous noterons c_1 et c_2 les quantités consommées de ce bien composite. Nous noterons p_1 et p_2 les prix du bien aux deux périodes. Les revenus perçus par l'individu à chaque période sont R_1 et R_2 supposés exogènes. Supposons enfin que l'individu puisse emprunter et prêter de l'argent à un taux unique r. On notera E le montant d'Epargne ($E \geq 0$) ou d'Emprunt ($E \leq 0$) réalisé par l'agent en en début de période 1.

Les contraintes budgétaires de l'agent s'écrivent :

Période 1 : $p_1c_1 + E = R_1 \quad \Leftrightarrow E = R_1 - p_1c_1$

Période 2 : $p_2c_2 \leq R_2 + E(1 + r)$

On peut réécrire ceci sous la forme d'une unique contrainte budgétaire intertemporelle :

$$p_2c_2 \leq R_2 + (R_1 - p_1c_1)(1 + r)$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1c_1(1 + r) + p_2c_2 \leq R_1(1 + r) + R_2 \quad \text{(i)}$$

On peut réécrire cette inéquation sous une autre forme (en multipliant les deux membres de l'inéquation par $1/(1 + r)$) :

$$p_1c_1 + \frac{p_2c_2}{1+r} \leq R_1 + \frac{R_2}{1+r} \quad \text{(ii)}$$

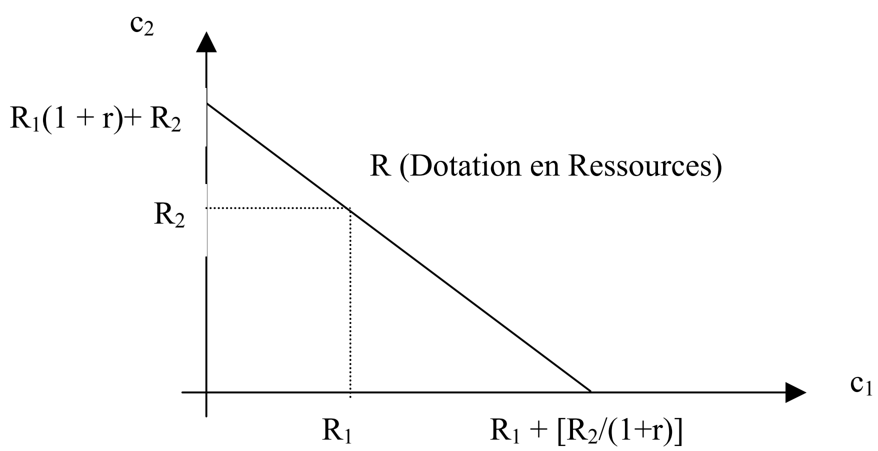
Cette contrainte budgétaire intertemporelle, ou contrainte de richesse exprime que la somme des dépenses de consommation actualisée (au taux r) ne doit pas excéder la somme actualisée des ressources.

La contrainte (ii) exprime la contrainte de richesse en valeur actuelle (ou valeur présente), tandis que la contrainte (i) exprime cette contrainte en valeur future.

Pour simplifier notre étude, nous allons ici supposer que le prix du bien de consommation en $1^{ère}$ comme en 2^{nde} période est égal à 1. Réécrivons alors la contrainte (i) comme :

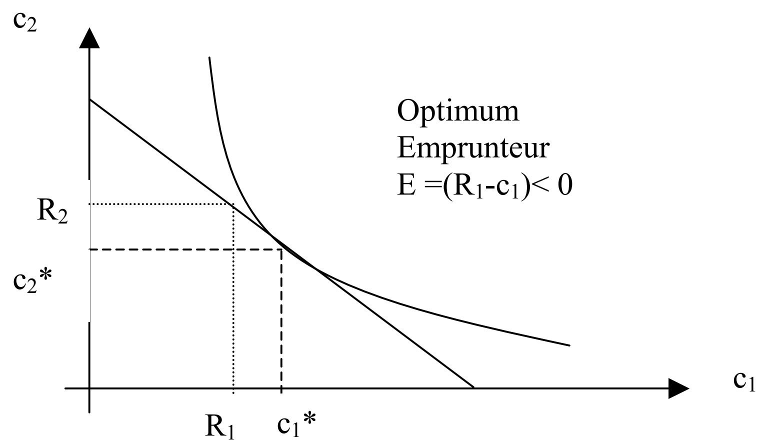
$$c_2 \leq -(1 + r)c_1 + R_1(1 + r) + R_2$$

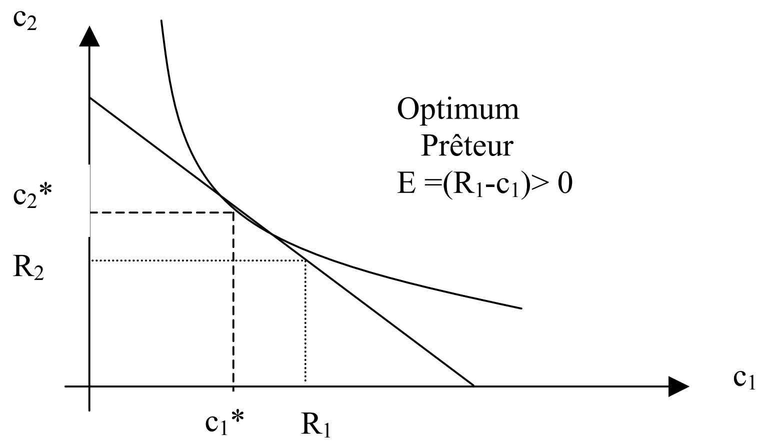
Représentons cette contrainte de richesse dans le plan (O, c_1, c_2) :



La droite de budget passe par le point de dotation initiales en Ressources R. sauf coïncidence, ce point ne sera pas l'optimum. On remarquera qu'en abscisse le niveau de consommation de première période est mesuré en valeur présente, tandis qu'en ordonnée le niveau de consommation de seconde période est mesuré en valeur future.

Deux configurations peuvent se présenter :





Caractérisons maintenant la décision optimale.
Le problème du consommateur consiste à maximiser une fonction d'utilité intertemporelle $u(c_1, c_2)$ sous contrainte de richesse :

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & u(c_1, c_2) \\ \text{s.c.} & c_1(1 + r) + p_2 \leq R_1(1 + r) + R_2 \end{array}$$

La condition d'optimalité est :

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial c_1}}{\frac{\partial u}{\partial c_2}} = 1 + r$$

Le terme de gauche est le Taux Marginal de Substitution intertemporel de l'agent : en d'autres termes, il s'agit de son taux d'actualisation personnel, c'est à dire les proportions dans lesquelles il est prêt à renoncer à de la consommation présente au profit de la consommation future.
La condition d'optimalité requiert que le taux d'actualisation personnel (ou subjectif) de l'agent soit égal au taux d'intérêt du marché, c'est à dire le taux d'actualisation (objectif) de l'économie.

Chapitre 3 – La Décision Optimale du Producteur en Contexte Concurrentiel

Formalisation de la Technologie de production

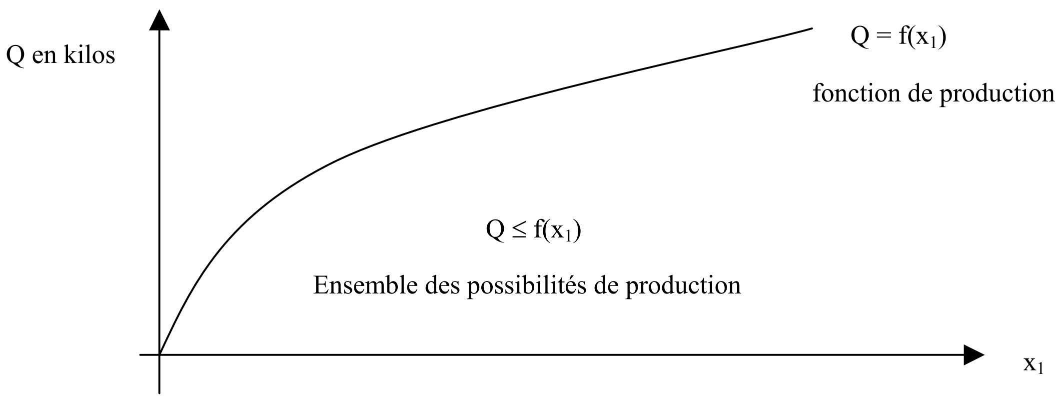
De quelle manière produit on un bien ou service (nommé output) à partir de la combinaison de multiples facteurs de productions (nommés input) ?

Que sont les inputs ? On les regroupe en plusieurs grandes catégories : la terre, le travail, les matières premières, la capital.

Le capital désigne les inputs qui sont eux mêmes des biens produits. Pour résumer, il s'agit de « machines » au sens large : machines à emboutir les tôles, fenwicks, tracteurs, ordinateurs, bâtiments, machines à tisser, … Le capital désigne aussi, parfois, l'argent utilisé pour faire démarrer ou tourner une affaire : on parle ainsi du capital financier, à distinguer du capital physique.

Cas d'un seul facteur de production :

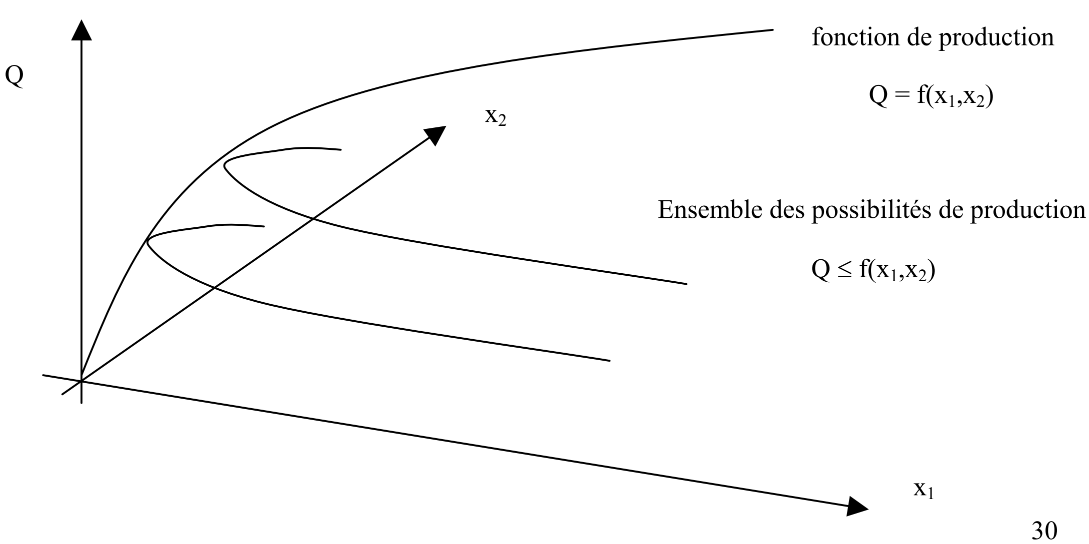
Nous notons Q la quantité de bien produit (output) et x_1 la quantité utilisée de facteur (input). Par exemple, Q est la quantité de pommes cueillies et x_1 est le nombre d'heures de travail consacrées à la cueillette.



La relation fonctionnelle $Q = f(x_1)$ indique la quantité maximale d'output que l'on peut produire avec une quantité donnée d'input (production sans gâchis). La technologie de production est exprimée par l'inégalité : $Q \leq f(x_1)$.

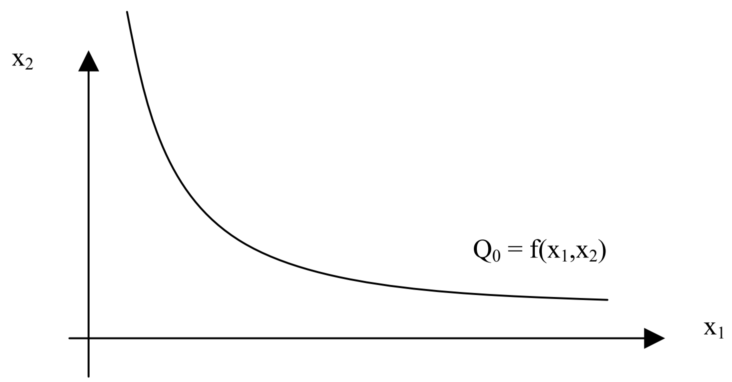
Cas de deux facteurs de production :

Nous notons Q la quantité de bien produit (output), x_1 la quantité utilisée du premier facteur (par exemple le travail),), x_2 la quantité utilisée du second facteur (par exemple le capital).



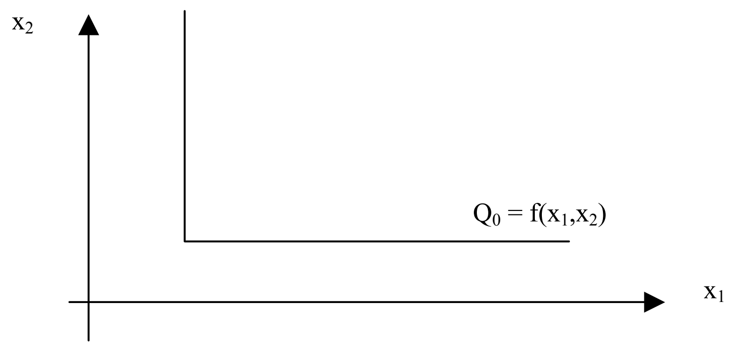
La relation fonctionnelle $Q = f(x_1,x_2)$ indique la quantité maximale d'output que l'on peut produire avec une quantité donnée d'input (production sans gâchis). La technologie de production est exprimée par l'inégalité : $Q \leq f(x_1,x_2)$.

Une autre représentation graphique de la technologie de production : l'Isoquant.
On peut représenter la relation fonctionnelle $Q = f(x_1,x_2)$ dans le repère $(0;x_1,x_2)$ sur le principe des « courbes de niveaux » : soit Q_0 un niveau arbitraire de production, on peut figurer la courbe d'équation $Q_0 = f(x_1,x_2)$ dans le repère $(0;x_1,x_2)$. Cette courbe est constituée de tous les couples (x_1,x_2), c'est à dire toutes les combinaisons possibles de facteur 1 et de facteur 2, permettant d'obtenir (de manière efficace) un niveau de production Q_0. Cette courbe est un Isoquant (combinaisons de facteurs permettant d'atteindre « un même niveau de quantité produite »).

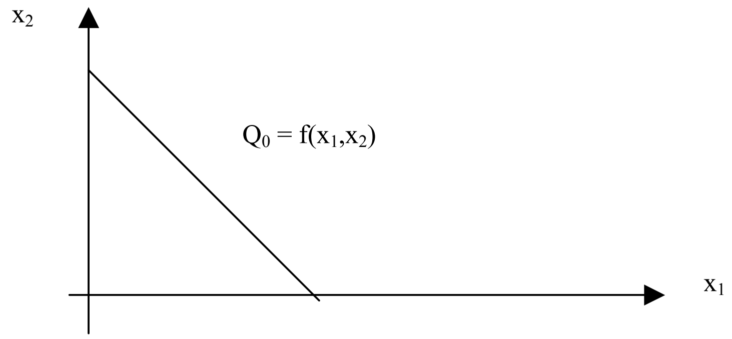


L'Isoquant figuré ci-dessus est convexe (car toute combinaison linéaire convexe de points de l'Isoquant appartient à un ensemble qui est lui-même convexe). Il peut exister d'autres formes pour les Isoquants.

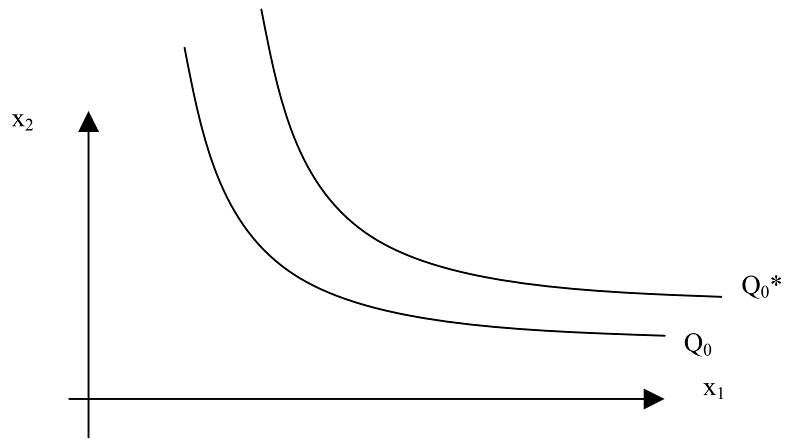
Cas de proportions fixes de facteurs :
Supposons que pour produire 1 unité d'output, il faille des proportions fixes des deux facteurs. Par exemple, pour abattre des arbres, il faut 1 tronçonneuse par bûcheron (le fait de disposer de deux tronçonneuses par bûcheron ne permet pas d'abattre plus d'arbres par unité de temps). La forme des Isoquants est la suivante :



Cas de facteurs parfaitement substituables :
Supposons que pour produire la proportion utilisée de chacun des facteurs soit sans importance. Par exemple, pour transporter des voyageurs, il faut utiliser des bus de couleur bleue (facteur 1) et des bus de couleur rouge (facteur 2). La forme des Isoquants est la suivante :



Quel que soit la nature de la technologie de production, il demeure que le niveau d'output représenté par l'Isoquant sera d'autant plus élevé que l'Isoquant est situé vers le haut et vers la droite. Dans l'exemple suivant, $Q_0^* > Q_0$:



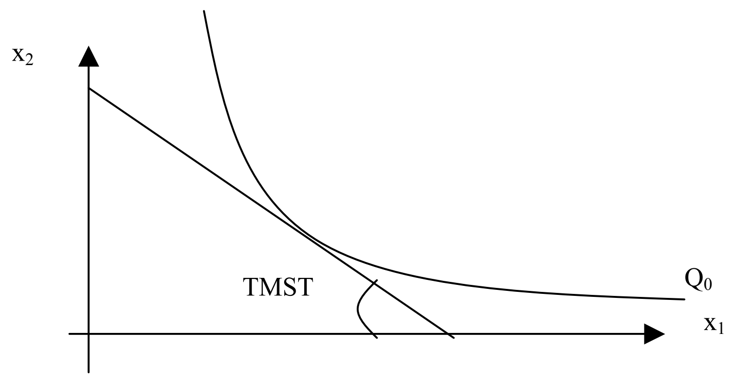
Notion de Taux Marginal de Substitution Technique (TMST) :
On cherche à mesurer les proportions dans lequel il est possible de substituer un facteur par un autre : si l'on diminue de manière infime la quantité utilisée de l'un des facteurs, quelle quantité supplémentaire de l'autre facteur devra-t-on utiliser **pour conserver un même niveau de production** ? Le TMST mesure ce rapport de proportionnalité. Construisons-le :

Différencions l'équation de tout Isoquant $Q_0 = f(x_1,x_2)$:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$$

Or, ceci est équivalent à : $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$. Par construction, la pente de la tangente à l'Isoquant en un point considéré mesure les proportions (infinitésimales) dans lesquelles on peut substituer un facteur par un autre et rester à un niveau de production inchangé. Ce terme est le TMST.

$$TMST_{1;2} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$$



Productivité marginale du facteur i :
On définit la Productivité marginale du facteur i (notée Pm_i) comme le surcroît de production induit part un accroissement infinitésimal de la quantité utilisée du facteur i.

$$Pm_i(x_1 ; x_2 ;...; x_n) = \frac{\partial f(x_1 ; x_2 ;...; x_n)}{\partial x_i}$$

La Productivité marginale du facteur i peut être, croissante, décroissante ou constante.

Rendements d'échelle :
On étudie aussi la façon dont le niveau de production s'accroît lorsque l'on accroît simultanément dans les mêmes proportions la quantité utilisée de tous les facteurs. Pour mesurer cela, on examine ce qu'est le résultat de la multiplication de tous les x_i par un même réel $\lambda > 1$:

- Si $f(\lambda x_1 ; \lambda x_2 ; ... ; \lambda x_n) > \lambda \; f(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$, les rendements d'échelle sont croissants
- Si $f(\lambda x_1 ; \lambda x_2 ; ... ; \lambda x_n) = \lambda \; f(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$, les rendements d'échelle sont constants
- Si $f(\lambda x_1 ; \lambda x_2 ; ... ; \lambda x_n) < \lambda \; f(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$, les rendements d'échelle sont décroissants

Optimalité technique : Combinaison optimale des facteurs de production

L'optimalité technique est réalisée lorsque l'on combine de manière optimale les facteurs de production ou inputs. Etant donnée une technologie de production résumée par la fonction de production, la combinaison optimale des inputs est obtenue en minimisant la dépense d'acquisition des facteurs de production sous contrainte d'atteindre un certain niveau d'output.
On fait l'hypothèse que le producteur peut acheter les inputs en quantité illimitée à des prix donnés. Les prix des input $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont respectivement $w_1, w_2, \ldots, w_n$.
Le programme (technique) du producteur est alors :

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Min}} & w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n \\ \text{s.c.} & Q_0 \leq f(x_1; x_2; \ldots; x_n) \end{array}$$

Pour résoudre ce programme, on forme le Lagrangien :

$$L = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n - \lambda[f(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n) - Q_0]$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = w_1 - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = w_2 - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = w_n - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \\ \lambda[f(x_1; x_2; \ldots; x_n) - Q_0] = 0 \end{cases}$$

On obtient la caractérisation suivante de la décision optimale du producteur :

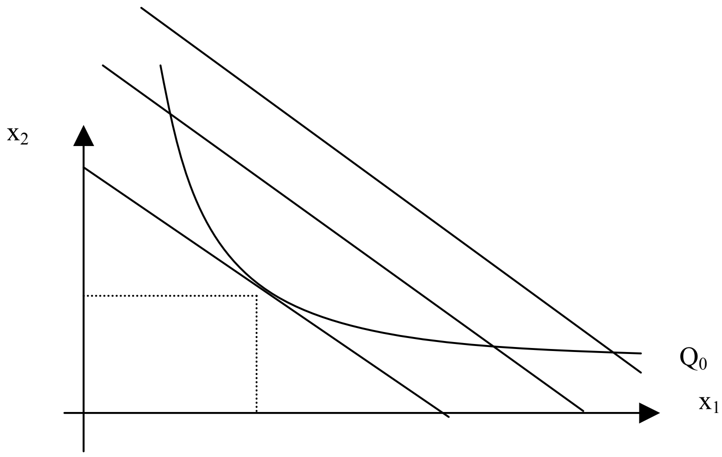
$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}} = \frac{w_i}{w_j}$$

A l'optimum technique, le producteur doit faire coïncider le Taux Marginal de Substitution Technique (TMST) entre toute paire d'inputs et le rapport des prix de ces inputs. On obtient alors des demandes optimales de facteurs notées $xi^*(w_1 ; w_2 ; \ldots ; w_n ; Q_0)$.

Graphiquement (cas de deux facteurs) :

Si l'on note D la dépense d'acquisition des facteurs, on a l'équation : $D = w_1x_1 + w_2x_2$

En réécrivant cette équation comme : $x_2 = \frac{D}{w_2} - \frac{w_1}{w_2}x_1$, on obtient l'équation de toute droite d'isocoût. L'optimum est atteint pour la plus basse droite d'isocoût compatible avec l'Isoquant Q_0.



Fonction de Coût Total :

A partir de ces demandes optimales de facteurs $xi^*(w_1 ; w_2 ; ... ; w_n ; Q_0)$, on va déduire la dépense optimale d'acquisition des facteurs ou Coût Total (miminum) :

$$C(w_1 ; w_2 ; ... ; w_n ; Q_0) = w_1x_1^*(w_1 ; w_2 ; ... ; w_n ; Q_0) + \ldots + w_nx_n^*(w_1 ; w_2 ; ... ; w_n ; Q_0)$$

Au sens strict, cette relation indique seulement le coût (minimum) de production de la quantité Q_0 d'output.

Plus généralement, cette relation indique, pour toute valeur réelle positive de Q, le coût (minimum) de production. Il s'agit d'une relation fonctionnelle complète $C(w_1; w_2 ; ...; w_n; Q)$ qui, lorsque l'on raisonne pour des valeurs fixées des prix des inputs, s'écrit simplement C(Q). Cette fonction est la fonction de Coût Total de la firme.

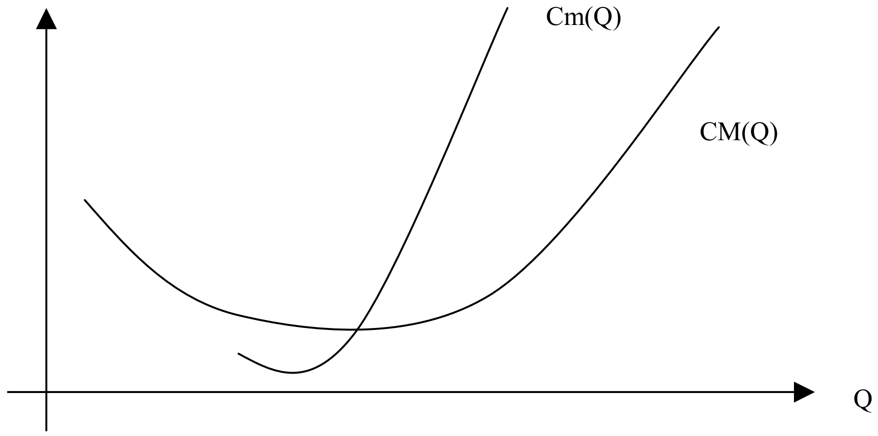
Coût Moyen, Coût marginal :

Connaissant la fonction de Coût Total C(Q), il est possible de déduire les fonctions de Coût Moyen et de Coût marginal :

Le Coût Moyen CM(Q) désigne le coût unitaire de production du bien : $CM(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$

Le Coût marginal Cm(Q) désigne le surcroît de coût induit par la production d'une quantité infinitésimale supplémentaire de bien : $Cm(Q) = \frac{\partial C(Q)}{\partial Q}$

On montre que le Coût marginal passe par le minimum du Coût Moyen.



Optimalité économique en concurrence pure et parfaite

Connaissant la fonction de coût et les conditions auxquelles il est possible de commercialiser le bien ou service, on peut établir la fonction d'offre de la firme. Le cadre d'analyse est le contexte de concurrence pure et parfaite. On suppose que le bien est produit par une multitude de firmes de petite taille. Chaque firme est si petite qu'elle n'a aucune capacité à influencer sur le niveau de prix auquel le bien est vendu : si elle pratique un prix supérieur au prix de marché, elle ne vend rien. On dira qu'elle est « price-taker » (preneuse de prix) par opposition à « price-maker » (faiseuse de prix). Ceci est lié à l'hypothèse d'homogénéité (c'est à dire d'indifférenciation) des biens produits.

L'objectif de toute firme est de maximiser son profit, défini en microéconomie comme la différence entre la Recette Totale et le Coût Total, $\Pi = RT(Q) - C(Q)$.

La condition nécessaire d'optimalité de cette maximisation sans contrainte (relativement à la variable Q) est :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial RT(Q)}{\partial Q} - \frac{\partial C(Q)}{\partial Q} = 0 \Leftrightarrow Rm(Q) - Cm(Q) = 0 \Leftrightarrow Rm(Q) = Cm(Q)$$

où Rm(Q) désigne la Recette marginale, c'est à dire le surcroît de Recette induit par la vente d'une quantité infinitésimale supplémentaire d'output.

La signification de cette condition est la suivante :

. Si Rm(Q) était supérieure à Cm(Q), cela signifierait que « produire plus » rapporterait plus que cela ne coûterait. Il faudrait donc produire plus. Il ne s'agit donc pas de l'optimum.

. Si Rm(Q) était inférieure à Cm(Q), cela signifierait que l'on produit au delà d'un seuil où « produire plus » rapporte plus que cela ne coûte. Dans cette situation, « produire plus » coûte plus que cela ne rapporte. Il faudrait donc produire moins. Il ne s'agit donc pas de l'optimum.

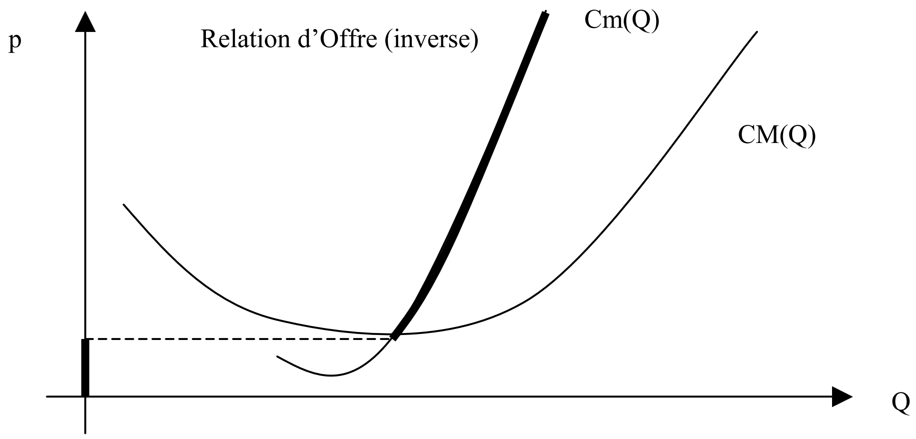
Seule la situation où « produire » plus rapporte autant que ça coûte caractérise l'optimum.

En situation de concurrence pure et parfaite, puisque les firmes sont price-taker, le prix p est une donnée exogène. Ainsi la Recette Totale est simplement :

$$RT(Q) = p \times Q$$

Puisque alors $Rm(Q) = p$, la condition d'optimalité est donc $p = Cm(Q)$. Cette condition est précisément une **relation fonctionnelle entre prix et quantité offerte**. Précisément, la fonction d'offre de la firme sera déterminée à partir de cette relation, sous réserve que le profit réalisé soit positif ou nul.

Or, $\Pi \geq 0 \Leftrightarrow RT(Q) \geq C(Q) \Leftrightarrow \frac{RT(Q)}{Q} \geq \frac{C(Q)}{Q} \Leftrightarrow p \geq CM(Q)$.



A Long Terme, le nombre de firmes présentes sur le marché s'établit de manière à ce que le profit de chaque firme soit nul. L'agrégation des offres individuelles des firmes conduit à la détermination de l'offre globale pour chaque bien.

La configuration de concurrence pure et parfaite est une configuration irréaliste mais elle offre une base de référence pour juger des configurations de concurrence imparfaite. En particulier, la taille négligeable des firmes fait qu'on n'identifie pas d'interaction stratégique entre elles.

Equilibre : Un système est à l'équilibre s'il a atteint une situation de laquelle il ne s'écarte pas.
En économie on définit :
. l'Equilibre (partiel) sur un marché : situation où les quantités offertes et les quantités demandées sur ce marché sont égales.
. l'Equilibre général : Un équilibre dans une économie concurrentielle sera un système de prix tel que, lorsque les agents économiques observent ce système, les actions qu'ils décident sont optimales pour eux et compatibles entre elles, c'est à dire :
- chaque entreprise choisit son plan de production pour maximiser son profit aux prix existants,
- chaque ménage choisit le plan de consommation qui maximise son utilité sous contrainte budgétaire,
- l'état de l'économie ainsi obtenu est réalisable, c'est à dire que l'offre est égale à la demande sur chaque marché.

Optimum : Une allocation est optimale (au sens de Pareto) si aucun individu ne peut accroître sa satisfaction sans détériorer celle d'un autre au moins.
L'optimum est une notion d'efficacité économique et non une notion d'équité ou de justice. L'efficacité est un critère objectif au sens où n'importe quel observateur conviendra du caractère optimal d'une allocation. En revanche, il n'existe aucun critère d'équité universel : ce qui paraît équitable à un observateur pourra paraître inique à un autre. L'économiste peut néanmoins se préoccuper de questions d'équité, mais il doit au préalable définir le critère de justice qu'il retient, en ayant conscience du caractère arbitraire de ce choix.